

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Varietà Jacobiana e teorema di Abel-Jacobi
per superfici di Riemann compatte

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Prof.
FATIGHENTI ENRICO

Presentata da:
DI GIACINTO
MARIA CELESTE

Anno Accademico 2024-2025

Ai miei genitori

Introduzione

La varietà Jacobiana e il teorema di Abel-Jacobi rappresentano uno dei vertici della matematica del XIX secolo, formando una teoria che unisce l'analisi complessa, la geometria algebrica e la topologia. Il punto di partenza di tale teoria si trova nei lavori del matematico norvegese Niels Henrik Abel, che nel 1826 dimostrò alcuni risultati cruciali sugli integrali abeliani, enunciati nel teorema che porta il suo nome. Parallelamente, il matematico tedesco Carl Gustav Jacobi estese e approfondì il lavoro di Abel negli anni 1830-1840. Il suo contributo fondamentale fu il teorema di inversione nel quale dimostrò che, sotto certe ipotesi, la mappa che prende il nome dai due matematici, la cui iniettività era stata dimostrata da Abel, diventa un isomorfismo, permettendo dunque di invertire integrali abeliani. Fissato un punto p_0 di una superficie di Riemann compatta X , la mappa di Abel-Jacobi associa ad ogni punto p di X il vettore dei g integrali delle forme olomorfe su X lungo un cammino da p_0 a p , modulo il reticolo dei periodi, ovvero integrali delle forme lungo cammini chiusi. Questo portò alla scoperta che ogni punto della varietà Jacobiana di una superficie di Riemann di genere g può essere rappresentato come somma di g punti sulla superficie originaria, dove la Jacobiana è una varietà abeliana compatta di dimensione complessa g .

La teoria fu ulteriormente sviluppata nel tardo XIX secolo e trovò una formalizzazione rigorosa durante il XX secolo nei lavori di Lefschetz, Weil e Grothendieck diventando uno dei pilastri della geometria algebrica moderna.

Nel primo capitolo daremo le definizioni degli strumenti di base che vengono utilizzati nello sviluppo della tesi. In particolare ci concentreremo sui

fibrati vettoriali olomorfi, sui fasci e sui divisori di Weil e mostreremo in che modo questi concetti sono profondamente legati tra loro, costruendo talvolta in maniera esplicita il passaggio dall'uno all'altro.

Il secondo capitolo rappresenta il cuore della tesi. In questo mostreremo la costruzione della varietà Jacobiana di una superficie di Riemann compatta di genere g . Definiremo il collegamento tra una superficie di Riemann di genere g e la sua varietà Jacobiana dato dalla mappa di Abel-Jacobi, di cui verranno date due formulazioni, la seconda della quale è protagonista dell'enunciato del teorema di Abel, dimostrato in maniera dettagliata; verrà inoltre enunciato il teorema di inversione di Jacobi. Mostriamo il collegamento tra l'analisi complessa e la geometria algebrica attraverso l'isomorfismo tra la varietà Jacobiana e il Pic^0 della superficie originaria. In conclusione, dimostreremo l'isomorfismo tra una curva ellittica, vista come una superficie di Riemann compatta di genere 1, e la sua varietà Jacobiana, che costituirà il collegamento con l'ultimo capitolo.

Il terzo capitolo riporta un esempio concreto del teorema di Abel-Jacobi. Partiremo da un articolo di Ron Donagi, che descrive esplicitamente il Pic^0 di una curva ellittica quartica come una curva ellittica di grado 2. La teoria sviluppata nei capitoli precedenti ci assicurerebbe l'esistenza di un isomorfismo tra questi due oggetti, che noi andremo esplicitamente a costruire tramite strumenti elementari di geometria algebrica.

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Fibrati vettoriali olomorfi	1
1.2 Gruppo di Picard	9
1.3 Divisori di Weil	11
1.4 Fasci e morfismi di fasci	14
1.4.1 Corrispondenza tra fibrati vettoriali e fasci	15
1.5 Teorema dei coefficienti universali	17
1.6 Spazi proiettivi pesati	19
2 Varietà Jacobiana	21
2.1 Definizione della varietà Jacobiana	21
2.2 Mappa di Abel-Jacobi	24
2.3 Teorema di Abel	27
2.4 Definizione di Pic^0	33
2.4.1 Isomorfismo tra $\text{Div}_0(X)/\sim$ e $\text{Pic}^0(X)$	37
2.4.2 Appendice	37
2.5 Isomorfismo tra una curva ellittica e la sua varietà Jacobiana .	38
3 Una curva ellittica e il suo Pic^0: un esempio esplicito	41
3.1 Costruzione di una curva ellittica come intersezione di due quadriche lisce	41
3.2 Costruzione del rivestimento ramificato in quattro punti di $\mathbb{P}^1$	42

3.2.1	La mappa di Veronese come isomorfismo esplicito . . .	47
-------	---	----

Bibliografia		49
---------------------	--	-----------

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo introdurremo oggetti matematici e enunciati di teoremi utili per lo sviluppo dei concetti trattati nella tesi.

Quando non specificato, X indicherà una varietà complessa compatta. Nel capitolo successivo enunceremo vari risultati considerando X una superficie di Riemann compatta, ovvero una varietà complessa compatta di dimensione 1. In particolare, le superfici di Riemann compatte sono proiettive, come viene mostrato in [Mir95, capitolo VII] grazie al teorema di Riemann-Roch.

1.1 Fibrati vettoriali olomorfi

Introduciamo in questo paragrafo uno degli strumenti fondamentali per comprendere la geometria di una varietà complessa e compatta X , i fibrati vettoriali. In particolare ci concentreremo sui fibrati vettoriali olomorfi, su alcune semplici operazioni ad essi associate e presenteremo alcuni esempi. La principale fonte di riferimento impiegata è [Huy05].

Definizione 1.1.1. (Fibrato vettoriale olomorfo) Un *fibrato vettoriale olomorfo* su X di rango $k \in \mathbb{N}$ è il dato di una varietà complessa $\mathcal{E}$ e di una mappa $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ olomorfa, detta mappa di proiezione, tale che:

1. per ogni $x \in X$, $\mathcal{E}_x := \pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione k
2. esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di X e una famiglia di biolomorfismi $\{\Psi_i\}$, dove, per ogni i , $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k$, detta trivializzazione, è tale che per ogni $x \in U_i$, $\Psi|_{\mathcal{E}_x} \cong \mathbb{C}^k$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali. Questa condizione equivale a chiedere che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Psi_i} & U_i \times \mathbb{C}^k \\
 \searrow \pi & & \swarrow p \\
 & U_i &
 \end{array}$$

sia commutativo (dove $p : U_i \times \mathbb{C}^k \rightarrow U_i$ è la proiezione sulla prima componente).

Un fibrato vettoriale di rango 1 è detto *fibrato in rette*.

Definizione 1.1.2. (Sottofibrato) Un *sottofibrato vettoriale olomorfo* è un fibrato vettoriale $\eta : \Sigma \rightarrow X$ dove $\Sigma \subset \mathcal{E}$ e η interseca ogni fibra in un sottospazio vettoriale.

Osservazione 1.1.3. Sia $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango k su X . Se si scelgono un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e delle trivializzazioni $\{\Psi_i\}$ relative a tale ricoprimento, allora per ogni coppia di indici i, j tali per cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la funzione

$$\Psi_i \circ \Psi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k$$

è l'identità sulla prima componente e, fissato un punto $x \in X$, la seconda componente della restrizione $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k} : \{x\} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^k$ è lineare ed è rappresentata da una matrice invertibile a coefficienti in $\mathbb{C}$. Si definisce dunque la *funzione di transizione*

$$\Psi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{C})$$

che ad ogni punto di $U_i \cap U_j$ associa tale matrice.

Osservazione 1.1.4. Possiamo anche vedere un sottofibrato $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ come collezione $\{\mathcal{F}_x \subset \mathcal{E}_x\}_{x \in X}$ di sottospazi delle fibre $\mathcal{E}_x$ di $\mathcal{E}$ tale che $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_x \subset \mathcal{E}$ è una sottovarietà di $\mathcal{E}$. Ne segue che per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto U di x ed una trivializzazione $\Phi : \mathcal{E}|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$ tale che

$$\Phi|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^s \subset U \times \mathbb{C}^r.$$

Le funzioni di transizione di $\mathcal{E}$ rispetto a tali trivializzazioni sono allora del tipo

$$\Psi_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{ij}(x) & k_{ij}(x) \\ 0 & h_{ij}(x) \end{pmatrix}$$

dove le Φ_{ij} sono le funzioni di transizione di $\mathcal{F}$ visto come sottofibrato di $\mathcal{E}$.

Osservazione 1.1.5. Dato un fibrato vettoriale olomorfo di rango k su X , con un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e trivializzazioni locali $\{\Psi_i\}$, esso è isomorfo al fibrato vettoriale che ha come spazio totale

$$\mathcal{E}' := \frac{\bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{C}^k)}{\sim}$$

dove $\sim$ è la relazione data da:

per ogni coppia di indici i, j , $x \in U_i \cap U_j$ e $v \in \mathbb{C}^k$

$$U_i \times \mathbb{C}^k \ni (x, v) \sim \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(x, v) = (x, \Psi_{ij}(x) \cdot v) \in U_j \times \mathbb{C}^k.$$

La mappa di proiezione è la funzione che a $[(x, v)]$ associa il punto $x \in X$.

Definizione 1.1.6. Siano $k \in \mathbb{N}$, X una varietà complessa e $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X . Una famiglia di funzioni continue $\{\Psi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})\}_{ij}$ è un *cociclo* se

1. per ogni i e $p \in U_i$ vale $\Psi_{ii}(p) = I_k$ la matrice identità in $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$

2. (*condizione di cociclo*) per ogni i, j, z tali che $U_{ijz} := U_i \cap U_j \cap U_z \neq \emptyset$ allora

$$\Psi_{ij}|_{U_{ijz}} \circ \Psi_{jz}|_{U_{ijz}} = \Psi_{iz}|_{U_{ijz}}.$$

Si dice che due cocicli $\{\Psi_{ij}\}_{ij}$ e $\{\Phi_{ij}\}_{ij}$ sono *cobordanti* se esiste una famiglia di funzioni continue $\{h_i : U_i \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})\}_i$ tale che per ogni i, j valga

$$\Psi_{ij} = h_j|_{U_{ij}} \circ \Phi_{ij} \circ h_i|_{U_{ij}}^{-1}.$$

Lemma 1.1.7. *Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X . Se $\{\Psi_{ij}\}_{ij}$ e $\{\Phi_{ij}\}_{ij}$ sono due cocicli relativi a $\mathcal{U}$, allora i fibrati vettoriali olomorfi a loro associati sono isomorfi se e solo se sono cocicli cobordanti.*

Definizione 1.1.8. Siano $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ e $(\mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F}})$ fibrati vettoriali olomorfi su X . Un *morfismo* di fibrati vettoriali è una mappa olomorfa $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ tale che

1. $\pi_{\mathcal{E}} = \pi_{\mathcal{F}} \circ \phi$
2. $\phi|_{\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ è lineare per ogni $x \in X$

Due fibrati vettoriali olomorfi si dicono isomorfi se esiste un morfismo di fibrati vettoriali bigettivo tra loro (per ogni $x \in X$ esiste un isomorfismo $\mathcal{E}_x \cong \mathcal{F}_x$ di spazi vettoriali).

Definizione 1.1.9. (Sezione olomorfa) Sia $(\mathcal{E}, \pi)$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango k su X , sia $U \subseteq X$ un aperto di X . Una *sezione olomorfa* di $\mathcal{E}$ su U è una mappa olomorfa $s : U \longrightarrow \mathcal{E}$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Se s ha come dominio l'intera varietà X viene chiamata *sezione globale* su X .

L'insieme delle sezioni globali olomorfe di $\mathcal{E}$ si denota con $H^0(X, \mathcal{E})$, gruppo di coomologia del fibrato $\mathcal{E}$, dotato di una struttura di $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale.

Osservazione 1.1.10. Sia $f \in \mathcal{O}_X(U)$, allora fs (prodotto di funzioni) è ancora una sezione olomorfa $x \mapsto f(x)s(x)$.

Riportiamo ora alcuni esempi e costruzioni classici di fibrati vettoriali olomorfi su varietà complesse.

Definizione 1.1.11. (Fibrato triviale) Un fibrato vettoriale olomorfo $(\mathcal{E}, \pi)$ è *triviale* se è isomorfo, per un qualche k , al fibrato vettoriale $X \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{p} X$ con p proiezione sulla prima componente, denotato ϵ_X^k .

Definizione 1.1.12. (Pull-back) Sia $f : Y \rightarrow X$ una mappa olomorfa tra varietà complesse e $(\mathcal{E}, \pi)$ un fibrato vettoriale olomorfo su X dato dal cociclo $\{(U_i, \Psi_{ij})\}_{ij}$. Allora il *pull-back* $f^*\mathcal{E}$ di $\mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale olomorfo su Y dato dal cociclo $\{(f^{-1}(U_i), \Psi_{ij} \circ f)\}_{ij}$.

Per ogni $y \in Y$ esiste un isomorfismo canonico

$$(f^*\mathcal{E})_y \cong \mathcal{E}_{f(y)}.$$

Se Y è una sottovarietà complessa di X e $i : Y \rightarrow X$ è l'inclusione, allora $\mathcal{E}|_Y := i^*\mathcal{E}$ è la restrizione di $\mathcal{E}$ a Y .

Dati $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ fibrati vettoriali olomorfi di rango r e k rispettivamente determinati dai cocicli $\{(U_i, \Psi_{ij})\}_{ij}$ e $\{(U_i, \Phi_{ij})\}_{ij}$ su X è possibile costruire altri fibrati vettoriali olomorfi.

1. La somma diretta $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango $k + r$ dato da cocicli della forma $\{(U_i, \Psi_{ij} \oplus \Phi_{ij})\}_{ij}$ dove

$$(\Psi_{ij} \oplus \Phi_{ij})(x) := \begin{pmatrix} \Psi_{ij}(x) & 0 \\ 0 & \Phi_{ij}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{k+r}(\mathbb{C}) \quad \forall x \in U_{ij}.$$

Le fibre $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})_x$, per ogni x , sono isomorfe a $\mathcal{E}_x \oplus \mathcal{F}_x$.

2. Il prodotto tensoriale $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango rk dato da cocicli della forma $\{(U_i, \Psi_{ij} \otimes \Phi_{ij})\}_{ij}$ dove

$$(\Psi_{ij} \otimes \Phi_{ij})(x) := \Psi_{ij}(x) \otimes \Phi_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_{kr \times rk}(\mathbb{C}).$$

Anche in questo caso le fibre $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_x$, per ogni x , sono isomorfe a $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{F}_x$. Inoltre, se $r = k = 1$ allora $rk(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = 1$ e i cocicli sono $\Psi_{ij}(x) \circ \Phi_{ij}(x)$.

Osservazione 1.1.13. Il prodotto tra le due matrici è quello di Kronecker: siano $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{p \times q}(\mathbb{C})$, allora

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \in M_{mp \times nq}(\mathbb{C}).$$

3. L' i -esima potenza esterna $\bigwedge^i \mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale di rango $\binom{r}{i}$ dato da cocicli della forma $\{(U_i, \bigwedge^i \Psi_{ij})\}_{ij}$, dove le fibre, per ogni x , sono isomorfe a $\bigwedge^i \mathcal{E}_x$. In particolare viene definito il *fibrato in rette determinante* di $\mathcal{E}$ come $\det \mathcal{E} := \bigwedge^r \mathcal{E}$.
4. L' i -esima potenza simmetrica $\text{Sym}^i \mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango $\binom{r+i-1}{i}$ le cui fibre per ogni x sono isomorfe a $\text{Sym}^i \mathcal{E}_x$.
5. Il fibrato duale $\mathcal{E}^\vee$ è il fibrato vettoriale olomorfo le cui fibre $(\mathcal{E}^\vee)_x$ sono isomorfe allo spazio duale $\mathcal{E}_x^\vee$. I cocicli che lo determinano sono della forma $\{(U_i, (\Phi_{ij}^{-1})^\top)\}_{ij}$.

Osservazione 1.1.14. Se $r = 1$, allora $\mathcal{E}^\vee$ è determinato da cocicli della forma $\{(U_i, \Phi_{ij}^{-1})\}_{ij}$. Da questo segue che $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee$ ha come cocicli $\{(U_i, id)\}_i$.

Osservazione 1.1.15. Consideriamo la successione esatta corta di fibrati vettoriali olomorfi

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Allora esiste un isomorfismo canonico $\det \mathcal{F} \cong \det \mathcal{E} \otimes \det \mathcal{G}$.

Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X con carte ϕ_i . Per definizione la Jacobiana della mappa $\Phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \cong \phi_i(U_i \cap U_j)$ è la

matrice

$$\mathcal{J}(\Phi_{ij})(\phi_j(z)) := \left(\frac{\partial \Phi_{ij}^r}{\partial z_l}(\phi_j(z)) \right)_{r,l}.$$

Definizione 1.1.16. (Fibrato tangente olomorfo) Il *fibrato tangente olomorfo* di una varietà complessa X di dimensione k è il fibrato vettoriale olomorfo $\mathcal{T}_X$ su X di rango k dato dai cocicli della forma $\{(U_i, \mathcal{J}_{(\Phi_{ij})} \circ \phi_j)\}$. Le fibre per ogni $x \in X$ sono date dagli spazi tangenti ad X in x .

Definizione 1.1.17. (Fibrato cotangente olomorfo e fibrato canonico) Il *fibrato cotangente olomorfo* di una varietà complessa X di dimensione k è definito come il duale del fibrato tangente olomorfo di X , $\Omega_X := \mathcal{T}_X^\vee$. Definiamo il fibrato vettoriale delle p -forme olomorfe $\Omega_X^p := \bigwedge^p \Omega_X$ per $0 \leq p \leq k$. Possiamo allora definire il *fibrato canonico*

$$K_X := \det(\Omega_X) = \Omega_X^k.$$

Lemma 1.1.18. Sia $Y \xrightarrow{i} X$ una sottovarietà complessa. Allora $\mathcal{T}_Y$ è un sottofibrato di $\mathcal{T}_X|_Y (= i^*\mathcal{T}_X)$.

Dal lemma segue che è possibile quozientare $\mathcal{T}_X|_Y$ per $\mathcal{T}_Y$. Possiamo dunque definire il fibrato normale.

Definizione 1.1.19. (Fibrato normale) Sia $Y \subset X$ una sottovarietà complessa. Il *fibrato normale* di Y in X è il fibrato vettoriale olomorfo $\mathcal{N}_{Y/X}$ su Y definito come il conucleo dell'iniezione $\mathcal{T}_Y \hookrightarrow \mathcal{T}_X|_Y$,

$$\mathcal{N}_{Y/X} := \frac{\mathcal{T}_X|_Y}{\mathcal{T}_Y}.$$

È ben posta la successione esatta corta di fibrati vettoriali

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X|_Y \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0$$

chiamata *successione del fibrato normale*. Passando ai fibrati duali la successione si inverte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X}^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_X|_Y^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_Y^\vee \longrightarrow 0.$$

Per l'osservazione 1.1.15, $\det(\mathcal{T}_X|_Y^\vee) \cong \det(\mathcal{N}_{Y/X}^\vee) \otimes \det(\mathcal{T}_Y^\vee)$, dove, per definizione, $\det(\mathcal{T}_X|_Y^\vee) = K_X|_Y$ e $\det(\mathcal{T}_Y^\vee) = K_Y$.

Osserviamo che $\det(\mathcal{N}_{Y/X}^\vee)$ è invertibile nel gruppo dei fibrati in rette, che definiremo più avanti, con inverso il suo duale $(\det(\mathcal{N}_{Y/X}^\vee))^\vee = \det(\mathcal{N}_{Y/X})$, dunque

$$K_Y \cong K_X|_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X}).$$

Questo isomorfismo è chiamato *formula di aggiunzione*.

Passiamo ora al caso proiettivo definendo il *fibrato tautologico*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) := \{(l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$$

con la mappa di proiezione

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) &\xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \\ (l, z) &\longmapsto l \end{aligned}$$

- Preso $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$, definiamo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\otimes d}$, se $d > 0$ definiamo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)^\vee$.
- Definiamo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ come il duale del fibrato tautologico. Mostriamo più avanti che questo genera il gruppo dei fibrati in rette di $\mathbb{P}^n$.
- Analogamente si definisce $\mathcal{O}_X(-1)$ e $\mathcal{O}_X(d)$, con $X \subset \mathbb{P}^n$, come $\mathcal{O}_X(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$.

Proposizione 1.1.20. *Il fibrato canonico $K_{\mathbb{P}^n}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.*

Dimostrazione. Si veda [Huy05, proposizione 2.4.3]. □

1.2 Gruppo di Picard

Sia X una varietà complessa compatta.

Proposizione 1.2.1. *Il prodotto tensoriale e il duale forniscono all'insieme di classi di isomorfismo di fibrati in rette su X una struttura di gruppo abeliano. Questo gruppo è chiamato gruppo di Picard di X .*

Dimostrazione. Per definizione, il prodotto tensoriale di due fibrati in rette $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ su X è il prodotto $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ e l'inverso di $\mathcal{L}$ è il suo duale. Inoltre, come già visto nel paragrafo precedente al punto 5. dell'elenco, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee$ è isomorfo al fibrato triviale.

□

Dunque abbiamo definito il gruppo di Picard di X come

$$\text{Pic}(X) := (\{\text{fibrati in rette su } X\} / \sim, \otimes).$$

Mostriamo che i cocicli dei fibrati in rette su X determinano completamente il suo gruppo di Picard. Ciò è espresso dall'isomorfismo di $\text{Pic}(X)$ con il primo gruppo di coomologia di Čech.

Definizione 1.2.2 (Complesso di Čech). Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani additivi, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento aperto di X . Definiamo $C^p(\{U_i\}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$. Esiste un differenziale naturale

$$d : C^p(\{U_i\}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\{U_i\}, \mathcal{F}), \quad \alpha \mapsto \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}|_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}.$$

Si verifica che $d^2 = 0$, cioè

$$0 \longrightarrow C^0(\{U_i\}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\check{d}_0} C^1(\{U_i\}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\check{d}_1} \dots$$

è un complesso. Il k -esimo gruppo di coomologia di Čech è definito come

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker(\check{d}_k)}{\operatorname{Im}(\check{d}_{k-1})}.$$

Poiché $\mathcal{F}$ è un fascio, si trova che il gruppo delle sezioni globali di $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(X)$, coincide con $\ker(\check{d}_0)$, dunque

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\check{d}_0) = \mathcal{F}(X).$$

Osserviamo che $\check{d}_1((\phi_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}) = (\phi_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} - \phi_{\alpha\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} + \phi_{\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}})_{\alpha\beta\gamma}$. Allora, se $(\phi_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} \in \prod_{\alpha < \beta} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$, $c = (\phi_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ è un cociclo se e solo se $\check{d}_1 c = 0$. Inoltre c è cobordante a $c' = (\psi_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ se e solo se $(\phi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\alpha\beta}^{-1})_{\alpha\beta} \in \operatorname{Im}(\check{d}_0)$. Posto $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^*$, il lemma 1.1.7 fornisce un'associazione biunivoca

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \longleftrightarrow \{\text{fibrati lineari olomorfi su } X \text{ che si trivializzano su } \mathcal{U}\} / \sim$$

Il nostro obiettivo è perdere la dipendenza dal ricoprimento scelto $\mathcal{U}$. Consideriamo il seguente fatto

Fatto 1.2.3. *Sia X una varietà complessa compatta, allora esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X tale che per ogni $\pi : E \rightarrow X$ fibrato vettoriale olomorfo e per ogni $V \in \mathcal{V}$, $\pi|_{\pi^{-1}(V)} : \pi^{-1}(V) \rightarrow V$ è un fibrato vettoriale triviale.*

Da ciò segue che $\check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^*) \cong \operatorname{Pic}(X)$.

Preso $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto, posso ottenere un raffinamento $\mathcal{V}'$ di $\mathcal{V}$, dato dagli aperti $U_\alpha \cap V_\beta$, per ogni α, β . Il fatto precedente rimane valido per $\mathcal{V}'$. Questo concetto si esplicita come

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \varinjlim \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \operatorname{Pic}(X).$$

Per [Huy05, proposizione B.0.43], esiste un isomorfismo naturale tra $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$ e $H^1(X, \mathcal{F})$. Dunque

$$\operatorname{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Questo risultato tornerà utile nella definizione di $\text{Pic}^0(X)$ discussa nel prossimo capitolo.

1.3 Divisori di Weil

In questo paragrafo definiamo i divisori di Weil di una varietà X complessa compatta. Nei capitoli successivi tratteremo sempre di varietà complesse lisce, per le quali i divisori di Weil e di Cartier sono in corrispondenza biunivoca.

Definizione 1.3.1 (Divisore primo). Un *divisore primo* su X è un'ipersuperficie Y irriducibile.

Definizione 1.3.2 (Divisore di Weil). Un *divisore di Weil* su X è una combinazione lineare finita a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di divisori primi

$$D = \sum_{Y \text{ primo}} a_Y [Y].$$

Definiamo il gruppo dei divisori $\text{Div}(X)$ come l'insieme dei divisori di Weil su X dotato della naturale struttura di gruppo.

Osservazione 1.3.3. Se X ha dimensione 1 i suoi divisori primi sono i punti stessi di X . Da ciò segue che un divisore di Weil su X è della forma

$$D = \sum_{p \in X} a_p p, \quad a_p \in \mathbb{Z}.$$

Definizione 1.3.4 (Divisore effettivo). Un divisore $E = \sum a_i [Y_i]$ su X si dice effettivo se $a_i \geq 0$ per ogni a_i .

Definizione 1.3.5. Sia D un divisore primo su X , definiamo $\mathcal{O}_{X,D} := \{f \in K_X \mid D \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset\} \subset K_X$, dove K_X indica il campo delle funzioni meromorfe su X . Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \text{ord}_D : K_X^* &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto m \end{aligned}$$

dove m è tale che ft^{-m} è invertibile in $\mathcal{O}_{X,D}$. Data f in K_X , $\text{ord}_D(f)$ è detto *ordine di annullamento di f lungo D* .

La mappa ord_D ci permette di definire la funzione

$$\begin{aligned} \text{div} : K_X^* &\longrightarrow \text{Div}(X) \\ f &\longmapsto \sum_{D \text{ primo}} \text{ord}_D(f) \cdot D \end{aligned}$$

che è ben definita e un omomorfismo di gruppi. Inoltre [Har77, lemma 6.1, p. 231] garantisce che la somma $\sum_{D \text{ primo}} \text{ord}_D(f) \cdot D$ sia finita.

Definizione 1.3.6. (Divisori principali) Un divisore D è detto *principale* se è immagine di una funzione $f \in K_X^*$ tramite div . In tale caso, D viene denotato con (f) .

Osservazione 1.3.7. Se $\text{ord}_D(f) = d$, $d > 0$ allora f ha uno zero di ordine d lungo D , se $\text{ord}_D(f) = -d$, $d > 0$ allora f ha un polo di ordine $-d$ lungo D . Allora, un divisore principale (f) può essere scritto come somma di due divisori effettivi $(f) = Z(f) - P(f)$, dove

$$Z(f) = \sum_{\substack{\text{ord}_D(f) > 0 \\ D \text{ primo}}} \text{ord}_D(f) \cdot D \quad \text{e} \quad P(f) = - \sum_{\substack{\text{ord}_D(f) < 0 \\ D \text{ primo}}} \text{ord}_D(f) \cdot D.$$

Definizione 1.3.8. (Equivalenza lineare) Due divisori D_1, D_2 sono *linearmente equivalenti* se $D_1 - D_2 = (f)$, $f \in K_X^*$, ovvero differiscono per un divisore principale. Possiamo definire il *gruppo delle classi di divisori* come

$$\text{Cl}(X) := \text{Div}(X) / \sim.$$

Consideriamo la funzione $\mathcal{O} : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$, definita in [Huy05, corollario 2.3.10].

Lemma 1.3.9. *Un divisore $D \in \text{Div}(X)$ è principale se e solo se $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}$.*

La dimostrazione è presente in [Huy05]. Il lemma permette allora di affermare che $\mathcal{O} : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$ è iniettiva passando al quoziente,

ovvero

$$\mathcal{O} : \text{Div}(X)/\sim \hookrightarrow \text{Pic}(X)$$

Per la [Huy05, proposizione 5.3.7], se X è proiettiva, come nel caso delle superfici di Riemann compatte, allora $\mathcal{O} : \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ è un morfismo suriettivo. Dunque in tal caso si ottiene un isomorfismo tra $\text{Div}(X)/\sim$ e $\text{Pic}(X)$.

Esempio 1.3.10. Mostriamo che $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, esibendo anche un generatore.

Consideriamo la successione esponenziale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^* \longrightarrow 0$$

e la successione esatta lunga in coomologia associata

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) \\ & & & & \searrow & & \\ & & H^1(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) \\ & & & & \searrow & & \\ & & H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Calcoliamo il diamante di Hodge sapendo che, per il teorema dei coefficienti universali, $H^k(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \cong H_k(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ e l'omologia singolare di $\mathbb{P}^n$ è $\mathbb{Z}$ per k pari e 0 per k dispari. Si ottiene

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ & & & & 1 \end{array}$$

dove il vertice in basso indica l' $h^0(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$, la seconda riga riporta (da sinistra verso destra) l' $h^{0,1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ e l' $h^{1,0}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$, la terza riga riporta l' $h^{0,2}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$,

$l'h^{1,1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ e $l'h^{2,0}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$. Dal diamante di Hodge si ottiene che:

- $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong 0$
- $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
- $H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong 0$

Allora si ha un isomorfismo $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) \cong H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$, da cui $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$.

In questo modo abbiamo mostrato solo l'isomorfismo con $\mathbb{Z}$, esibiamo ora un generatore.

Sapendo che $\text{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \text{Pic}(\mathbb{P}^n)$, cerchiamo dapprima un generatore per il gruppo delle classi. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano, ad esempio $H = V(x_0)$, luogo degli zeri del polinomio x_0 , prima coordinata omogenea. H genera $\text{Cl}(\mathbb{P}^n)$, infatti sia $C \subset \mathbb{P}^n$ un'ipersuperficie, si può mostrare che $C = V(f_d)$ con f_d polinomio omogeneo di grado d . Allora C e dH sono linearmente equivalenti tramite il divisore associato a $\frac{x_0^d}{f_d}$, funzione meromorfa ben definita su $\mathbb{P}^n$ con zeri lungo dH e con poli lungo C . Per [Huy05][osservazione 2.3.17], il fibrato associato ad H è $\mathcal{O}(1)$ poiché se prendiamo gli zeri di una sua sezione globale questi, come viene mostrato in [Huy05], descrivono un iperpiano in $\mathbb{P}^n$ equivalente ad H per quanto appena visto.

1.4 Fasci e morfismi di fasci

In questo paragrafo definiremo la nozione di fascio su X , morfismi tra fasci e vedremo nel dettaglio la corrispondenza tra fasci e fibrati vettoriali. Per la coomologia dei fasci, che verrà usata nei capitoli successivi, si rimanda a [GH94].

Per introdurre la definizione di fascio, è opportuno definire prima il concetto di prefascio.

Definizione 1.4.1 (Prefascio). Un *prefascio* $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su una varietà complessa X è il dato di, per ogni $U \subset X$ aperto, un gruppo abeliano $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ e, per ogni $V \subset U$, un omomorfismo di gruppi $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ dato dalla restrizione, che soddisfa

1. $r_{U,U} = id_U$
2. per ogni $U \subset V \subset W$ si ha $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$

Definizione 1.4.2 (Fascio). Un *fascio* è un prefascio tale che per ogni $U \subset X$, $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U si ha:

1. per ogni $s, t \in \mathcal{F}(U)$, se $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ per ogni i , allora $s = t$
2. presi $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ allora esiste ed è unico $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i .

Esempio 1.4.3. Il prefascio costante $\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{F}(U) = \mathbb{R}$ per ogni sottoinsieme aperto non vuoto U di X non è un fascio se X contiene un sottoinsieme aperto sconnesso. Solitamente viene utilizzato il fascio costante $\underline{\mathbb{R}}$ che associa ad ogni aperto $U \subset X$ l'insieme di tutte le funzioni continue $U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia discreta.

Nello stesso modo viene definito il fascio costante $\underline{\mathbb{Z}}$ che useremo più avanti.

Definizione 1.4.4 (Morfismo di fasci). Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci, un *morfismo di fasci* $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è il dato di, per ogni $U \subset X$ aperto, omomorfismi $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ tali che $r_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \phi_V = \phi_U \circ r_{U,V}^{\mathcal{F}}$, per ogni $U \subset V$.

Osservazione 1.4.5. Dato $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ morfismo di fasci, $\ker(\phi)$ è a sua volta un fascio, mentre $\text{Im}(\phi)$ generalmente è solo un prefascio. Diamo allora una definizione alternativa di $\text{Im}(\phi)$ affinché sia un fascio. Per ogni $U \subset X$ definisco

$$\text{Im}(\phi(U)) := \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{G} \text{ tale che } \forall x \in U \exists U_x \text{ intorno di } x \text{ in } U \\ \text{e } \exists t_x \in \mathcal{F}(U_x) \text{ tale che } s|_{U_x} = \phi_{U_x}(t_x) \end{array} \right\}$$

1.4.1 Corrispondenza tra fibrati vettoriali e fasci

Come per fibrati in rette e divisori, i concetti di fibrati vettoriali olomorfi e di fasci di $\mathcal{O}_X$ -moduli localmente liberi sono equivalenti, ovvero ad ogni fibrato vettoriale olomorfo è possibile associare un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli localmente libero e viceversa. Vediamo come fare questa associazione.

Definizione 1.4.6. Un *fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli* (anche detto $\mathcal{O}_X$ -modulo) è definito come:

per ogni $U \subset X$ aperto, $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo e per ogni $V \subset U$ aperto, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

è commutativo, dove le frecce verticali sono le restrizioni.

Definizione 1.4.7. Un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli $\mathcal{F}$ è *libero di rango n* se esiste un isomorfismo di fasci $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus n}$. $\mathcal{F}$ è *localmente libero di rango r* se esiste un ricoprimento aperto di X , $\{U_i\}$, detto ricoprimento trivializzante, tale che $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$.

Preso un fibrato vettoriale olomorfo di rango n su X , $\pi : E \longrightarrow X$, è possibile associare a questo un fascio considerando le sue sezioni.

Definiamo $\mathcal{E}(U) = \{s : U \longrightarrow E \mid \pi \circ s = id_U\}$, insieme delle sezioni di X su U . Allora $\mathcal{E}$ è un fascio, infatti è banalmente un prefascio e sia $U \subset X$, $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U , allora

- Sia $x \in U$, esiste i tale che $x \in U_i$. Siano $s, t \in \mathcal{E}(U)$ tali che, per ogni i , $s|_{U_i} = t|_{U_i}$, allora $s(x) = t(x)$.
- Siano $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$ per ogni i tali che $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ costruiamo la sezione globale puntualmente: preso $x \in U$, esiste i tale che $x \in U_i$, poniamo $s(x) := s_i(x)$. Questa definizione è ben posta in quanto, per ipotesi, non dipende dalla scelta di i .

Per definizione di trivializzazione, si ha

$$\{s : U_i \longrightarrow E \mid \pi \circ s = id_{U_i}\} \cong \{s : U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n \mid \pi_1 \circ s = id_{U_i}\}$$

dove π_1 è la proiezione sulla prima componente e $s : U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ è tale che $s(x) = (x, f(x))$ con f olomorfa da X in $\mathbb{C}^n$. Dunque $\{s : U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n \mid \pi_1 \circ s = id_{U_i}\} \cong \mathcal{O}_X(U_i)^{\oplus n}$ e $\mathcal{E}$, detto *fascio delle sezioni di X* , è localmente libero di rango n .

Viceversa, sia $\mathcal{F}$ un fascio localmente libero di rango r e $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto trivializzante. Per ogni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}|_{U_{ij}} & \\ \cong \swarrow & & \searrow \cong \\ \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus r} & \xrightarrow{\Psi_{ij}} & \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus r} \end{array}$$

per cui Ψ_{ij} è un isomorfismo di fasci. Si può mostrare che $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, \mathcal{O}_X^{\oplus r}) \cong M_r(\mathcal{O}_X(X))$, dunque $\Psi_{ij} \in \text{GL}_r(\mathcal{O}_X(U_{ij}))$. La commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{U_{ijk}}^{\oplus r} & & \\ & \nearrow \Psi_{ik} & \uparrow & \nwarrow \Psi_{jk} & \\ & \mathcal{F}|_{U_{ijk}} & & & \\ \mathcal{O}_{U_{ijk}}^{\oplus r} & \xleftarrow{\Psi_{ij}} & & \xrightarrow{\Psi_{jk}} & \mathcal{O}_{U_{ijk}}^{\oplus r} \end{array}$$

prova che i $\{\Psi_{ij}\}_{ij}$ soddisfano la condizione di cociclo e dunque $\{(U_i, \Psi_{ij})\}_{ij}$ definisce un fibrato vettoriale olomorfo di rango r .

Le due costruzioni sono una l'inversa dell'altra, per cui si ha una corrispondenza biunivoca.

1.5 Teorema dei coefficienti universali

Un risultato che verrà spesso citato nel capitolo seguente è quello dato dal teorema dei coefficienti universali. Ne riportiamo l'enunciato, per la dimostrazione si rimanda a [Wei94, capitolo 3.6].

Definiamo Ext^1 , che comparirà nell'enunciato. Per un teorema noto sappiamo che se H è un gruppo abeliano ammette una risoluzione, unica a meno di omotopia,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Se K è un altro gruppo abeliano so che la successione data da

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(H, K) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, K) \xrightarrow{\tilde{A}} \text{Hom}(\mathbb{Z}^m, K)$$

è esatta a sinistra ma non a destra. Possiamo continuare la successione in modo esatto aggiungendo il termine

$$\frac{\text{Hom}(\mathbb{Z}^m, K)}{\text{Im}(\tilde{A})} =: \text{Ext}^1(H, K).$$

Applichiamo questa definizione in alcuni esempi.

Esempio 1.5.1. Calcoliamo $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$ con $n \in \mathbb{Z}$. Consideriamo la risoluzione

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{A} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

dove la mappa A è la moltiplicazione per n . Applicando il funtore Hom si ottiene la successione

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{A}} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$$

dunque, per la definizione data, $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n$.

Esempio 1.5.2. Calcoliamo $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}, G)$, dove G è un qualsiasi gruppo abeliano. La risoluzione di $\mathbb{Z}$ è

$$0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{A} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dunque la mappa A è nulla. Allora $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}, G) = 0$.

Teorema 1.5.3 (Teorema dei coefficienti universali per la coomologia). *Se un complesso di catene C di gruppi abeliani liberi ha gruppi di omologia*

$H_n(C)$, allora i gruppi di coomologia $H^n(C, G)$ del complesso di co-catene $\text{Hom}(C_n, G)$, dove G è un gruppo abeliano, sono determinati dalla sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C, G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0.$$

Dal teorema segue che se $H_{n-1}(C)$ è libero da torsione, allora $H^n(C, G) \cong \text{Hom}(H_n(C), G)$.

1.6 Spazi proiettivi pesati

Per i risultati che seguono, è utile richiamare la definizione di spazio proiettivo pesato.

Definizione 1.6.1. Sia $a = (a_0, \dots, a_n)$ con $a_i \in \mathbb{N}$ per ogni i , e la corrispondente azione pesata di $\mathbb{C}^*$ su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (che denotiamo con $\mathbb{C}^{*(a)}$) data da

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda^{a_0} x_0, \dots, \lambda^{a_n} x_n)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Gli scalari $a_0, \dots, a_n$ sono chiamati *pesi*.

Fissati $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, definiamo lo *spazio proiettivo di pesi* $(a_0, \dots, a_n)$ come

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^{*(a)}.$$

Capitolo 2

Varietà Jacobiana

In questo capitolo ci concentreremo sulla definizione della varietà Jacobiana di una superficie di Riemann X connessa e compatta di genere g , sulla sua interpretazione come toro complesso costruito a partire dagli integrali delle forme differenziali olomorfe su X e come lo spazio parametrizzante le classi di divisori di grado zero su di essa.

Nel seguito introdurremo la definizione formale della varietà Jacobiana come quoziente di $H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$ per $H_1(X, \mathbb{Z})$.

In tutto il capitolo, se non specificato, X denoterà una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g , e dunque proiettiva, dove il genere indica $\dim H^1(\mathcal{O}_X)$, fascio delle funzioni olomorfe su X .

2.1 Definizione della varietà Jacobiana

Descriviamo ora in modo esplicito la costruzione della varietà Jacobiana $\text{Jac}(X)$ associata a X .

Osservazione 2.1.1. Sia ω una 1-forma olomorfa su X . Dalla formula di Stokes segue che per ogni c catena di $C_2(X)$, gruppo abeliano libero delle 2-catene su X .

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0$$

poiché ω è chiusa (ciò segue dal fatto che localmente $\omega = f(z)dz$ con $z \in \mathbb{C}$ e f olomorfa, quindi vale il teorema di Cauchy-Riemann).

Definiamo la mappa di valutazione dell'integrale di ω lungo le 1-catene di X

$$\begin{array}{ccc} \int \omega : C_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ H_1(X, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

che passa al quoziente per l'osservazione 2.1.1.

Osserviamo che, fissato $c \in H_1(X, \mathbb{Z})$, la funzione $\int_c$ che manda ω in $\int_c \omega$ appartiene a $H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$, quindi è ben definita la mappa

$$\Phi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^\vee, \quad c \mapsto \int_c.$$

Definizione 2.1.2. Gli elementi dell'immagine di Φ sono chiamati *periodi*.

Osservazione 2.1.3. Indichiamo con Λ l'insieme dei periodi. I periodi λ_i sono $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti. Infatti, fissata una base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ di Ω_X^1 e una base $\{\delta_1, \dots, \delta_{2g}\}$ di $H_1(X, \mathbb{Z})$, se consideriamo la combinazione $\mathbb{R}$ lineare $\sum k_i \lambda_i = 0$, allora

$$\begin{aligned} \sum k_i \int_{\delta_i} \omega_j = 0 \quad \forall j &\Rightarrow \sum k_i \int_{\delta_i} \overline{\omega_j} = 0 \quad \forall j, \\ &\Rightarrow \sum k_i [\delta_i] = 0 \in H_1(X, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

poiché $\{\omega_j, \overline{\omega_j}\}$ generano $H_{\text{DR}}^1(X)$ per la scomposizione di Hodge. Dal fatto che $\{\delta_i\}$ è una base per $H_1(X, \mathbb{Z})$, segue che $k_i = 0$ per ogni i . Dunque Λ è un reticolo di rango $2g$ e, perché $rk(H_1(X, \mathbb{Z})) = 2g$, Φ è iniettiva.

Possiamo dunque definire la varietà Jacobiana associata ad X .

Definizione 2.1.4. $\text{Jac}(X) := \frac{H^0(X, \Omega^1(X))^\vee}{H_1(X, \mathbb{Z})}$.

Esempio 2.1.5. Calcoliamo ora la varietà Jacobiana di un toro complesso, in particolare vogliamo mostrare che se X è un toro complesso allora $\text{Jac}(X) \cong X$.

Mostriamo dapprima che se X è una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g , allora

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_X^1) = g.$$

Per la scomposizione di Hodge

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^q(X, \Omega_X^p)$$

quindi $H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega_X^1) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Come mostrato in [Huy05, corollario 3.2.12, p. 129], il coniugio definisce un isomorfismo tra $H^0(X, \Omega_X^1)$ e $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, pertanto hanno stessa dimensione come $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali.

Per il teorema dei coefficienti universali, poiché $H_0(X, \mathbb{Z})$ non ha torsione e $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$,

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Quindi

$$2g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1)$$

da cui $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1) = g$.

Nel nostro caso $g = 1$, quindi $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1) = 1$.

Consideriamo il reticolo $\Gamma = \{m \cdot w_1 + n \cdot w_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ con w_1 e w_2 numeri complessi linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, un esempio è raffigurato in Figura 2.1.

Sia $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ la proiezione naturale dove $X = \mathbb{C}/\Gamma$. Da quanto mostrato segue che dz genera $H^0(X, \Omega_X^1)$ visto come $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Dunque il sottogruppo dei periodi $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ è $\Lambda = \{\int_c dz \mid c \in H_1(X, \mathbb{Z})\}$.

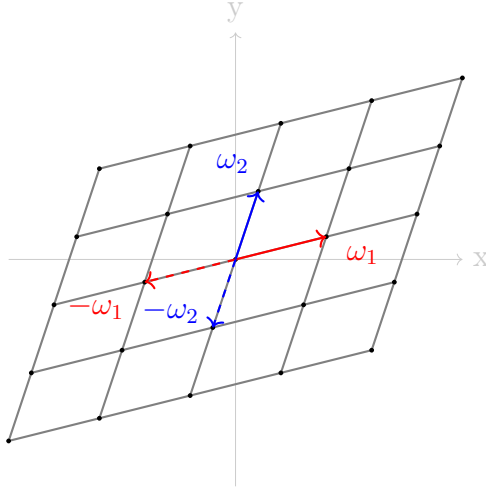


Figura 2.1: Reticolo generato dai vettori w_1 e w_2 .

D'altra parte, se denotiamo

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t \cdot w_1$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t \cdot w_2$$

abbiamo che le classi $a = \pi \circ \gamma_1$ e $b = \pi \circ \gamma_2$ generano il gruppo $H_1(X, \mathbb{Z})$. Ne segue che $\Lambda = \{m \cdot \int_a dz + n \cdot \int_b dz \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Siccome l'integrale di una forma lungo il pushforward di un cammino è l'integrale del pullback della forma lungo il cammino, ne segue che

$$\int_a dz = \int_{\gamma_1} dz = w_1, \quad \int_b dz = \int_{\gamma_2} dz = w_2$$

allora $\Lambda = \Gamma$ e dunque $\text{Jac}(X) \cong \mathbb{C}/\Lambda = \mathbb{C}/\Gamma = X$.

2.2 Mappa di Abel-Jacobi

Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g . Scegliamo p_0 punto base su X e, per ogni punto $p \in X$, un cammino γ_p su X da

p_0 a p . Definiamo la mappa

$$\alpha : X \longrightarrow \Omega^1(X)^\vee$$

dove

$$\alpha(p)(\omega) = \int_{\gamma_p} \omega.$$

Questa funzione non è ben definita, dipende infatti dalla scelta del cammino γ_p . Sia γ'_p un altro cammino su X da p_0 a p , allora

$$\forall \omega \in \Omega^1(X) \quad \int_{\gamma_p} \omega = \int_{\gamma'_p} \omega + \int_{\gamma_p - \gamma'_p} \omega.$$

Osserviamo che $\gamma_p - \gamma'_p \in H_1(X, \mathbb{Z})$ e quindi $\omega \mapsto \int_{\gamma_p - \gamma'_p} \omega$ è un periodo. Dunque la mappa α è ben definita modulo il sottogruppo dei periodi Λ .

Poiché $\Omega^1(X)^\vee / \Lambda = \text{Jac}(X)$, è ben definita la mappa

$$\alpha : X \longrightarrow \text{Jac}(X).$$

Definizione 2.2.1. Questa mappa è chiamata mappa di *Abel-Jacobi* per X .

Osservazione 2.2.2. α dipende dal punto base scelto p_0 ed è un embedding olomorfo, come mostrato in [FK92, capitolo 3.6].

Estensione della mappa di Abel-Jacobi ai divisori di X In questo paragrafo procederemo ad estendere la mappa di Abel-Jacobi al gruppo $\text{Div}(X)$ dei divisori su X .

Ricordiamo che i divisori su una superficie di Riemann compatta sono combinazioni $\mathbb{Z}$ -lineari di punti della superficie.

Definiamo dunque

$$\alpha : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

estendendo α per linearità, ovvero $\alpha(\sum_p n_p p) = \sum_p n_p \alpha(p)$.

Consideriamo ora la restrizione di A ai divisori di grado 0 su X :

$$\alpha_0 : \text{Div}_0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X).$$

Osserviamo che la mappa α_0 è un morfismo di gruppi.

Lemma 2.2.3. *La mappa di Abel-Jacobi definita sui divisori di grado 0 non dipende dalla scelta del punto base p_0 .*

Dimostrazione. Supponiamo di avere un altro punto base p'_0 . Sia γ un cammino da p_0 a p'_0 e, per ogni $p \in X$, γ'_p un cammino da p'_0 a p su X . Allora per ogni $\omega \in \Omega^1(X)$

$$\sum n_p \alpha(p)(\omega) = \sum n_p \int_{\gamma_p} \omega = \sum n_p \left(\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma'_p} \omega \right).$$

Quindi, fissata una base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ per $\Omega^1(X)$, il vettore immagine cambia di un fattore $j = (\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g)^T \bmod \Lambda \in \text{Jac}(X)$. Il vettore j è indipendente da p , quindi se $\sum n_p = 0$, ovvero $\sum n_p p \in \text{Div}_0(X)$, allora $\alpha(\sum n_p)$ cambiando punto base differisce di un fattore $\sum_p n_p j = j \sum_p n_p = 0$.

□

Enunciamo ora il teorema di inversione di Jacobi, che sarà fondamentale per dimostrare l'isomorfismo tra $\text{Div}_0(X)/\sim$ e $\text{Jac}(X)$, dove $\sim$ indica la relazione di equivalenza lineare tra divisori.

Teorema 2.2.4 (Inversione di Jacobi). *Data X una superficie di Riemann compatta di genere g , $p_0 \in X$ e $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ una base per $H^0(X, \Omega_X^1)$, per ogni $\lambda \in \text{Jac}(X)$ possiamo trovare g punti $p_1, \dots, p_g \in X$ tali che*

$$\alpha_0\left(\sum (p_i - p_0)\right) = \lambda,$$

ovvero, per ogni vettore $\lambda \in \mathbb{C}^g$, possiamo trovare punti $p_1, \dots, p_g \in X$ e cammini α_i da p_0 a p_i tali che

$$\sum_i \int_{\alpha_i} \omega_j = \lambda_j \quad \forall j.$$

Inoltre, per un generico $\lambda \in \mathbb{C}^g$, il divisore $\sum p_i$ è unico.

Per la dimostrazione si rimanda a [GH94, capitolo 2.2].

2.3 Teorema di Abel

In questa sezione dimostreremo il teorema di Abel, il quale afferma che il nucleo di α_0 coincide con l'insieme dei divisori principali di X .

Questo risultato attesta che $\text{Div}_0(X)/\sim$ è isomorfo a $\text{Jac}(X)$. Mostrando poi l'isomorfismo tra $\text{Div}_0/\sim$ e $\text{Pic}^0(X)$, si avrà $\text{Pic}^0(X) \cong \text{Jac}(X)$.

In vista della dimostrazione del teorema, enunciamo la seguente proposizione.

Proposizione 2.3.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta e f una funzione meromorfa di X , allora*

$$\sum_{p \text{ zero di } f} m_p p + \sum_{q \text{ polo di } f} m_q q = 0$$

dove m_p e m_q sono gli ordini rispettivamente degli zeri e dei poli di f .

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione meromorfa, con X superficie di Riemann compatta. Se f è costante non nulla allora è verificata banalmente la tesi poiché f non ha né poli né zeri. Altrimenti, per [Mir95, proposizione 3.13] sappiamo che ad f è associata la funzione $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ olomorfa tale che $\tilde{f}(x) = [f(x) : 1]$ se x non è un polo di f , $\tilde{f}(x) = [1 : 0]$ (punto all'infinito) se x è un polo di f . Per [Mir95, lemma 4.7], se p è uno zero di f , $\text{mult}_p(\tilde{f}) = \text{ord}_p(f)$, se p è un polo di f , $\text{mult}_p(\tilde{f}) = -\text{ord}_p(f)$. Essendo X e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ compatte, la funzione grado che ad ogni $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ associa

$$d_y(\tilde{f}) = \sum_{p \in \tilde{f}^{-1}(y)} \text{mult}_p(\tilde{f})$$

è costante. Consideriamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Allora

$$\sum_{p \text{ zero di } f} m_p = d_{[0:1]} = d_{[1:0]} = \sum_{q \text{ polo di } f} m_q$$

□

Teorema 2.3.2 (di Abel). *Sia S una superficie di Riemann di genere g , e sia $D = \sum_{\lambda} (p_{\lambda} - q_{\lambda})$ un divisore di grado 0 su S . Allora $D \in \ker(\alpha_0)$ se e solo se D è principale, ovvero esiste una funzione meromorfa non identicamente nulla f tale che $D = \operatorname{div}(f) = (f)$.*

Dimostrazione. Mostriamo l'implicazione per cui se D è principale, $D = (f)$, allora $D \in \ker(\alpha_0)$.

Consideriamo la mappa

$$\Psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{Jac}(X), \quad [\lambda_0 : \lambda_1] \mapsto \alpha_0((\lambda_0 f - \lambda_1)).$$

Osserviamo che per ogni $[\lambda_0 : \lambda_1]$, $(\lambda_0 f - \lambda_1)$ è un divisore di grado 0. Infatti f è meromorfa da una superficie di Riemann compatta ad un'altra, quindi segue dalla proposizione ausiliaria, inoltre la funzione che vale costantemente -1 non ha zeri né poli. Inoltre, preso $\mu \in \mathbb{C}^*$, $\mu \lambda_0 f - \mu \lambda_1$ è ancora meromorfa e $(\mu \lambda_0 f - \mu \lambda_1)$ ha grado 0. Quindi Ψ è ben posta ed è olomorfa.

Supponiamo Ψ non sia costante, allora è aperta poiché olomorfa ed anche chiusa per il teorema di Hausdorff sui compatti. $\operatorname{Jac}(X)$ è connessa quindi Ψ è suriettiva; da ciò segue che è un rivestimento ramificato di $\operatorname{Jac}(X)$.

Per la formula di Riemann-Hurwitz si ha:

$$\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \deg(\Psi) \chi(\operatorname{Jac}(X)) - \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (\operatorname{ord}_p(\Psi) - 1)$$

È noto che $\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 2$, $\chi(\operatorname{Jac}(X)) = 2 - 2g$, dove per g si intende il genere di $\operatorname{Jac}(X)$ e $\deg \Psi \geq 0$.

Per $g \geq 1$ si ha $2 - 2g \leq 0$; di conseguenza, il membro sinistro dell'uguaglianza risulterebbe positivo mentre quello destro negativo, da cui si ottiene una contraddizione.

Dunque Ψ è costante e in particolare

$$\alpha_0((f)) = \Psi([1 : 0]) = \Psi([0 : 1]) = \alpha_0((-1)) = 0$$

in quanto $(-1) = 0$.

Mostriamo ora il viceversa, ovvero che se $D = \sum_{\lambda}(p_{\lambda} - q_{\lambda})$ è un divisore di grado 0 e $\alpha_0(D) = 0$ allora D è il divisore associato ad una funzione meromorfa.

Trasliamo il problema dalla ricerca di una funzione meromorfa a quella di una 1-forma meromorfa. Infatti, se f è una funzione meromorfa con $(f) = \sum_{\lambda}(p_{\lambda} - q_{\lambda})$, allora la forma differenziale del terzo tipo, ovvero una forma meromorfa con soli poli semplici,

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} d \log f = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f}$$

è meromorfa con divisore polare

$$(\eta)_{\infty} = -\left(\sum_{\lambda}(p_{\lambda} - q_{\lambda})\right).$$

Osserviamo che se p è un polo di f di ordine $-d$, $d > 0$, allora $\text{ord}_p f' = -d + 1$ e dunque $\text{ord}_p \frac{f'}{f} = (1 - d) + d = 1$. Allora p è polo semplice di $\frac{f'}{f}$.

Inoltre

$$\text{Res}_{p_{\lambda}}(\eta) = \frac{a_{\lambda}}{2\pi i} \quad \text{Res}_{q_{\lambda}}(\eta) = \frac{b_{\lambda}}{2\pi i}$$

Per il principio dell'argomento, $\oint \eta = \text{ord}_{p_{\lambda}} f = a_{\lambda}$, dove l'integrale è fatto lungo una curva chiusa contenente il solo zero p_{λ} . Analogamente per i poli.

Possiamo scrivere $D = \sum a_i p_i + \sum b_i q_i$ con p_i e q_i distinti, inoltre $\int_{\gamma} \eta \in \mathbb{Z}$, dove γ è un cammino chiuso in $S \setminus \{p_i, q_i\}$.

Viceversa, se η è una qualsiasi forma meromorfa con queste tre proprietà, possiamo porre

$$f(p) = \exp\left(2\pi i \int_{p_0}^p \eta\right)$$

ottenendo una funzione meromorfa ben definita con $(f) = D$.

Quindi dobbiamo mostrare che per $D = \sum(p_\lambda - q_\lambda)$, con $\alpha_0(D) = 0$, esiste una forma meromorfa del terzo tipo η , olomorfa su $S \setminus \{p_i, q_i\}$ con residuo a_λ in p_λ e b_λ in q_λ e avente tutti i periodi interi.

Il seguente lemma mostra che possiamo trovare una forma meromorfa con le singolarità richieste.

Lemma 2.3.3. *Dato un insieme finito di punti $\{p_\lambda\}$ su S come nel teorema e numeri a_λ tali che $\sum a_\lambda = 0$, esiste una forma differenziale del terzo tipo su S olomorfa in $S \setminus \{p_\lambda\}$ e avente residui a_λ in p_λ .*

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza esatta corta di fasci su S

$$0 \longrightarrow \Omega^1(S) \longrightarrow \Omega^1\left(\sum p_\lambda\right) \xrightarrow{res} \bigoplus \mathbb{C}_{p_\lambda} \longrightarrow 0$$

dove $\Omega^1(\sum p_\lambda)$ indica il fascio delle forme olomorfe su $S \setminus \{p_\lambda\}$ e res manda η nel vettore $(res_{p_1}(\eta), \dots, res_{p_k}(\eta))$.

Ricordiamo che la dualità di Serre attesta che se E è un fibrato vettoriale su S

$$H^k(E) \cong H^{n-k}(E^\vee \otimes K_S)^\vee$$

dove n è la dimensione di S e K_S è il divisore canonico di S .

Nel nostro caso $\dim S = 1$, quindi i fibrati tangente e cotangente hanno rango 1 e $K_S = \Omega^1(X)$. Allora si ha

$$H^1(\Omega_S^1) = H^0(\Omega_S^{1\vee} \bigoplus \Omega_S^1) = H^0(\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$$

dove l'isomorfismo con $\mathbb{C}$ deriva dal fatto che S è compatta e implica che $\dim H^1(\Omega_S^1) = 1$. Se consideriamo ora la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow H^0(\Omega_S^1) \longrightarrow H^0(\Omega^1(\sum p_\lambda)) \xrightarrow{res} \bigoplus \mathbb{C}_j \xrightarrow{\delta} H^1(\Omega_S^1) \longrightarrow \dots$$

poiché $\dim H^1(\Omega_S^1) = 1$, dal teorema del rango segue che:

$$\text{codim}(\text{Im}(res)) = \dim H^0(\bigoplus \mathbb{C}) - \dim \text{Im}(res) = \dim H^0(\bigoplus \mathbb{C}) - \ker(\delta) \leq 1.$$

Per il teorema dei Residui, se η è una forma meromorfa su una superficie di Riemann compatta, $\sum_{p \text{ polo}} \text{Res}_p(\eta) = 0$. Quindi $\text{Im}(res)$ è contenuta nell'iperpiano $\{(a_1, \dots, a_n) \mid \sum a_i = 0\}$, da cui si ottiene che per ogni $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\sum a_i = 0$, esiste $\eta \in \Omega_S^1$ con poli in $\{p_\lambda\}$ avente come residui i valori a_i .

□

Fissiamo ora una base $\{\delta_1, \dots, \delta_{2g}\}$ di $H_1(S, \mathbb{Z})$ tale che nessun punto tra i p_i e q_i giaccia su uno dei cammini δ_j . Sia $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ una base di $H^0(S, \Omega_S^1)$ normalizzata rispetto a $\{\delta_1, \dots, \delta_{2g}\}$, ovvero

$$\int_{\delta_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Per il lemma, esiste una forma meromorfa del terzo tipo con residui $\frac{a_i}{2\pi i}$ in p_i e $\frac{b_i}{2\pi i}$ in q_i . Due forme di questo tipo differiscono sempre per una funzione olomorfa su S . Quindi esiste η_0 tale che

$$\{\eta \mid \text{Res}_{p_\lambda}(\eta) = \frac{a_i}{2\pi i}, \text{Res}_{q_\lambda}(\eta) = \frac{b_i}{2\pi i}\} = \Omega_S^1 + \eta_0 \subseteq \Omega_S^1(\sum p_\lambda).$$

Fissato δ_i , consideriamo la funzione lineare

$$\phi_i : \Omega_S^1 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \eta \mapsto \int_{\delta_i} \eta.$$

Per la normalizzazione fatta su $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$, il nucleo di ϕ_i è un iperpiano. Intersecando $\Omega_S^1 + \eta_0$ con $\ker(\phi_i)$ ottengo uno spazio di dimensione $g - 1$.

Ripetendo il ragionamento per $i = 1, \dots, g$, $\Omega_S^1 \cap \ker(\phi_1) \cap \dots \cap \ker(\phi_g)$ ha dimensione 0. Pertanto esiste un'unica forma η tale che

$$N^i := \int_{\delta_i} \eta = 0 \quad i = 1, \dots, g.$$

Gli N^i sono chiamati *A-periodi*.

Procediamo ora ad alterare opportunamente η affinché i *B-periodi*

$$N^{g+i} := \int_{\delta_{g+i}} \eta \quad i = 1, \dots, g$$

siano interi. Possiamo farlo senza alterare le singolarità di η o l'integralità dei suoi A-periodi aggiungendo una combinazione lineare intera delle forme ω_i .

Per fare ciò, ricaviamo i B-periodi dalla legge di reciprocità [GH94, capitolo 2.2 p 230].

Siccome $N^i = 0$, con $i = 1, \dots, g$, per ogni i si ha:

$$N^{g+i} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \int_{p_0}^{p_{\lambda}} \omega_i + \sum_{\lambda} b_{\lambda} \int_{p_0}^{q_{\lambda}} \omega_i = \sum_{\lambda} \int_{q_{\lambda}}^{p_{\lambda}} \omega_i$$

per qualche cammino β_{λ} da q_{λ} a p_{λ} .

Per ipotesi $\alpha_0(D) = (\sum_{\lambda} \int_{\beta_{\lambda}} \omega_1, \dots, \sum_{\lambda} \int_{\beta_{\lambda}} \omega_g) \in \Lambda$, quindi esiste $\gamma \in H_1(S, \mathbb{Z})$ tale che

$$\sum_{\lambda} \int_{\beta_{\lambda}} \omega_i = \int_{\gamma} \omega_i$$

per ogni i , con $\gamma = \sum_{k=1}^{2g} m_k \delta_k$, $m_k \in \mathbb{Z}$. Allora $N^{g+i} = \int_{\gamma} \omega_i$ per ogni i . Posto $\tilde{\eta} = \eta - \sum_{k=1}^g m_{g+k} \omega_k$, i periodi $\tilde{N}^i$ di $\tilde{\eta}$ sono:

$$\tilde{N}^i = -m_{g+i} \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{N}^{g+i} = N^{g+i} - \sum_{k=1}^g m_{g+k} \int_{\delta_{g+i}} \omega_k = \sum_{k=1}^{2g} m_k \int_{\delta_k} \omega_i - \sum_{k=1}^g m_{g+k} \int_{\delta_{g+i}} \omega_k = m_i \in \mathbb{Z}.$$

con $i = 1, \dots, g$. Quindi $\tilde{\eta}$ ha tutti i periodi interi e, posta

$$f(p) = \exp(2\pi i \int_{p_0}^p \tilde{\eta})$$

si ottiene $(f) = D$.

□

Osservazione 2.3.4. Dal teorema di Abel consegue che quozientare $\text{Div}_0(X)$ per $\ker(\alpha_0)$ corrisponde a quozientare per la relazione di lineare equivalenza tra divisori.

Unendo i risultati dei teoremi di Abel e di inversione di Jacobi, si ottiene

$$\text{Jac}(X) \cong \text{Div}_0(X)/\sim .$$

2.4 Definizione di Pic^0

Sia X una varietà complessa proiettiva. Consideriamo il morfismo di fasci

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{O}_X &\longrightarrow \mathcal{O}_X^* \\ f &\longmapsto e^f \end{aligned}$$

indotto dalla funzione esponenziale che per ogni $U \subseteq X$ associa ad $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}$ l'insieme $\{f : U \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \mid f \text{ olomorfa}\} \subseteq \mathcal{O}_X^*(U)$.

Il morfismo $\exp$ è suriettivo, ciò segue dall'esistenza locale del logaritmo complesso, quindi data $g \in \mathcal{O}_X^*(U)$, localmente esiste $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $g = e^f$.

Mostriamo che $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$, fascio delle funzioni che valgono costantemente $2\pi i k$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Il fascio $\ker(\exp)$ è definito, per ogni aperto U , da

$$\ker(\exp)(U) = \ker(\exp(U)).$$

Sia $U \subseteq \mathcal{O}_X$, $f \in \ker(\exp(U))$ se e solo se $e^{f(z)} = 1$ per ogni $z \in U$ (ricordiamo che il fascio $\mathcal{O}_X^*$ viene considerato come gruppo moltiplicativo). Questo accade se e solo se $f \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Quindi $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Allora la successione di fasci, chiamata *successione esponenziale*,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

è esatta. Per [Har77, capitolo 2, proposizione 1.3], data una successione esatta corta di fasci esiste una successione esatta lunga in coomologia. Quindi data la successione esponenziale, esiste la successione esatta lunga

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{h} & H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \\
 & & & & \searrow^{\delta_0} & & \\
 & & H^1(X, \mathbb{Z}) & \xleftarrow{g} & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{f} & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \\
 & & & & \searrow_{c_1} & & \\
 & & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\quad} & H^2(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Osservazione 2.4.1. 1. La mappa $h : H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ è indotta dal morfismo di fasci $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$. Se X è una superficie di Riemann compatta allora, per il principio del massimo, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$, $H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathbb{C}^*$ e h è suriettiva.

2. Dal punto 1., per esattezza, segue che $\ker(\delta_0) = \text{Im}(h) = H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$. Quindi δ_0 è la mappa nulla e g è iniettiva.

Definizione 2.4.2. Il morfismo c_1 nella successione esatta lunga è detto *prima classe di Chern*. Definiamo

$$\text{Pic}^0(X) := \ker(c_1).$$

Per esattezza, $\text{Pic}^0(X) \cong \text{Im}(f) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X) / \ker(f)$ dove $\ker(f) = \text{Im}(g) \cong H^1(X, \mathbb{Z})$. Di conseguenza

$$\text{Pic}^0(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z}).$$

Vogliamo mostrare che, se X è una superficie di Riemann compatta di genere g , $\text{Pic}^0(X)$ ha una struttura di toro complesso, $\mathbb{C}^g / \Lambda$. A tal fine proviamo che:

1. se X ha genere g allora $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^g$
2. $\text{Im}(g)$ è un reticolo in $H^1(X, \mathcal{O}_X)$

Iniziamo col dimostrare il primo punto. Per il teorema di scomposizione di Hodge

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^{0,1}(X) \oplus H^{1,0}(X)$$

dove $H^{0,1}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ e $H^{1,0}(X) = H^0(X, \Omega_X^1)$. Sappiamo che $H^0(X, \Omega_X^1)$ e $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ hanno stessa dimensione come $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali.

Il fatto che $H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}$ segue dal teorema dei coefficienti universali.

Calcoliamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_0(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

Osserviamo che $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ e se G, H sono due gruppi abeliani finitamente generati, $\text{Hom}(G \oplus H, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{C}) \oplus \text{Hom}(H, \mathbb{C})$. Nel nostro caso $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ (se ne fornisce una dimostrazione come appendice al paragrafo) e dunque

$$\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{2g} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}.$$

Poiché X è connessa, $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e dunque $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_0(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) = 0$. Otteniamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{2g} \longrightarrow 0$$

da cui $H_1(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}$. Pertanto, dalla scomposizione di Hodge segue che $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^g$.

Resta da mostrare il secondo punto, ovvero che $\text{Im}(g)$ è un reticolo in $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Osservazione 2.4.3. Per [Huy05, proposizione B.0.34], per ogni i , $H^i(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^i(X, \mathbb{Z})$, si ha quindi una corrispondenza tra la coomologia dei fasci e la coomologia singolare.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathbb{Z}) & \xhookrightarrow{g} & H^1(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow \phi & \nearrow \pi & \\ H^1(X, \mathbb{C}) & & \end{array}$$

dove π è la proiezione sulla prima componente $H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ e $H^0(X, \Omega_X^1) \cong \overline{H^1(X, \mathcal{O}_X)}$.

Osservazione 2.4.4. $H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Per il teorema dei coefficienti universali $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Sia $\{[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]\}$ un insieme di generatori di $H^1(X, \mathbb{Z})$, definisco la mappa ϕ come $\phi([\gamma_i]) = [\gamma_i] \otimes 1$. Le immagini $[\gamma_1] \otimes 1, \dots, [\gamma_{2g}] \otimes 1$ sono $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti per costruzione. Si ha che per ogni i , $[\gamma_i] \otimes 1 = l + \bar{k}$, allora la composizione $\pi \circ \phi$ manda

$$[\gamma] \mapsto [\gamma] \otimes 1 = l + \bar{k} \mapsto l.$$

Se $[\alpha] \in H^1(X, \mathbb{C})$, $[\alpha] = \sum [\gamma_i] \otimes \lambda_i$, dove la somma è finita. Definiamo il coniugio $\overline{[\alpha]} = \sum [\gamma_i] \otimes \overline{\lambda_i}$. Quindi $\overline{[\gamma_i] \otimes 1} = [\gamma_i] \otimes 1$ da cui segue che $l + \bar{k}$ è invariante per coniugio. Pertanto $l + \bar{k} = l + \bar{l}$.

Il nostro obiettivo è mostrare che $l_1, \dots, l_{2g}$ sono $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti. Sia $\sum_{i=1}^{2g} \alpha_i l_i = 0$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{i=1}^{2g} \alpha_i \bar{l}_i = 0$. Sommando si ha

$$\sum_{i=1}^{2g} \alpha_i (l_i + \bar{l}_i) = 0.$$

La tesi si ottiene ricordando che $l_i + \bar{l}_i = [\gamma_i] \otimes 1$, dove $[\gamma_1] \otimes 1, \dots, [\gamma_{2g}] \otimes 1$ sono $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti.

In conclusione, abbiamo dimostrato che posto $\Lambda := \text{Im}(g)$, $\text{Pic}^0(X) \cong \mathbb{C}^g / \Lambda$, dunque è un toro complesso.

2.4.1 Isomorfismo tra $\text{Div}_0(X)/\sim$ e $\text{Pic}^0(X)$

L'obiettivo di questo paragrafo è mostrare l'isomorfismo tra $\text{Div}_0(X)/\sim$ e $\text{Pic}^0(X)$.

Per quanto visto nel capitolo precedente, nel caso di X varietà complessa, compatta e proiettiva, il morfismo $\mathcal{O} : \text{Div}(X)/\sim \longrightarrow \text{Pic}(X)$ è un isomorfismo. Per il [Huy05, corollario 2.3.32], il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}(X)/\sim & \xrightarrow{\mathcal{O}} & \text{Pic}(X) \\ & \searrow \text{deg} & \swarrow c_1 \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

è commutativo.

Notiamo che $\text{Div}_0(X)/\sim$ coincide con il nucleo del morfismo

$$\text{deg} : \text{Div}(X)/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mentre, per definizione, $\text{Pic}^0(X) = \ker(c_1)$. Dalla commutatività del diagramma e dall'isomorfismo tra il gruppo dei divisori e dei fibrati vettoriali segue che

$$\text{Pic}^0(X) \cong \text{Div}_0(X)/\sim .$$

2.4.2 Appendice

In questo paragrafo dimostriamo il risultato riportato nella sezione 2.4, per cui $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, dove X è una superficie di Riemann di genere g .

Sappiamo che una tale superficie X è isomorfa al quoziente del $4g$ -gono i cui lati sono etichettati come a_i, b_i, a'_i, b'_i , con $i = 1, \dots, g$. I lati a_i, b_i hanno direzione antioraria, mentre i lati a'_i, b'_i direzione oraria, per ogni i . X è ottenuta identificando i lati a_i con a'_i , e b_i con b'_i per ogni i . Notiamo che tutti i $4g$ vertici sono identificati, dunque i lati a_i, b_i considerati su X sono cammini chiusi. Dotandolo di una struttura di CW-complesso è possibile calcolarne l'omologia attraverso l'omologia cellulare.

Considero il complesso

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dove gli apici indicano il numero di k -celle, con $k = 0, 1, 2$. Per un teorema noto sappiamo che questo complesso calcola l'omologia singolare di X , dunque

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_1 : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}}{\text{Im} \partial_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}}.$$

Scegliamo come generatori di $\mathbb{Z}^{2g}$ i lati a_i, b_i . Se la mappa ∂_1 non fosse nulla allora si avrebbe $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\text{Im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, che porta ad un assurdo in quanto X è connessa. Allora ∂_1 è la mappa nulla e $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Per calcolare la mappa $\partial_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$, consideriamo un generatore di $\mathbb{Z}$, $\sigma : D^2 \rightarrow X$, tale che $\sigma|_{\text{Fr}(D^2)} : \text{Fr}(D^2) \rightarrow X^{(1)}$ è la mappa di attaccamento della 2-cella (dove $X^{(1)}$ indica l'1-scheletro di X). Sappiamo che $\partial\sigma = \sum_{i=1}^g (\lambda_i a_i + \mu_i b_i)$. Il valore λ_i è il grado topologico della composizione

$$S^1 \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow X^{(1)}/X^{(1)} - a_i.$$

Analogamente per μ_i . Si osserva che il grado di questa mappa è 0 per ogni i . Da ciò segue che ∂_2 è nulla. Dunque $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

2.5 Isomorfismo tra una curva ellittica e la sua varietà Jacobiana

Sia E una curva ellittica, ovvero una curva algebrica proiettiva liscia di genere $g = 1$, dove il genere è definito come $\dim H^1(E, \mathcal{O}_E)$ e la topologia su E è quella di Zariski.

In virtù del teorema GAGA di Serre, l'associazione tra una varietà algebrica proiettiva liscia X e la varietà complessa X^{an} (lo spazio topologico soggiacente sono i punti di X e la topologia è quella euclidea) induce isomorfismi

tra i gruppi di coomologia dei fasci $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_{X^{an}}$

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^i(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}).$$

Ne segue che il genere rimane invariato passando dalla categoria algebrica, dove le varietà sono considerate con la topologia di Zariski, a quella analitica, dove la topologia usata è quella euclidea. Sempre il teorema GAGA di Serre ci assicura che questo passaggio da categoria algebrica a categoria analitica non fa perdere informazioni, ovvero $X \cong Y$ se e solo se $X^{an} \cong Y^{an}$.

Dunque, tornando al nostro caso, considerando E con la topologia euclidea, otteniamo una superficie di Riemann compatta di genere 1.

La mappa di Abel-Jacobi

$$\alpha : E \longrightarrow \text{Jac}(E)$$

è iniettiva. Per mostrarlo supponiamo per assurdo che non lo sia, ovvero che esistano $x, y \in E$, $x \neq y$, tali che $\alpha(x - y) = 0$. Per il teorema di Abel il divisore $x - y$ è principale, quindi esiste f meromorfa avente uno zero semplice in x e un polo semplice in y .

Per [Mir95, proposizione 3.13], esiste una funzione

$$\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

olomorfa di grado 1. Osserviamo che $\tilde{f}$ è un rivestimento non ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ad un solo foglio, quindi un omeomorfismo. Poiché $\tilde{f}$ è olomorfa, è un biolomorfismo. Ciò conduce ad una contraddizione in quanto $g(E) = 1$ mentre $g(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0$.

Poiché E e $\text{Jac}(X)$ sono compatte e connesse e α è olomorfa, α è anche suriettiva. Dunque

$$E \cong \text{Jac}(E).$$

Osservazione 2.5.1. Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato che se X è una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g , la varietà

Jacobiana di X è isomorfa a $\mathbb{C}^g/\Lambda$, toro complesso di dimensione g . Da ciò segue che X non è isomorfa a $\text{Jac}(X)$ per $g \neq 1$ in quanto hanno dimensioni diverse.

Capitolo 3

Una curva ellittica e il suo Pic^0 : un esempio esplicito

Abbiamo mostrato che una curva ellittica E è isomorfa attraverso la mappa di Abel-Jacobi alla sua varietà Jacobiana, e poiché E è una curva, al suo Pic^0 . In questo capitolo vediamo un esempio in cui il morfismo di Abel-Jacobi viene scritto con strumenti elementari di geometria proiettiva. Come mostrato nell'articolo [Don80], il $\text{Pic}^0(E)$ è isomorfo ad una curva ellittica S di grado 2 in $\mathbb{P}(1, 1, 2)$, costruita come rivestimento ramificato in quattro punti di $\mathbb{P}^1$, la quale, a sua volta, mostreremo essere isomorfa ad E attraverso la mappa di Veronese di grado 2.

3.1 Costruzione di una curva ellittica come intersezione di due quadriche lisce

Un modo per ottenere una curva ellittica è considerare l'intersezione di due quadriche lisce: sia dunque E la curva così definita.

Lemma 3.1.1. *Siano q_1 e q_2 due forme quadratiche su $\mathbb{C}^4$ di rango massimo, ovvero $\text{rk}(q_1) = \text{rk}(q_2) = 4$. Poste $X_1 = V(q_1)$ e $X_2 = V(q_2)$ le varietà*

lisce associate alle due quadriche, allora $E := X_1 \cap X_2$ è una curva ellittica quartica.

Dimostrazione. E è definita come intersezione di due quadriche lisce, dunque genericamente è una curva liscia. Mostriamo che E ha genere 1 e che dunque è una curva ellittica. Per farlo usiamo la formula di aggiunzione.

Sappiamo che $K_{\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$ e per [Huy05, proposizione 2.4.7], $\mathcal{N}_{E/\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_E(2)^{\oplus 2}$. Il determinante di $\mathcal{N}_{E/\mathbb{P}^3}$ è

$$\det \mathcal{N}_{E/\mathbb{P}^3} = \bigwedge^2 (\mathcal{O}_E(2) \oplus \mathcal{O}_E(2)) = \mathcal{O}_E(2) \otimes \mathcal{O}_E(2) = \mathcal{O}_E(4).$$

Dunque si ha

$$K_E = K_{\mathbb{P}^3}|_E \otimes \det \mathcal{N}_{E/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)|_E \otimes \mathcal{O}_E(4) = \mathcal{O}_E$$

e quindi, in quanto Ω_E^1 è un fibrato in rette, $g(E) = h^0(K_E) = 1$.

Infine, per il teorema di Bézout, [GH94][capitolo 3], E ha grado 4.

□

Osservazione 3.1.2. Sarebbe sufficiente partire da due forme quadratiche tali che la varietà E , definita come loro intersezione, risulti liscia.

3.2 Costruzione del rivestimento ramificato in quattro punti di $\mathbb{P}^1$

In questo paragrafo costruiamo esplicitamente una curva ellittica S di grado 2 come un rivestimento ramificato in quattro punti di $\mathbb{P}^1$ a partire da E . Per fare ciò partiamo da una pencil di quadriche generata da q_1 e q_2 .

Sia $Q_{\lambda,\mu} = \lambda q_1 + \mu q_2$, con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$, tale pencil di quadriche in $\mathbb{P}^3$. Sapendo che il rango di q_1 e q_2 è massimo, studiamo come varia il rango di $Q_{\lambda,\mu}$ al variare di $[\lambda : \mu]$ in $\mathbb{P}^1$.

Osservazione 3.2.1. Le due forme quadratiche q_1 e q_2 commutano, dunque è possibile diagonalizzarle simultaneamente e riscriverle nella forma $q_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ e $q_2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ in generale, ottenendo le corrispondenti matrici associate

$$M_{q_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{q_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Rispetto a M_{q_1} e M_{q_2} , la matrice associata a $Q_{\lambda, \mu}$ è

$$M_{Q_{\lambda, \mu}} = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \alpha_4 \mu \end{pmatrix}.$$

È allora evidente che per i punti $[\alpha_1 : 1], [\alpha_2 : 1], [\alpha_3 : 1], [\alpha_4 : 1]$ in $\mathbb{P}^1$, il rango di $Q_{\lambda, \mu}$ diminuisce da 4 a 3.

Consideriamo $\mathfrak{X} := \{([\lambda : \mu], [\underline{x}]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \mid \lambda q_1(\underline{x}) + \mu q_2(\underline{x}) = 0\} \subset \mathbb{P}^1_{[\lambda : \mu]} \times \mathbb{P}^3_{[\underline{x}]}$ e le due mappe di proiezione

$$\pi_1 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^3, \quad \pi_2 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Lemma 3.2.2. *La mappa π_1 corrisponde alla mappa di scoppimento di $\mathbb{P}^3$ lungo la curva E .*

Dimostrazione. Per un'introduzione agli scoppamenti si rimanda a [Huy05, capitolo 2.5]. Se $x \in \mathbb{P}^3 \setminus E$ la fibra di x attraverso π_1 corrisponde ad un punto in $\mathbb{P}^1$.

Se $x \in E$ allora $q_1(x) = q_2(x) = 0$ e dunque ogni punto di $\mathbb{P}^1$ soddisfa l'equazione $0 = 0$, perciò $\pi_1^{-1}(x) = \mathbb{P}^1$.

□

Vogliamo ora studiare la mappa π_2 . Dimostriamo prima i seguenti lemmi che ci aiuteranno nella classificazione delle fibre di π_2 .

Lemma 3.2.3. *Ogni quadrica liscia in $\mathbb{P}^3$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'immersione di Segre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\xrightarrow{\Sigma_{1,1}} \mathbb{P}^3 \\ ([s : t], [u : v]) &\longmapsto [su : sv : tu : tv] \end{aligned}$$

Se le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^3$ sono denotate con x, y, z, w , è facilmente verificabile che $\Sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = V(xw - yz)$, ovvero $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si immerge in $\mathbb{P}^3$ come una quadrica liscia. Dall'algebra lineare sappiamo che due forme quadratiche sono congruenti su $\mathbb{C}$ se e solo se hanno stesso rango, da cui segue che le quadriche di rango massimo, e quindi lisce, costituiscono un'unica classe di congruenza. Prese due quadriche lisce, esiste un cambio di base che porta l'una nell'altra. Ad un tale cambio di base corrisponde un isomorfismo tra le varietà algebriche associate alle quadriche lisce. Pertanto, ogni quadrica liscia è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. □

Lemma 3.2.4. *Il cono sulla seconda Veronese di $\mathbb{P}^1$, $\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$, è una quadrica singolare di rango 3.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la mappa di Veronese di grado 2 è

$$\begin{aligned} \nu_2 : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [s : t] &\longmapsto [s^2 : st : t^2] \end{aligned}$$

e dunque $\nu_2(\mathbb{P}^1) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0x_2 - x_1^2 = 0\}$ è una conica liscia in $\mathbb{P}^2$. Costruiamo il cono su di essa: consideriamo $\nu_2(\mathbb{P}^1)$ in $\mathbb{P}^3$ e identifichiamo il piano su cui giace con $\{x_2 = 0\} \in \mathbb{P}^3$. Scegliamo come vertice del cono il punto $v = [0 : 0 : 0 : 1]$ e definiamo

$$\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1)) := \bigcup_{p \in \nu_2(\mathbb{P}^1)} \langle v, p \rangle$$

dove $\langle v, p \rangle$ indica la retta passante per v e per p . Dunque il cono è definito come l'insieme di tutte le rette che collegano v ai punti di $\nu_2(\mathbb{P}^1)$.

I punti del cono sono della forma $[\lambda p_0 : \lambda p_1 : \lambda p_2 : \mu]$ con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ (dove $p = [p_0 : p_1 : p_2] \in \nu_2(\mathbb{P}^1)$). Pertanto l'equazione che definisce $\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$ è la stessa di $\nu_2(\mathbb{P}^1)$:

$$\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1)) = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 x_1 - x_2^2 = 0\}.$$

Vista in $\mathbb{P}^3$ però diventa una quadrica singolare, con punto di singolarità $[0 : 0 : 0 : 1]$, di rango 3. $\square$

Osservazione 3.2.5. Dalla classificazione delle forme quadratiche su $\mathbb{C}$ e dalla definizione di genericità nella topologia di Zariski, si ha che una generica quadrica singolare in $\mathbb{P}^3$ ha rango 3. Da ciò segue che, per quanto visto prima, tutte le quadriche (generiche) singolari sono isomorfe a $\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$.

Torniamo allo studio di π_2 . Per definizione $\pi_2^{-1}([\lambda : \mu]) = V(Q_{\lambda, \mu}) \subset \mathbb{P}^3$, per ogni $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$. Posto $\Delta := \{[\alpha_1 : 1], \dots, [\alpha_4 : 1]\}$, dai lemmi precedenti possiamo affermare che

1. se $x \notin \Delta \Rightarrow \pi_2^{-1}(x)$ è una quadrica liscia in $\mathbb{P}^3$, ovvero una copia di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
2. se $x \in \Delta \Rightarrow \pi_2^{-1}(x) = \mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$, cono sulla Veronese di grado 2 di $\mathbb{P}^1$, quadrica singolare di rango 3.

Osservazione 3.2.6. Da quanto osservato risulta che $\pi_2 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è una fibrazione in quadriche non localmente triviale con 4 fibre singolari.

Consideriamo ora la corrispondenza di incidenza

$$I := \{([\lambda : \mu], [\Lambda]) \in \mathbb{P}^1 \times Gr(2, 4) \mid \mathbb{P}(\Lambda) \subset V(Q_{\lambda, \mu})\}$$

e la mappa di proiezione sulla prima componente

$$\Phi : I \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Analizziamo le fibre di Φ .

- Se $[\lambda : \mu] \notin \Delta$, allora $V(Q_{\lambda,\mu}) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e per [GH94, capitolo 6.1], $\Phi^{-1}([\lambda : \mu]) = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$. Da un punto di vista geometrico, le due famiglie di rette contenute in $V(Q_{\lambda,\mu})$ sono della forma

$$\frac{x}{z} = \frac{w}{y} \quad \text{oppure} \quad \frac{x}{w} = \frac{z}{y}.$$

- Se $[\lambda : \mu] \in \Delta$, allora $V(Q_{\lambda,\mu}) \cong \mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$. Per costruzione, le rette che passano per $\mathcal{C}(\nu_2(\mathbb{P}^1))$ sono della forma

$$L_{[s:t]} = \langle v, [s^2 : st : t^2 : 0] \rangle, \quad [s : t] \in \mathbb{P}^1$$

e dunque sono parametrizzate da $\mathbb{P}^1$.

Abbiamo mostrato che sopra un punto in $\mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ ci sono due rette, mentre sopra un punto in Δ c'è una sola retta. Questo concetto è reso evidente nella fattorizzazione di Stein ([Har77][capitolo 3.11]) della mappa $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{P}^1$:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & S & \end{array}$$

dove f è il quoziente per le componenti connesse delle preimmagini rispetto a Φ e g è un rivestimento $2 : 1$ di $\mathbb{P}^1$, dove ad $x \in \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ vengono associati due punti di S , altrimenti un punto.

Per la formula di Riemann-Hurwitz

$$\chi(S) = \deg(g) \cdot \chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{x \in \Delta} (\text{molt}_x(g) - 1) = 2 \cdot \chi(\mathbb{P}^1) - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

Poiché $\chi(S) = 2 - 2g$, si ha che $g(S) = 1$ e dunque S è una curva ellittica. È possibile immergere una tale curva ellittica nello spazio proiettivo pesato $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ come

$$S = V(y^2 - f_4(x_0, x_1)) \subset \mathbb{P}(1, 1, 2)$$

dove $f_4(x_0, x_1)$ è un polinomio omogeneo di grado 4 nelle coordinate di $\mathbb{P}^1$, $[x_0 : x_1]$. Le radici di f_4 sono proprio i punti di ramificazione, ovvero i punti di Δ .

Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 3.2.7. *Sia E una curva ellittica ottenuta come intersezione delle due quadriche descritte in 3.1.1. Allora S , costruita a partire dalla fattorizzazione di Stein della mappa Φ , è una curva ellittica di grado 2 e si ha $S \cong \text{Pic}^0(E)$.*

Dimostrazione. I conti precedenti mostrano che S è una curva ellittica; inoltre per la formula del grado negli spazi proiettivi pesati, [Dol82], si ha

$$\deg S = \frac{\text{grado dell'equazione}}{\text{prodotto dei pesi}} = \frac{\deg(y^2 - f_4(x_0, x_1))}{2} = 2.$$

Infine, nell'articolo di Donagi [Don80], più precisamente nei teoremi 3.1 e 3.3, viene costruito esplicitamente un isomorfismo tra S e $\text{Pic}^0(E)$.

□

3.2.1 La mappa di Veronese come isomorfismo esplicito

Dai risultati dell'articolo [Don80] e del capitolo precedente, sappiamo che esiste un isomorfismo tra E ed S . Calcolandolo, sorprendentemente, si trova che un isomorfismo esplicito è dato da una funzione a noi nota, a meno di un cambio di coordinate.

Consideriamo la mappa di Veronese di grado 2

$$\nu_2 : \mathbb{P}(1, 1, 2) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}(1, 1, 2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 1, 2)}(2))^\vee) \cong \mathbb{P}^3$$

dove $\nu_2([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 : x_2]$. Se rinominiamo le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^3$ con u_0, u_1, u_2, u_3 , la Veronese 2 immerge $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ in $\mathbb{P}^3$ come $V(u_0u_2 - u_1^2)$, ovvero come una quadrica singolare con punto di singolarità $[0 : 0 : 0 : 1]$.

Proposizione 3.2.8. *L'immagine di $S \subset \mathbb{P}(1, 1, 2)$ attraverso ν_2 è una curva liscia.*

Dimostrazione. Per trovare l'immagine di S basta intersecare l'immagine di $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ con l'equazione che la definisce, scritta nelle coordinate di $\mathbb{P}^3$:

$$\nu_2(S) = \begin{cases} u_0 u_2 - u_1^2 = 0, \\ u_3^2 - F_2(u_0, u_1, u_2) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $\nu_2(S)$ è una curva liscia, infatti l'unico punto di singolarità di $u_0 u_2 - u_1^2$ non annulla $u_3^2 - F_2(u_0, u_1, u_2)$. $\square$

Possiamo dunque concludere che, a meno di un cambio di coordinate, la mappa di Veronese realizza un isomorfismo tra E ed S , e pertanto tra $\text{Pic}^0(E)$ ed S .

Osservazione 3.2.9. Ricordiamo che la seconda Veronese ha grado 2 e che E ha grado 4, dunque il risultato che abbiamo trovato non è sorprendente in quanto la Veronese porta una curva di grado 2 in una curva di grado 4.

Bibliografia

- [Dol82] Igor Dolgachev. «Weighted projective varieties». In: *Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*. Vol. 956. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1982, pp. 34–71.
- [Don80] Ron Donagi. «Group law on the intersection of two quadrics». In: *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 7 (1980).
- [FK92] H. M. Farkas e I. Kra. *Riemann surfaces*. Second. Vol. 71. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [GH94] Phillip Griffiths e Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. Reprint of the 1978 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. No. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Vol. 5. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Vol. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.