ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Funzioni generatrici e loro applicazioni al calcolo combinatorio

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Fabrizio Caselli

Presentata da:
Anna Storchi

Anno Accademico 2024/2025

Introduzione

Data una sequenza $a_0, a_1, a_2, ...$ di numeri complessi (anche se più spesso in questa trattazione considereremo numeri interi), la sua funzione generatrice è la scrittura

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$$

dove ogni x^i è solo un simbolo che indica la posizione del coefficiente a_i. Si ottiene così un oggetto che rappresenta l'intera successione, ma in forma molto più compatta e semplice da maneggiare; se si vuole conoscere l'n-esimo elemento della successione, basta individuare il coefficiente di x^n nella funzione generatrice.

In questa trattazione definiremo operazioni tra funzioni generatrici e osserveremo che queste corrispondono a determinate operazioni sugli elementi delle rispettive successioni dei coefficienti. In alcuni casi, conoscere la funzione generatrice per una successione $\{a_n\}$ i cui elementi non sono noti permette di determinarli; in altri casi non si riesce a ricavare esplicitamente i coefficienti, ma la funzione generatrice può essere comunque utile a studiare le loro proprietà.

Nel Capitolo 1, definiremo formalmente le funzioni generatrici e le operazioni tra di esse.

Il Capitolo 2 vedrà un'interessante applicazione delle funzioni generatrici, il principio di inclusione esclusione. Dato un insieme di oggetti, ognuno dei quali verifica un certo numero di proprietà, il principio di inclusione esclusione permette di calcolare quanti di essi ne verificano esattamente un dato numero r a partire dal numero di oggetti per cui vale un certo insieme di proprietà, che in molti casi (tra cui gli esempi presenti nel capitolo) è molto più semplice da determinare.

Nel Capitolo 3 dimostreremo la formula esponenziale, un teorema che permette di risolvere problemi quali il calcolo dei numeri di Stirling di prima specie o dei numeri di Bell.

Nell'ultimo capitolo approfondiremo infine un altro affascinante aspetto delle funzioni generatrici, cioè la possibilità di studiarle dal punto di vista analitico, considerandole come funzioni di variabile complessa. Tale approccio apre la strada a moltissime applicazioni: per esempio, studiando le singolarità di una funzione generatrice per una data successione $\{a_n\}$, si possono stimare i coefficienti. In questa trattazione approfondiremo il caso in cui tali singolarità siano di tipo polo.

Indice

Capitolo 1

Le funzioni generatrici

1.1 Serie formali

Definizione 1.1.1. Una *serie formale di potenze* $f(x)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ è una scrittura formale del tipo

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n,$$

dove $a_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. a_n si dice l'n-esimo coefficiente di f, o il coefficiente di x^n in f.

L'insieme delle serie formali di potenze a coefficienti in $\mathbb{C}$ si indica con $\mathbb{C}[[x]]$. f si può indicare equivalentemente anche con le notazioni $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o $f = \sum_n a_n x^n$.

Si noti che una serie formale di potenze non è una funzione; x^n è solo un simbolo che indica la posizione dell'n-esimo coefficiente nella scrittura formale f.

Per brevità in questa trattazione le serie formali di potenze verranno a volte chiamate solo serie formali.

Notazione. Data una serie formale di potenze $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, la scrittura $[x^n]f(x)$ indica il coefficiente a_n.

Definizione 1.1.2. Due serie formali di potenze $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ si dicono uguali (e in tal caso scriveremo $f(x) = g(x)$) se e solo se $a_n = b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.1.3. Sono definite le seguenti operazioni tra serie formali di potenze:

- Somma
$$\sum_n a_n x^n + \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n + b_n) x^n$$
- Prodotto
$$\sum_n a_n x^n \cdot \sum_n b_n x^n = \sum_n c_n x^n \qquad \text{dove} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Osservazione. Si dimostra facilmente che $\mathbb{C}[[x]]$ è un anello con le operazioni di somma e prodotto appena descritte.

Definizione 1.1.4. Sia $f(x) = \sum_n a_n x^n$ una serie formale di potenze. Se $g(x)$ è una serie formale di potenze tale che $f \cdot g = 1$, allora g si dice un *reciproco* di f.

Proposizione 1.1.1. *Una serie formale di potenze $f(x) = \sum_n a_n x^n$ ha un reciproco se e solo se $a_0 \neq 0$; in tal caso esso è unico.*

Dimostrazione. Se per $f(x)$ esiste un reciproco $g(x) = \sum_n b_n x^n$, allora per definizione di prodotto tra serie formali vale $a_0 b_0 = 1$ e quindi necessariamente $a_0 \neq 0$. In tal caso $b_0 = 1/a_0$. Analogamente, per ogni $n \geq 1$ deve valere $0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, quindi
$$b_n = -\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}}{a_0}$$
per ogni $n \geq 1$. I coefficienti di g sono quindi univocamente determinati. Viceversa, se $a_0 \neq 0$, la serie che ha come coefficienti i b_n definiti dalla formula appena descritta (per $n \geq 1$) e $b_0 = 1/a_0$ è un reciproco di f. $\square$

Notazione. Data una serie formale di potenze $f(x) = \sum_n a_n x^n$ tale che $a_0 \neq 0$, denoteremo con $1/f(x)$ il suo reciproco (che per quanto appena dimostrato è unico).

Esempio 1.1.1. Il reciproco di $\sum_{n\geq 0} x^n$ è $1-x$ perché per definizione del prodotto tra serie vale $(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n = 1$.

Definizione 1.1.5. Date due serie formali $f(x) = \sum_n a_n x^n$ e $g(x) = \sum_n b_n x^n$ tali che $f(x)$ sia un polinomio o che $b_0 \neq 0$, la *composizione* $f(g(x))$ è definita come

$$f(g(x)) = \sum_n a_n (g(x))^n$$

Osserviamo che la composizione di due serie $f(x) = \sum_n a_n x^n$ e $g(x) = \sum_n b_n x^n$ è ben definita se e solo se $b_0 = 0$ o $f(x)$ è un polinomio. Scriviamo più esplicitamente la composizione di f e g:

$$\sum_n a_n (g(x))^n = a_0 + a_1(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...) + a_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...)^2 + ...$$

Se $f(x)$ è un polinomio la composizione è ben definita, perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ il coefficiente di x^n in $f(g(x))$ è la somma di un numero finito di termini. Supponiamo invece che $f(x)$ abbia infiniti coefficienti non nulli. Affinché la composizione sia ben definita, è necessario che il calcolo di ogni coefficiente di $f(g(x))$ sia un processo finito. Se $b_0 \neq 0$, il coefficiente di x^0 in $f(g(x))$ è $a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + ...$, che è una somma infinita perché f ha infiniti coefficienti non nulli. Se invece $b_0 = 0$, si può calcolare ogni coefficiente di $f(g(x))$:

$$[z^n]f(g(x)) = \sum_{k=0}^{n} [x^n]\left(a_k(b_1 x + b_2 x^2 + ...)^k\right).$$

Definizione 1.1.6. Sia f una serie formale di potenze. Una serie formale di potenze g si dice l'*inverso* di f se $f(g(x))$ e $g(f(x))$ sono entrambe ben definite e $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Si può dimostrare che una serie $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ con $a_0 = 0$ ha un inverso g se e solo se $a_1 \neq 0$; in tal caso g è unica e $[x^0]g(x) = 0$.

Definizione 1.1.7. Data una serie formale di potenze $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, la sua *derivata* $f'(x)$ è definita come

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Si può dimostrare che per la derivata di serie formali di potenze valgono proprietà analoghe a quelle delle derivate di funzioni: date f e g serie formali,

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$ (nel caso in cui la composizione sia ben definita).

1.2 Funzioni generatrici

Definizione 1.2.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{C}$. La *funzione generatrice ordinaria* per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la serie formale di potenze

$$F(x) = \sum_n a_n x^n.$$

Scriveremo $F(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o equivalentemente $F(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) per indicare che $F(x)$ è la funzione generatrice ordinaria per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 1.2.2. Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, la *funzione generatrice esponenziale* per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la serie formale di potenze

$$G(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n.$$

La scrittura $F(x) \overset{egf}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o equivalentemente $F(x) \overset{egf}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) significa che $F(x)$ è la funzione generatrice esponenziale per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposizione 1.2.1. *Sia* $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *la funzione generatrice ordinaria per la successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\dfrac{f - a_0 - a_1 x - ... - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h} \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_{n+h}\}_{n=0}^{\infty}$;

2. *Sia* $P(y) = \sum_{i=0}^{d} p_i y^i$ *un polinomio; allora*

$$P(xD)f \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

(dove il simbolo xD *indica l'operazione di derivazione e moltiplicazione per* x*, cioè* $(xD)g = xg'(x)$ *per ogni serie formale* $g(x)$*.* $(xD)^k$ *è la composizione di* k *volte* xD *e analogamente con* $P(xD)f$ *si indica* $\sum_{i=0}^{d} p_i(xD)^i f(x)$*);*

3. $f^k \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot ... \cdot a_{n_k} \right\}_{n=0}^{\infty}$;

4. $\dfrac{f}{1-x} \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \right\}_{n=0}^{\infty}$.

Dimostrazione. 1. Si dimostra per induzione su h. Nel caso $h = 1$, si osserva che

$$\frac{f - a_0}{x} = \frac{\sum_{n\geq 1} a_n x^n}{x} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n.$$

Supponendo verificata la proprietà (1) per $h \in \mathbb{N}$, mostriamo che vale anche per $h + 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{f - a_0 - a_1 x - ... - a_h x^h}{x^{h+1}} &= \frac{1}{x}\left(\frac{f - a_0 - a_1 x - ... - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h} - \frac{a_h x^h}{x^h}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\sum_{n\geq 0} a_{n+h}x^n - a_h\right) \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1} a_{n+h}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_{n+h+1}x^n.
\end{aligned}$$

2. $xf'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^n = \sum_{n\geq 0} na_n x^n$, cioè $(xDf) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{na_n\}_{n=0}^{\infty}$. Per induzione su k segue che $(xDf)^k \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{n^k a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Se $P(y) = p_0 + p_1 x + ... + p_d x^d$, allora

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} P(n)a_n x^n &= p_0 \sum_{n\geq 0} a_n x^n + ... + p_d \sum_{n\geq 0} n^d a_n x^n \\ &= p_0 f(x) + ... + p_d (xD)^d f(x) \\ &= P(xD)f(x).\end{aligned}$$

3. Segue immediatamente dalla definizione di prodotto tra serie formali.
4. Come visto nell'Esempio 1.1.1, vale $1/(1-x) = \sum_{n\geq 0} x^n$, quindi

$$\frac{1}{1-x} f = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n.$$

□

1.2.1 Esempio. Funzione generatrice per i numeri di Fibonacci

I numeri di Fibonacci si definiscono per ricorrenza come

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Vogliamo determinare la funzione generatrice $F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$ per la successione dei numeri di Fibonacci $\{F_n\}$.

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni $n \geq 0$, quindi

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+2} x^n = \sum_{n\geq 0} (F_{n+1} + F_n) x^n.$$

Applicando il punto 1 della Proposizione 1.2.1, questo equivale a

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x),$$

da cui si ricava la funzione generatrice per la successione dei numeri di Fibonacci:

$$F(x) = \frac{F_0 + x(F_1 - F_0)}{1 - x - x^2} = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{1.1}$$

L'n-esimo numero di Fibonacci è quindi il coefficiente di x^n in $\dfrac{x}{1-x-x^2}$.

Dato che $1-x-x^2 = (x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = (1-r_+x)(1-r_-x)$, dove $r_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, scomponendo in fratti semplici $\frac{x}{1-x-x^2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{r_+ - r_-}\left(\frac{1}{r_-x-1} - \frac{1}{r_+x-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{r_-x-1} - \frac{1}{r_+x-1}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Allora, per (1.2) e per l'Esempio 1.1.1, vale

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{r_-x-1} - \frac{1}{r_+x-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sum_n r_-^n x^n + \sum_n r_+^n x^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_n (r_+^n - r_-^n) x^n\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quindi confrontando i coefficienti di x^n in $F(x)$ nell'ultima uguaglianza si ottiene una formula esatta per F_n, per ogni $n \geq 0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n). \tag{1.4}$$

Si può inoltre notare che $\frac{1}{\sqrt{5}}r_+^n$ è un'ottima approssimazione per F_n. Infatti, la loro differenza è in modulo

$$\left|F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}r_+^n\right| \overset{(1.4)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left|r_-\right|^n, \tag{1.5}$$

che mostreremo essere sempre strettamente minore di 1/2. Dato che $|r_-| = \left|(1-\sqrt{5})/2\right| < 1$, la successione $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left|r_-\right|^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Inoltre per $n = 0$ vale $\frac{1}{\sqrt{5}}|r_-|^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}r_+^n\right| < \frac{1}{2}. \tag{1.6}$$

Ciò significa che per ogni $n \in \mathbb{N}$ F_n è l'intero più vicino a $\frac{1}{\sqrt{5}}r_+^n$ (che è univocamente determinato per (1.6)); questa approssimazione consente quindi di ricavare il valore esatto di F_n.

1.2.2 Alcune serie formali di potenze notevoli

Elenchiamo qui alcune serie formali di potenze che utilizzeremo nel resto di questa trattazione:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \tag{1.7}$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \tag{1.8}$$

$$\log(x+1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{1.9}$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{n} x^n. \tag{1.11}$$

La (1.7) è stata dimostrata nell'Esempio 1.1.1. La (1.8) e la (1.9) sono definizioni. Per le dimostrazioni di (1.10) e (1.11) si veda Aigner (2007). Si può inoltre dimostrare che $\log(1+x)$ è l'inverso di $e^x - 1$ (Aigner (2007)). Si osservi che da questo segue che $e^{\log(f(x))} = f(x)$ se $[x^0]f(x) = 1$. Infine si può dimostrare che se $[x^0]f(x) = 1$ allora vale $\log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Capitolo 2

Il principio di inclusione esclusione

2.1 Il principio di inclusione esclusione

Supponiamo siano dati un certo insieme finito di oggetti Ω e un insieme finito P di proprietà che gli oggetti di Ω possono avere o non avere. Si vuole determinare quanti oggetti hanno esattamente un certo numero di proprietà. Dato un oggetto $\omega \in \Omega$, chiamiamo $P(\omega)$ l'insieme delle proprietà che ω possiede. Dato un insieme di proprietà $S \subseteq P$, definiamo $N(\supseteq S)$ come il numero di oggetti per cui valgono tutte le proprietà contenute in S, cioè il numero di oggetti ω tali che $S \subseteq P(\omega)$. Si definisce, per ogni $r \in \mathbb{N}$,

$$N_r = \sum_{|S|=r} N(\supseteq S). \tag{2.1}$$

Si noti che $N_r = 0$ per ogni r strettamente maggiore della cardinalità di P. Si può osservare che

$$\begin{aligned} N_r &= \sum_{|S|=r} N(\supseteq S) \\ &= \sum_{|S|=r} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ S\subseteq P(\omega)}} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\omega\in\Omega} \left\{ \sum_{\substack{|S|=r \\ S\subseteq P(\omega)}} 1 \right\} \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \binom{|P(\omega)|}{r}
\end{aligned}$$

Allora, definendo e_t come il numero di oggetti che hanno esattamente t proprietà, si ottiene

$$N_r = \sum_{t\geq 0} \binom{t}{r} e_t. \tag{2.2}$$

Costruendo quindi la funzione generatrice $N(x)$ per la successione $\{N_r\}_{r=0}^{\infty}$ si osserva che

$$\begin{aligned}
N(x) &= \sum_{r\geq 0} N_r x^r \\
&= \sum_{r\geq 0} \left\{ \sum_{t\geq 0} \binom{t}{r} e_t \right\} x^r \\
&= \sum_{t\geq 0} \left\{ \sum_{r\geq 0} \binom{t}{r} x^r \right\} e_t \\
&= \sum_{t\geq 0} e_t (x+1)^t \\
&= E(x+1) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

dove $E(x) = \sum_{r\geq 0} e_r x^r$ è la funzione generatrice per la successione $\{e_r\}_{r=0}^{\infty}$. (Si noti che $N(x)$, e quindi anche $E(x)$, è un polinomio in quanto $N_r = 0$ per ogni $r > |P|$). Si ottiene allora una relazione fondamentale tra $E(x)$ e $N(x)$:

$$E(x) = N(x-1). \tag{2.4}$$

che è il principio di inclusione esclusione. Grazie a questo risultato è possibile determinare il numero di oggetti che hanno esattamente un certo numero di proprietà conoscendo i coefficienti $\{N_r\}$ di $N(x)$. In molti problemi, per determinare un certo e_r, rispetto al suo calcolo diretto è decisamente più semplice calcolare i coefficienti $\{N_r\}$ seguendo la definizione (2.1) e poi ricavare il coefficiente e_r dalla relazione (2.4). In particolare, per ogni $r \in \mathbb{N}$, e_r sarà il coefficiente di x^r in $N(x+1)$:

$$\begin{aligned} e_r &= [x^r]N(x+1) \\ &= [x^r]\left\{\sum_{i\geq 0} N_i \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} x^t(-1)^{i-t}\right\} \\ &= [x^r]\left\{\sum_{t\geq 0} x^t \sum_{i\geq t} N_i \binom{i}{t} (-1)^{i-t}\right\} \\ &= \sum_{i\geq r} N_i \binom{i}{r} (-1)^{i-r} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Un caso particolare è quello del calcolo di e_0:

$$e_0 = E(0) \overset{(2.4)}{=} N(-1) = \sum_{r\geq 0} (-1)^r N_r. \tag{2.6}$$

Osservazione 2.1.1. Si noti che in questo ultimo passaggio non abbiamo valutato in 0 la serie formale di potenze $E(x)$, ma la serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} e_n z_0^n$ in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ in cui essa converge, in questo caso 0. Le uguaglianze in (2.6) sono comunque lecite perché in generale, date due serie formali $\sum_n a_n x^n$ e $\sum_n b_n x^n$, se esse sono uguali allora per definizione $a_n = b_n \quad \forall n$, quindi nei punti $z_0 \in \mathbb{C}$ in cui le serie convergono vale ovviamente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$. Quindi in questo esempio dato che $E(x) = N(x-1)$ come serie formali, allora anche $E(0) = N(0-1)$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} e_n z_0^n$ converge in $z_0 = 0$.

2.2 Esempio 1. Punti fissi di una permutazione

Vogliamo determinare il numero di punti fissi di una permutazione di n elementi. Innanzitutto occorre individuare un insieme di oggetti e un insieme di proprietà adatti a descrivere il problema. Possiamo scegliere $\Omega = S_n$, dove S_n è l'insieme delle permutazioni di n elementi, e $P = \{1, 2, ..., n\}$, dove una permutazione $\tau \in S_n$ ha la proprietà j se j è un suo punto fisso, cioè se $\tau(j) = j$.

Fissato un insieme $S \subseteq P$, le permutazioni che soddisfano tutte le proprietà di S, cioè le permutazioni che fissano (almeno) tutti gli elementi di S, sono $(n-|S|)!$. Infatti gli elementi in S sono fissati, mentre quelli di $\{1,...,n\} - S$ vengono scambiati tra loro. Quindi

$$N_r = \sum_{\substack{|S|=r \\ S\subseteq P}} N(\supseteq S) = \sum_{\substack{|S|=r \\ S\subseteq P}} (n-|S|)! = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!} \tag{2.7}$$

Allora la funzione generatrice $N(x)$ per la successione $\{N_r\}_{r=0}^{\infty}$ (osservando che $N_r = 0$ se $r > n$) è

$$N(x) = n!\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}x^r$$

da cui, per la (2.4),

$$E(x) = n!\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}(x-1)^r.$$

Per ogni $r \geq 0$, il numero di permutazioni con esattamente r punti fissi sarà il coefficiente di x^r in $E(x)$. In particolare, il numero di permutazioni di n elementi senza punti fissi è

$$e_0 = E(0) = N(-1) = n!\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!},$$

che per $n \to \infty$ si può approssimare con $n! \cdot exp(-1) = n!\sum_{r\geq 0} \frac{(-1)^r}{r!}$.

2.2.1 Calcolo di medie.

Siano Ω un insieme finito di oggetti e P un insieme finito di proprietà che gli oggetti di Ω possono avere o non avere. Se e_n è il numero di oggetti che hanno esattamente n proprietà, allora il numero medio di proprietà per ogni oggetto è

$$\mu = \frac{\sum_{n\geq 0} ne_n}{N}, \tag{2.8}$$

dove $N = |\Omega|$ è il numero totale di oggetti. Segue immediatamente da (2.2) che $\sum_{n\geq 0} ne_n = N_1$, quindi

$$\mu = \frac{N_1}{N}. \tag{2.9}$$

Tornando all'esempio, il numero medio di punti fissi in una permutazione di n elementi è quindi

$$\mu = \frac{N_1}{N} \overset{(2.7)}{=} \frac{n!}{1!} \frac{1}{n!} = 1, \tag{2.10}$$

cioè in media ogni permutazione ha un punto fisso.

2.3 Esempio 2. Estrazione di palline colorate

Supponiamo di avere un'urna con palline di k colori diversi $C_1, C_2, ...C_k$, con h palline per ogni colore. Qual è la probabilità che estraendo simultaneamente n palline (con $n \geq k$) dall'urna se ne ottenga almeno una per ogni colore? Come insieme di oggetti Ω consideriamo l'insieme di tutti i possibili esiti dell'estrazione, cioè di tutti i possibili insiemi di n palline dell'urna. Come insieme di proprietà si può scegliere $P = \{1, 2, ..., k\}$, dove un oggetto $\omega \in \Omega$ ha la proprietà j se non contiene nessuna pallina del colore C_j.

e_i è il numero di oggetti che hanno esattamente i proprietà, quindi è il numero di possibili estrazioni in cui i colori scelti sono esattamente $k - i$. Allora la probabilità di estrarre esattamente m colori (con $m \leq k$) è

$$\frac{e_{k-m}}{\binom{hk}{n}}. \tag{2.11}$$

In particolare, la probabilità di estrarre palline di tutti i colori è

$$\frac{e_0}{\binom{hk}{n}}. \tag{2.12}$$

Calcoliamo i coefficienti $\{N_r\}$. Per ogni scelta di r colori, le estrazioni in cui essi non compaiono sono $\binom{(k-r)h}{n}$. Segue quindi che per ogni $r = 0, ...k$

$$N_r = \binom{k}{r}\binom{(k-r)h}{n}. \tag{2.13}$$

Quindi

$$e_0 = N(-1) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r}\binom{(k-r)h}{n} \tag{2.14}$$

e la probabilità di estrarre palline di tutti i colori è

$$\frac{\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r}\binom{(k-r)h}{n}}{\binom{hk}{n}}.$$

2.4 Esempio 3. Numeri di Stirling di seconda specie

Dati due interi non negativi n e k tali che $k \leq n$, il *numero di Stirling di seconda specie* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ è il numero di possibili partizioni in k classi di un insieme di n elementi. Si definisce $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Osserviamo che, detto $F_{sur}(n,k)$ il numero di funzioni suriettive con dominio $\{1,...,n\}$ e codominio $\{1,...,k\}$, vale $F_{sur}(n,k) = k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Infatti partizionando $\{1,...,n\}$ in k classi e associando a ogni elemento della stessa classe lo stesso elemento di $\{1,...,k\}$, diverso per ogni classe, si costruisce una funzione suriettiva; viceversa ogni funzione suriettiva individua una partizione ordinata del dominio in cui l'i-esimo blocco è dato dalla retroimmagine di i. Inoltre partizioni ordinate diverse corrispondono a funzioni diverse.

Determiniamo quindi $F_{sur}(n,k)$. Consideriamo come insieme di oggetti Ω l'insieme di tutte le funzioni da $\{1,...,n\}$ a $\{1,...,k\}$; come insieme di proprietà scegliamo $P = \{1,...,k\}$, dove una funzione $f \in \Omega$ ha la proprietà j se j non appartiene all'immagine di f. Una funzione non ha nessuna proprietà se e solo se è suriettiva, quindi $F_{sur}(n,k)$ è il numero di oggetti che non hanno nessuna proprietà, cioè $F_{sur}(n,k) = e_0$.

Scelto $S \subseteq P$, le funzioni $f : \{1,...,n\} \to \{1,...,k\}$ che verificano le proprietà in S sono $(k - |S|)^n$, perché per ogni elemento di $\{1,...,n\}$ la sua immagine tramite f può essere scelta tra gli elementi di $\{1,...,k\} - S$. Quindi per ogni $r = 0,...,k$ si ha

$$N_r = \binom{k}{r}(k-r)^n \tag{2.15}$$

Ovviamente invece $N_r = 0$ se $r > k$ (dato che non esistono sottoinsiemi di P di cardinalità maggiore di k). Allora la funzione generatrice $N(x)$ per $\{N_r\}_{r=0}^{\infty}$ è

$$N(x) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}(k-r)^n x^r \tag{2.16}$$

da cui, per (2.4), segue

$$E(x) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (k-r)^n (x-1)^r. \tag{2.17}$$

Per ogni $r = 0, ..., r$ il numero di funzioni la cui immagine ha esattamente $k - r$ elementi è l'r-esimo coefficiente di $E(x)$; in particolare il numero di funzioni suriettive è

$$F_{sur}(n,k) = e_0 = E(0) = N(-1) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (k-r)^n (-1)^r. \tag{2.18}$$

Quindi, ricordando che $F_{sur}(n,k) = k!\left\{ {n \atop k} \right\}$, si ricava subito un'espressione esplicita per il numero di Stirling di seconda specie $\left\{ {n \atop k} \right\}$:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{(k-r)^n}{r!(k-r)!} \tag{2.19}$$

Si può inoltre osservare che se si moltiplicano e^{-y} e $\sum_{r\geq 1} \frac{r^n}{r!} y^r$, che sono entrambe serie con infiniti coefficienti non nulli, si ottiene un polinomio:

$$\begin{aligned}
e^{-y} \sum_{r\geq 1} \frac{r^n}{r!} y^r &= \left(\sum_{s\geq 0} \frac{(-y)^n}{s!} y^s \right) \cdot \left(\sum_{r\geq 1} \frac{r^n}{r!} y^r \right) \\
&= \sum_{s\geq 1} \sum_{r=0}^{s} \frac{1}{s!} \binom{s}{r} (-1)^r (s-r)^n \\
&\overset{(2.19)}{=} \sum_{s\geq 1} \left\{ {n \atop s} \right\} y^s \\
&= \sum_{s=1}^{n} \left\{ {n \atop s} \right\} y^s. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Sfrutteremo quest'ultima relazione nel Capitolo 4 per studiare il comportamento asintotico dei numeri di Bell ordinati.

Capitolo 3

La formula esponenziale

3.1 Definizioni

Notazione. Per ogni n intero positivo, indicheremo con $[n]$ l'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

Definizione 3.1.1. Sia P un insieme astratto di immagini. Una *carta C(S,p)* è una coppia formata da un insieme finito di interi positivi S, che chiameremo il suo *insieme di etichette*, e una immagine $p \in P$. Il *peso* di C è $n = |S|$.

Una carta di peso n si dice *standard* se il suo insieme di etichette è $[n]$.

Definizione 3.1.2. Una *mano* H è un insieme di carte i cui insiemi di etichette formano una partizione di $[n]$ per un certo $n \in \mathbb{N}$. Tale n si dice *peso della mano.*

Osservazione. È banale osservare che il peso di una mano è dato dalla somma dei pesi delle carte in esso contenute.

Definizione 3.1.3. Dati una carta $C(S, p)$ e un insieme $S' \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ di cardinalità uguale a quella di S, una carta $C(S', p)$ si dice un *rietichettamento* di $C(S, p)$ tramite l'insieme S'.

Definizione 3.1.4. Un *mazzo* $\mathcal{D}$ è un insieme finito di carte standard che hanno tutte lo stesso peso e le cui immagini sono tutte diverse tra loro. Il *peso di un mazzo* è il peso di una qualsiasi sua carta.

Definizione 3.1.5. Una *famiglia esponenziale* $\mathcal{F}$ è una collezione di mazzi $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ...$ dove per ogni $n = 1, 2, ...$ il mazzo $\mathcal{D}_n$ ha peso n (o è eventualmente vuoto).

Definizione 3.1.6. Data una famiglia esponenziale $\mathcal{F}$ formata dai mazzi $\mathcal{D}_n$ di peso n per ogni $n \geq 1$ intero positivo, chiamiamo $h(n,k)$ il numero di mani H di peso n e k carte tali che ogni carta di H è un rietichettamento di una carta di $\mathcal{F}$. Le carte da rietichettare ammettono ripetizioni, cioè per costruire una mano si possono scegliere da $\mathcal{F}$ più copie della stessa carta a patto di rietichettarle con insiemi disgiunti. Diremo inoltre che una certa mano H è una mano di $\mathcal{F}$ se le carte di H sono rietichettamenti di carte di $\mathcal{F}$.

Per ogni $n \geq 1$, sia d_n il numero di carte nel mazzo $\mathcal{D}_n$. La funzione generatrice esponenziale per la successione $\{d_n\}_1^\infty$ si dice la *funzione generatrice dei mazzi* per $\mathcal{F}$. Inoltre, la funzione generatrice in due variabili

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} h(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

si dice *funzione generatrice delle mani.*

Osserviamo che $\mathcal{H}(x,y)$ è una funzione generatrice ordinaria rispetto a y e una funzione generatrice esponenziale rispetto a x.

3.1.1 Esempio

In questo esempio descriveremo tutte le permutazioni grazie a un'opportuna famiglia esponenziale.

Per prima cosa definiamo le carte che verranno usate per costruire la famiglia. Ogni carta di peso m ha come disegno m punti disposti in un certo ordine su una circonferenza; gli archi che li collegano sono frecce orientate in senso orario e ognuno degli m punti è contrassegnato da un elemento di $[m]$. L'insieme di etichette S è un insieme di interi positivi di cardinalità m.

Ognuna di queste carte identifica un ciclo. Infatti, dopo aver associato gli elementi dell'insieme di etichette della carta $C(S,p)$ ai punti numerati della figura in modo da preservarne l'ordine (cioè associando il più piccolo elemento di S al punto di p contrassegnato dal numero 1, il secondo elemento più piccolo al punto contrassegnato dal 2 e proseguendo in questo modo per tutti gli elementi di S), le frecce indicheranno per ogni elemento di S la sua immagine tramite la permutazione descritta dalla carta. L'unica orbita non banale nella permutazione rappresentata da $C(S, p)$ sarà S.

Per esempio, se la carta $C(S, p)$ ha come insieme di etichette $S = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ e come immagine p quella mostrata in Figura 3.1,

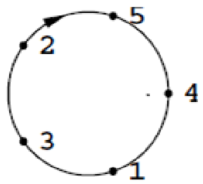

Figura 3.1: Immagine p dell'esempio. (Wilf (1994))

allora rappresenta il ciclo

$$1 \to 6 \to 4 \to 9 \to 8 \to 1.$$

A partire da carte di questo tipo definiamo una famiglia esponenziale $\mathcal{F}$ in cui per ogni intero positivo r il mazzo $\mathcal{D}_r$ è formato da carte standard di peso r le cui immagini sono tutte quelle possibili a meno di rotazioni (cioè tutti i modi possibili in cui si possono disporre gli elementi di $[r]$ sugli r punti della circonferenza descritta precedentemente, a meno di rotazioni). Vale quindi $d_r = (r-1)!$, da cui segue ovviamente

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} x^r.$$

Una mano di $\mathcal{F}$ di peso n e k carte identifica una permutazione di $[n]$ che è prodotto dei k cicli disgiunti rappresentati dalle carte. (Tali cicli sono ovviamente disgiunti perché per definizione lo sono gli insiemi di etichette delle carte in una mano). Viceversa si può osservare che, per costruzione di

$\mathcal{F}$, per ogni permutazione σ esiste una mano che la rappresenta, anch'essa formata dalle carte che identificano i cicli disgiunti di cui σ è il prodotto.

Inoltre mani distinte rappresentano permutazioni distinte e viceversa. Infatti due mani H_1 e H_2 sono uguali se e solo se tutte le carte di H_1 e H_2 sono uguali, cioè se e solo se le permutazioni σ_1 e σ_2 rappresentate rispettivamente da H_1 e H_2 sono prodotto degli stessi cicli disgiunti, cioè se e solo se $\sigma_1 = \sigma_2$.

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra le mani della famiglia esponenziale costruita in questo esempio e le permutazioni. Nelle prossime sezioni, dimostreremo la formula esponenziale, che ci permetterà di ricavare la funzione generatrice delle mani a partire da quella dei mazzi; questo ci consentirà di determinare il numero di permutazioni di n elementi che sono prodotto di k cicli disgiunti.

3.2 La formula esponenziale

Definizione 3.2.1. Siano $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ due famiglie esponenziali i cui insiemi di immagini P e P' siano disgiunti. La loro *unione*, che indicheremo con il simbolo $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$, è costruita nel seguente modo: per ogni $n \geq 1$ il mazzo $\mathcal{D}_n$ contiene tutte le d'_n carte del mazzo $\mathcal{D}'_n$ e le d''_n carte del mazzo $\mathcal{D}''_n$. La famiglia $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ è formata dai mazzi $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ...$ appena definiti.

Lemma 3.2.1 (Lemma fondamentale del conteggio con etichette). *Siano $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ due famiglie esponenziali e $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ le rispettive funzioni generatrici delle mani. Sia inoltre $\mathcal{H}$ la funzione generatrice delle mani di $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$. Allora vale la seguente relazione:*

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}'(x, y)\mathcal{H}''(x, y) \tag{3.1}$$

Dimostrazione. $\mathcal{F}$ è l'unione di $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$, quindi ogni mano H di $\mathcal{F}$ di k carte è formata da un certo numero di carte k' di $\mathcal{F}'$ e da $k - k'$ carte di $\mathcal{F}''$ opportunamente rietichettate (si noti che per ipotesi gli insiemi di immagini di $\mathcal{F}'$ e di $\mathcal{F}''$ sono disgiunti, perciò ogni carta di $\mathcal{F}$ appartiene o a $\mathcal{F}'$ o a $\mathcal{F}''$).

Data una mano H di k carte e peso n, sia $A = \{C(S_1, p_1), C(S_2, p_2), ..., C(S_{k'}, p_{k'})\}$ l'insieme delle carte di H che sono rietichettamenti di carte di $\mathcal{F}'$ e sia $B = \{C(S_{k'+1}, p_{k'+1}), C(S_{k'+2}, p_{k'+2}), ..., C(S_k, p_k)\}$ l'insieme di quelle che sono rietichettamenti di carte di $\mathcal{F}''$. Possiamo osservare che A è uguale a una opportuna mano H' di $\mathcal{F}'$ che è stata rietichettata, preservando l'ordine, con $I = \bigcup_{i=1}^{k'} S_i$. Vale l'analogo per B, che corrisponde a una mano di carte di $\mathcal{F}''$ rietichettate con $\bigcup_{i=k'+1}^{k} S_i = [n] - I$. Rietichettare una mano K di peso m con un insieme J di interi positivi (di cardinalità m) preservando l'ordine significa sostituire a 1, nell'insieme di etichette di una certa carta di K al quale 1 appartiene, l'elemento più piccolo di J; a 2 il secondo elemento più piccolo di J, e proseguire in questo modo fino a m. Si osservi che rietichettando in questo modo due mani diverse con lo stesso insieme si ottengono ancora due insiemi di carte diversi. Viceversa, date due mani di $\mathcal{F}'$ e di $\mathcal{F}''$ rispettivamente di peso n' e $n - n'$ e formate da k' e $k - k'$ carte, se le si rietichettano con due insiemi di interi positivi J e $[n] - J$ la loro unione sarà una mano di $\mathcal{F}$. Una mano di $\mathcal{F}$ di k carte e peso n è quindi univocamente determinata dalla scelta di:

- una mano di $\mathcal{F}'$ di k' carte e peso n' (dove $n' \leq n$ e $k' \leq k$)
- una mano di $\mathcal{F}''$ di $k'' = k - k'$ carte e peso $n'' = n - n'$
- il sottoinsieme S di $[n]$ di cardinalità n' (per cui le possibili scelte sono $\binom{n}{n'}$) con cui si vuole rietichettare, preservando l'ordine, la mano scelta da $\mathcal{F}'$; la mano scelta da $\mathcal{F}''$ verrà ovviamente rietichettata con $[n] - S$

e vale

$$h(n, k) = \sum_{n', k'} \binom{n}{n'} h'(n', k') h''(n - n', k - k'). \tag{3.2}$$

D'altra parte, si ha

$$\left[\frac{x^n}{n!} y^k\right] \mathcal{H}'(x, y)\mathcal{H}''(x, y) = \left[\frac{x^n}{n!} y^k\right] \left\{ \sum_{n', k' \geq 0} h'(n', k') \frac{x^{n'}}{n'!} y^{k'} \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n'',k''\geq 0} h''(n'',k'')\frac{x^{n''}}{n''!}y^{k''}\Bigg\}\\
&= \sum_{n',k'=0}^{n,k} n!\cdot h'(n',k')\frac{1}{n'!}\cdot h''(n-n',k-k')\frac{1}{(n-n')!}\\
&= \sum_{n',k'=0}^{n,k} \binom{n}{n'} h'(n',k')\cdot h''(n-n',k-k')\\
&\overset{(3.2)}{=} h(n,k)
\end{aligned}
$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.2.1 (**Formula esponenziale**)**.** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia esponenziale e siano $\mathcal{D}(x)$ e $\mathcal{H}(x,y)$ rispettivamente le funzioni generatrici dei mazzi e delle mani. Allora*

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{y\mathcal{D}(x)}. \tag{3.3}$$

In particolare, il numero di mani di peso n e k carte è

$$h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right]\left\{\frac{\mathcal{D}(x)^k}{k!}\right\} \tag{3.4}$$

Dimostrazione. **Passo 1.** Fissato un intero positivo r, consideriamo una famiglia esponenziale in cui l'unico mazzo non vuoto sia il mazzo $\mathcal{D}_r$, che conterrà una sola carta $C(S,p)$ di peso r. La funzione generatrice dei mazzi sarà quindi $\mathcal{D}(x) = x^r/r!$.

L'unico modo per estrarre una mano da questa famiglia è scegliere un certo numero t di copie di $C(S,p)$, e poi rietichettarle in modo che i nuovi insiemi di etichette formino una partizione di $[rt]$. Le mani costruite in questo modo avranno ovviamente peso rt.

Mani di peso n non divisibile per r in questo caso non possono esistere e $h(n,k)$ (che ricordiamo essere il numero di possibili mani di peso n e k carte) sarà quindi sempre uguale a zero per ogni n non divisibile per r.

Se invece $n = kr$, il numero di mani di peso n è uguale al numero di modi in cui si possono rietichettare k copie di $C(S,p)$. Le possibili scelte per il nuovo insieme di etichette della prima carta sono $\binom{n}{r}$, per quello della seconda $\binom{n-r}{r}$ e così via fino all'insieme di etichette della k-esima carta, per cui sono $\binom{n-(k-1)r}{r} = \binom{kr-(k-1)r}{r} = 1$. L'ordine con cui abbiamo scelto di rietichettare le carte non conta, quindi sarà necessario dividere per $k!$. Vale quindi

$$\begin{aligned} h(kr,k) &= \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\binom{n-(k-i)r}{r} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{n!}{(r!)^k} \end{aligned}$$

La funzione generatrice delle mani per questa famiglia è allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x,y) &= \sum_{n,k} h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k \\ &= \sum_{k}\frac{1}{k!(r!)^k}x^{kr}y^k \\ &= exp\left(\frac{x^r y}{r!}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Passo 2. Si consideri ora, dati gli interi positivi r e d_r, una famiglia esponenziale $\mathcal{F}_r$ i cui mazzi siano tutti vuoti tranne il mazzo $\mathcal{D}_r$, che conterrà d_r carte. Fissato r, si dimostra per induzione su d_r che la funzione generatrice delle mani per $\mathcal{F}_r$ è

$$\mathcal{H}_r(x,y) = exp\left(\frac{yd_r x^r}{r!}\right) \tag{3.6}$$

Il caso $d_r = 1$ segue immediatamente dal Passo 1.

Supponiamo ora che la (3.6) sia verificata per ogni d_r compreso tra 1 e $m-1$ e mostriamo che vale anche per $d_r = m$. La famiglia $\mathcal{F}_r$ si può vedere come l'unione di una famiglia $\mathcal{F}'_r$ i cui mazzi sono tutti vuoti tranne l'r-esimo, che contiene $m-1$ carte, e una famiglia $\mathcal{F}''_r$, anch'essa con mazzi tutti vuoti tranne l'r-esimo, che contiene una sola carta. Siano $\mathcal{H}'_r(x,y)$ e $\mathcal{H}''_r(x,y)$ rispettivamente le loro funzioni generatrici delle mani. Dal Passo 1, dall'ipotesi induttiva e dal Lemma Fondamentale segue allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r(x,y) &= \mathcal{H}'_r(x,y)\mathcal{H}''_r(x,y) \\ &= exp\left(\frac{y(m-1)x^r}{r!}\right)\cdot exp\left(\frac{yx^r}{r!}\right) \end{aligned}$$

$$= exp\left(\frac{ymx^r}{r!}\right).$$

Passo 3. Una qualsiasi famiglia esponenziale $\mathcal{F}$ formata dai mazzi $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,... si può vedere come l'unione delle famiglie $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$,... dove per ogni $i \geq 1$ la famiglia $\mathcal{F}_i$ ha come unico mazzo non vuoto il mazzo $\mathcal{D}_i$ (cioè l'i-esimo mazzo di $\mathcal{F}$). Per il Lemma Fondamentale e il Passo 2,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,y) &= \prod_{r\geq 1}\mathcal{H}_r(x,y)\\ &\overset{(3.6)}{=} \prod_{r\geq 1} exp\left(\frac{yd_rx^r}{r!}\right)\\ &= exp\left(y\sum_{r\geq 1}\frac{d_rx^r}{r!}\right)\\ &= e^{y\mathcal{D}(x)}\end{aligned}$$

e questo conclude la dimostrazione di (3.3).

Dimostriamo infine la (3.4). Ricordando che $e^z = \sum_{\geq 0} z^m/m!$, si ottiene

$$\mathcal{H}(x,y) \overset{(3.3)}{=} e^{y\mathcal{D}(x)} = \sum_{m\geq 0} y^m \frac{(\mathcal{D}(x))^m}{m!}$$

Quindi, dato che per definizione $\mathcal{H}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k$, per ogni $m \geq 0$ si ha

$$\frac{\mathcal{D}(x)^m}{m!} = \sum_{n\geq 0} h(n,m)\frac{x^n}{n!}$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Corollario 3.2.1 (Formula esponenziale con restrizioni sul numero di carte)**.** *Siano T un insieme di interi positivi e $\mathcal{F}$ una famiglia esponenziale. Sia inoltre $e_T(x) = \sum_{n\in T} x^n/n!$. Allora, detto $h_n(T)$ il numero di mani che hanno peso n e numero di carte contenuto in T, vale*

$$\{h_n(T)\}_{n=0}^{\infty} \overset{egf}{\longleftrightarrow} e_T(\mathcal{D}(x)) \tag{3.7}$$

.

Dimostrazione. Fissato n, sommando la (3.4) lungo tutti i $k \in T$, si ottiene

$$h_n(T) = \sum_{k \in T} h(n,k) \stackrel{(3.4)}{=} \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{ \sum_{k \in T} \frac{\mathcal{D}(x)^k}{k!} \right\} = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \{e_T(\mathcal{D}(x))\}$$

□

Osservazione 3.2.1. Detta $\mathcal{H}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h_n}{n!} x^n$ la funzione generatrice esponenziale per la successione $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, dove h_n è il numero di mani (di qualsiasi numero di carte) di peso n, vale

$$\mathcal{H}(x) = e^{\mathcal{D}(x)}. \tag{3.8}$$

Questo risultato segue dal Corollario 3.2.1, ponendo $T = \mathbb{N}$.

Corollario 3.2.2 (Formula esponenziale con restrizioni sul numero di carte e sul peso delle carte)**.** *Siano T e S due insieme di interi positivi e $\mathcal{F}$ una famiglia esponenziale. Allora, detto $h(n,S,T)$ il numero di mani di peso n che hanno numero di carte contenuto in T e che sono formate solo da carte di peso contenuto in S, vale*

$$\{h(n,S,T)\}_{n=0}^{\infty} \stackrel{egf}{\longleftrightarrow} e_T(\mathcal{D}^{(S)}(x)) \tag{3.9}$$

dove e_T è definita come nel Corollario 3.2.1 e $\mathcal{D}^{(S)}(x) = \sum_{r \in S} d_r \frac{x^r}{r!}$.

Dimostrazione. Data la famiglia $\mathcal{F}$ formata dai mazzi $\mathcal{D}_r$ (di peso r) per ogni intero positivo r, definiamo una nuova famiglia esponenziale $\mathcal{F}^{(S)}$ i cui mazzi $\mathcal{D}_r^{(S)}$ sono vuoti se $r \notin S$ e uguali a $\mathcal{D}_r$ se $r \in S$. Le carte in $\mathcal{F}^{(S)}$ sono quindi tutte e sole le carte di $\mathcal{F}$ che hanno pesi contenuti in S. La funzione generatrice dei mazzi per $\mathcal{F}^{(S)}$ è

$$\mathcal{D}^{(S)}(x) = \sum_{r \in S} d_r \frac{x^r}{r!}$$

Data l'ovvia corrispondenza biunivoca tra le carte di $\mathcal{F}^{(S)}$ e le carte di $\mathcal{F}$ di peso contenuto in S, scegliere in $\mathcal{F}$ solo carte di peso contenuto in S equivale a scegliere carte qualsiasi in $\mathcal{F}^{(S)}$. In particolare, applicando il Corollario 3.2.1 alla famiglia $\mathcal{F}^{(S)}$ si ottiene la tesi. □

3.3 Esempi

3.3.1 Permutazioni e numeri di Stirling di prima specie

Torniamo all'esempio delle permutazioni. Si è già osservato nell'Esempio 3.1.1 che il numero di carte contenute nel mazzo $\mathcal{D}_r$ è $d_r = (r-1)!$. La funzione generatrice dei mazzi è quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x) &= \sum_{r\geq 0}(r-1)!\frac{x^r}{r!}\\ &= \sum_{r\geq 0}\frac{x^r}{r}\\ &= \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\end{aligned}$$

Per la formula esponenziale, la funzione generatrice delle mani è

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,y) &= e^{y\mathcal{D}(x)}\\ &= \frac{1}{(1-x)^y}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Quindi il numero di permutazioni di n elementi che sono prodotto di k cicli disgiunti è $h(n,k)$, cioè il coefficiente di $\frac{x^n}{n!}y^k$ in $\frac{1}{(1-x)^y}$.

Il numero di Stirling di prima specie $\left[{n \atop k}\right]$ è definito come il numero di permutazioni di n elementi che sono prodotto di k cicli disgiunti, quindi $h(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$ e, per n fissato, dalla definizione di $\mathcal{H}(x,y)$ segue

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}y^k &= \sum_{k\geq 0}h(n,k)y^k\\ &= \left[\frac{x^n}{n!}\right]\mathcal{H}(x,y).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Sostituendo (3.10) in (3.11) si ottiene

$$\left[\frac{x^n}{n!}\right]\frac{1}{(1-x)^y} \overset{(1.11)}{=} n!\binom{y+n-1}{n} = y(y+1)\cdots(y+n-1),$$

quindi

$$\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}y^k = y(y+1)\cdots(y+n-1), \tag{3.12}$$

cioè il numero di Stirling di prima specie $\left[{n \atop k}\right]$ è il coefficiente di y^k in $y(y+1)\cdots(y+n-1)$.

Per esempio, il numero di permutazioni di n elementi che hanno un solo ciclo è il coefficiente del termine di y^1 in $y(y+1)\cdots(y+n-1)$, cioè il termine noto in $(y+1)\cdots(y+n-1)$ che è $(n-1)!$.

3.3.2 Partizioni di un insieme e numeri di Bell

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ in cui per ogni $r \geq 1$ il mazzo $\mathcal{D}_r$ contiene una sola carta, di peso d_r. Dato che ogni mazzo ha una sola carta, ogni carta in $\mathcal{F}$ è identificata dal suo peso e quindi l'immagine presente su di essa non ha importanza. Si può osservare che ogni mano $\mathcal{H}$ di $\mathcal{F}$ di peso n e k carte corrisponde univocamente alla partizione di $[n]$ in k classi i cui blocchi sono gli insiemi di etichette delle carte in $\mathcal{H}$. Viceversa, data una partizione di $[n]$ in k classi, dove $A_1, ..., A_k$ sono i blocchi della partizione, si può formare una mano scegliendo per ogni blocco A_i l'unica carta di $\mathcal{F}$ di peso $|A_i|$ e rietichettandola con A_i. Inoltre diverse partizioni corrispondono ovviamente a mani diverse. Quindi il numero di mani di $\mathcal{F}$ di peso n e k carte $h(n,k)$ è il numero di partizioni di $[n]$ in k classi, cioè il numero di Stirling di seconda specie $\left\{{n \atop k}\right\}$. Si ha $d_n = 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi la funzione generatrice dei mazzi è

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} x^n = e^x - 1.$$

Il numero di Bell b_n è definito per ogni $n \geq 1$ come il numero di partizioni di un insieme di n elementi; $b_0 = 1$ per definizione. Ovviamente dalle definizioni dei numeri di Bell e dei numeri di Stirling di seconda specie segue che

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} = \sum_{k=0}^{n} h(n,k); \qquad (3.13)$$

quindi nella famiglia esponenziale descritta in questo esempio il numero di mani di peso n e numero di carte qualsiasi è uguale a b_n. Allora per l'Osservazione 3.2.1 la funzione generatrice esponenziale $\mathcal{H}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ per i numeri di Bell $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ è

$$\mathcal{H}(x) = e^{e^x-1}, \tag{3.14}$$

cioè il numero di partizioni di un insieme di n elementi è uguale al coefficiente di x^n in e^{e^x-1}.

Da questa funzione generatrice si può inoltre ricavare una definizione per ricorrenza per i numeri di Bell. Dall'uguaglianza $e^{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ segue

$$e^x - 1 = \log(e^{e^x-1}) = \log\left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n\right);$$

derivando entrambi i membri si ottiene

$$e^x = \frac{\sum_{n\geq 1} n\frac{b_n}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n}.$$

Infine, moltiplicando entrambi i membri per x si ottiene

$$xe^x = \frac{\sum_{n\geq 0} n\frac{b_n}{n!} x^n}{\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n},$$

che equivale a

$$xe^x \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} n\frac{b_n}{n!} x^n.$$

Quindi per ogni $n \geq 1$ il coefficiente di x^n in entrambi i membri è

$$\begin{aligned}
\frac{nb_n}{n!} &= [x^n]\left\{xe^x \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n\right\} \\
&= [x^{n-1}]\left\{e^x \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!} \frac{1}{k!} b_k,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k \qquad \forall n \geq 1. \tag{3.15}$$

Per definizione $b_0 = 1$, quindi tramite la relazione appena trovata si possono determinare per ricorrenza tutti i numeri di Bell.

3.3.3 Permutazioni con cicli di lunghezza maggiore di q

Fissato un intero positivo q, sia $f(n, q)$ il numero di permutazioni di n elementi che sono prodotto di cicli disgiunti tutti di lunghezza maggiore di q. Applicando il Corollario 3.2.2 con $T = \mathbb{N}$ e $S = \{t \in \mathbb{N} | t > q\}$, si ottiene che la funzione generatrice esponenziale $f_q(x)$ della successione $\{f(n, q)\}_{n=0}^{\infty}$ è

$$\begin{aligned} f_q(x) &= exp\left(\sum_{n>q} \frac{x^n}{n}\right) \\ &= exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{q} \frac{x^n}{n}\right) \\ &\overset{(1.10)}{=} exp\left(\log\frac{1}{1-z} - \sum_{n=1}^{q} \frac{x^n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{1-z} \cdot exp\left(-\sum_{n=1}^{q} \frac{x^n}{n}\right). \end{aligned}$$

Nel Capitolo 4 studieremo il comportamento asintotico dei coefficienti di $f_q(x)$.

Capitolo 4

Metodi asintotici

4.1 Proprietà analitiche delle serie di potenze.

Fino ad ora abbiamo considerato le funzioni generatrici come serie formali, cioè come scritture formali del tipo $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ in cui la x è solo un simbolo e non la variabile di una funzione; per le serie formali non esiste il concetto di convergenza in un punto. In questo capitolo studieremo invece le funzioni generatrici dal punto di vista analitico, cioè data una funzione generatrice $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ per la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (dove $a_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), considereremo la funzione di variabile complessa

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,$$

definita nei punti $z \in \mathbb{C}$ in cui il limite converge. In questa trattazione chiameremo la funzione $S(z)$ anche serie complessa.

Lo studio delle proprietà analitiche delle funzioni generatrici ha moltissime applicazioni, molte delle quali non si possono dedurre semplicemente studiando le funzioni generatrici solamente come serie formali. In questa trattazione mostreremo che, data una serie formale di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se la serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è lo sviluppo in serie di potenze intorno all'origine di una funzione f nota olomorfa in un certo dominio, allora si possono studiare le singolarità di f per stimare i coefficienti $\{a_n\}$.

Enunciamo il seguente teorema, per la dimostrazione si veda Stein, Shakarchi (2003):

Teorema 4.1.1. *Siano U un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia $z_0 \in U$. Se $r > 0$ è tale che $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$, allora per ogni $z \in D_r(z_0)$*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

dove

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{4.1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Da questo teorema segue che se due funzioni $S_1(z) = \sum_n a_n z^n$ e $S_2(z) = \sum_n b_n z^n$ convergono e sono uguali in un intorno dell'origine, allora $a_n = b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, dato che le serie di potenze complesse S_1 e S_2 sono funzioni olomorfe nei loro dischi di convergenza, allora vale il Teorema 4.1.1 e per la (4.1) vale $a_n = b_n$ in quanto $S_1(z) = S_2(z)$ in un intorno di 0. Viceversa invece, se due serie formali $\sum_n a_n x^n$ e $\sum_n b_n x^n$ sono uguali, allora per definizione $a_n = b_n \quad \forall n$ e quindi ovviamente $\sum_n a_n z^n = \sum_n b_n x^n$ nei loro dischi di convergenza.

D'ora in poi quindi a volte useremo le stesse notazioni per le serie formali e le serie complesse ad esse associate, ricordando però che considerando le serie come funzioni le uguaglianze valgono solo nei punti del disco di convergenza.

Il Teorema 4.1.1 è inoltre alla base del seguente risultato fondamentale:

Proposizione 4.1.1. *Sia $S(f) \subset \mathbb{C}$ un insieme chiuso e costituito da punti isolati. Sia $f : \mathbb{C} - S(f) \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e tale che gli elementi di $S(f)$ sono tutti singolarità isolate e non rimovibili di f. Sia inoltre $z_0 \in S(f)$ la singolarità di f più vicina all'origine.*

Se $0 \in \mathbb{C} - S(f)$ e in un intorno di 0 vale $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (dove $a_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), allora il raggio di convergenza di $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ è $|z_0|$. Inoltre, fissata $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ vale

$$|a_n| < \left(\frac{1}{|z_0|} + \epsilon \right)^n$$

e inoltre esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n| > \left(\frac{1}{|z_0|} - \epsilon\right)^n.$$

Dimostrazione. Detto R il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, dal teorema di Cauchy-Hadamard e dalla definizione di massimo limite segue immediatamente che, fissato $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ vale

$$|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n$$

e che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n| > \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)^n.$$

Mostrando che $R = |z_0|$ si conclude la dimostrazione. Per il Teorema 4.1.1, per ogni $r > 0$ tale che $r < |z_0|$ vale $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ per ogni $z \in D_r(0)$ (si osservi che, sempre per il Teorema 4.1.1, i coefficienti della serie sono univocamente determinati). Allora $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ in $D_{|z_0|}(0)$ e quindi il raggio di convergenza R della serie è $\geq |z_0|$. Mostriamo ora che R non può essere strettamente maggiore di $|z_0|$. Per semplicità lo dimostreremo nel caso in cui l'unica singolarità non rimovibile di f di modulo $|z_0|$ sia z_0; la dimostrazione per il caso in cui f ha anche altre singolarità di modulo $|z_0|$ è analoga.

Supponiamo per assurdo che $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converga in un disco di raggio $R' > |z_0|$. Sia quindi $\epsilon > 0$ tale che $D_{|z_0|+\epsilon} - \{z_0\} \subseteq ((\mathbb{C} - S(f)) \cap D_{R'})$ e tale che f non abbia altre singolarità in $D_{|z_0|+\epsilon}(0)$. Dato che una serie di potenze è olomorfa nel suo disco di convergenza, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ è olomorfa in $D_{|z_0|+\epsilon}(0)$. Sia f che $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sono olomorfe in $D_{|z_0|+\epsilon} - \{z_0\}$, quindi per il teorema di identità delle funzioni olomorfe vale $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ per ogni $z \in D_{|z_0|+\epsilon}(0) - \{z_0\}$.

Dato che $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ è olomorfa in $D_{|z_0|+\epsilon}(0)$, allora per continuità è limitata in un intorno di z_0. Quindi, poiché $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = f$ in $D_{|z_0|+\epsilon}(0) - \{z_0\}$, f è limitata in un intorno bucato di z_0. Allora per il teorema di Riemann per le singolarità rimovibili z_0 è una singolarità rimovibile per f, contraddicendo l'ipotesi. $\square$

Quindi se in un intorno dell'origine una serie di potenze complessa è uguale a una data funzione f olomorfa in un certo insieme, studiando le singolarità di f si possono stimare i coefficienti della serie.

4.2 Funzioni meromorfe

Sia $f : \mathbb{C} - \{z_0, ..., z_t\} \to \mathbb{C}$ olomorfa, con $z_0, ..., z_t$ poli. Vogliamo stimare i coefficienti del suo sviluppo in serie intorno all'origine.

Se f ha un polo di ordine m_i in z_i, allora esistono $r_i > 0$ e una funzione $G_i : D_{r_i}(z_i) \to \mathbb{C}$ olomorfa (dove $D_{r_i}(z_i) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_i| < r_i\}$) tali che

$$f(z)_{|D_{r_i}(z_i)-\{z_i\}} = \frac{a^{(i)}_{-m_i}}{(z-z_i)^{m_i}} + \frac{a^{(i)}_{-m_i+1}}{(z-z_i)^{m_i-1}} + ... + \frac{a^{(i)}_{-1}}{z-z_i} + G_i(z) \tag{4.2}$$

dove $a^{(i)}_{-k} \in \mathbb{C}$ per ogni $k = 1, ..., m_i$.

$$PP(f; z_i) = \frac{a^{(i)}_{-m_i}}{(z-z_0)^{m_i}} + \frac{a^{(i)}_{-m_i+1}}{(z-z_0)^{m_i-1}} + ... + \frac{a^{(i)}_{-1}}{z-z_0} : \mathbb{C} - \{z_i\} \to \mathbb{C}$$

è la parte principale di f in z_i.

Sia $R > 0$ il modulo del polo di f più vicino all'origine e siano $z_0, z_1, ..., z_s$ tutti i poli di f di modulo R, di ordine rispettivamente $m_0, m_1 ..., m_s$.

Definiamo la funzione

$$h(z) = f(z) - PP(f; z_0) - PP(f; z_1) - ... - PP(f; z_s). \tag{4.3}$$

h è olomorfa in $\mathbb{C} - \{z_0, ..., z_t\}$ e si può estendere a una funzione olomorfa in $\mathbb{C} - \{z_{s+1}, ..., z_t\}$ (che continueremo a chiamare h) perché le sue singolarità in $z_0, z_1, ..., z_s$ sono tutte rimovibili. Infatti, da (4.2) segue che per ogni $i = 0, ..., s$

$$h(z)_{|D_{r_i}-\{z_i\}} = PP(f; z_i) + G_i(z_i) - \sum_{k=0}^{s} PP(f; z_k)$$

$$= G_i(z) - \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{s} PP(f;z_k) \tag{4.4}$$

Allora, passando al limite,

$$\lim_{z\to z_i} h(z) = \lim_{z\to z_i} (G_i(z) - PP(f;z_0) - ...PP(f;z_{i-1}) \tag{4.5}$$
$$- PP(f;z_{i+1}) - ... - PP(f;z_s))$$
$$= G_i(z_i) - \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{s} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{-j}^{(k)}}{(z_i - z_k)^j} \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

e quindi per ogni $i = 0, ..., s$ z_i è una singolarità rimovibile per h.

Le singolaritò di h sono $z_{s+1}, ..., z_t$, quindi il raggio di convergenza R' dello sviluppo di h in serie di potenze intorno all'origine è il modulo del punto più vicino all'origine tra $z_{t+1}, ..., z_s$, e vale $R' > R$. (Ovviamente se le singolarità di f hanno tutte modulo $|z_0|$ vale $R' = \infty$). Sottraendo a f la sua parte principale nei poli più vicini all'origine si è quindi ottenuta una funzione il cui sviluppo in serie di potenze attorno all'origine ha un raggio di convergenza strettamente maggiore di quello di f.

Se f è la funzione generatrice per la successione $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ e

$$g(z) = PP(f;z_0) + PP(f;z_1) + ... + PP(f;z_s) \overset{\{ops\}}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \tag{4.7}$$

(cioè più precisamente in un intorno di 0 valgono $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ e $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$), allora, per la Proposizione 4.1.1 applicata ad $h = f - g$ (il cui sviluppo in serie di potenze intorno all'origine ha come coefficienti $\{c_n - b_n\}_{n=0}^{\infty}$), per ogni $\epsilon > 0$ fissata vale

$$|c_n - b_n| < \left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n \qquad \text{per } n \to \infty. \tag{4.8}$$

Da (4.8) segue

$$c_n = b_n + O\left(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n\right) \qquad \text{per } n \to \infty \tag{4.9}$$

cioè asintoticamente si possono approssimare i termini della successione $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ con i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze intorno all'origine di g, dove g è la somma delle parti principali di f nei poli di modulo minimo.

Determiniamo ora esplicitamente i coefficienti b_n. Dato che $g = PP(f; z_0) + ... + PP(f; z_s)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ b_n è uguale alla somma dei coefficienti dei termini di grado n negli sviluppi in serie di potenze intorno all'origine di $PP(f; z_0), ..., PP(f; z_s)$ rispettivamente. Per ogni i=0,...,s fissato vale

$$\begin{aligned} PP(f; z_i) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}^{(i)}}{(z - z_i)^j} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j}{z_i^j (1 - (z/z_i))^j} a_{-j}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dato che per (1.11) per $|x| < 1$ vale

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n} x^n$$

(il raggio di convergenza è 1 perché la singolarità di $1/(1-x)^{k+1}$ di modulo minimo è -1), allora per ogni z tale che $|z| < |z_i| = R$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - (z/z_i))^j} &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+j-1}{n} (z/z_i)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} (z/z_i)^n \end{aligned} \tag{4.11}$$

Sosituendo in (4.10) quest'ultima relazione si ottiene quindi che, in un intorno dell'origine,

$$\begin{aligned} PP(f; z_i) &= \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^j a_{-j}^{(i)}}{z_i^j} \left(\sum_{n \geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} (z/z_i))^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^j a_{-j}^{(i)}}{z_i^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Allora sommando per ogni polo di modulo $|z_0|$ segue che, per $\epsilon > 0$ arbitraria,

$$[z^n]f = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^j a_{-j}^{(i)}}{z_i^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \right) + O\left(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon \right)^n \right) \quad \text{per } n \to \infty. \tag{4.13}$$

4.3 Esempi

4.3.1 Numeri di Bell ordinati

L'n-esimo *numero di Bell* b_n, definito nel Capitolo 3, è il numero di partizioni di un insieme di n elementi. Il *numero di Bell ordinato* $\tilde{b}(n)$ è invece definito come il numero di partizioni ordinate di un insieme di n elementi, dove come partizione ordinata si intende una partizione in cui conta l'ordine delle classi ma non quello degli elementi all'interno di una stessa classe. Vale allora

$$\tilde{b}(n) = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}, \tag{4.14}$$

perché per ogni $k = 0, ..., n$ esistono $\left\{ {n \atop k} \right\}$ partizioni dell'insieme in k classi, e per ognuna di queste partizioni i modi di ordinarne le classi sono $k!$, quindi le partizioni ordinate di un insieme di n elementi in k classi sono $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$; sommando per ogni k si ottiene $\tilde{b}(n)$.

Moltiplicando entrambi i membri di (2.20) per e^{-y} e integrando da 0 a $+\infty$ si ottiene

$$\tilde{b}(n) = \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{2^{r+1}} \tag{4.15}$$

Quindi la funzione generatrice esponenziale per la successione $\left\{ \tilde{b}(n) \right\}_{n=0}^{\infty}$ è

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{b}(n)}{n!} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{2^{r+1}} \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{r^n z^n}{n!} \right) \frac{1}{2^{r+1}} \\ &= \sum_{r \geq 0} \left(e^{rz} \right) \frac{1}{2^{r+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r \geq 0} \left(\frac{e^z}{2} \right)^r \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^z}{2}}$$
$$= \frac{1}{2 - e^z}$$

Studiamo le singolarità di f. f è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\log(2) + 2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\}$ e tutte le sue singolarità sono poli.

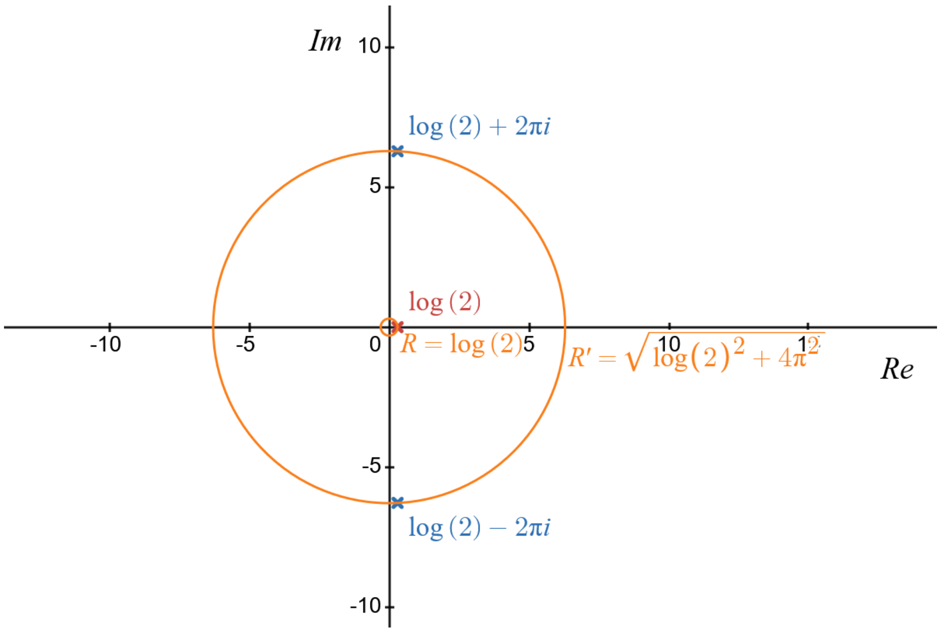

Figura 4.1: Singolarità di f e dischi di convergenza degli sviluppi in serie di potenze di f e $f - PP(f; \log(2))$ intorno all'origine.

La singolarità di f più vicina all'origine è $\log(2)$, quindi asintoticamente i termini di $\left\{\tilde{b}(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ possono essere approssimati dai coefficienti dello sviluppo in serie di potenze intorno all'origine di $PP(f; \log(2))$. La parte principale di f in $\log(2)$ è

$$PP(f; \log(2)) = \frac{-1/2}{z - \log(2)}.$$

$f - PP(f; \log(2))$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\log(2) + 2k\pi i | k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ e il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di $f - PP(f; \log(2))$ è ora $R' = |\log(2) + 2k\pi i| = \sqrt{(\log(2))^2 + 4\pi^2}$ perché $\log(2) + 2\pi i$ è una sua singolarità di modulo minimo.

Quindi per (4.12) si ha

$$[z^n]\{PP(f;\log(2))\} = \frac{1/2}{(\log(2))^{n+1}}. \tag{4.16}$$

Allora, per (4.13), per $\epsilon > 0$ arbitraria vale

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{b}(n)}{n!} &= \frac{1/2}{(\log(2))^{n+1}} + O\left(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n\right) \\ &= \frac{1/2}{(\log(2))^{n+1}} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{(\log(2))^2 + 4\pi^2}} + \epsilon\right)^n\right) \\ &\quad \text{per} \quad n \to \infty,\end{aligned} \tag{4.17}$$

da cui si ottiene la seguente stima per $\tilde{b}(n)$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(n) &= \frac{1}{2(\log(2))^{n+1}} n! + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{(\log(2))^2 + 4\pi^2}} + \epsilon\right)^n n!\right) \\ &= \frac{1}{2(\log(2))^{n+1}} n! + O\left(0.16^n n!\right) \qquad \text{per} \quad n \to \infty.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Per n grandi il calcolo esatto dell'n-esimo numero di Bell con la formula (4.14) è complesso, ma $n!/((2\log(2))^{n+1})$, che è molto più semplice da determinare, è una buona approssimazione, come si può osservare nell'esempio per alcuni valori di n (Wilf (1994)):

n	1	2	3	5	10
$\tilde{b}(n)$	1	3	13	541	102247563
$n!/((2\log(2))^{n+1})$	1.04	3.002	12.997	541.002	102247563

4.3.2 Numero di permutazioni con cicli di lunghezza maggiore di q.

Nel Capitolo 3 si è dimostrato che, dato un intero positivo q e detto $f(n, q)$ il numero di permutazioni di n elementi che sono prodotto di cicli disgiunti di lunghezza maggiore di q, la funzione generatrice esponenziale per la successione $\{f(n,q)\}_{n=0}^{\infty}$ è

$$f_q(x) = \frac{1}{1-z} \cdot exp\left(-\sum_{n=1}^{q} \frac{x^n}{n}\right). \tag{4.19}$$

Si vuole stimare il comportamento asintotico di $f(n,q)$. f_q ha una sola singolarità, di tipo polo, in $z_0 = 1$; l'ordine di polo di z_0 è 1. Calcoliamo il residuo di f_q in z_0:

$$\begin{aligned}
\text{Res}(1, f_q) &= \lim_{z\to 1}((z-1)f_q(z)) \\
&= \lim_{z\to 1} -exp\left(-\sum_{n=1}^{q} \frac{z^n}{n}\right) \\
&= -exp\left(-\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n}\right) \\
&= -e^{-H_q},
\end{aligned}$$

dove $H_q = \sum_{n=1}^{q} 1/n$ è il q-esimo numero armonico.

La parte principale di f_q in 1 è allora

$$PP(f_q, 1) = \frac{1}{1-z} e^{-H_q}. \tag{4.20}$$

f_q ha un solo polo (in $z_0 = 1$), quindi sottraendo a questa funzione la sua parte principale in 1 si ottiene una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$; allora il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di $f_q - PP(f_q; 1)$ intorno all'origine è $R' = \infty$. Allora, per quanto dimostrato nella sezione precedente, per $\epsilon > 0$ arbitraria vale

$$\begin{aligned}
\frac{f(n,q)}{n!} &= [z^n]\left\{\frac{1}{1-z} e^{-H_q}\right\} + O(\epsilon^n) \\
&= [z^n]\left\{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n\right) e^{-H_q}\right\} + O(\epsilon^n) \\
&= e^{-H_q} + O(\epsilon^n) \qquad\qquad \text{per } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Da quest'ultimo risultato si può osservare che la probabilità che una permutazione abbia cicli tutti di lunghezza maggiore di q asintoticamente si avvicina a una costante, e^{-H_q}. Per esempio, se $q = 1$,

$$\frac{f(n,q)}{n!} = e^{-1} + O(\epsilon^n) \qquad \text{per } n \to \infty,$$

cioè la probabilità che una permutazione di n elementi non abbia punti fissi si avvicina asintoticamente a e^{-1}, in accordo con quanto osservato nel Capitolo 2.

Bibliografia

[1] Aigner, M.: *A Course in Enumeration*, Springer: Berlin, Heidelberg 2007

[2] Busam, R., Freitag E.: *Complex Analysis* (2a ed.), Springer: Berlin, Heidelberg 2009

[3] Comtet, L.: *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*, Springer Dordrecht: Dordrecht 1974

[4] Flajolet, P., Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press: Cambridge 2009

[5] Herstein I. N.: *Algebra*, (2a ed.), Editori riuniti: Roma 2010

[6] Stein, E. M., Shakarchi, R.: *Complex Analysis*, Princeton University Press: Princeton, Oxford 2003

[7] Wilf, H.: *Generating Functionolgy* (2a ed.), Academic Press: Boston 1994