

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**LE 1-FORME OLOMORFE  
SULLE SUPERFICI  
IPERELLITTICHE**

Tesi di Laurea in Analisi Complessa

**Relatore:**  
Chiar.ma Prof.ssa  
Maria Beatrice Pozzetti

**Presentata da:**  
Johannes Höllrigl

Anno Accademico 2024-2025

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Concetti preliminari</b>	<b>4</b>
1.1 Superfici di Riemann . . . . .	4
1.2 Curve piane . . . . .	7
<b>2 Le superfici iperellittiche</b>	<b>9</b>
2.1 Curve iperellittiche . . . . .	9
2.2 Incollare spazi e tappare buchi . . . . .	10
2.3 La compattificazione delle curve iperellittiche . . . . .	15
<b>3 Le 1-forme olomorfe</b>	<b>21</b>
3.1 Definizioni e proprietà di 1-forme . . . . .	21
3.2 La dimensione dello spazio $\Omega^1(X)$ . . . . .	28
3.3 Le 1-forme olomorfe sulle superfici iperellittiche . . . . .	30
<b>Bibliografia</b>	<b>32</b>

# Introduzione

Il presente lavoro di tesi verte sulla costruzione geometrica e sull'analisi delle superfici iperellittiche. L'obiettivo è duplice: definire rigorosamente la superficie di Riemann compatta a partire dalla curva algebrica affine e, successivamente, determinarne lo spazio delle 1-forme olomorfe.

L'elaborato è strutturato in tre capitoli.

Nel Primo Capitolo introduciamo il formalismo essenziale, richiamando le definizioni di superficie di Riemann, carta locale e curva piana.

Nel Secondo Capitolo presenteremo le curve iperellittiche affini per poi procedere alla loro compattificazione. Definiremo rigorosamente le operazioni di incollamento necessarie a "tappare i buchi" (i punti all'infinito), ottenendo così una superficie compatta. Tale compattezza non è formale, ma costituisce il prerequisito indispensabile per applicare i teoremi globali del capitolo successivo.

Il Terzo Capitolo è dedicato allo studio delle 1-forme olomorfe. Dopo averne esposto le proprietà, utilizzeremo il Teorema di Riemann-Roch per stabilire teoricamente la dimensione dello spazio vettoriale  $\Omega^1(X)$ . Concluderemo il lavoro costruendo esplicitamente una base di forme per il caso iperellittico, verificando la corrispondenza tra la geometria della curva e la struttura analitica dello spazio delle forme.

# Capitolo 1

## Concetti preliminari

In questo capitolo introduco i concetti necessari per capire gli argomenti trattati in questo elaborato: le superfici di Riemann, le mappe tra loro, le curve affini, ecc. Per le dimostrazioni, il lettore può consultare ad esempio [1].

Una superficie di Riemann è uno spazio topologico la cui struttura locale è quella del piano complesso. Questi spazi sono in particolare delle varietà lisce, orientabili di dimensione (reale) 2. È utile ed interessante trasportare i vari concetti di analisi complessa sul piano complesso al mondo delle superfici di Riemann. Vediamolo formalmente:

### 1.1 Superfici di Riemann

**Definizione 1.1.1 (carte).** Una **carta complessa** su uno spazio topologico  $X$  è un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$  tra aperti  $U \subseteq X$  e  $V \subseteq \mathbb{C}$ .  $\phi$  è **centrata in  $p \in U$**  quando  $\phi(p) = 0$ .

Due carte complesse  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  su  $X$  sono **compatibili** quando ogni volta che  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , la funzione di transizione

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$
 è olomorfa.

**Definizione 1.1.2 (atlanti).** Un **atlante complesso** su  $X$  è una collezione di carte complesse  $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$  a due a due compatibili, tale che  $X = \bigcup_i U_i$ . Due atlanti su  $X$  sono **equivalenti** se la loro unione è un atlante. Una **struttura complessa** su  $X$  è una classe di equivalenza di atlanti su  $X$ , o equivalentemente un atlante massimale (dato dal lemma di Zorn).

Questo ci porta alla definizione chiave di superficie di Riemann:

**Definizione 1.1.3.** Una **superficie di Riemann** è uno spazio topologico  $X$  connesso,  $T2$  e  $N2$ , insieme ad struttura complessa.

**Esempio 1.1.4.**  $\mathbb{C}$  è superficie di Riemann; come atlante si può semplicemente prendere  $\{id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ .

**Definizione 1.1.5 (mappe olomorfe e meromorfe).** Siano  $X$  e  $Y$  due superfici di Riemann. Una funzione  $F : X \rightarrow Y$  è **olomorfa** quando  $\forall \phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  carta su  $X$  e  $\forall \psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  carta su  $Y$ , la composizione  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  (dove è definita) è olomorfa.

Se  $F$  è olomorfa e biunivoca con inversa olomorfa, allora  $F$  è un **biolomorfismo** e  $X$  e  $Y$  sono superfici **biolomorfe** o **isomorfe**.

Una funzione  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  è **meromorfa** quando esiste un insieme discreto  $P(F) \subset X$  t.c.  $F|_{X \setminus P(F)}$  è olomorfa e ogni  $p \in P(F)$  è un polo o una singolarità rimovibile per  $F$ , cioè  $\phi(p)$  è un polo/una singolarità rimovibile per  $F \circ \phi^{-1}$  per ogni carta  $\phi$  intorno a  $p$ .

Lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe da  $X \rightarrow \mathbb{C}$  si indica con  $\mathcal{O}(X)$ .

Lo spazio vettoriale delle funzioni meromorfe  $X \rightarrow \mathbb{C}$  si indica con  $\mathcal{M}(X)$ .

**Esempio 1.1.6 (La sfera di Riemann).** Consideriamo la compattificazione di Alexandroff  $\hat{\mathbb{C}}$  di  $\mathbb{C}$ . Essa è naturalmente omeomorfa sia alla sfera  $S^2$  che alla retta proiettiva complessa  $\mathbb{CP}^1$ . Ma vale di più: Questi spazi sono biolomorfi come superfici di Riemann. Utilizzando le proiezioni stereografiche  $\phi_N, \phi_S$  sulla sfera e le carte affini  $\phi_0, \phi_1$  su  $\mathbb{CP}^1$ , si hanno due atlanti complessi sullo spazio topologico  $\hat{\mathbb{C}}$ . Si dimostra che tra queste due strutture complesse essenzialmente non c'è nessuna differenza, cioè che  $S^2$  e  $\mathbb{CP}^1$  sono biolomorfi.

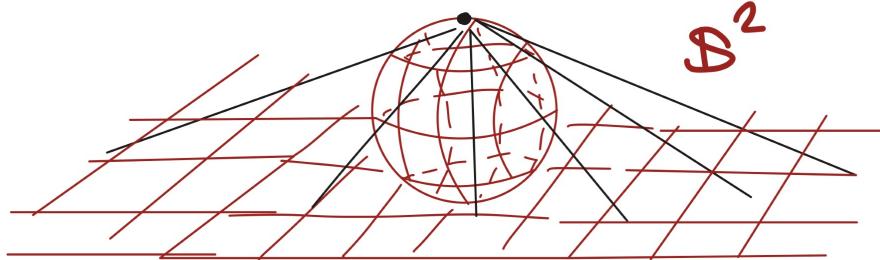


Figura 1.1: La sfera di Riemann

**Fatto:** Ogni superficie di Riemann è orientabile.

Da questo segue, per il teorema di classificazione delle superfici topologiche, che ogni

superficie di Riemann compatta è omeomorfa a  $S_g$ : **La superficie chiusa, orientabile e connessa di genere  $g$** . Quindi può essere visualizzata come la somma connessa di  $g$  tori, i.e. il toro con  $g$  buchi:

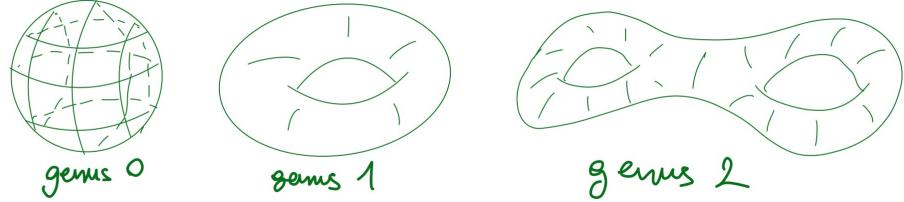


Figura 1.2: Le superfici topologiche compatte orientabili

Ecco alcuni fatti sulla topologia delle superfici compatti:

**Proposizione 1.1.7.** Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta di genere  $g$ .

- la caratteristica di Eulero  $\chi(X) = 2 - 2g$
- il gruppo fondamentale

$$\pi_1(X) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

- il primo gruppo di omologia  $H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}$

**Proposizione 1.1.8.** Siano  $X$  e  $Y$  due superfici di Riemann e sia  $F : X \rightarrow Y$  olomorfa e non costante. Allora  $\forall p \in X \exists! m \geq 1$  t.c.  $\exists \phi$  carta centrata in  $p$  ed  $\exists \psi$  carta centrata in  $F(p)$  t.c.  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  è la funzione  $z \mapsto z^m$ .

**Definizione 1.1.9.** Siano  $X$  e  $Y$  due superfici di Riemann e sia  $F : X \rightarrow Y$  olomorfa e non costante. Il numero  $m$  dato da Proposizione 1.1.8 si chiama **molteplicità** di  $F$  in  $p$  e si indica  $\text{mult}_p F$ .

Un punto  $p$  con  $\text{mult}_p F \geq 2$  è un **punto di ramificazione** per  $F$ . L'insieme dei punti di ramificazioni di  $F$  si denota  $\mathcal{R}(F)$ .

Se  $X$  e  $Y$  sono compatte, il **grado** di  $F$  è

$$\deg F := \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{mult}_x F$$

dove possiamo scegliere un punto arbitrario  $y \in Y$ .

**Definizione 1.1.10.** Sia  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa e sia  $p \in X$ . Scelta una carta  $\phi$  intorno a  $p$ , possiamo esprimere  $F \circ \phi^{-1}$  come serie di Laurent  $\sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $c_m \neq 0$ . Allora l'**ordine** di  $F$  in  $p$  è definito come  $\text{ord}_p F := m$ . Non dipende dalla carta scelta.

**Proposizione 1.1.11.** Sia  $X$  compatta e  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa.

$$\implies \sum_{p \in X} \text{ord}_p F = 0$$

**Teorema 1.1.12** (Riemann-Hurwitz). Siano  $X$  e  $Y$  superfici di Riemann compatte e sia  $F : X \rightarrow Y$  una mappa non costante olomorfa. Allora

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in \mathcal{R}(F)} [\text{mult}_p F - 1]$$

Introduco ora una classe importante di superfici di Riemann: Le curve piane affini e proiettive.

## 1.2 Curve piane

**Definizione 1.2.1** (*curve piane*). Una **curva algebrica piana affine**  $X \subseteq \mathbb{C}^2$  è il luogo di zeri di un polinomio  $f \in \mathbb{C}[z, w]$ :

$$X = V(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$$

La curva è **nonsingolare** o **liscia** quando  $f$  è nonsingolare, i.e.

$$\forall p \in X, \left( \frac{\partial f}{\partial z}(p), \frac{\partial f}{\partial w}(p) \right) \neq (0, 0)$$

La curva è **irriducibile** quando  $f$  è irriducibile.

Una **curva algebrica piana proiettiva**  $X \subseteq \mathbb{CP}^2$  è il luogo di zeri  $V(F) = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$  di un polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ . La curva è **irriducibile** quando  $F$  è irriducibile, **nonsingolare** quando  $F$  è nonsingolare, i.e.

$$\forall p \in X, \left( \frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$$

**Proposizione 1.2.2.** Ogni curva piana affine  $X = V(f)$  liscia ed irriducibile è una superficie di Riemann.

*Dimostrazione.* Le proprietà T2 e N2 sono ereditate da  $\mathbb{C}^2$ . La connessione deriva dall'irriducibilità di  $f$  attraverso un risultato profondo in geometria algebrica, che non dimostrerò qui. L'atlante complesso è garantito dal teorema della funzione implicita olomorfa:

Sia  $p \in X$  con  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ . Allora  $\exists$  un intorno  $U$  di  $p$ :  $U = \{(g(z), z)\}$  per una funzione olomorfa  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e come carta intorno a  $p$  si prende una restrizione della proiezione  $p_2(z, w) = w$ . In tutti gli altri punti,  $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$  e  $p_1(z, w) = z$  (ristretta) è una carta. Queste carte sono compatibili tra loro, perché le funzioni di transizione sono o *id* o la funzione implicita olomorfa  $g$ .  $\square$

Per semplificare le notazioni, ogni tanto userò i simboli  $z$  e  $w$  per indicare le proiezioni  $p_1$  e  $p_2$ , che possono essere delle carte se definite su intorni opportuni; in ogni caso sono funzioni olomorfe.

*Osservazione.* Anche le curve *proiettive*, se lisce ed irriducibili, sono delle superfici di Riemann. Le carte si ottengono come composizioni delle carte affini in  $\mathbb{CP}^2$  con le carte delle curve affini.

**Proposizione 1.2.3.** Sia  $X = V(f) \subset \mathbb{C}^2$  una curva affine. I punti di ramificazione delle proiezioni  $p_1$  e  $p_2$  sono caratterizzati come segue:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{R}(p_1) &\iff \frac{\partial f}{\partial w}(P) = 0 \\ P \in \mathcal{R}(p_2) &\iff \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0 \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.4.** Data una curva piana affine  $X = V(f)$ , la sua **chiusura proiettiva**  $\overline{X}^{\mathbb{P}} \subseteq \mathbb{CP}^2$  è il luogo di zeri dell'omogenizzazione  $f^h$  di  $f$ :

$$\begin{aligned} f^h &:= z^d \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{C}_d[x, y, z], \text{ dove } d = \deg(f) \\ \overline{X}^{\mathbb{P}} &:= V(f^h) \end{aligned}$$

**Attenzione:** Non è detto che  $\overline{X}^{\mathbb{P}}$  sia ancora una superficie di Riemann.

Un caso particolare delle curve piane affini sono le curve iperellittiche – gli oggetti centrali di questa tesi.

# Capitolo 2

## Le superfici iperellittiche

### 2.1 Curve iperellittiche

**Proposizione 2.1.1.** Sia  $h \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio di grado  $\geq 1$ , e sia  $f(z, w) = w^2 - h(z)$ . Allora:

1.  $f$  è irriducibile  $\iff h$  non è un quadrato in  $\mathbb{C}[z]$
2.  $f$  è nonsingolare  $\iff h$  è libero da quadrati

In particolare:

$V(f)$  è una superficie di Riemann  $\iff$  tutte le radici di  $h$  sono semplici.

**Definizione 2.1.2.** Una **curva affine iperellittica** è una curva piana affine  $X = V(f)$  data da  $f(z, w) = w^2 - h(z)$  con  $\deg(h) \geq 5$  e  $h$  senza radici multiple.  
Se  $\deg(h) \in \{3, 4\}$ ,  $X$  si chiama **curva affine ellittica**.

Più avanti scopriremo che se  $\deg(h) = 2g + 1 + \delta$ , con  $g \geq 2$ ,  $\delta \in \{0, 1\}$ , il numero  $g$  corrisponde al genere di un'opportuna compattificazione di  $X$ , che chiamerò "superficie iperellittica". Il numero  $\delta$  non influenza il genere.

**Definizione 2.1.3.** Data una curva affine iperellittica  $X$ , la funzione olomorfa

$$\begin{aligned} \iota : X &\rightarrow X && \text{si chiama \b{involuzione iperellittica}.} \\ (z, w) &\mapsto (z, -w) \end{aligned}$$

*Osservazione.*  $X = V(w^2 - h(z))$  non è mai compatta: La proiezione  $p_1 : X \rightarrow \mathbb{C}, (z, w) \mapsto z$  è continua e suriettiva. Se  $X$  fosse compatta,  $im(p_1)$  dovrebbe essere limitato.

Alcuni degli strumenti di analisi complessa più potenti funzionano solo sulle superfici compatti. Anche per la mia missione di trovare tutte le 1-forme olomorfe su una superficie iperellittica è necessario avere a che fare con una superficie compatta. Proviamo quindi a compattificare la curva iperellittica  $X = V(f)$  in modo che resti una superficie di Riemann.

Un primo tentativo per immergere  $X$  in una superficie di Riemann compatta potrebbe essere di prendere la sua chiusura proiettiva:

$$\begin{aligned} \text{se } f(z, w) &= w^2 - h(z) = w^2 - c \prod_{i=1}^d (z - \alpha_i) \\ F &= z^d \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = z^{d-2} \cdot y^2 - c \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i z), \quad \overline{X}^{\mathbb{P}} = V(F) \end{aligned}$$

Purtroppo vediamo subito che questo tentativo fallisce proprio per *qualsiasi* curva iperellittica, poiché compare sempre una singolarità nel punto  $[0 : 1 : 0]$ .

$$\begin{aligned} F(0, 1, 0) &= 0 \implies [0 : 1 : 0] \in \overline{X}^{\mathbb{P}} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2z^{d-1}y \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= -c \sum_{i=1}^d \prod_{k \neq i} (x - \alpha_k z) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= (d-2)z^{d-3}y^2 - c \sum_{i=1}^d \left[ -\alpha_i \prod_{k \neq i} (x - \alpha_k z) \right] \\ \implies \nabla F[0 : 1 : 0] &= 0 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo bisogno di un altro concetto di compattificazione.

Possiamo vedere la non-compattezza di  $X$  come se la superficie si avvolgesse attorno ad un buco, dove però questo buco si trova all'infinito. Torna comodo vedere il comportamento della curva non compatta in questo modo, perché abbiamo un metodo per tappare buchi nelle superfici di Riemann con dei dischi in modo naturale, e soprattutto in modo olomorfo.

## 2.2 Incollare spazi e tappare buchi

In questa sezione spiegherò prima come si possono incollare due superfici di Riemann per ottenerne una nuova. Dopodiché, introdurrò il concetto di *carta bucata* su una superficie

di Riemann e darò un metodo per "tappare il buco" di una tale carta bucata. Infine, farò vedere come si può ottenere in questo modo una compattificazione "bella" delle superficie di partenza.

Innanzitutto, incolliamo due spazi topologici:

**Definizione 2.2.1.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici, e  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  due aperti omeomorfi:  $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ . L'**incollamento di  $X$  e  $Y$  lungo  $U$  e  $V$  tramite  $\varphi$**  è lo spazio topologico  $X \sqcup_{\varphi} Y := (X \sqcup Y)/\sim$ , con la relazione d'equivalenza generata da:  $x \sim \varphi(x) \forall x \in U$ .

Un altro modo per chiamare questo spazio è: L'incollamento di  $X$  lungo  $U$  a  $Y$  lungo  $V$  (tramite  $\varphi$ ). Per avere un'immagine intuitiva: È come mettere della colla su  $U$  e su  $V$  ed incollarli. I restanti pezzi di  $X$  e  $Y$  rimangano separati.

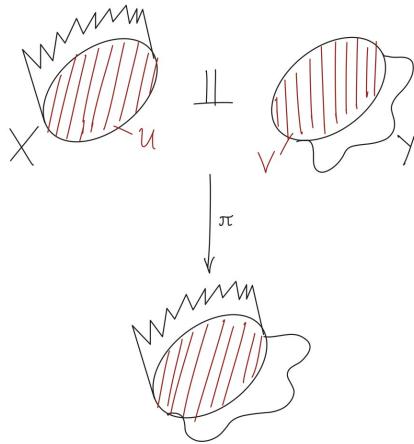


Figura 2.1: Incollamento

Mettiamoci ora nel caso in cui  $X$  e  $Y$  sono superfici di Riemann e  $U$  e  $V$  sono due aperti biolomorfi (in particolare omeomorfi). Possiamo allora sperare che l'incollamento di  $X$  e  $Y$  lungo  $U$  e  $V$  sia ancora una superficie di Riemann. L'unico vero pericolo è che l'incollamento non sia più uno spazio di Hausdorff.

**Proposizione 2.2.2 (incollamento di superfici).** Siano  $X$  e  $Y$  superfici di Riemann, e siano  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  sottoinsiemi aperti biolomorfi:

$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} V \quad \text{biolomorfismo}$$

Sia  $Z = X \sqcup_{\varphi} Y$  l'incollamento lungo  $\varphi$ . Allora esiste un'unica struttura complessa su  $Z$  tale che le inclusioni  $i_X : X \hookrightarrow Z$  e  $i_Y : Y \hookrightarrow Z$  siano olomorfe. Inoltre,  $Z$  è connesso e  $N2$ .

*Dimostrazione.* Dimostrare che  $Z$  sia connesso e  $N2$  è elementare. Costruiamo l'atlante cercato:

Se vogliamo che le inclusioni siano olomorfe, allora  $\forall \phi$  carta su  $X$  e  $\forall \psi$  presunta carta su  $Z$ , deve valere che  $\psi \circ i_X \circ \phi^{-1}$  è olomorfa. Notiamo che  $\phi \circ i_X^{-1}$  è un omeomorfismo, e che la condizione su  $\psi \circ i_X \circ \phi^{-1}$  è esattamente la compatibilità tra le carte  $\psi$  e  $\phi \circ i_X^{-1}$ . Quindi, ogni atlante su  $Z$  rispetto al quale le inclusioni sono olomorfe contiene le carte  $\phi \circ i_X^{-1}$  nel suo atlante massimale. Simmetricamente, la stessa cosa vale per  $Y$ . Quindi, scelti due atlanti  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$  per  $X$ ,  $\{(W_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$  per  $Y$ , consideriamo

$$\left\{ \left( i_X(U_\alpha), \phi_\alpha \circ i_X^{-1} \right) \right\}_\alpha \cup \left\{ \left( i_Y(W_\alpha), \psi_\alpha \circ i_Y^{-1} \right) \right\}_\alpha$$

È immediato dimostrare che questo è un atlante, e per l'osservazione sull'atlante massimale, definisce l'unica struttura complessa con le proprietà richieste.  $\square$

Non è scontato che uno spazio incollato in questo modo sia anche uno spazio di Hausdorff. Per avere uno spazio di Hausdorff, servono delle ipotesi in più.

**Lemma 2.2.3.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici  $T2$  e  $N1$ , e siano  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  due aperti omeomorfi:  $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ . Allora sono equivalenti:

- (i) Lo spazio di incollamento  $X \sqcup_{\varphi} Y$  è Hausdorff
- (ii) Non esistono successioni  $(x_n)$  in  $U$  convergenti ad un punto in  $\partial^X U$  t.c.  $\varphi(x_n) \rightarrow y \in \partial^Y V$ .

Vediamo adesso cosa si intende per un "buco" in una superficie di Riemann e come si può tappare.

**Definizione 2.2.4** (*carte bucate*). Una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  su una superficie di Riemann  $X$  è una **carta bucata** quando:

- (i)  $im(\phi)$  contiene un disco aperto bucato  $D_\varepsilon^*(0)$
- (ii)  $\overline{\phi^{-1}(D_\varepsilon^*(0))}^X \subseteq U$
- (iii)  $\phi\left(\overline{\phi^{-1}(D_\varepsilon^*(0))}^X\right) = \overline{D_\varepsilon(0)}^\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .



Figura 2.2: carta bucata

In altre parole, una carta bucata trasporta una regione di una superficie di Riemann ad un disco di  $\mathbb{C}$  con un foro nel centro. Sul piano complesso  $\mathbb{C}$ , la chiusura di questo disco chiude il foro. Il nostro obiettivo è di fare lo stesso anche sulla superficie: chiudere il foro.

**Tappare un buco:** In presenza di una carta bucata  $\phi : W \rightarrow \mathbb{C}$  su una superficie di Riemann  $X$ , con  $D_\varepsilon^* \subseteq im(\phi)$ , possiamo costruire il seguente incollamento: Sia  $Y = D_\varepsilon$  il disco aperto (non bucato) e sia  $V = D_\varepsilon^* \subset Y$ . Sia  $U = \phi^{-1}(D_\varepsilon^*)$ . Allora  $U \subseteq W$  e la funzione  $\varphi = \phi|_U : U \xrightarrow{\cong} V$  è un biolomorfismo tra due aperti  $U$  di  $X$  e  $V$  di  $Y$ . Quindi è ben definito l'incollamento  $\hat{X} := X \sqcup_{\varphi} D_\varepsilon$ . Diciamo che  $\hat{X}$  è **ottenuto da  $X$  tappando il buco della carta  $\phi$** .

**Proposizione 2.2.5 (tappare un buco).** Sia  $X$  una superficie di Riemann con una carta bucata  $\phi$ . Allora lo spazio  $\hat{X}$  ottenuto da  $X$  tappando il buco di  $\phi$  è una superficie di Riemann.

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 2.2.2, basta dimostrare che  $\hat{X}$  è di Hausdorff. Proviamo ad usare il Lemma 2.2.3: Sia  $(x_n)$  una successione in  $U = \phi^{-1}(D_\varepsilon^*)$  t.c.

$$x_n \rightarrow x \in \partial^X U = \partial^X (\phi^{-1}(D_\varepsilon^*)) \subseteq \overline{\phi^{-1}(D_\varepsilon^*)}^X$$

$\Rightarrow x \in U$  per (ii) e  $\phi(P) \in (\overline{D_\varepsilon})^*$  per (iii). Supponiamo per assurdo che

$$\phi(x_n) \rightarrow P \in \partial^Y V = \partial^{D_\varepsilon} (D_\varepsilon^*) = \{z_0\}$$

Per continuità  $\phi(x_n) \rightarrow \phi(P) = z_0$ , assurdo. □

Osserviamo che nella coordinata locale della carta bucata  $\phi$ , il nuovo punto, cioè il buco tappato, ha coordinata 0.

**Esempio 2.2.6.** Possiamo ottenere la sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  da  $\mathbb{C}$  tappando un buco all'infinito. La carta  $\phi(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  è naturalmente una carta bucata sulla superficie  $\mathbb{C}$ . Incolliamo il disco unitario  $\mathbb{D}$  lungo  $\mathbb{D}^*$  a  $\mathbb{C}$  lungo  $\phi^{-1}(\mathbb{D}^*) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Topologicamente, otteniamo la sfera  $\mathbb{S}^2$ . In termini di analisi complessa, otteniamo la sfera con un atlante complesso. Le carte sono quelle garantite dalle proposizioni precedenti sugli incollamenti e sui buchi:  $\phi_1(z) = z$  su  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$  e

$$\phi_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

**Proposizione 2.2.7** (*compattificazione tappando i buchi*). Sia  $X$  una superficie di Riemann e siano  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \supseteq D_{\epsilon_i}^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  un numero finito di carte bucate su  $X$ . Supponiamo che  $X \setminus \bigcup_i \phi_i^{-1}(D_{\epsilon_i}^*)$  sia compatto. Allora la superficie ottenuta tappando tutti i buchi delle  $\phi_i$  è compatta.

*Dimostrazione.* Sia  $Z = (X \sqcup D_{\epsilon_1} \sqcup \dots \sqcup D_{\epsilon_n}) / \sim$  lo spazio di incollamento, e  $\pi$  la proiezione al quoziente. Possiamo scomporre

$$Z = \pi \left( (X \setminus \bigcup_i \phi_i^{-1}(D_{\epsilon_i}^*)) \right) \cup \bigcup_i \pi(D_{\epsilon_i})$$

o anche  $Z = \pi \left( (X \setminus \bigcup_i \phi_i^{-1}(D_{\epsilon_i}^*)) \right) \cup \bigcup_i \overline{\pi(D_{\epsilon_i})}$

Sappiamo che  $\overline{\phi_i^{-1}(D_{\epsilon_i}^*)} \cong \overline{D_{\epsilon_i}}^*$ , quindi  $\overline{\pi(D_{\epsilon_i})} = \overline{\phi_i^{-1}(D_{\epsilon_i}^*)} \cup \{P_i\} \cong \overline{D_{\epsilon_i}}$  che è compatto. Quindi  $Z$  è l'unione finita di spazi compatti, perciò è compatto.  $\square$

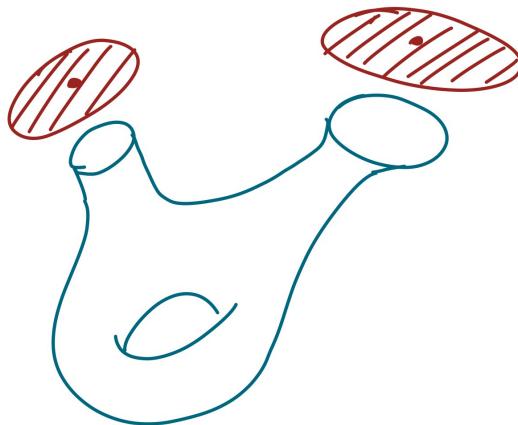


Figura 2.3: compattificazione

Applichiamo questa tecnica per compattificare le curve iperellittiche:

## 2.3 La compattificazione delle curve iperellittiche

Sia  $X = V(f) = V(w^2 - h(z))$  una curva affine iperellittica, con

$$h(z) = c \cdot \prod_{j=1}^d (z - \alpha_j)$$

D'ora in poi chiamerò  $p_1, p_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$  le proiezioni naturali, ristrette alla curva.

Notiamo che  $\frac{\partial f}{\partial w} = 2w$  e  $\forall (z, w) \in X, w = 0 \Leftrightarrow h(z) = 0$ . Quindi la proiezione  $p_1(z, w) = z$ , opportunamente ristretta, è una carta locale in tutti i punti di  $X$  con  $h(z) \neq 0$ .

Per compattificare la curva, vediamo cosa succede "all'infinito", i.e., allontanandoci sempre di più dal punto  $(0, 0)$ . Consideriamo un disco  $D_r(0) \subset \mathbb{C}$  abbastanza grande da contenere tutte gli zeri  $Z(h)$  di  $h$ .

Siano  $V = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$  e  $U = p_1^{-1}(V)$ . Notiamo che  $\forall z \in V, p_1^{-1}(z) = \{(z, \pm\sqrt{h(z)})\}$  ha cardinalità 2 ( $h(z) \neq 0$ ). Inoltre, per quanto appena detto,  $p_1$  è un omeomorfismo locale su  $U$ . Concludiamo che  $p_{1|U} : U \rightarrow V$  è un **rivestimento a 2 fogli**. Raccolgo queste informazioni in una proposizione:

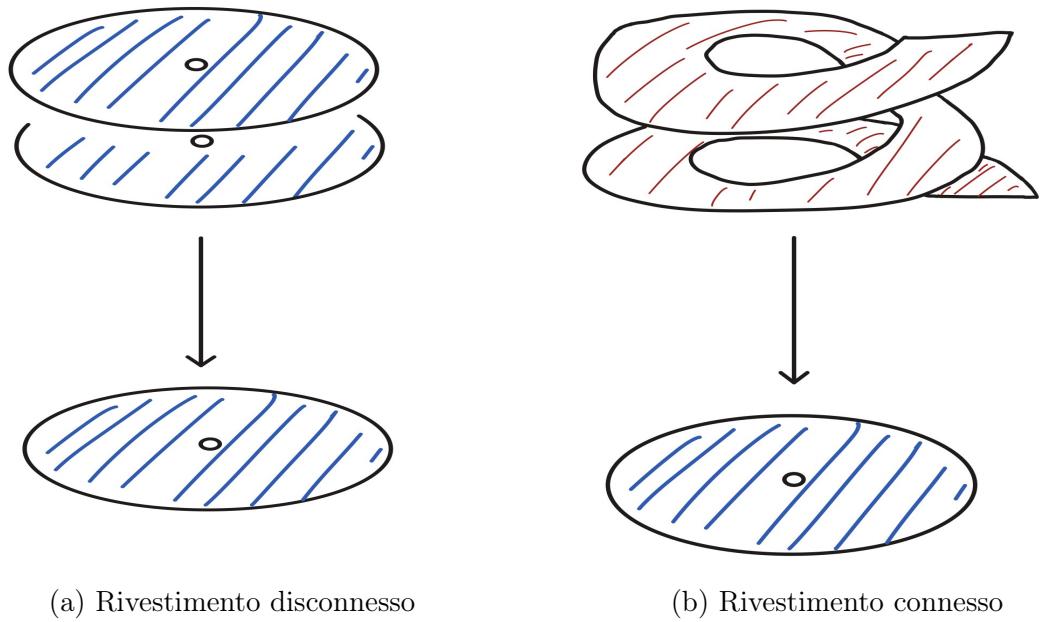
**Proposizione 2.3.1.** Sia  $X$  una curva iperellittica data dal polinomio  $w^2 - h(z)$ . Sia  $r > 0$  t.c.  $Z(h) \subset D_r(0)$ . Siano  $V = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$  e  $U = p_1^{-1}(V)$ . Allora  $p_{1|U} : U \rightarrow V$  è un rivestimento a 2 fogli.

Applicando un po' di teoria dei rivestimenti, possiamo dimostrare che ci sono due classi di isomorfismo di rivestimenti a 2 fogli dello spazio  $V$ . Infatti, sappiamo che esiste una biezione:

$$\frac{\left\{ \text{rivestimenti di } V \text{ a 2 fogli} \right\}}{\text{isomorfismo di rivest.}} \cong \frac{\left\{ \pi_1(V) \rightarrow \mathfrak{S}_2 \text{ omomorfismi} \right\}}{\text{coniugio}}$$

In altre parole, le classi di isomorfismo di rivestimenti di  $V$  sono in biezione con le classi di coniugio di omomorfismi di gruppo  $\pi_1(V) \rightarrow \mathfrak{S}_2$ . Dato che  $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$ , ci sono esattamente due omomorfismi di gruppo  $\pi_1(V) \rightarrow \mathfrak{S}_2$ , e non sono coniugati. Quindi esistono due classi di isomorfismo di rivestimenti a 2 fogli di  $V$ . Non è difficile trovarli:

1. Due fogli disconnessi omeomorfi all'immagine.
2. Rivestimento connesso. Concettualmente, questo corrisponde al rivestimento  $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^2$ , oppure ad una spirale piatta che viene schiacciata.



Ovviamente questi due rivestimenti non sono isomorfi.

Torniamo adesso alla curva iperellittica. Quale delle due classi di rivestimento è  $p_{1|_U} : U \rightarrow V$ ? La strategia per rispondere a questa domanda è di prendere un cammino chiuso in  $V$  che fa un giro attorno a 0 e sollevarlo allo spazio di rivestimento. Il punto cruciale è capire se il cammino sollevato è chiuso o meno.

Vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.3.2.** Sia  $X$  una curva iperellittica data dal polinomio  $w^2 - h(z)$ . Sia  $d = \deg(h)$ . Sia  $r > 0$  t.c.  $Z(h) \subset D_r(0)$ . Siano  $V = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$  e  $U = p_1^{-1}(V)$ . Sia  $R > r$  e  $\gamma(t) = Re^{it} : [0, 2\pi] \rightarrow V$ . Allora, una volta scelta una preimmagine  $P_0 \in p_1^{-1}(\gamma(0))$ , sono equivalenti:

- (i) Il sollevamento di  $\gamma$  a partire da  $P_0$  rispetto al rivestimento  $p_{1|_U}$  è chiuso
- (ii) Il rivestimento  $p_{1|_U} : U \rightarrow V$  è disconnesso
- (iii)  $d$  è pari

*Dimostrazione.* La equivalenza (i)  $\iff$  (ii) è chiara da un punto di vista geometrico-intuitivo: Il sollevamento del cammino al rivestimento disconnesso è omeomorfo al cammino stesso, quindi chiuso. D'altra parte, un cammino chiuso che fa un giro totale sullo spazio di rivestimento a forma di spirale, nello spazio base dovrebbe fare due giri.

Dimostrerò adesso che (ii)  $\iff$  (iii):

Il punto  $R = \gamma(0)$  ha due preimmagini per  $p_1$ . Per ogni scelta  $P_0$  di una di queste preimmagini, esiste un unico sollevamento  $\tilde{\gamma}$  di  $\gamma$  rispetto a  $p_1$  t.c.  $\tilde{\gamma}(0) = P_0$ .

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \tilde{\gamma} \nearrow & & \downarrow p_1 \\ [0, 2\pi] & \xrightarrow{\gamma} & V \end{array}$$

Possiamo scrivere  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \eta(t))$ . Osserviamo che  $\tilde{\gamma}$  è chiuso  $\iff \eta$  lo è. Per costruzione di  $U$ , non ci sono punti con coordinata  $w$  uguale a 0 in  $U$ , quindi  $\eta(t)$  è un cammino in  $\mathbb{C}^*$ . Inoltre, vale che  $(\eta(t))^2 = h(\gamma(t))$ . Questo ci dice che il cammino  $\eta$  è un sollevamento del cammino  $h \circ \gamma$  rispetto al rivestimento  $q(z) = z^2 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^* & \\ \eta \nearrow & & \downarrow q \\ [0, 2\pi] & \xrightarrow{h \circ \gamma} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

$$\eta^2(t) = h(\gamma(t)) = c \prod_j (Re^{it} - \alpha_j) = c \prod_j r_j(t) e^{i\theta_j(t)} = c \prod_j [r_j(t)] \cdot e^{i \sum_j \theta_j(t)}$$

Un candidato per  $\eta(t)$  è  $\sqrt{c \prod_j r_j(t)} \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_j \theta_j(t)}$ . Cambiare il segno corrisponde a cambiare retroimmagine  $p_1^{-1}(R)$ , ma vedremo subito che queste scelte non hanno nessuna influenza sul risultato. Vediamo se il cammino  $\eta$  è chiuso o meno:

$$\begin{aligned} \eta(2\pi) &= \sqrt{c \prod_j r_j(2\pi)} \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_j \theta_j(2\pi)} \\ &= \sqrt{c \prod_j r_j(0)} \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_j (\theta_j(0) + 2\pi)} \\ &= \eta(0) \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_j 2\pi} = \eta(0) \cdot e^{id\pi} = \eta(0) \cdot (-1)^d \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $\tilde{\gamma}$  è **chiuso**  $\iff d$  è **pari**

□

Cerchiamo ora delle carte bucate sulle superfici iperellittiche:

**Proposizione 2.3.3** (*buchi sulle curve iperellittiche*). Sia  $X$  una curva iperellittica data dal polinomio  $w^2 - h(z)$ . Sia  $r > 0$  t.c.  $Z(h) \subset D_r(0)$ . Siano  $V = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$  e  $U = p_1^{-1}(V)$ . Allora:

1. Se  $d$  è pari, allora su ogni componente connessa del ricoprimento  $U$ , la funzione  $\frac{1}{z}$  è una carta bucata.
2. Se  $d$  è dispari, allora sul ricoprimento  $U$  esiste una carta bucata  $\phi$  con  $\phi^2 = \frac{1}{z}$ . Essenzialmente,  $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ , che è definita senza ambiguità su  $U$ .

*Dimostrazione.* (1) **caso  $d$  pari:**

Siano  $U^+$  e  $U^-$  le due componenti connesse di  $U$ . Abbiamo già osservato che la proiezione  $p_1$  ristretta a una delle componenti connessi è un omeomorfismo, e quindi è una carta. Quindi  $\phi : U^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $\phi(z, w) = \frac{1}{z}$  è una carta bucata (e lo stesso vale per  $U^-$ ). Infatti:

- (i)  $im(\phi) = D_{\frac{1}{R}}(0) \supseteq D_{\frac{1}{R}}^*(0)$  con  $R > r$
- (ii)  $\overline{\phi^{-1}(D_{\frac{1}{R}}^*)} = p_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus D_R) \subseteq p_1^{-1}(V) = U$
- (iii)  $\phi\left(\overline{\phi^{-1}(D_{\frac{1}{R}}^*)}\right) = \overline{D_{\frac{1}{R}}^*}$

In modo identico,  $\frac{1}{z}$  è carta bucata per l'altro foglio  $U^-$ .

(2) **caso  $d$  dispari:** Abbiamo già visto come è fatto il rivestimento  $p_1$  in questo caso e che assomiglia molto al rivestimento della funzione "quadrato"  $q : V \rightarrow V$ ,  $z \mapsto z^2$ . Dobbiamo riuscire a mappare la regione  $U \subset X$  in modo biolomorfo su  $V$ . Speriamo quindi di trovare una carta sollevando  $p_1$  rispetto al rivestimento  $q$ :

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ & \nearrow \phi & \downarrow q \\ U & \xrightarrow[p_1]{} & V \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sollevamento è:

$$p_{1*}(\pi_1(U)) \leq q_*(\pi_1(V))$$

Sappiamo che i gruppi fondamentali  $\pi_1(U)$  e  $\pi_1(V)$  sono entrambi isomorfi a  $\mathbb{Z}$ . È chiaro che la classe  $[\gamma]$  del cammino  $\gamma(t) = Re^{it}$  in  $V$  è un generatore di  $\pi_1(V)$ . Ovviamente,  $q \circ \gamma$  raddoppia il numero di avvolgimento di  $\gamma$ :  $q_*([\gamma]) = 2[\gamma]$ . Bisogna quindi controllare se l'immagine di un generatore di  $\pi_1(U)$  sia un multiplo pari di  $[\gamma]$ .

Geometricamente, ci si convince facilmente che ogni generatore di  $\pi_1(U)$  viene proiettato da  $p_1$  in  $\pm 2[\gamma]$ . Questo garantisce l'esistenza del sollevamento cercato.

$p_1$  e  $q$  sono due rivestimenti a 2 fogli di  $V$  e quindi dalla teoria dei rivestimenti segue che  $\phi$  è un omeomorfismo, ( $\Rightarrow$  biolomorfismo).

Osserviamo che  $\phi(z, w)^2 = z$ , quindi se considero  $\varphi = \frac{1}{\phi}$ , ottengo una carta bucata:  $\varphi^2 = \frac{1}{z} \iff \varphi = \frac{1}{\sqrt{z}}$ .

□

**Proposizione 2.3.4.** Sia  $X$  una curva iperellittica. Sia  $\hat{X}$  la superficie ottenuta da  $X$  tappando i buchi delle carte date dalla Proposizione 2.3.3. Allora  $\hat{X}$  è una superficie compatta.

**Definizione 2.3.5.** Una superficie compatta  $\hat{X}$  ottenuta da una curva iperellittica  $X$  tappando i buchi, si chiama **superficie iperellittica**.

Ora che abbiamo compattificato in modo soddisfacente le curve iperellittiche, manca poco per scoprire il loro genere. Tale numero viene fuori da una mappa tra la superficie iperellittica in questione e la sfera di Riemann, ed una semplice applicazione della relazione di Riemann–Hurwitz.

**Proposizione 2.3.6.** Sia  $X$  una curva iperellittica data dal polinomio  $w^2 - h(z)$ ,  $\deg(h) = d$ . La proiezione  $p_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$  si estende a una funzione olomorfa  $\pi : \hat{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  di grado 2. I punti di ramificazione di  $\pi$  sono  $Z(h) \times \{0\}$  e, se  $d$  è dispari, l'unico buco tappato.

*Dimostrazione.* Leggiamo  $p_1$  nelle carte bucate per vedere il comportamento di questa funzione intorno ai buchi. Nel caso in cui  $d$  è pari, la carta bucata è  $\phi(z) = \frac{1}{z}$  e  $p_1 \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$  ha un polo in 0, quindi è meromorfa.

Se  $d$  è dispari, la carta bucata è  $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$  e anche in questo caso  $p_1 \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$  ha un polo in 0. In entrambi i casi,  $p_1$  diventa una funzione meromorfa su  $\hat{X}$ , o equivalentemente una funzione olomorfa  $\pi : \hat{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  dove i buchi tappati vengono mappati in  $\infty \in \mathbb{CP}^1$ .

È chiaro che questa funzione ha grado 2, poiché  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus Z(h)$ ,  $p_1^{-1}(z)$  ha due controimmagini (con molteplicità 1, dato che  $p_1$  è una carta locale). I punti di ramificazione nella parte  $X \subset \hat{X}$ , per la Proposizione 1.2.3, sono  $\{(z, w) : \frac{\partial f}{\partial w} = 0\} = \{(z, 0) : h(z) = 0\} = Z(h) \times \{0\}$ .

Vediamo la molteplicità di  $\pi$  nei punti all'infinito con le carte bucate:

Sappiamo che  $\pi(\infty) = \infty$ . Sia  $\phi_\infty$  la carta intorno a  $\infty \in \mathbb{CP}^1$  e sia  $\phi$  una delle carte bucate su  $\hat{X}$ .

$$\begin{aligned} d \text{ pari } &\Rightarrow \phi(z) = \frac{1}{z}, & \phi_\infty \circ \pi \circ \phi^{-1}(z) &= \phi_\infty\left(\frac{1}{z}\right) = z, & \Rightarrow \text{mult}_\infty \pi &= 1 \\ d \text{ dispari } &\Rightarrow \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}, & \phi_\infty \circ \pi \circ \phi^{-1}(z) &= \phi_\infty\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^2, & \Rightarrow \text{mult}_\infty \pi &= 1 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che il punto all'infinito, se  $d$  è dispari, è ramificato, mentre se  $d$  è pari, entrambi i punti all'infinito non sono ramificati.  $\square$

**Corollario 2.3.7.** Sia  $X$  una curva iperellittica data dal polinomio  $w^2 - h(z)$ , con  $\deg(h) = 2g + 1 + \delta$ ,  $g \geq 2$ ,  $\delta \in \{0, 1\}$ . Sia  $\hat{X}$  la superficie iperellittica compattificata di  $X$ .

$\implies \hat{X}$  ha genere  $g$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\pi : \hat{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  come nella proposizione precedente. Se  $d = 2g + 2$ , allora  $\pi$  ha  $2g + 2$  punti di ramificazioni sopra le radici  $Z(h)$ , di molteplicità 2. Se  $d = 2g + 1$ , allora  $\pi$  ha  $2g + 1$  punti di ramificazioni sopra le radici  $Z(h)$  più un punto di ramificazione all'infinito, tutti di molteplicità 2.

In ogni caso, ricordando che  $g(\mathbb{CP}^1) = 0$ , ed applicando la formula di Riemann-Hurwitz,

$$\begin{aligned} 2g(\hat{X}) - 2 &= \deg(\pi) \cdot (2g(\mathbb{CP}^1) - 2) + \sum_{k=1}^{2g+2} [\text{mult}_p \pi - 1] \\ \implies 2g(\hat{X}) &= 2 + 2 \cdot (-2) + (2g + 2) = 2g \\ \implies g(\hat{X}) &= g \end{aligned}$$

$\square$

Introduco ora le 1-forme – il secondo oggetto centrale di questa tesi.

# Capitolo 3

## Le 1-forme olomorfe

Le motivazioni per voler fare integrali su superfici di Riemann sono tante: Portare strumenti potenti dell'analisi complessa (residui ecc.) sulle superfici di Riemann, calcolare lunghezze, aree, e molto più.

### 3.1 Definizioni e proprietà di 1-forme

Prendiamo una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  e proviamo ad integrarla su un cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Naturalmente, vorremmo usare la definizione di integrale in  $\mathbb{C}$ , quindi siamo obbligati ad usare le carte locali su  $X$ . La sfida è definire l'integrale in modo che non dipenda dalla carta scelta. Supponiamo che il cammino sia abbastanza piccola per stare nell'intersezione  $U_1 \cap U_2$  dei domini di due carte  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Potremmo pensare di definire l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  in questo modo:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &:= \int_{\phi_1 \circ \gamma} f \circ \phi_1^{-1}(z) dz \\ &= \int_0^1 (f \circ \phi_1^{-1})(\phi_1 \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \end{aligned}$$

Vediamo se cambiando la carta, resta invariato l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\phi_2 \circ \gamma} f \circ \phi_2^{-1}(z) dz &= \int_0^1 (f \circ \phi_2^{-1})(\phi_2 \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_2 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1 \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \end{aligned}$$

Questo sarebbe uguale all'integrale nella carta  $\phi_1$  se la funzione di transizione  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  avesse la derivata sempre uguale a 1. È chiaro che questo non succede, come vediamo in questo semplice esempio:

**Esempio 3.1.1.**

$$X = \mathbb{C}, \phi_1, \phi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \phi_1 = id, \phi_2 = 2id$$

$$\gamma(t) = t, t \in [0, 1], f(z) = z, z \in \mathbb{C}$$

I due integrali rispetto alle due carte sono diversi:

$$\int_{\phi_1 \circ \gamma} f \circ \phi_1^{-1}(z) dz = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\phi_2 \circ \gamma} f \circ \phi_2^{-1}(z) dz = \int_0^1 2t dt = 1$$

Cosa possiamo fare allora? Il fatto è che non possiamo prendere una funzione  $X \rightarrow \mathbb{C}$  da integrare; ci serve un nuovo oggetto: Le 1-forme. Vorremmo imporre

$$(f \circ \phi_1^{-1})(\phi_1 \circ \gamma(t)) = (f \circ \phi_2^{-1})(\phi_2 \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1 \circ \gamma(t))$$

ossia, ponendo  $z = \phi_1(\gamma(t))$ ,

$$(f \circ \phi_1^{-1})(z) = (f \circ \phi_2^{-1})(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z)) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1 \circ \gamma(t))$$

Come visto, questo si riconduce ad imporre le derivate delle funzioni di transizione uguale a 1. Ma se il nostro oggetto è una collezione di "espressioni" in carte con questa condizione:

$$f_{\phi_1}(z) = f_{\phi_2}(T(z)) \cdot T'(z)$$

è esattamente quello che desideriamo per poter definire un integrale.

Questo ragionamento motiva la seguente:

**Definizione 3.1.2.** Una **1-forma olomorfa** su un aperto  $V \subseteq \mathbb{C}$  è un'espressione  $\omega = f(z)dz$ , dove  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione olomorfa. Analogamente,  $\omega$  si chiama **1-forma meromorfa** quando  $f$  è meromorfa.

**Definizione 3.1.3.** Sia  $X$  una superficie di Riemann. Una **1-forma olomorfa** (meromorfa) su  $X$  è una collezione  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  di 1-forme olomorfe (meromorfe) "locali" su aperti  $V_i \subseteq \mathbb{C}$ , una per ogni carta dell'atlante massimale  $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ , con la seguente proprietà di compatibilità:

$$\forall i, j \in I, \text{ siano } \omega_i = f_i(z)dz, \omega_j = f_j(z)dz, \text{ e } T = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$$

$$\implies f_i(z) = f_j(T(z)) \cdot T'(z) \quad \forall z \in \phi_i(U_i \cap U_j)$$

Indichiamo con  $\Omega^1(X)$  l'insieme delle 1-forme olomorfe su  $X$  e con  $\mathcal{M}^1(X)$  l'insieme delle 1-forme meromorfe su  $X$ .

*Osservazione.* La compatibilità nella definizione è una relazione di equivalenza:

(R) se  $i = j \Rightarrow T = id, T' \equiv 1, f_i(z) = f_i(z) \cdot T'(z)$

(S) se  $f_i(z) = f_j(T(z)) \cdot T'(z)$  su  $\phi_i(U_i \cap U_j)$

$$\implies f_j(w) = \frac{f_i(T^{-1}(w))}{T'(T^{-1}(w))} = f_i(T^{-1}(w)) \cdot (T^{-1})'(w) \quad \text{su } \phi_j(U_i \cap U_j)$$

(T) se  $f_i(z) = f_j(T(z)) \cdot T'(z), f_j(w) = f_k(S(w)) \cdot S'(w)$

$$\implies f_i(z) = f_k(S \circ T(z)) \cdot S'(T(z)) \cdot T'(z) = f_k(S \circ T(z)) \cdot (S \circ T)'(z)$$

La prossima proposizione afferma che per definire una 1-forma su una superficie di Riemann, non è necessario dare una 1-forma locale per ogni possibile carta. Basta una 1-forma locale per ogni carta di un atlante.

**Proposizione 3.1.4.** Sia  $X$  una superficie di Riemann, e sia  $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$  un atlante (non necessariamente massimale). Siano date 1-forme olomorfe sui  $V_i \forall i$ , con la condizione di compatibilità tra queste 1-forme.

Allora si estendono in modo unico a tutte le altre carte su  $X$ , cioè definiscono un'unica 1-forma olomorfa su  $X$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\psi : U \rightarrow V$  una carta qualsiasi su  $X$ . Cerchiamo l'unica 1-forma su  $V$  compatibile con quelle che già abbiamo.

**unicità:** Supponiamo che esista la 1-forma cercata:  $\omega_\psi = f_\psi(z)dz$ . Scegliamo  $z_0 \in V$ ,  $p_0 = \psi^{-1}(z_0) \in U_i$  per un qualche  $i$ . Allora:

$$\forall z \in \psi(U \cap U_i), f_\psi(z) = f_i(\phi \circ \psi^{-1}(z)) \cdot (\phi_i \circ \psi^{-1})'(z)$$

$\implies f_\psi$  è fissata sull'aperto  $\psi(U \cap U_i) \Rightarrow$  su tutto  $V$  per il teorema dell'identità.

**esistenza:** Come prima, scelgo  $z_0 \in V$  e scelgo  $U_i \ni \psi^{-1}(z_0)$  e posso definire  $f_\psi$  su  $\psi(U \cap U_i)$ . Al variare di  $z_0 \in V$ , definisco così delle funzioni  $f_{\psi,z_0}$  i cui domini coprono tutto  $V$ . Se dimostro che queste funzioni sono d'accordo sui loro domini comuni, la dimostrazione è completa perché  $f_{\psi,z_0}$  è localmente olomorfa. Una volta scelto  $z_0$ , confrontiamo due scelte di carte  $\phi_i, \phi_j$  con  $\psi^{-1}(z_0) \in U_i \cap U_j$ .

$$(I) = f_i(\phi_i \circ \psi^{-1}(z)) \cdot (\phi_i \circ \psi^{-1})'(z) \text{ in } \psi(U \cap U_i)$$

$$(II) = f_j(\phi_j \circ \psi^{-1}(z)) \cdot (\phi_j \circ \psi^{-1})'(z) \text{ in } \psi(U \cap U_j)$$

Per compatibilità,

$$f_j(w) = f_i(\phi_i \circ \phi_j^{-1}(w)) \cdot (\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(w) \text{ in } \phi_j(U_i \cap U_j)$$

$$\begin{aligned}
&\implies \forall z \in \psi(U \cap U_i \cap U_j), (II) = f_j(\phi_j \circ \psi^{-1}(z)) \cdot (\phi_j \circ \psi^{-1})'(z) = \\
&= f_i \circ \phi_i \circ \psi^{-1}(z) \cdot (\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(\phi_j \circ \psi^{-1}(z)) \cdot (\phi_j \circ \psi^{-1})'(z) \\
&= f_i \circ \phi_i \circ \psi^{-1}(z) \cdot (\phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \psi^{-1})'(z) = (I)
\end{aligned}$$

È chiaro che è soddisfatta la compatibilità con le altre forme.  $\square$

Vale una cosa ancora più forte:

**Proposizione 3.1.5.** Siano  $X$  una superficie di Riemann,  $\phi_0 : U_0 \rightarrow V_0$  una carta e  $\alpha = f(z)dz$  una 1-forma su  $V_0$ . Supponiamo che  $\exists \omega$  1-forma su  $X$  t.c.  $\omega_{\phi_0} = \alpha$ . Allora  $\omega$  è in realtà l'unica 1-forma su  $X$  con questa forma locale per  $\phi_0$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\omega_1, \omega_2$  1-forme su  $X$  con la stessa forma locale per  $\phi_0$ . Sia  $(U, \phi)$  una qualsiasi altra carta, e siano  $p_0 \in U_0, q \in U$ . Poiché  $X$  è connesso e localmente euclideo,  $X$  è anche CPA. Quindi  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = p_0, \gamma(1) = q$ . Considero un atlante  $\mathcal{A}$  su  $X$ . Allora  $\gamma^{-1}(\mathcal{A})$  è un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ . Per compattezza,  $\exists U_0, \dots, U_k = U \in \mathcal{A}: im(\gamma) \subseteq \bigcup_i U_i$  e  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset \forall i$ . Siano  $\omega_{\phi_i}^{(1)}, \omega_{\phi_i}^{(2)}$  le forme locali rispettivamente di  $\omega_1, \omega_2$  nella carta  $\phi_i$ . Per ipotesi  $\omega_{\phi_0}^{(1)} = \omega_{\phi_0}^{(2)}$ , quindi  $\omega_{\phi_1}^{(1)} = \omega_{\phi_1}^{(2)}$  coincidono sull'aperto  $U_0 \cap U_1$ . Ma quindi per il teorema di identità  $\omega_{\phi_1}^{(1)} = \omega_{\phi_1}^{(2)}$ . Iterando questo ragionamento, segue che  $\omega_{\phi}^{(1)} = \omega_{\phi}^{(2)}$ . Per l'arbitrarietà della carta  $(U, \phi)$ , concludiamo che  $\omega_1 = \omega_2$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.6.**  $\Omega^1(X)$  e  $\mathcal{M}^1(X)$  sono  $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali.

*Dimostrazione.* Se  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(X)$ , la loro somma è definita in questo modo: Per ogni scelta di una carta  $\phi : U \rightarrow V$ , sono date le forme locali  $\omega_{1,\phi} = f_1(z)dz, \omega_{2,\phi} = f_2(z)dz$  su  $V$ . Definiamo quindi  $(\omega_1 + \omega_2)_{\phi} := (f_1 + f_2)(z)dz$ . La compatibilità è un esercizio immediato. Si procede analogamente per definire  $c \cdot \omega_1, \forall c \in \mathbb{C}$ . Infine, con le forme meromorfe la dimostrazione è identica.  $\square$

**Esempio 3.1.7.**  $\Omega^1(\mathbb{CP}^1)$  ha dimensione 0:

Vediamo  $\mathbb{CP}^1$  come uno spazio incollato (Esempio 2.2.6), con le carte ereditate da  $\phi_1 = id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  intorno a 0 e  $\phi_2 = \frac{1}{z}$  intorno a  $\infty$ .

Sia  $\omega$  una 1-forma olomorfa su  $\mathbb{CP}^1$ . Sia  $\omega_{\phi_1} = f(z)dz, f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Usiamo la compatibilità della forma con l'altra carta:  $\phi_{\infty} = \phi_2 : \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $T = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  la funzione di transizione. Sia  $\omega_{\infty} = g(z)dz$  la forma di  $\omega$  nella carta  $\phi_{\infty}$ . Allora  $g(z) = f(T(z)) \cdot T'(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{-1}{z^2} \forall z \in \mathbb{C}^*$ . Poiché per ipotesi  $\omega$  è una 1-forma olomorfa, 0 è una singolarità rimovibile per  $g$ , per cui  $\frac{-f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} c \in \mathbb{C}$ .

Quindi  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  ha uno zero di ordine  $\geq 2$  in 0,  $\Rightarrow f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , quindi  $f$  si estende ad una funzione olomorfa  $\hat{f} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Sappiamo che le uniche funzioni olomorfe su  $\mathbb{CP}^1$  sono quelle costanti. Inoltre,  $\hat{f}(\infty) = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \implies \omega = 0$ .

Vediamo alcuni concetti importanti legati alle 1-forme:

**Definizione 3.1.8** (*differenziale di una funzione*). Sia  $X$  una superficie di Riemann, e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Il **differenziale** di  $f$  è la 1-forma olomorfa  $df$  su  $X$  definita in questo modo:  $\forall$  carta  $\phi : U \rightarrow V$ , definiamo

$$(df)_\phi = (f \circ \phi^{-1})'(z) dz \quad \text{su } V$$

**Proposizione 3.1.9.** Il differenziale  $df$  è ben definito. Inoltre, se  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  è un'altra funzione olomorfa e  $c \in \mathbb{C}$ , allora:

$$d(cf) = c \cdot df, \quad d(f + g) = df + dg$$

*Dimostrazione.* Siano  $\phi : U \rightarrow V$  e  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  due carte. Allora,  $\forall z \in \phi(U \cap U_2)$ ,

$$\begin{aligned} (f \circ \phi^{-1})'(z) &= (f \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi^{-1})'(z) \\ &= (f \circ \phi_2^{-1})'(\phi_2 \circ \phi^{-1}(z)) \cdot (\phi_2 \circ \phi^{-1})'(z) \\ &= (f \circ \phi_2^{-1})'(T(z)) \cdot T'(z), \quad \text{dove } T = \phi_2 \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Quindi le forme locali sono tutte compatibili tra loro. La proprietà di linearità è una diretta conseguenza della linearità della derivata usuale in  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.10.** Sia  $X$  una superficie di Riemann. Siano  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione meromorfa e  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$  una 1-forma meromorfa. Definiamo la 1-forma meromorfa  $F \cdot \omega$  in questo modo:  $\forall$  carta  $\phi : U \rightarrow V$ , se  $\omega_\phi = g(z)dz$ , definiamo

$$(F \cdot \omega)_\phi = (F \circ \phi^{-1})(z) \cdot g(z) dz \quad \text{su } V$$

Questa definizione è ben posta. Inoltre, se sia  $F$  che  $\omega$  sono olomorfe, allora anche  $F \cdot \omega$  è olomorfa.

*Dimostrazione.* Dimostro la compatibilità delle forme locali: Siano  $\phi : U \rightarrow V$  e  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  due carte. Siano  $\omega_\phi = g(z)dz$ ,  $\omega_{\phi_2} = g_2(z)dz$ . Allora,  $\forall z \in \phi(U \cap U_2)$ ,

$$\begin{aligned} (F \circ \phi^{-1})(z) \cdot g(z) &= (F \circ \phi_2^{-1})(\phi_2 \circ \phi^{-1}(z)) \cdot g_2(\phi_2 \circ \phi^{-1}(z)) \cdot (\phi_2 \circ \phi^{-1})'(z) \\ &= (F \circ \phi_2^{-1})(T(z)) \cdot g_2(T(z)) \cdot T'(z), \quad \text{dove } T = \phi_2 \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 3.1.11.** Sia  $X$  una superficie di Riemann e sia  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione costante:  $F \equiv c \in \mathbb{C}$ . Allora  $dF = 0$ .

*Dimostrazione.*  $\forall \phi$  carta,  $F \circ \phi^{-1} \equiv c \implies (F \circ \phi^{-1})' \equiv 0 \implies (dF)_\phi = 0dz$   $\square$

**Proposizione 3.1.12.** Sia  $X$  una superficie di Riemann. Siano  $F : X \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$  e  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni olomorfe.

$$\implies d(\varphi \circ F) = (\varphi' \circ F) \cdot dF$$

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : U \rightarrow V$  una carta. Confrontiamo le forme locali per  $\phi$ :

$$\begin{aligned} d(\varphi \circ F)_\phi &= (\varphi \circ F \circ \phi^{-1})'(z)dz = \varphi'(F \circ \phi^{-1}(z)) \cdot (F \circ \phi^{-1})'(z)dz \\ ((\varphi' \circ F)dF)_\phi &= (\varphi' \circ F \circ \phi^{-1})(z) \cdot (F \circ \phi^{-1})'(z)dz \end{aligned}$$

□

*Osservazione.* Nel caso in cui  $X$  è una curva affine in  $\mathbb{C}^2$ , abbiamo due forme olomorfe naturali  $dz$  e  $dw$  date dai differenziali delle proiezioni sui fattori. Inoltre, per Proposizione 3.1.10,  $\forall k \in \mathbb{C}[z, w]$ , le 1-forme  $k(z, w)dz$  e  $k(z, w)dw$  sono olomorfe, e  $\forall r \in \mathbb{C}(z, w)$  funzione razionale, le 1-forme  $r(z, w)dz$  e  $r(z, w)dw$  sono meromorfe. In particolare, gli spazi  $\Omega^1(X)$  e  $\mathcal{M}(X)$  sono di dimensione infinita.

*Osservazione.* La Proposizione 3.1.12 è utile quando si vuole semplificare un'espressione come ad esempio  $d(z^2)$  su una curva affine. Infatti, possiamo dire che  $d(z^2) = 2zdz$ .

**Proposizione 3.1.13.** Sia  $X \subset \mathbb{C}^2$  una curva affine e sia  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Allora  $dF = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial w}dw$

**Lemma 3.1.14.** Sia  $X$  una superficie di Riemann e siano  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1(X)$ , con  $\omega_1 \neq 0$ . Allora  $\exists! f : X \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa, tale che  $\omega_2 = f \cdot \omega_1$

Darò ora la definizione di integrale di un 1-forma olomorfa.

**Definizione 3.1.15 (integrale).** Sia  $X$  una superficie di Riemann. Sia  $\omega$  una 1-forma olomorfa su  $X$  e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un cammino. Per compattezza dell'intervallo chiuso, possiamo partizionare  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  t.c. le restrizioni  $\gamma_i = \gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$  abbiano immagine inclusa in una carta  $(U_i, \phi_i)$  di  $X$ . Siano  $f_i(z)dz$  le espressioni locali di  $\omega$  nelle carte  $\phi_i$ . L'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$  è il numero complesso

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &:= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\phi_i \circ \gamma_i} f_i(z)dz \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} ((f_i \circ \phi_i \circ \gamma)(t)) \cdot (\phi_i \circ \gamma)'(t)dt \end{aligned}$$

La precedente definizione dell'integrale è ben posta:

*Dimostrazione.* L'invarianza per riparametrizzazioni e per ripartizioni di  $\gamma$  sono conseguenze immediate dei risultati analoghi per gli integrali in  $\mathbb{C}$ . Infatti, l'integrale di  $\omega$  è definito come somma di integrali in  $\mathbb{C}$  e riparametrizzare o ripartizionare  $\gamma$  significa riparametrizzare/ripartizionare i cammini  $\phi_i \circ \gamma_i$ . Dimostro ora l'invarianza per scelte di carta, a cui ho già accennato nell'introduzione di questa sezione. A meno di raffinamento della partizione dei cammini, possiamo assumere che  $im(\gamma) \subseteq U_1 \cap U_2$ , dove sono date due carte  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ , e 1-forme locali  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ , per  $i = 1, 2$ . Per compatibilità delle forme,  $f_1(z) = f_2(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z)) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(z) \forall z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ . Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1 \circ \gamma} f_1(z) dz &= \int_0^1 (f_1 \circ \phi_1 \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f_2 \circ \phi_2 \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1 \circ \gamma(t)) \cdot (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f_2 \circ \phi_2 \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f_2 \circ \phi_2 \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_2 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_{\phi_2 \circ \gamma} f_2(z) dz \end{aligned}$$

□

L'integrale è  $\mathbb{C}$ -lineare nelle 1-forme ed è lineare per partizione del cammino: Se  $\omega_1, \omega_2$  sono due 1-forme su  $X$ ,  $c \in \mathbb{C}$  e  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$  (come concatenazione), allora

$$\int_{\gamma} (c \cdot \omega_1 + \omega_2) = c \cdot \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2$$

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1$$

**Definizione 3.1.16** (*poli, ordini e residuo*). Sia  $\omega$  una 1-forma meromorfa su  $X$ , sia  $p \in X$ .  $p$  è un *polo* di  $\omega$  quando in una carta locale  $(U, \phi)$ , l'espressione  $f(z)dz$  di  $\omega$  ha un polo in  $z_0 = \phi(p)$ . Definiamo inoltre il suo *ordine di polo*:  $ord_p(\omega) = ord_{z_0}(f)$ . Sviluppando  $f$  in serie di Laurent,  $f(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i z^i$ , si definisce il **residuo** di  $\omega$  in  $p$  come  $Res_p(\omega) = c_{-1}$ .

*Osservazione.* È facile verificare che la proprietà di essere un polo di una 1-forma meromorfa e il suo ordine non dipendono dalla carta scelta. La prossima proposizione garantisce che anche il residuo è ben definito.

**Proposizione 3.1.17.**

$$Res_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

dove  $\gamma$  è un cammino con numero di avvolgimento 1 attorno a  $p$  e 0 attorno a tutti gli altri poli.

*Dimostrazione.* Si usano carte e il risultato analogo in analisi complessa su  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.18.**

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \implies \int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

## 3.2 La dimensione dello spazio $\Omega^1(X)$

**Fatto:** Per una superficie di Riemann  $X$  compatta, lo spazio  $\Omega^1(X)$  ha dimensione finita. Più precisamente, se  $X$  è compatta di genere  $g$ ,

$$\dim \Omega^1(X) = g$$

Questo fatto segue dal celebre teorema di Riemann-Roch, la cui dimostrazione completa va oltre allo scopo di questa tesi, perciò delineerò soltanto i punti essenziali.

**Definizione 3.2.1.** Sia  $X$  una superficie di Riemann. Un **divisore**  $D$  su  $X$  è una funzione  $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$  t.c. il suo **supporto**  $suppD = D^{-1}(\mathbb{Z}^*)$  sia discreto. Si usa la seguente notazione:

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$$

Se  $X$  è compatta, allora  $suppD$  è finito e definiamo

$$degD := \sum_{p \in X} D(p) \in \mathbb{Z}$$

Denotiamo  $Div(X)$  il gruppo degli divisori su  $X$ .

*Osservazione.* C'è un'ovvia relazione di ordine parziale su  $Div(X)$ :

$$D_1 \leq D_2 \iff D_1(P) \leq D_2(P) \quad \forall P \in X$$

**Definizione 3.2.2** (*divisori principali e canonici*). Data una superficie di Riemann compatta e una funzione meromorfa  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , definiamo

$$(f) := \sum_{p \in X} ord_p(f) \cdot p$$

Un divisore di questa forma si chiama **divisore principale**. Nello stesso modo, data una 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $X$ ,

$$(\omega) := \sum_{p \in X} ord_p(\omega) \cdot p$$

Un divisore di questa forma si chiama **divisore canonico**.

*Osservazione.* Il grado di ogni divisore principale è 0. Questo segue dalla Proposizione 1.1.11

**Definizione 3.2.3.** Sia  $D$  un divisore su una superficie di Riemann compatta  $X$ . Definiamo lo spazio delle funzioni meromorfe su  $X$  con poli limitati da  $D$ :

$$\begin{aligned} L(D) &:= \left\{ f : X \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq -D \right\} \\ l(D) &:= \dim(L(D)) \end{aligned}$$

Ho dunque introdotto tutti i concetti necessari per capire l'enunciato del teorema di Riemann-Roch.

**Teorema 3.2.4** (Riemann-Roch). Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta di genere  $g$ , e sia  $K$  un divisore canonico su  $X$ . Allora per ogni divisore  $D$  su  $X$ , vale:

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(K - D)$$

**Corollario 3.2.5.** Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta di genere  $g$ .

$$\implies \dim \Omega^1(X) = g$$

*Dimostrazione.* Usiamo Riemann-Roch con  $D = 0$ :

$$l(0) = \deg(0) + 1 - g + l(K)$$

È ovvio che  $\deg(0) = 0$ . Inoltre,  $L(0) = \mathcal{O}(X)$  e, poiché ogni funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta è costante,  $l(0) = 1$ . Sia  $K = (\omega_0)$ . Allora, usando anche il Lemma 3.1.14,

$$\begin{aligned} \Omega^1(X) &= \left\{ \omega \in \mathcal{M}^1(X) \mid (\omega) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ f \cdot \omega_0 \mid f \in \mathcal{M}(X), (f \cdot \omega_0) \geq 0 \right\} \\ &\cong \left\{ f \in \mathcal{M}(X), |(f)| \geq -(\omega_0) \right\} \\ &= L(K) \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo che:

$$\dim \Omega^1(X) = l(K) = g$$

□

### 3.3 Le 1-forme olomorfe sulle superfici iperellittiche

Consideriamo nuovamente una curva iperellittica  $X$  definita da  $w^2 - h(z)$ , dove

$$h(z) = c \cdot \prod_{j=1}^d (z - \alpha_j), \quad d = \deg(h) = 2g + 1 + \delta \text{ con } g \geq 2 \text{ e } \delta \in \{0, 1\}.$$

Sia  $\hat{X}$  la superficie iperellittica compattificata di  $X$ . Abbiamo scoperto nel capitolo 2 che  $\hat{X}$  ha genere  $g$ , e abbiamo scoperto nella precedente sezione che  $\dim \Omega^1(X) = g$ . In questa ultima sezione della mia tesi darò una costruzione esplicita di una base per lo spazio  $\Omega^1(X)$ .

Partiamo con un'osservazione semplice, ma importante: La funzione  $f = w^2 - h(z) \equiv 0$  è una funzione costante su  $X$ , quindi il suo differenziale è nullo. Allora

$$df = d(w^2 - h(z)) = d(w^2) - d(h(z)) = 2w dw - h'(z)dz = 0.$$

$$\implies 2w dw = h'(z)dz$$

Questa relazione ci sarà molto utile per trovare 1-forme olomorfe su  $\hat{X}$ .

**Proposizione 3.3.1.** Le 1-forme  $dz$  e  $dw$  – olomorfe se considerate solo su  $X$  – non si estendono in modo olomorfo su  $\hat{X}$ .

*Dimostrazione.* Partiamo con  $dz$ .

(1) caso  $d$  pari: Intorno a ciascuno dei due buchi all'infinito abbiamo la coordinata  $t = \frac{1}{z}$ . Da questa relazione segue che  $z - \frac{1}{t} = 0$ , cioè è una funzione costante su un aperto di  $X$ . Allora

$$d(z - \frac{1}{t}) = 0 \implies dz = d(\frac{1}{t}) = \frac{-1}{t^2} dt \quad \text{come forme.}$$

Ma se  $dz$  fosse olomorfa su tutto  $\hat{X}$ , la funzione  $\frac{-1}{t^2}$  dovrebbe essere olomorfa in 0, cosa che non è vera.

(2) caso  $d$  dispari: La coordinata all'infinito è  $\tau$  con la relazione  $\tau^2 = \frac{1}{z}$ . Quindi, analogamente a prima,

$$dz = d(\frac{1}{\tau^2}) = \frac{-2}{\tau^3} d\tau$$

$\frac{-2}{\tau^3}$  non è continua in 0  $\implies dz$  non è olomorfa su  $\hat{X}$ .

Si dimostra in modo analogo che  $dw$  non può essere una 1-forma olomorfa su  $\hat{X}$ .  $\square$

**Lemma 3.3.2.**

$$\frac{1}{w} \cdot dz \in \Omega^1(X)$$

*Dimostrazione.* A priori,  $\frac{dz}{w}$  è solo una 1-forma meromorfa su  $X$ .

Vediamo il comportamento dei suoi possibili poli  $P = (\alpha_j, 0)$ : In punto con  $h(z) = 0$ , poiché  $h$  non ha radici multiple, segue che  $h'(z) \neq 0$ .

Quindi, ricordando che  $2w dw = h'(z) dz$ , in un intorno opportuno di  $P$  abbiamo

$$\frac{dz}{w} = \frac{2}{h'(z)} dw, \quad \text{che è olomorfa in } P \text{ perché abbiamo detto che } h'(\alpha_j) \neq 0.$$

□

**Proposizione 3.3.3.** Sia  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ .

$$\text{La forma } \frac{p(z)}{w} dz \text{ è olomorfa su } \hat{X} \iff \deg(p) \leq g - 1$$

*Dimostrazione.*

$$\text{Sia } p(z) = a_D z^D + O(z^{D-1}) \quad \text{per } z \rightarrow \infty$$

(1) **caso  $d$  pari:**  $d = 2g + 2$ . La carta bucata all'infinito, su ciascuna componente连通的, è :  $t = \frac{1}{z}$ .

$$\implies dz = \frac{-1}{t^2} dt \implies \frac{p(z)}{w} dz = \frac{-p(\frac{1}{t})}{wt^2} dt$$

Bisogna fare vedere che è olomorfa per  $t \rightarrow 0$ . Conviene prendere il quadrato. Abbiamo:

$$\begin{aligned} p^2(z) &= a_D^2 z^{2D} + O(z^{2D-1}) \quad \text{per } z \rightarrow \infty \\ p^2\left(\frac{1}{t}\right) &= a_D^2 t^{-2D} + O(t^{-2D+1}) \quad \text{per } t \rightarrow 0 \\ \implies \frac{p^2(\frac{1}{t})}{w^2 t^4} &= \frac{p^2(\frac{1}{t})}{h(\frac{1}{t}) \cdot t^4} = \frac{p^2(\frac{1}{t})}{ct^4 \prod_j (\frac{1}{t} - \alpha_j)} = \frac{p^2(\frac{1}{t})}{ct^4} \cdot \prod_j \frac{t}{1 - \alpha_j t} \\ &= p^2\left(\frac{1}{t}\right) c^{-1} t^{d-4} \prod_j \frac{1}{1 - \alpha_j t} = (a_D^2 t^{-2D} + O(t^{-2D+1})) t^{d-4} c^{-1} \prod_j \frac{1}{1 - \alpha_j t} \\ &= c^{-1} \prod_j \frac{1}{1 - \alpha_j t} (a_D^2 t^{d-4-2D} + O(t^{d-2D-3})) \end{aligned}$$

olomorfa per  $t \rightarrow 0 \iff d - 4 - 2D \geq 0 \Leftrightarrow 2D \leq d - 4 = 2g - 2 \Leftrightarrow D \leq g - 1$

(2) **caso  $d$  dispari:**  $d = 2g + 1$ . La carta all'infinito è  $\tau = \frac{1}{\sqrt{z}}$ , più precisamente,  $\tau = \varphi(z) : \varphi^2(z) = \frac{1}{z}$

$$\implies z = \frac{1}{\tau^2} \implies dz = \frac{-2}{\tau^3} d\tau \implies \frac{p(z)}{w} dz = \frac{-2p(\frac{1}{\tau^2})}{\tau^3 w} d\tau$$

$$\begin{aligned}
& p^2\left(\frac{1}{\tau^2}\right) = a_D^2 \tau^{-4D} + O(\tau^{-4D+2}) \\
\implies & \frac{4p^2\left(\frac{1}{\tau^2}\right)}{\tau^6 w^2} = \frac{4p^2\left(\frac{1}{\tau^2}\right)}{\tau^6 h\left(\frac{1}{\tau^2}\right)} = \frac{4(a_D^2 \tau^{-4D} + O(\tau^{-4D+2}))}{\tau^6 c \prod_j (\frac{1}{\tau^2} - \alpha_j)} \\
& = \frac{4(a_D^2 \tau^{-4D} + O(\tau^{-4D+2}))}{\tau^6 c} \cdot \prod_j \frac{\tau^2}{1 - \alpha_j \tau^2} \\
& = 4c^{-1} \tau^{2d-6} (a_D \tau^{-4D} + O(\tau^{-4D+2})) \prod_j \frac{1}{1 - \alpha_j \tau^2}
\end{aligned}$$

olomorfa per  $\tau \rightarrow 0 \iff 2d - 6 - 4D \geq 0 \iff D \leq \frac{1}{2}(d-3) = g-1$

□

**Corollario 3.3.4.** L'insieme

$$\left\{ \frac{dz}{w}, \frac{zdz}{w}, \dots, \frac{z^{g-1}dz}{w} \right\}$$

è una base di  $\Omega^1(\hat{X})$ .

*Dimostrazione.* La proposizione precedente garantisce che sono proprio degli elementi di  $\Omega^1(\hat{X})$ . Se dimostro che sono linearmente indipendenti, la conclusione segue dal corollario del teorema di Riemann-Roch che afferma che  $\dim \Omega^1(\hat{X}) = g$ .

Sia

$$a_0 \frac{1}{w} dz + \dots + a_{g-1} \frac{z^{g-1}}{w} dz = 0$$

⇒ su un aperto di  $\mathbb{C}$ ,  $\frac{1}{w}(a_0 + \dots + a_{g-1} z^{g-1}) = 0 \implies$  per continuazione analitica,  $a_0 + \dots + a_{g-1} z^{g-1} = 0$  su  $\mathbb{C}$ .

$$a_0 = \dots = a_{g-1} = 0$$

□

# Bibliografia

- [1] R. MIRANDA, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995
- [2] E.M. STEIN, RAMI SHAKARCHI, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003
- [3] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2009
- [4] G. SPRINGER, *Introduction to Riemann Surfaces*, Affiliated East-West Press, 1957
- [5] Mathematics, in: Stack Exchange <https://math.stackexchange.com/>
- [6] Wikipedia contributors. Manifold <https://en.wikipedia.org/wiki/Manifold>, 2025
- [7] Wikipedia contributors. Hyperelliptic Curve [https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelliptic\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelliptic_curve), 2025
- [8] Wikipedia contributors. Genus (mathematics) [https://en.wikipedia.org/wiki/Genus\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Genus_(mathematics)), 2025
- [9] Z. SMITH *Compact Riemann Surfaces: A Threefold Categorical Equivalence* <https://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Smith.pdf>
- [10] T. TAO, Terrytao Wordpress, <https://terrytao.wordpress.com/2018/03/28/246c-notes-1-meromorphic-functions-on-riemann-surfaces-and-the-riemann-roch-theorem/>
- [11] E. CHEN, 2017, <https://blog.evanchen.cc/2017/02/16/holomorphic-logarithms-and-roots/>