

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Campi magnetici in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Gabriel Maranò

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa

Anno accademico 2024–2025

Abstract

I campi magnetici sono presenti in tutti gli ambienti astrofisici, dal mezzo interstellare agli ammassi di galassie, influenzandone profondamente la fisica e l'evoluzione. Sebbene la loro misura diretta sia confinata a scale cosmicamente trascurabili, è possibile studiare le proprietà di tali campi attraverso gli effetti esercitati sulla propagazione e sull'emissione della radiazione degli oggetti celesti; la comprensione dei meccanismi che ne determinano le caratteristiche deriva da un'attenta analisi del mezzo in cui sono immersi: le temperature estremamente elevate che identificano gli ambienti astrofisici portano la materia a trovarsi in uno stato ionizzato, il plasma, la cui dinamica definisce il comportamento dei campi magnetici su tutte le scale.

Il presente elaborato si propone di fornire una panoramica in merito ai principali metodi osservativi volti alla rilevazione dei campi magnetici astrofisici, applicandoli allo studio di un caso concreto. Si introduce preliminarmente il quadro teorico dei plasmi magnetizzati nel contesto della magnetoidrodinamica (MHD), discutendo i regimi di diffusione e congelamento che governano l'evoluzione dei campi. Su queste basi vengono presentati i principali strumenti osservativi, tra cui la radiazione di sincrotrone, l'emissione polarizzata della polvere, l'effetto Zeeman, la misura di dispersione e la rotazione di Faraday. L'attenzione si concentra infine sull'ammasso della Chioma (Coma cluster, $z = 0.023$) come caso di studio: il campo magnetico stimato tramite l'ipotesi di minima energia applicata all'alone radio Coma C viene confrontato con quello derivato dall'analisi della rotazione di Faraday, mostrando un buon accordo tra i due metodi indipendenti.

Indice

1	Introduzione ai campi magnetici astrofisici	1
1.1	Proprietà dei plasmi magnetizzati	1
1.2	Equazioni di Maxwell in MHD	2
1.2.1	Regimi di evoluzione del campo magnetico	4
1.3	Moto di una particella carica in un campo magnetico	4
2	Metodi di rilevazione dei campi magnetici	5
2.1	Radiazione di sincrotrone	5
2.1.1	Dal ciclotrone al sincrotrone (<i>singolo evento</i>)	5
2.1.2	Emissione di un gas di elettroni ultra-relativistici	7
2.2	Emissione polarizzata della polvere	8
2.3	Effetto Zeeman	9
2.4	Propagazione delle onde elettromagnetiche nei plasmi magnetizzati	11
2.4.1	Misura di dispersione	11
2.4.2	Rotazione di Faraday	11
3	Campi magnetici negli ammassi di galassie	13
3.1	Introduzione	13
3.2	Campi magnetici nell'ammasso della Chioma: rotazione di Faraday ed equipartizione	13
A	Derivazione del campo magnetico di equipartizione	16

Capitolo 1

Introduzione ai campi magnetici astrofisici

1.1 Proprietà dei plasmi magnetizzati

Le temperature caratteristiche della maggioranza dei fluidi astrofisici sono sufficientemente elevate da rendere l'energia cinetica media delle particelle comparabile o superiore al potenziale di ionizzazione degli elementi più abbondanti: la materia si trova pertanto in uno stato ionizzato. Elettroni e ioni non risultano più legati in configurazioni atomiche neutre, bensì costituiscono un plasma, formalmente definito dalle seguenti proprietà

- le velocità caratteristiche del fluido sono non relativistiche ($v \ll c$);
- la fisica è dominata dalle collisioni;
- a differenza dei conduttori ordinari, in un plasma, la conduttività elettrica σ dipende unicamente dalla temperatura e non dalla densità elettronica $\sigma \propto T^{3/2}$. Per temperature astrofisiche i valori risultanti sono sufficientemente grandi da rendere valida l'approssimazione $\sigma \rightarrow \infty$;
- il plasma può essere trattato come un fluido ideale se la dimensione lineare caratteristica del fenomeno considerato supera la *lunghezza di schermo di Debye*¹ ($l_D \ll$ rispetto alle scale caratteristiche dei fenomeni astrofisici). Le densità di carica positiva e negativa del plasma quasi si cancellano: questa proprietà è detta *neutralità di carica*²;

Esempio: Si consideri il Sole, che contiene approssimativamente $N_e \sim 10^{57}$ elettroni (aventi carica $q = e$) e un numero analogo di ioni positivi. Se vi fosse uno sbilanciamento di carica, ad esempio $N = N_e - N_i \sim 10^{48}$, e se tali cariche si muovessero coerentemente nella stessa direzione con velocità termica $v \sim 10^9$ cm s⁻¹ (corrispondente a $T \sim 10^6$ K ≈ 100 eV), la corrente risultante sarebbe $I = Nv/c \sim 3 \times 10^{46}$ statA (con $c = 3 \times 10^{10}$ cm s⁻¹) e il campo magnetico su scala solare $R_\odot \sim 7 \times 10^{10}$ cm sarebbe dell'ordine di $B \sim 2I/(cR_\odot) \sim 10^{16}$ G. Tuttavia, le osservazioni mostrano campi magnetici di intensità estremamente inferiori, confermando come i plasmi astrofisici

¹ $l_D = (k_B T / n_e e^2)^{1/2}$ con k_B costante di Boltzmann, n_e densità numerica degli elettroni.

²Ciascuna densità di carica separata risulta così elevata da rendere tale cancellazione necessaria. Se così non fosse, i campi elettrici generati porterebbero a moti rapidissimi degli elettroni che cortocircuiterebbero immediatamente questi campi, ristabilendo il bilancio quasi neutro.

mantengano un elevato grado di neutralità di carica e isotropia statistica nei moti delle particelle.

	T [K]	σ [s⁻¹]	B [G]
Corona Solare	10 ⁶	10 ¹⁶	10 ⁵
Regioni HII	10 ⁴	10 ¹³	10 ⁻⁵
ISM	10 ²	10 ¹¹	10 ⁻⁶
IGM	10 ⁸	10 ¹⁹	10 ⁻⁷

Tabella 1.1: Valori tipici di temperatura, conduttività elettrica e campo magnetico.

1.2 Equazioni di Maxwell in MHD

Per descrivere il comportamento del campo magnetico all'interno di un plasma ci si avvale delle equazioni di Maxwell, valide in ogni sistema di riferimento inerziale indipendentemente dal fatto che il fluido sia o non sia in movimento

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1a) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \quad (1.1b) \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.2b)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1c) \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1d) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2d)$$

Equazioni di Maxwell nel vuoto

Equazioni di Maxwell nel plasma

Le equazioni di Maxwell in un plasma (1.2) derivano dall'applicazione dei limiti di plasma globalmente neutro discussi nella sezione 1.1. Combinando la *legge di conservazione della carica*³ (ricavata calcolando la divergenza della (1.1c) unita alla (1.1b)), con la *legge di Ohm*⁴, si dimostra come qualsiasi disomogeneità locale nella distribuzione di carica venga neutralizzata su una scala temporale $\tau = 1/(4\pi\sigma)$, seguendo un decadimento esponenziale $\rho_e = \rho_0 e^{-t/\tau}$. Per le conduttività tipiche dei plasmi astrofisici, considerati conduttori perfetti, τ risulta estremamente piccolo, confermando come il plasma raggiunga quasi istantaneamente la neutralità di carica.

Un'ulteriore conseguenza diretta di $\sigma \rightarrow \infty$ è la trascurabilità delle variazioni temporali del campo elettrico rispetto alla corrente di conduzione (1.1c), portando alla condizione $\frac{4\pi}{c} |\vec{j}| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|$.

Ora si hanno tutti gli strumenti per formulare un'unica relazione che riassume le equazioni di Maxwell in MHD in funzione della sola variabile \vec{B}

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B}} \quad (1.3)$$

L'equazione descrive l'evoluzione temporale del campo magnetico come risultato della sovrapposizione di due contributi distinti: il termine convettivo $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$ tende a

³ $\dot{\rho}_e = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e \vec{u})$
⁴ $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

trascinare e deformare le linee di campo insieme al moto del fluido, e il termine diffusivo $c^2/(4\pi\sigma)\nabla^2\vec{B}$ tende invece a uniformare il campo, dissipando le irregolarità spaziali. Il regime fisico dominante è determinato dal *numero di Reynolds magnetico* che misura l'importanza relativa dei due processi

$$R_m = \frac{4\pi\sigma v L^5}{c^2} \quad (1.4)$$

Lavorando per ordini di grandezza possiamo distinguere due casi limite.

a) *Fluido fermo: diffusione del campo magnetico* ($R_m \ll 1$)

Se il fluido è fermo ($v = 0$), allora la (1.3) si riduce ad un'equazione di diffusione

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)\nabla^2\vec{B} \approx -\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\vec{B}}{L^2} = -\eta_m\frac{\vec{B}}{L^2} \quad (1.5)$$

che ha come soluzione $\vec{B} \propto \vec{B}_0 e^{-t/\tau}$, dove $\tau = 4\pi\sigma L^2/c^2 = L^2/\eta_m$ è il tempo caratteristico di diffusione del campo magnetico, ovvero la scala temporale su cui esso decade e si uniforma nell'ambiente circostante.

b) *Fluido in movimento: Congelamento del campo magnetico* ($R_m \gg 1$)

Se il plasma ha velocità non nulla ($v \neq 0$), e conducibilità infinita (in condizioni astrofisiche questo è sempre possibile) l'equazione (1.3) si riduce a

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.6)$$

Considerando la variazione nel tempo del flusso di \vec{B} attraverso una superficie, si dimostra

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.7)$$

In un mezzo perfettamente conduttivo, il campo magnetico risulta congelato nel plasma: analogamente alla vorticità in un fluido non viscoso, le linee di campo sono indissolubilmente legate alle particelle che lo compongono, seguendone il moto nel tempo. La materia non può attraversare le linee di campo ma può unicamente stirarle e piegarle, modificandone la geometria. Se il tubo di flusso viene stirato, la sua sezione δA diminuisce e, per la conservazione del flusso, B aumenta; al contrario, un aumento di sezione implica una diminuzione dell'intensità del campo.

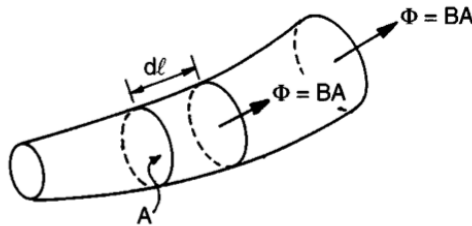


Figura 1.1: Stiramento di un tubo di flusso (Fonte: (5)).

⁵ $R_m = (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})) / (\eta_m \nabla^2 \vec{B}) \sim Lv / \eta_m = (4\pi\sigma / c^2) Lv$, con $\eta_m = c^2 / (4\pi\sigma)$ viscosità magnetica.

1.2.1 Regimi di evoluzione del campo magnetico

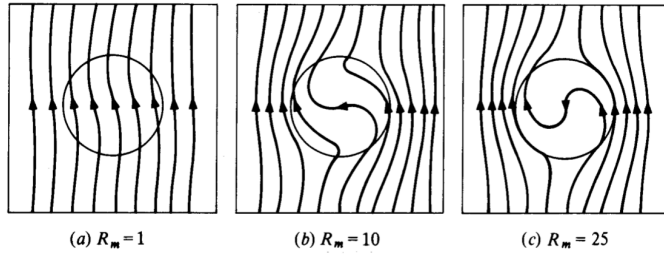


Figura 1.2: Distorsione ed espulsione del campo magnetico indotte dalla rotazione differenziale (Fonte: (6))

La figura 1.2 illustra efficacemente la competizione tra convezione e diffusione al variare di R_m . Per $R_m \lesssim 1$ la diffusione domina e il campo penetra liberamente nel fluido, subendo solo lievi distorsioni. All'aumentare di R_m la rotazione differenziale del fluido trascina e avvolge progressivamente le linee di campo, aumentandone la distorsione. Per valori elevati di R_m , la combinazione tra l'avvolgimento delle linee di campo e la diffusione trasversale produce un effetto opposto a quello atteso: anziché restare congelato nel fluido, il campo magnetico viene gradualmente espulso dalla regione in rotazione verso l'esterno, un fenomeno noto come *flux expulsion*⁶.

1.3 Moto di una particella carica in un campo magnetico

Una particella di carica q e massa m , in moto con velocità \vec{v} in un campo magnetico uniforme \vec{B} , risentirà della forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$.

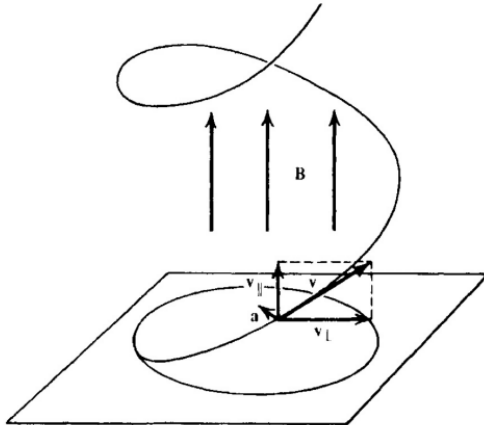


Figura 1.3: Dinamica di una particella in un campo magnetico uniforme (Fonte: (7)).

Definendo l'equazione del moto della carica $d\vec{p}/dt = q\vec{v} \times \vec{B}$ possiamo descrivere la sua traiettoria come la combinazione di due contributi, dati dalle due componenti del vettore velocità: $d/dt(m\vec{v}_{\parallel}) = 0$ e $d/dt(m\vec{v}_{\perp}) = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$. La prima relazione rappresenta un moto uniforme lungo le linee di campo magnetico, la seconda un moto circolare avente raggio di curvatura $r_L = mc v_{\perp} / (qB)$ (raggio di Larmor) e girofrequenza $\nu_L = qB / (2\pi mc)$. Soggette alla forza di Lorentz, le cariche percorrono traiettorie elicoidali attorno alle linee di forza, emettendo radiazione per effetto dell'accelerazione centripeta.

⁶Per una trattazione estesa e matematicamente puntuale dell'argomento si rimanda a (5) e (6).

Capitolo 2

Metodi di rilevazione dei campi magnetici

2.1 Radiazione di sincrotrone

La radiazione di sincrotrone rappresenta lo strumento fondamentale per lo studio dei campi magnetici nell'ISM (Interstellar Medium) e IGM (Intergalactic Medium) nel dominio radio. Le particelle cariche che si muovono all'interno di un plasma magnetizzato emetteranno radiazione, le cui caratteristiche dipenderanno direttamente dall'intensità del campo magnetico locale, dal regime di velocità della carica, dalla *massa*¹ della stessa, e dal grado di polarizzazione lineare; quest'ultimo consente di determinare la componente del campo magnetico perpendicolare alla linea di vista dell'osservatore (LOS), permettendo così di ricostruirne la struttura nelle radiosorgenti.

2.1.1 Dal ciclotrone al sincrotrone (*singolo evento*)

Il regime di velocità delle particelle cariche determina la natura dell'emissione: si parla di radiazione di ciclotrone in ambito non relativistico o moderatamente relativistico, e di radiazione di sincrotrone in quello ultra-relativistico.

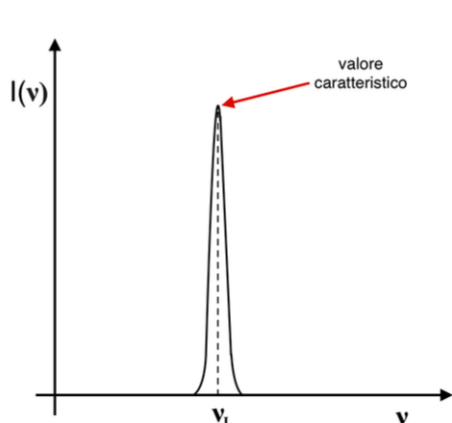


Figura 2.1: Emissione di ciclotrone non relativistico (Fonte: (2)).

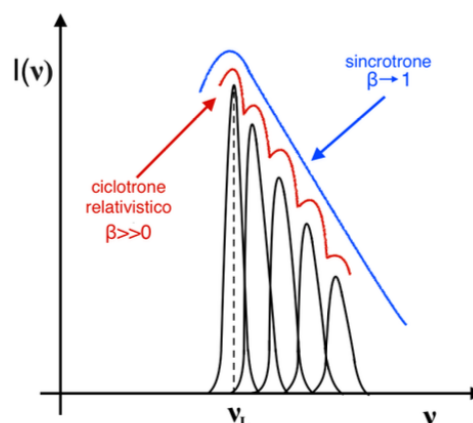


Figura 2.2: Emissione di ciclotrone relativistico e di sincrotrone (Fonte: (2)).

¹La perdita radiativa è inversamente proporzionale alla massa della particella.

Ciclotrone non relativistico. La carica q in moto in un campo magnetico, essendo soggetta ad una accelerazione centripeta, irradierà con una distribuzione angolare della radiazione che va come $\sin^2(\theta)$, dove θ (*angolo di pitch*) è l'angolo tra il vettore accelerazione e la linea di vista dell'osservatore, con una potenza

$$P = \frac{2q^4}{3m^2c^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 B^2 \sin^2(\theta) = \frac{2q^4}{3m^2c^3} \beta^2 B^2 \sin^2(\theta) \quad (2.1)$$

e una singola frequenza a cui avviene l'emissione, ovvero la frequenza di girazione ν_L .

Ciclotrone relativistico. Quando l'energia $\gamma m_0 c^2$ dell'elettrone è relativistica ($\gamma^2 \gg 1$), la girofrequenza diminuisce (poiché la massa efficace aumenta) diventando $\nu_{\text{rel}} = \nu_L/\gamma$, non più indipendente dall'energia. L'emissione non avviene più ad un'unica frequenza poiché compaiono effetti di aberrazione relativistica che distorcono la distribuzione angolare della radiazione; il diagramma polare osservato si può scomporre con un'analisi di Fourier in una somma di dipoli equivalenti che irradiano ad armoniche di ν_{rel} , le cui energie sono legate da $[dW/dt]_{k+1} \approx \beta^2 [dW/dt]_k$, dove

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2q^4}{3m^2c^3} \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2(\theta) \quad (2.2)$$

Sincrotrone.



Figura 2.3: Beaming relativistico su una carica sottoposta ad accelerazione centripeta (Fonte: (7)).

Quando $\beta \sim 1$ le armoniche sono infinitesimamente vicine formando un continuo (Figura 2.2) e l'aberrazione relativistica modifica l'angolo sotto cui viene emessa la radiazione, isotropa nel riferimento della particella ma non più isotropa per un osservatore esterno. Per ottenere la distribuzione della radiazione nel sistema dell'osservatore occorre eseguire una trasformazione di angoli fra i due sistemi utilizzando la formula relativistica per la aberrazione della luce $\tan(\alpha) = \sqrt{1 - \beta^2}/\beta \approx 1/\gamma \approx \alpha$.

Metà della radiazione viene concentrata in un cono di semiampiezza $\approx 1/\gamma$, che ha per asse la direzione istantanea della velocità, mentre l'altra metà è diluita su un angolo solido di $\sim 4\pi$ ster (Figura 2.3). Poiché l'elettrone percorre la sua orbita, un osservatore fisso osserva una sequenza di segnali impulsivi (di durata $\Delta\tau \sim 5 \cdot 10^{-8}/(\gamma^2 B [\text{G}])$ sec) solo negli istanti in cui la LOS si trova all'interno del cono di beaming.

Il calcolo analitico completo³ fornisce lo spettro di potenza della radiazione emessa da un singolo elettrone in termini del parametro x ($x = \nu/\nu_s$, con $\nu_s \simeq 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 B [\mu\text{G}]$ GHz, frequenza caratteristica)

$$P(\nu) d\nu = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin \theta}{mc^2} F(x) d\nu \quad \text{con} \quad F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

dove $F(x)$, che contiene la forma dello spettro, coinvolge un integrale di una funzione di Bessel modificata di ordine $5/3$.

²fattore di Lorentz, $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$

³Per una trattazione estesa e matematicamente puntuale dell'argomento si rimanda a (2)

2.1.2 Emissione di un gas di elettroni ultra-relativistici

La distribuzione in energia dei raggi cosmici, così come quella degli elettroni responsabili dell'emissione nelle sorgenti di sincrotrone (sorgenti non termiche) segue la legge di potenza $N(\varepsilon)d\varepsilon = N_0\varepsilon^{-\delta}d\varepsilon$; utilizzando l'equazione (2.3) troviamo l'emissività specifica dell'intera popolazione

$$J_s(\nu) d\nu = \frac{dW_s(\nu, \varepsilon)}{dt} N(\varepsilon) d\varepsilon \approx N_0 F(x) \varepsilon^{-\delta} d\varepsilon \quad (2.4)$$

assumendo che il singolo elettrone emetta la propria energia alla frequenza ν_s , si ottiene lo spettro a legge di potenza per la sorgente sincrotronica

$$J_s(\nu) \sim N_0 B^{(\delta+1)/2} \nu^{-(\delta-1)/2} = N_0 B^{\alpha+1} \nu^{-\alpha} \quad (2.5)$$

con *indice spettrale* α che esprime la pendenza della distribuzione in un grafico $\log \nu - \log J_s(\nu)$. Solitamente le grandi sorgenti presentano solo lo spettro a legge di potenza (2.5), in cui la radiazione prodotta da un gas di elettroni relativistici viene descritta come la somma dei contributi dei singoli elettroni. In altre parole si assume che la sorgente di sincrotrone sia trasparente alla sua stessa radiazione (otticamente sottile). Sorgenti più piccole e compatte, presentano invece il fenomeno di *autoassorbimento*⁴ che ne modifica lo spettro alle basse frequenze.

Polarizzazione. La radiazione di sincrotrone emessa da una popolazione di elettroni relativistici in un campo magnetico uniforme risulta parzialmente polarizzata linearmente. Il primo punto da notare è che l'emissione di una singola carica sarà polarizzata ellitticamente, con il verso della polarizzazione (destrorso o sinistrorso) determinato dal fatto che la LOS si trovi appena all'interno oppure appena all'esterno del cono di massima emissione (figura 2.3). Tuttavia, per qualsiasi distribuzione realistica di particelle che vari in modo regolare con l'angolo di pitch, la componente ellittica si annulla, poiché i coni di emissione contribuiscono in egual misura da entrambi i lati della linea di vista. Dunque nel caso otticamente sottile il grado di polarizzazione lineare della radiazione osservata può essere descritto dalle potenze per unità di frequenza P_{\parallel} e P_{\perp} , rispettivamente nelle direzioni parallela e perpendicolare alla proiezione del campo magnetico sul piano del cielo

$$\Pi = \frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{P_{\perp} + P_{\parallel}} = \frac{\delta + 1}{\delta + 7/3} \quad (2.6)$$

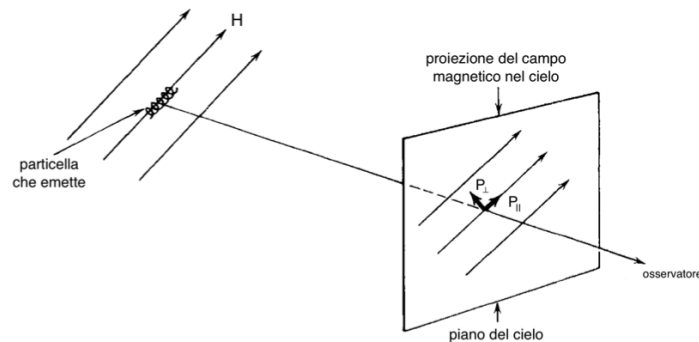


Figura 2.4: Decomposizione sul piano del cielo dei vettori di polarizzazione (Fonte: (7)).

⁴Per una trattazione estesa e matematicamente puntuale dell'argomento si rimanda a (2) e (3).

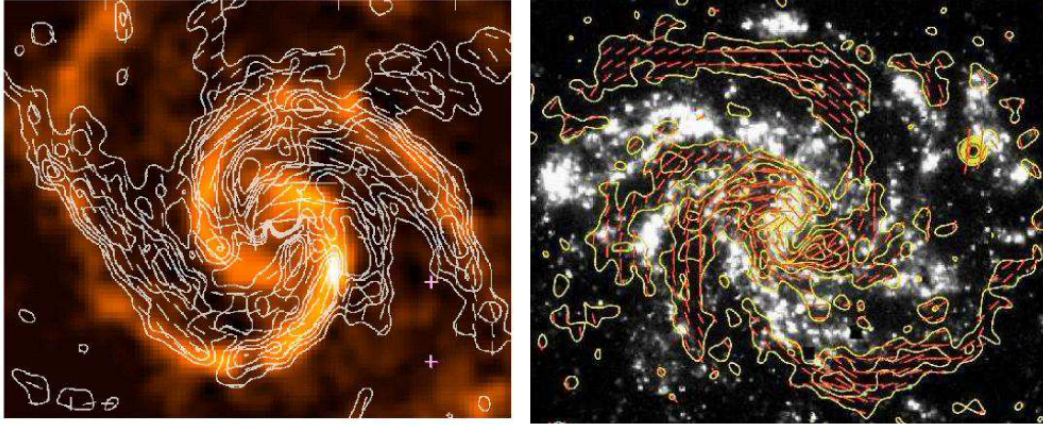


Figura 2.5: Mappe radio polarizzate di due galassie a spirale. *Sinistra*: Intensità radio polarizzata e vettori del campo magnetico B nella regione centrale di M 51. *Destra*: Intensità radio polarizzata e vettori del campo magnetico B nella regione centrale di NGC 6946. I vettori mostrano l'orientamento della componente del campo magnetico perpendicolare alla linea di vista, B_{\perp} , tracciata tramite la polarizzazione della radiazione di sincrotrone.(Fonte: (9)).

2.2 Emissione polarizzata della polvere

Un metodo per risalire all'orientamento del campo magnetico nell'ISM è lo studio della polarizzazione della luce stellare (non polarizzata), prodotta dall'estinzione selettiva operata dai granelli di polvere interstellare non sferici, i quali risultano sistematicamente allineati con il loro asse minore al campo magnetico locale.

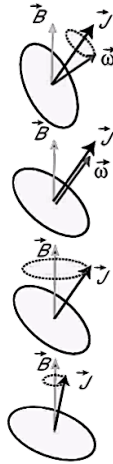


Figura 2.6: Modello di allineamento (Fonte: (11)).

Il meccanismo di allineamento è strettamente legato alla rotazione: un granello in rotazione con carica netta $Q \neq 0$ (la quale tende a risiedere sulla superficie) genera per effetto della rotazione stessa una corrente elettrica che produce un momento magnetico di dipolo. Per un granello sferico di raggio a , con densità superficiale di carica uniforme e velocità angolare $\vec{\omega}$, tale momento magnetico vale

$$\vec{\mu} = \frac{Qa^2}{3} \vec{\omega} \quad (2.7)$$

In presenza di un campo magnetico statico, questo momento induce la precessione del momento angolare \vec{J} attorno ad \vec{B} .

Tuttavia, l'*effetto Barnett*⁵ risulta essere il meccanismo dominante nella precessione del granello attorno al campo magnetico locale: un corpo in rotazione si magnetizza spontaneamente con una magnetizzazione proporzionale alla propria velocità angolare. In un corpo a riposo gli elettroni spaiati sono equamente distribuiti tra i due stati di spin (\uparrow e \downarrow), senza produrre alcuna magnetizzazione netta; la rotazione del grano altera questa simmetria.

Poiché il sistema tende a minimizzare la propria energia totale, gli elettroni occupano preferenzialmente lo stato di spin con momento angolare parallelo a $\vec{\omega}$, producendo uno squilibrio tra le popolazioni dei due stati di spin e quindi una magnetizzazione netta antiparallela a $\vec{\omega}$.

⁵Per una trattazione estesa e matematicamente puntuale dell'argomento si rimanda a (10).

Alla luce di quanto precede, i granelli di polvere interposti tra le stelle e l'osservatore polarizzano la luce incidente per estinzione selettiva: la polarizzazione osservata è il risultato cumulativo dell'intera colonna di granelli presente lungo la linea di vista, come confermato dalla sua crescita sistematica con la distanza della sorgente, che ne attribuisce inequivocabilmente l'origine all'ISM, e non alla sorgente stessa. Poiché i granelli attenuano preferenzialmente la componente di luce con il vettore campo elettrico \vec{E} parallelo all'asse maggiore, trasmettono con minore attenuazione la componente polarizzata parallelamente all'asse minore; considerato che è proprio l'asse minore dei grani ad allinearsi con le linee di campo magnetico, la polarizzazione lineare netta risultante presenta $\vec{E} \parallel \vec{B}$, cosicché la direzione del vettore di polarizzazione fornisca direttamente l'orientamento del campo magnetico locale. La presenza di orientazioni diverse del campo magnetico a differenti distanze può causare *depolarizzazione*, ovvero una riduzione del grado di polarizzazione rispetto a quello atteso nel caso di campo perfettamente uniforme.

I granelli di polvere allineati, con temperature comprese tra le decine e le centinaia di Kelvin, emettono inoltre radiazione termica polarizzata nel millimetrico, sub-millimetrico e nel lontano infrarosso. A differenza del meccanismo di estinzione descritto in precedenza, la radiazione termica risultante è polarizzata linearmente con \vec{E} parallelo all'asse maggiore dei granelli, fornendo un orientamento della polarizzazione osservata perpendicolare a B_{\perp} . Il grado di polarizzazione previsto è tipicamente di un ordine di grandezza inferiore al 10%.

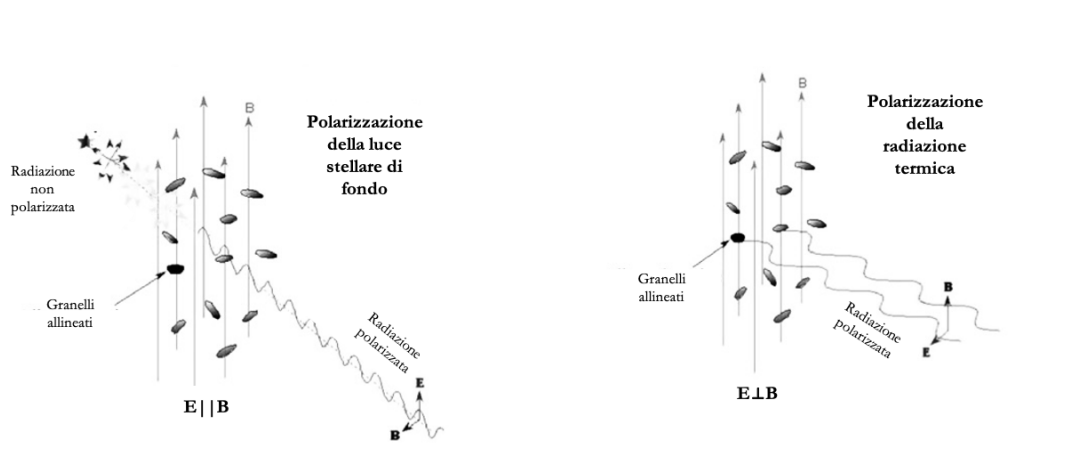


Figura 2.7: *Sinistra*: Luce stellare non polarizzata che attraversa una nube di grani di polvere allineati. *Destra*: Polarizzazione della radiazione termica proveniente da una regione otticamente sottile composta da grani di polvere allineati (Fonte: (10)).

2.3 Effetto Zeeman

Uno degli strumenti di cui disponiamo per misurare l'intensità e l'orientazione del campo magnetico è l'osservazione dell'*effetto Zeeman* negli spettri di atomi o molecole.

Per un atomo idrogenoide, ogni livello energetico E_n (caratterizzato dal solo numero quantico principale n) è $2n^2$ volte degenerare in corrispondenza dei possibili valori assunti dai numeri quantici orbitale l , magnetico m e di spin m_s . Questa degenerazione può essere parzialmente rimossa considerando correzioni energetiche di struttura *fine* e *iper-*

*fine*⁶, che suddividono i livelli E_n in sottolivelli distinti dalle diverse combinazioni degli altri numeri quantici. La presenza di un campo magnetico esterno introduce un'ulteriore rimozione della degenerazione residua, fornendoci ancora come conseguenza osservativa una separazione delle righe spettrali in multipletti: in certi casi, la combinazione di questi effetti può risolvere completamente la degenerazione.

Il regime di effetto Zeeman dipende dall'intensità relativa tra il campo magnetico esterno B_{ext} , e il campo interno all'atomo B_{int} generato dal moto orbitale dell'elettrone attorno al nucleo.

- a) $B_{\text{int}} \gg B_{\text{ext}}$ (*effetto Zeeman anomalo*): il campo esterno viene trattato come una perturbazione alla struttura fine dell'atomo, fornendo una correzione ai livelli energetici

$$E' = g\mu_B B m_j \quad (2.8)$$

Il singolo livello energetico si suddivide quindi in tante componenti quanti sono i valori assunti da m_j .

- b) $B_{\text{ext}} \gg B_{\text{int}}$ (*effetto Zeeman normale*): il campo interno è trascurabile e la correzione ai livelli energetici dipende dalla combinazione di m e m_s

$$E' = \mu_B B (m + 2m_s) \quad (2.9)$$

Le componenti σ , corrispondenti a transizioni con $\Delta m = \pm 1$, risultano polarizzate circolarmente se osservate lungo la direzione del campo magnetico, e linearmente se osservate perpendicolarmente ad esso. La componente centrale π corrispondente a $\Delta m = 0$ risulta sempre polarizzata linearmente alla frequenza imperturbata ν_0 .

La separazione in frequenza tra le componenti σ e π consente di misurare direttamente l'intensità del campo magnetico

$$\Delta\nu = \pm g \frac{eB}{4\pi m_e c} \quad (2.10)$$

Le proprietà di polarizzazione del multipletto permettono, in linea di principio, di ricavare l'orientamento completo del campo. La componente trasversa B_{\perp} , nel piano del cielo perpendicolare alla LOS, si determina dall'angolo di polarizzazione lineare della componente π . La componente parallela B_{\parallel} , lungo la LOS, si ricava invece dalla polarizzazione circolare delle componenti σ : B_{\parallel} punta verso l'osservatore quando la componente σ a frequenza maggiore è destrorsa e quella a frequenza minore sinistrorsa; qualora le polarizzazioni risultino invertite, anche il verso del campo si inverte.

È importante notare come nel caso di righe di assorbimento, prodotte da una nube magnetizzata posta davanti a una sorgente di continuo, la polarizzazione circolare di ciascuna componente σ risulti opposta rispetto al caso delle righe in emissione.

Nella pratica osservativa la misura diretta dell'effetto Zeeman nell'ISM esteso risulta estremamente difficile, considerato che lo splitting $\Delta\nu$ prodotto dai deboli campi magnetici interstellari appare di molto inferiore se comparato alla larghezza intrinseca della riga $\delta\nu$, dominata dall'allargamento Doppler di origine termica e turbolenta.

⁶Per una trattazione estesa e matematicamente puntuale dell'argomento si rimanda a (12).

⁷ $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: momento angolare totale. $\mu_B := \frac{e\hbar}{2m_e c}$ magnetone di Bohr; $g = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$ fattore di Landé.

2.4 Propagazione delle onde elettromagnetiche nei plasmi magnetizzati

Sulla base delle proprietà dei plasmi magnetizzati discusse nel capitolo 1, è possibile analizzare come queste influenzino la propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo interstellare, che verranno ora analizzate in dettaglio.

2.4.1 Misura di dispersione

Affinché si possano studiare le proprietà di propagazione di un'onda in un plasma è necessario introdurre preliminarmente due grandezze fondamentali: la *frequenza di plasma* e l'*indice di rifrazione*

$$\nu_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\pi m_e}} \simeq 10^4 n_e^{1/2} \quad n_r = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2} \quad (2.11)$$

ν_p definisce una specie di frequenza di taglio del plasma, al di sotto della quale non si ha propagazione della luce, ma riflessione totale. Poiché le frequenze tipiche della radioastronomia sono sempre superiori alla frequenza di plasma del mezzo interstellare ($\nu \gg \nu_p$), le onde elettromagnetiche si propagano nel plasma con una velocità detta *velocità di gruppo*, definita come

$$v_{gr} = c n_r = c \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2} \stackrel{\nu \gg \nu_p}{\approx} c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right] \quad (2.12)$$

Il tempo $T_{A,B}(\nu)$ che l'onda impiega ad attraversare una distanza L è dato da

$$T_{A,B}(\nu) = \int_0^L \frac{dl}{v_{gr}} \approx \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \left(\frac{e^2}{\pi m_e \nu^2}\right) \int_0^L n_e dl \quad (2.13)$$

dove il primo termine rappresenta il tempo di transito nel vuoto, il secondo termine il fattore correttivo per il plasma, dove le caratteristiche fisiche del mezzo sono espresse dalla *misura di dispersione* D.M. = $\int_0^L n_e dl$. Il ritardo temporale di un segnale osservato a due frequenze diverse, ν_1 e ν_2 viene espresso dall'equazione

$$\Delta T_{\nu_1-\nu_2} = \frac{\text{D.M.}}{2c} \frac{e^2}{\pi m_e} \left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2}\right) \quad (2.14)$$

da cui è possibile determinare D.M.: le sole sorgenti aventi caratteristiche che si prestino a questa misura sono le pulsar, i cui impulsi cortissimi, ben riconoscibili ed adatti alla misurazione di ΔT .

2.4.2 Rotazione di Faraday

Un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente può essere espressa come sovrapposizione di due onde polarizzate circolarmente, i cui vettori campo elettrico ruotano rispettivamente in senso orario e antiorario, dette polarizzazione circolare destra (RCP) e sinistra (LCP). Quando un'onda linearmente polarizzata (avente $\nu > \nu_p$) si propaga in un plasma magnetizzato, il piano di polarizzazione non rimane costante, ma ruota progressivamente lungo la direzione di avanzamento; ciò accade in quanto il campo

magnetico non è isotropo rispetto alla propagazione delle onde, definendo una direzione privilegiata nel mezzo.

Considerando un'onda con frequenza angolare $\omega = 2\pi\nu$, la relazione di dispersione per onde a polarizzazione circolare viene descritta da

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 \pm \frac{\omega_B}{\omega}} \quad (2.15)$$

dove $\omega_p = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}\right)^{1/2}$ è la *frequenza di plasma* e $\omega_B = \frac{eB_{\parallel}}{m_e c}$ la *frequenza di ciclotrone*, calcolata per la componente del campo magnetico parallela alla direzione di propagazione. Definendo la *velocità di fase* $v_{\text{ph}} = \omega/k = c/n_r$, possiamo riscriverla con l'ausilio della (2.15) come

$$v_{\text{ph}}(\omega) \equiv \frac{\omega}{k(\omega)} \approx c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mp \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \omega_B}{\omega^3} \right] \quad (2.16)$$

dove il segno +/- si riferisce rispettivamente alla RCP/LCP, le quali differiscono per velocità di fase e per numero d'onda k

$$v_{\text{ph},L} - v_{\text{ph},R} = c \frac{\omega_p^2 \omega_B}{\omega^3} = \frac{4\pi e^3 n_e B_{\parallel}}{m_e^2 \omega^3} \quad (2.17)$$

$$\Delta k \equiv k_R - k_L = \frac{\omega \omega_p^2 \omega_B}{c \omega^3} = \frac{4\pi e^3 n_e B_{\parallel}}{m_e^2 c^2 \omega^2} \quad (2.18)$$

Abbiamo dunque mostrato come in un plasma magnetizzato i due modi circolari abbiano velocità di fase differenti, e come conseguenza, dopo aver percorso una distanza L , le due onde differiranno in fase di una quantità $L\Delta k$. La polarizzazione lineare ottenuta dalla ricombinazione delle due onde risulterà ruotata rispetto alla polarizzazione lineare sorgente di un angolo di rotazione

$$\phi = \frac{1}{2} \int_0^L \Delta k dl = \int_0^L \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2c\omega^2} dl = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^2 \nu^2} \int_0^L n_e B_{\parallel} dl = R.M. \lambda^2 \quad (2.19)$$

dove R.M. definisce la *misura di rotazione*.

Misura del campo magnetico. Si osservi infine che se di una nube di plasma si conosce la D.M. da misure sulle pulsar, e la R.M. da misure di polarizzazione (la radiazione delle pulsar è di sincrotrone), il rapporto fra le due permette di ottenere il valore medio della componente del campo magnetico lungo la linea di vista

$$\langle B_{\parallel} \rangle \propto \frac{R.M.}{D.M.} \propto \frac{\int n_e B_{\parallel} dl}{\int n_e dl} \quad (2.20)$$

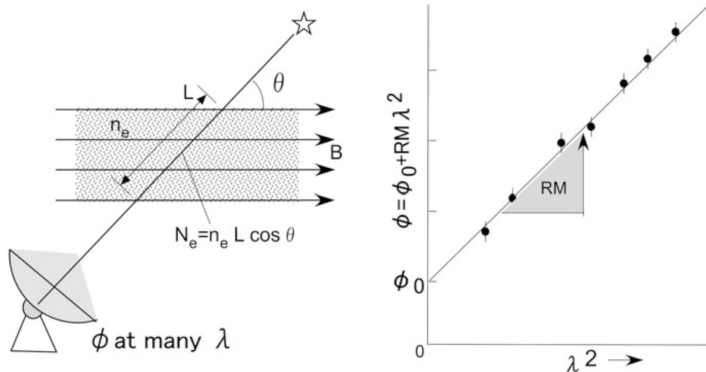


Figura 2.8: Determinazione della misura di rotazione misurando l'angolo di polarizzazione a diverse lunghezze d'onda (Fonte: (14)).

Capitolo 3

Campi magnetici negli ammassi di galassie

3.1 Introduzione

Gli ammassi di galassie, i più grandi sistemi virializzati dell'Universo, rappresentano laboratori ideali per studiare la formazione e l'evoluzione delle strutture cosmiche. La loro luminosità proviene dalle galassie stesse e dal caldo gas intergalattico (ICM) che le avvolge, il quale è stato studiato per lungo tempo nella banda X, attraverso l'emissione di bremsstrahlung termica. Allo stesso tempo, osservazioni radio hanno dimostrato come l'ICM sia mescolato con componenti non termiche, ossia particelle altamente relativistiche e campi magnetici su larga scala, rilevabili attraverso i metodi analizzati nel capitolo 2. I campi magnetici giocano un ruolo fondamentale nella fisica del gas, influenzandone la conduzione del calore e la dinamica. La loro presenza è dimostrata dal rilevamento di grandi sorgenti radio diffuse di sincrotrone, generalmente classificate in tre categorie: *aloni*, *relitti* e *mini-aloni* (per una trattazione estesa si rimanda a (15)). In questi ammassi è possibile stimare il campo magnetico medio dell'ICM sia sotto l'ipotesi di minima energia, molto vicina alle condizioni di *equipartizione*, sia attraverso la rotazione di Faraday: l'interazione dell'ICM con l'emissione di sincrotrone linearmente polarizzata di sorgenti radio di fondo, osservate a diverse distanze proiettate dal centro dell'ammasso, provoca una rotazione del piano di polarizzazione dell'onda che consente di risalire alle proprietà del campo magnetico lungo la linea di vista.

3.2 Campi magnetici nell'ammasso della Chioma: rotazione di Faraday ed equipartizione

L'effetto di Faraday, descritto nel capitolo 2, permette di stimare la R.M. lungo la LOS attraverso osservazioni multifrequenza di sorgenti radio, mediante un fit lineare della legge in λ^2 (2.19). Combinando queste misure con le proprietà degli elettroni termici dell'ICM, ricavate da osservazioni nella banda X, è possibile risalire alle caratteristiche dei campi magnetici intracluster; tuttavia, a causa della loro natura casuale e turbolenta, l'inversione dell'integrale (2.19) non appare immediata, nemmeno nei casi di distribuzioni di densità elettronica relativamente semplici. L'analisi si basa pertanto sull'ipotesi di campo magnetico statisticamente isotropo, coerente con l'assenza di una direzione preferenziale nelle mappe di R.M., assumendo inoltre che la rotazione del piano di

polarizzazione avvenga interamente nell'ICM, il quale agisce come uno schermo di Faraday esterno alle sorgenti radio.

Il caso del Coma cluster. L'ammasso della Chioma costituisce un banco di prova ideale per lo studio dei campi magnetici negli ammassi di galassie, grazie alla sua relativa vicinanza (redshift $z = 0.023$), alla presenza di emissione radio diffusa su larga scala e alla ricca disponibilità di osservazioni multibanda. Bonafede et al. (16) hanno stimato il campo magnetico dell'ICM analizzando le mappe di R.M. della radiazione polarizzata emessa da sette sorgenti radio dell'ammasso, confrontando i dati osservativi con simulazioni numeriche di diversi modelli di campo. I valori dell'intensità del campo magnetico nelle regioni centrali risultano compresi nell'intervallo $B_0 = 3.9 - 5.4 \mu\text{G}$. Per ricostruirne il profilo radiale, si è adottato un modello in cui l'intensità del campo segua la densità elettronica del gas secondo la legge $B(r) = B_0 \left(\frac{n_e(r)}{n_0}\right)^\eta$ dove l'indice $\eta \in [0.5, 1.0]$ regola la velocità con cui il campo si indebolisce allontanandosi dal centro dell'ammasso.

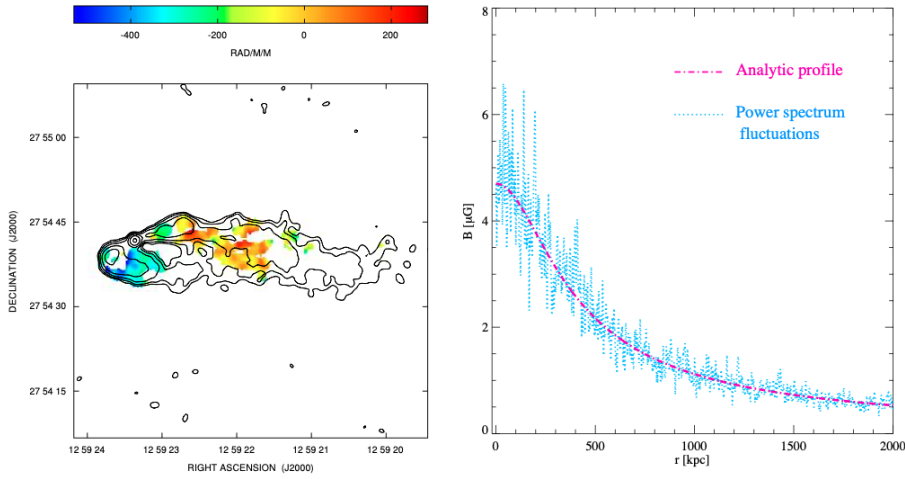


Figura 3.1: *Sinistra*: R.M. (con i contorni dell'intensità radio totale a 5 GHz) della radiogalassia NGC 4869. Questa è una delle sette sorgenti radio utilizzate per l'analisi del campo magnetico del Coma Cluster (Fonte: (16)). *Destra*: profilo del miglior modello di campo magnetico dell'ammasso del Coma Cluster (Fonte: (16)). La linea magenta si riferisce al profilo analitico $B(r)$, mentre la linea blu rappresenta una sezione estratta dal modello numerico simulato del campo magnetico. Le fluttuazioni visibili nel profilo sono dovute alle fluttuazioni del campo magnetico.

Questi valori di B sono compatibili con modelli in cui la densità di energia magnetica U_B scala proporzionalmente con la densità di energia termica del gas U_{th} . Tale comportamento è fisicamente atteso nell'ICM: l'energia magnetica rappresenta soltanto una piccola frazione di quella termica ($U_B \ll U_{\text{th}}$), e di conseguenza la pressione magnetica $P_B = B^2/8\pi$ è molto inferiore alla pressione termica $P_{\text{th}} = nk_B T$, dove n è la densità numerica del gas. In questo regime il campo magnetico non domina la dinamica del mezzo, ma è trasportato e modellato dai moti del plasma in accordo con il *congelamento del campo magnetico* (sezione 1.2): quando il gas viene compresso e la densità n aumenta, anche U_{th} cresce, amplificando il campo in modo coerente con la compressione del plasma.

Mediando il campo magnetico ricavato dall'analisi della R.M. sullo stesso volume considerato nel calcolo in equipartizione ($\sim 1 \text{ Mpc}^3$), si ottiene un'intensità media di $\simeq 2 \mu\text{G}$, in buon accordo con la stima di minima energia ottenuta dall'emissione dell'alone radio del Coma Cluster di $0.68\text{--}1.9 \mu\text{G}$ (Thierbach et al. (17)).

Per illustrare come tale intervallo venga ricavato, riportiamo di seguito i parametri fisici e geometrici adottati da Thierbach et al. (17) per il calcolo del campo di equipartizione. Sotto l'ipotesi di minima energia tra la densità di energia delle particelle relativistiche e quella del campo magnetico, la sorgente viene modellata come un ellissoide con assi di lunghezza pari a circa 770 kpc, 600 kpc e 600 kpc, corrispondente a un volume emissivo di circa $1.5 \times 10^8 \text{ kpc}^3$, assumendo un *fattore di riempimento*¹ unitario. Come indice spettrale si adotta $\alpha = 0.79$ e come frequenza di riferimento $\nu = 2.675 \text{ GHz}$.

A partire dalla formula standard del campo di equipartizione (si veda l'Appendice A)

$$B_{\text{eq}} = \left[\frac{3}{4} (1+k) \frac{C_{\text{el}}}{C_B} \right]^{2/7} \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} \propto \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} (1+k)^{2/7} \quad (3.1)$$

sostituendo la luminosità radio L^2 ricavata dall'integrazione dello spettro di potenza tra 300 MeV e infinito, il volume V stimato geometricamente e i parametri cosmologici con $h_{75} = B_0/75^3$, si ottiene il campo di equipartizione dell'alone

$$B_{\text{eq}} = 0.57 (1+k)^{1/(\alpha+3)} h_{75}^{1/(\alpha+3)} \mu\text{G} \quad (3.2)$$

Si noti che la dipendenza da k cambia esponente rispetto alla formula standard poiché l'integrazione in energia, anziché in frequenza, modifica la relazione tra indice spettrale e distribuzione energetica delle particelle. Variando k da 1 a 100, il campo B_{eq} varia da 0.68 a $1.9 \mu\text{G}$.

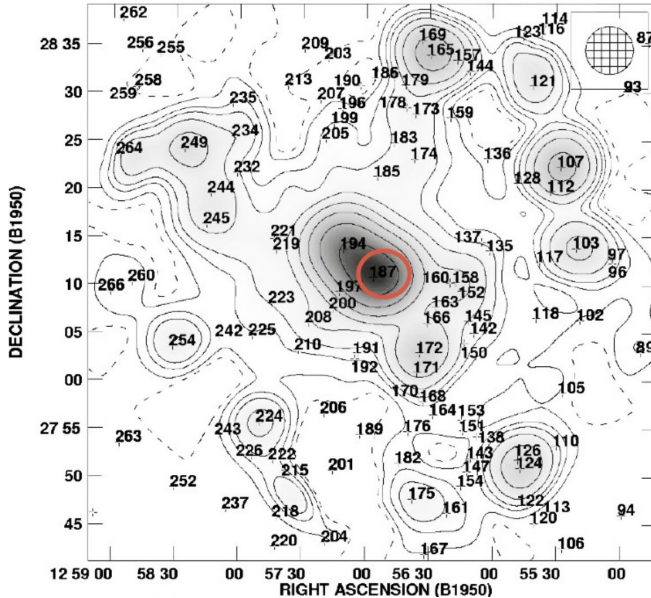


Figura 3.2: Regione centrale dell'alone radio diffuso Coma C a 2.675 GHz, osservata con il radiotelescopio Effelsberg. La sorgente 187 (cerchiata in rosso) corrisponde alla radiogalassia NGC 4869, la stessa sorgente utilizzata nella figura 3.1 per la mappatura della rotazione di Faraday e la modellizzazione del campo magnetico dell'ammasso (Fonte: (17)).

¹Frazione del volume geometrico stimato occupata dal plasma relativistico e dal campo magnetico che producono l'emissione sincrotrone.

² $L = 4\pi d^2 \int_{\nu_{\text{min}}}^{\infty} S(\nu) d\nu = 4\pi d^2 \int_{300 \text{ MeV}}^{\infty} S_{20 \text{ MHz}} \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-\alpha} d\nu$. Al fine di evitare una sottostima dell'energia delle particelle relativistiche: densità di flusso a bassa frequenza $S_{20 \text{ MHz}} = 60 \text{ Jy}$.

³ $h_{75} = B_0 / (75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ parametro di Hubble adimensionale normalizzato a $75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Appendice A

Derivazione del campo magnetico di equipartizione

La derivazione che segue è tratta da E. Ceccotti, *Processi di Radiazione e MHD* (2).

L'energia complessiva di una radiosorgente che emette per sincrotrone è data dall'energia delle particelle relativistiche (protoni+elettroni) e da quella del campo magnetico:

$$U_{\text{tot}} = \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_{\text{pr}} + U_{\text{B}} = (1 + k) \varepsilon_{\text{el}} + U_{\text{B}} = U_{\text{p}} + U_{\text{B}} \quad (\text{A.1})$$

dove k è legato all'energia associata ai protoni. Se si considerano elettroni relativistici la cui distribuzione energetica segue la legge di potenza $N(\varepsilon)d\varepsilon = N_0\varepsilon^{-\delta}d\varepsilon$, troviamo la loro energia

$$\varepsilon_{\text{el}} = V \int_{\varepsilon_{\text{min}}}^{\varepsilon_{\text{max}}} \varepsilon N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N_0 V}{2 - \delta} \left(\varepsilon_{\text{max}}^{2-\delta} - \varepsilon_{\text{min}}^{2-\delta} \right) \quad (\text{A.2})$$

Se consideriamo la luminosità della sorgente

$$L = 4\pi D^2 \int_{\nu_{\text{min}}}^{\nu_{\text{max}}} S(\nu) d\nu \quad (\text{A.3})$$

dove

$$S(\nu) = \frac{J(\nu)}{4\pi D^2} dV \quad (\text{A.4})$$

e utilizzando la (2.5), si ha

$$S(\nu) = \frac{dV}{4\pi D^2} N(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\varepsilon}{d\nu} \quad (\text{A.5})$$

sostituendo nella (A.3), si ottiene

$$L = V \int_{\varepsilon_{\text{min}}}^{\varepsilon_{\text{max}}} N(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dt} d\varepsilon \quad (\text{A.6})$$

e dunque

$$L \approx N_0 V \int_{\varepsilon_{\text{min}}}^{\varepsilon_{\text{max}}} B^2 \varepsilon^{2-\delta} \sin^2(\theta) d\varepsilon = 2.4 \cdot 10^{-3} \frac{N_0 V B^2 \sin^2(\theta)}{3 - \delta} \left(\varepsilon_{\text{max}}^{3-\delta} - \varepsilon_{\text{min}}^{3-\delta} \right) \quad (\text{A.7})$$

Manipolando l'equazione (A.7) e ricordando che $\nu = 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 B$ e $\varepsilon = \gamma m_e c^2$ (come riportato nella sottosezione 2.1.1), allora

$$\varepsilon_{\text{min}/\text{max}} = 4.0 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\nu_{\text{min}/\text{max}}}{B} \right)^{1/2} \quad (\text{A.8})$$

Ricavando N_0V dalla (A.7), sostituendo nella (A.2) e considerando una distribuzione con un angolo di pitch isotropo in modo che $B^2 \sin^2(\theta) = \frac{2}{3}B^2$ si ottiene

$$\varepsilon_{\text{el}} = C_{\text{el}}B^{-3/2}L = \frac{U_{\text{p}}}{1+k} \quad (\text{A.9})$$

che rappresenta l'energia associata alle particelle relativistiche (elettroni) che irradiano per sincrotrone. L'energia immagazzinata nel campo magnetico è pari a

$$U_{\text{B}} = \int \frac{B^2}{8\pi} dV = C_{\text{B}}B^2V \quad (\text{A.10})$$

Inserendo le ultime due equazioni nella (A.1), si ottiene l'energia totale

$$U_{\text{tot}} = (1+k)C_{\text{el}}B^{-3/2}L + C_{\text{B}}B^2V \quad (\text{A.11})$$

Il valore minimo di tale energia totale, si può facilmente ricavare in funzione di B ponendo $\partial U_{\text{tot}}/\partial B = 0$. Da qui risulta immediato il campo magnetico che minimizza l'energia

$$B_{\text{eq}} = B(U_{\text{min}}) = \left[\frac{3}{4}(1+k)\frac{C_{\text{el}}}{C_{\text{B}}} \right]^{2/7} \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} \propto \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} (1+k)^{2/7} \quad (\text{A.12})$$

Bibliografia

- [1] J. L. Han, “Observing Interstellar and Intergalactic Magnetic Fields”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* (2017) pp. 111–157
- [2] E. Ceccotti, *Processi di Radiazione e MHD*, AMS, Università di Bologna (2017)
- [3] R. Fanti and C. Fanti, *Una finestra sull’Universo Invisibile – Lezioni di radioastronomia*, Università di Bologna (2012)
- [4] R. M. Kulsrud, *Plasma Physics for Astrophysics*, Princeton University Press (2005)
- [5] P. A. Davidson, *Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2001)
- [6] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press (1978)
- [7] G. B. Rybicki e A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (1979)
- [8] B. F. Burke, F. Graham-Smith e P. N. Wilkinson, *An Introduction to Radio Astronomy*, 4th Edition, Cambridge University Press (2019)
- [9] R. Beck, F. A. Aharonian, W. Hofmann e F. M. Rieger, *Cosmic Magnetic Fields: Observations and Prospects*, AIP (2011) pp. 117–136
- [10] B. T. Draine, *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*, Princeton University Press (2011)
- [11] A. Lazarian, *Tracing magnetic fields with aligned grains*, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* (2007) pp. 225–256
- [12] F. Ravanini, *Meccanica Quantistica per il corso di Istituzioni di Fisica Teorica*, dispense del Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna (2019)
- [13] R. M. Crutcher e A. J. Kemball, *Review of Zeeman Effect Observations of Regions of Star Formation*, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* (2019)
- [14] Y. Sofue, *Galactic Radio Astronomy*, 1st ed., Springer Singapore (2017)
- [15] L. Feretti et al., *Clusters of galaxies: observational properties of the diffuse radio emission*, *Astronomy and Astrophysics Review* (2012)
- [16] A. Bonafede et al., *The Coma cluster magnetic field from Faraday rotation measures*, *Astronomy and Astrophysics* (2010)
- [17] M. Thierbach et al., *The diffuse radio emission from the Coma cluster at 2.675 GHz and 4.85 GHz* (2002)