

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Dimensioni cognitive e affettive
nell’algebra astratta:
un’analisi psicometrica**

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Maffia

Presentata da:
Marta Morara

Anno Accademico 2024/2025

Ad Andreaz, Anita ed Anna

Indice

Introduzione	7
1 Rassegna della letteratura	9
1.1 La sfida del pensiero strutturalista: la radice delle difficoltà in algebra astratta	10
1.2 Difficoltà specifiche legate alle proprietà delle strutture algebriche	15
1.3 L'impatto della didattica: isolamento concettuale e dimensione affettiva	17
2 Metodologia di ricerca	21
2.1 Design generale della ricerca	21
2.2 Strumenti usati per la raccolta dei dati	22
2.2.1 Questionario	22
2.2.2 Strumenti per l'elaborazione statistica	23
2.3 Metodi di elaborazione e analisi dei dati	23
2.3.1 Analisi descrittiva e visualizzazione	24
2.3.2 Validazione psicométrica	24
2.3.3 Analisi fattoriale	25
3 Risultati	27
3.1 Analisi descrittiva dei risultati per sezione	30
3.1.1 Sezione 1	30
3.1.2 Sezione 2	31
3.1.3 Sezione 3	32
3.1.4 Conclusioni	33
3.2 Analisi fattoriale esplorativa	33
4 Discussione dei risultati	45

5 Conclusioni	51
5.1 Implicazioni didattiche	51
5.2 Limiti della ricerca	53
5.3 Possibili sviluppi futuri	54
A Struttura Questionario	57

Introduzione

L'insegnamento dell'algebra astratta, nel contesto dei corsi di laurea in Matematica, rappresenta un momento didattico e cognitivo di profonda trasformazione per lo studente. La transizione dal pensiero matematico procedurale a quello strutturale e assiomatico è ampiamente riconosciuta in letteratura come uno dei passaggi più difficili del curriculum universitario (cfr. Capitolo 1).

Il problema centrale risiede nella natura epistemologica della disciplina. Gli studenti sono chiamati a operare non più su oggetti matematici familiari (numeri, funzioni), ma su strutture e proprietà definite esclusivamente per via assiomatica (gruppi, anelli e campi). Questo processo esige la reificazione dei concetti, ossia la capacità di trasformare processi operativi (per esempio, il gruppo quoiente) in oggetti mentali stabili da manipolare in ragionamenti formali. La difficoltà intrinseca di questa astrazione genera una frequente manifestazione di difficoltà concettuali, strategiche e affettive che ostacolano il pieno sviluppo del pensiero strutturale.

La rilevanza del presente studio consiste nel fornire uno strumento diagnostico per identificare e quantificare le criticità che si manifestano in questa fase. La ricerca si concentra sugli alunni frequentanti il corso di algebra astratta del secondo anno della laurea triennale, in quanto momento cruciale di prima esposizione ai concetti più avanzati della disciplina. Gli studenti, pur avendo una buona base (78% del campione, dato rilevato dal questionario 3), si scontrano con la piena formalizzazione delle strutture algebriche.

Il problema didattico affrontato in questa tesi è multifattoriale e si articola in tre aree critiche: persistenza degli errori concettuali, approccio metodologico inappropriato e percezione di isolamento/vissuto emotivo (cfr. rispettivamente 1.1, 1.2, 1.3).

Le domande che mi sono posta e alle quali la letteratura fornisce solo risposte parziali sono:

- Quali sono le principali difficoltà concettuali ricorrenti e le relative strategie di ragionamento inappropriate manifestate dagli studenti?

- In che misura il vissuto emotivo e la percezione di isolamento della materia sono correlati alle difficoltà concettuali e metodologiche manifestate dagli studenti?

Sebbene gli studi sulle difficoltà concettuali ricorrenti nell'algebra astratta (per esempio, le tendenze all'ipergeneralizzazione e all'ancoraggio agli esempi) siano numerosi, così come quelli che analizzano il ruolo del vissuto emotivo e delle variabili affettive (Hazzan, 1999; Veith et al., 2024), vi è ancora poca ricerca che integri questi tre aspetti cruciali (cognitivo, metodologico, affettivo) in un unico quadro diagnostico sistematico.

In particolare, vi è scarsa letteratura che si concentri sull'analisi delle correlazioni tra i diversi costrutti, limitandosi spesso all'indagine del singolo fattore. La comprensione matematica alla luce delle operazioni di ragionamento inappropriate e il loro legame con la frustrazione e la percezione di isolamento sono, pertanto, aspetti che richiedono ulteriore esplorazione.

Esiste, di conseguenza, uno spazio rilevante per una ricerca che si proponga di analizzare la correlazione tra questi tre costrutti attraverso un'indagine quantitativa. Il questionario è uno strumento diagnostico validato che, mappando con precisione queste relazioni, può orientare le pratiche concrete di insegnamento.

Il presente studio, collocandosi su un argomento didattico ben preciso e basandosi sull'analisi dei dati del questionario, ha l'obiettivo di arricchire la riflessione teorica con evidenze che possano sostenere l'apprendimento significativo degli studenti in algebra astratta.

Capitolo 1

Rassegna della letteratura

L’algebra astratta si configura come una delle discipline più esigenti per gli studenti che si affacciano all’università. Il passaggio dalla matematica elementare a quella superiore richiede un significativo salto cognitivo, esigendo un livello di astrazione e di rigore formale che spesso non trova precedenti negli studi pre-universitari. Questa transizione drastica è la causa principale delle difficoltà che motivano il seguente studio. Il presente capitolo ha l’obiettivo di delineare il panorama teorico di riferimento per l’indagine, sintetizzando i contributi più significativi della ricerca in didattica della matematica che hanno esplorato i meccanismi sottostanti a queste difficoltà. La letteratura consultata ci permette di analizzare il problema come un fenomeno complesso che si articola attorno a precise sfide cognitive, metodologiche e affettive. Per circoscrivere l’ambito del nostro studio la rassegna è strutturata in tre aree tematiche specifiche, ciascuna delle quali costituisce un pilastro della nostra indagine sperimentale:

- **Difficoltà strutturali e cognitive:** Il primo blocco teorico si dedica all’analisi dell’incapacità di incapsulare degli elementi algebrici. Si studiano i modelli che descrivono le criticità nel percorso di sviluppo cognitivo, in particolare il momento in cui il processo matematico non riesce a essere concepito dallo studente come un oggetto autonomo e strutturale (passaggio dal pensiero operativo a quello strutturale).
- **Rigore formale e ipergeneralizzazione:** Gli ostacoli legati all’uso impreciso del linguaggio matematico e la tendenza degli studenti ad estendere impropriamente proprietà note (come la commutatività) a contesti non validi.

- **Percezione, rilevanza e motivazione:** La dimensione affettiva e di giudizio degli studenti. Si analizzano la percezione dell’algebra astratta come una disciplina isolata e l’impatto della rilevanza sull’interesse.

I risultati e i modelli presentati nella letteratura fungeranno da ponte tra la teoria e la prassi sperimentale. Attraverso l’analisi dei tre filoni tematici (pensiero strutturalista, rigore e percezione), ci proponiamo di estrarre il fondamento concettuale necessario per la costruzione di uno strumento di indagine valido ed efficace, giustificando la selezione di ciascuna variabile misurata nel questionario che verrà somministrato al campione di studenti.

1.1 La sfida del pensiero strutturalista: la radice delle difficoltà in algebra astratta

L’algebra astratta, chiamata anche “algebra moderna” o “algebra strutturale”, segna un profondo punto di svolta rispetto all’algebra classica.¹ Se l’algebra tradizionale si concentra sulla manipolazione di simboli per risolvere equazioni, l’algebra astratta sposta l’attenzione sulle strutture algebriche stesse. Questo approccio, che ha preso forma all’inizio del XX secolo, pone le strutture (come gruppi, anelli e campi) in primo piano, vedendo le proprietà di elementi familiari, come numeri o polinomi, come una diretta conseguenza delle leggi che governano queste strutture più generali (Hausberger, 2020). Questo passaggio a una visione strutturalista è riconosciuto come una delle principali difficoltà per gli studenti universitari di matematica, poiché richiede un’attitudine concettuale fondamentalmente diversa da quella sviluppata nei corsi precedenti.

In didattica della matematica, la comprensione viene tradizionalmente inquadrata attraverso il passaggio dalla *comprensione strumentale* (Skemp, 1976), concentrata sulla memorizzazione di regole e procedure (“regole senza ragione”), alla *comprensione relazionale*, che implica la conoscenza non solo del cosa fare, ma anche del perché una procedura sia efficace. La comprensione relazionale è cognitivamente vantaggiosa: l’apprendimento relazionale, costruendo una fitta rete di collegamenti tra le nozioni, favorisce la memoria a

¹Il passaggio dall’algebra classica all’algebra moderna si colloca tra la fine del XVIII e l’inizio del XIX secolo, segnando una rivoluzione nel pensiero matematico. La crisi dell’algebra classica giunse con l’impossibilità di trovare una formula generale per risolvere le equazioni polinomiali di quinto grado e superiori. I matematici iniziarono a studiare le strutture che governavano le relazioni tra le radici, cambiando il focus della disciplina: dall’interrogarsi sul cosa risolvere, ci si spostò a interrogarsi sul perché e sul come una data operazione fosse possibile, definendo le prime strutture assiomatiche (gruppi e anelli).

lungo termine e la capacità di ricostruire la conoscenza, poiché un'informazione interconnessa è più probabile che sia richiamata in un secondo momento. Tuttavia, nel contesto dell'algebra astratta, è necessario un ulteriore e più sofisticato livello di comprensione: la comprensione strutturale.

Quest'ultima va oltre la sola giustificazione delle relazioni (comprensione relazionale) e rappresenta il vertice della padronanza della materia.

Questo livello superiore è definito dalla capacità dello studente di reificare/oggettificare (*objectify* nella letteratura anglofona) l'entità algebrica.

L'*objectification* è il processo cognitivo fondamentale (presente, ad esempio, nel modello APOS) che descrive la trasformazione mentale di un processo in un oggetto.

Tale trasformazione si realizza attraverso l'*incapsulamento* della struttura, ovvero attraverso il meccanismo cognitivo con cui un complesso di azioni e relazioni assiomatische (che definiscono una struttura) viene racchiuso in una singola entità mentale e trattato come un unico oggetto concettuale. In virtù di questo processo, la struttura cessa di essere una semplice collezione di elementi che soddisfano degli assiomi per diventare un oggetto matematico unitario e manipolabile.

Questo livello di comprensione avanzato permette allo studente di compiere tipi di operazioni fondamentali che sono precluse al livello relazionale.

Non si tratta più di fare calcoli, ma di manipolare la struttura stessa. Lo studente diventa in grado di vedere la struttura specifica (per es. il gruppo delle matrici invertibili) come un esempio particolare di un concetto più generale e di cogliere le connessioni che definiscono la coerenza del campo algebrico (per es. un anello è un gruppo abeliano con un'operazione aggiuntiva).

Come viene evidenziato dalla ricerca di Hazzan (1999), molti studenti faticano a muoversi al livello di astrazione richiesto, al punto che le loro risposte possono essere interpretate come un tentativo di “ridurre il livello di astrazione” per rendere i concetti mentalmente più accessibili (o più intuitivi). Questa tendenza, sebbene possa talvolta essere una strategia utile, può anche risultare fuorviante se applicata in modo inappropriate, portando a incomprensioni e a un apprendimento superficiale.

Un caso emblematico, osservato nello studio di Hazzan, è l'introduzione dei concetti di classe laterale e di gruppo quoziante (\mathbf{G}/\mathbf{H}). La classe laterale aH viene definita come un insieme di elementi, $aH = \{a \cdot h \mid h \in H\}$ e gli studenti tendono a vedere immediatamente questo oggetto come una lista (un processo o una collezione), riducendo il livello di astrazione. Si osserva che la difficoltà emerge quando si chiede loro di considerare il laterale aH come un singolo elemento del nuovo insieme (il gruppo quoziante \mathbf{G}/\mathbf{H}). Infatti, di fronte alla moltiplicazione di due laterali $[aH] \cdot [bH]$, lo studente cerca istintivamente di eseguire l'operazione sui singoli elementi interni ai laterali

anziché trattare $[aH]$ e $[bH]$ come due singole entità su cui operare, come se fossero due “mattoncini” del nuovo gruppo quoziante. Hazzan conclude che lo studente, per gestire l’astrazione, ha ridotto inconsapevolmente il laterale da un oggetto astratto (elemento di G/H) a una processo/collezione (i suoi elementi), ostacolando la percezione del gruppo quoziante come un’entità algebrica ben definita.

Un’altra manifestazione della riduzione del livello di astrazione si verifica quando gli studenti proiettano le proprietà di strutture numeriche familiari su nuove strutture astratte. Hazzan illustra questo fenomeno con il caso della verifica degli assiomi di gruppo sull’insieme $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ con l’operazione di addizione modulo 3. Una studentessa che ha partecipato a questa ricerca, nel tentare di trovare l’elemento inverso di 2 per questa operazione, ignora inconsapevolmente l’operazione definita sul gruppo e la sostituisce con la moltiplicazione standard sui numeri razionali. Di conseguenza, cercando l’inverso di 2 come $1/2$ (che è l’inverso moltiplicativo) e, non trovando $1/2$ all’interno dell’insieme \mathbb{Z}_3 , conclude erroneamente che \mathbb{Z}_3 non sia un gruppo. Questo esempio dimostra come la necessità cognitiva di appoggiarsi a entità familiari (ipergeneralizzazione del concetto di inverso e dell’operazione) possa ostacolare il corretto ragionamento formale, compromettendo la capacità dello studente di percepire la nuova struttura algebrica come un’entità autonoma.

Questo tipo di semplificazione si manifesta in diverse strategie cognitive che riportano il ragionamento dal piano astratto (struttura) a quello procedurale (azione). Inizialmente, trattare una struttura algebrica come un semplice insieme è una delle strategie più comuni usata dagli studenti e consiste nell’ignorare la complessità dell’operazione e degli assiomi per concentrarsi esclusivamente sugli elementi.

Sempre negli studi di Hazzan si osserva come lo studente non riesca a objec-tificare il gruppo $(G, *)$ riducendolo, a livello cognitivo, a un mero insieme di elementi con determinate proprietà. La difficoltà è particolarmente evidente quando agli studenti viene richiesto di stabilire se due gruppi sono isomorfi. Coloro che operano a un livello di astrazione ridotto tendono a focalizzarsi esclusivamente sul confronto della cardinalità (il numero di elementi) dei due insiemi. L’isomorfismo è un concetto che richiede la piena comprensione strutturale, poiché necessita della verifica di una mappa biunivoca che preservi l’operazione (omomorfismo), la vera essenza della struttura. L’approccio riduttivo ignora completamente la coerenza della struttura, semplificando il problema astratto di “equivalenza strutturale” al problema basilare di “equivalenza numerica” tra insiemi. Questo dimostra come il pensiero rimanga ancorato a concetti di base preclusi al ragionamento strutturale.

Gli studi di Hazzan rilevano, inoltre, una marcata difficoltà degli studenti nel

distinguere e applicare correttamente la notazione astratta delle operazioni da quella propria dell’aritmetica standard. La formalizzazione in algebra utilizza simboli come $*$ o \cdot per indicare un’operazione generica. La difficoltà a objectificare questa operazione spinge lo studente a ricondurla all’esperienza numerica pregressa. Di fronte a un’operazione definita su un insieme limitato, come l’addizione modulo n (ad esempio, il gruppo $(\mathbb{Z}_n, +_n)$), lo studente applica involontariamente l’addizione ordinaria appresa nelle prime fasi dell’istruzione, ignorando le regole del modulo. Invece di trattare l’operazione $+_n$ come l’oggetto astratto definito dagli assiomi del gruppo, l’operatore matematico viene letto come una banale estensione dell’azione aritmetica nota. Similmente, in anelli o campi, la notazione $a \cdot b$ è automaticamente interpretata come il prodotto scalare, anche quando il contesto definisce una diversa moltiplicazione (ad esempio, la composizione in un anello di funzioni). Questi esempi mostrano il profondo divario tra la comprensione relazionale, in cui si seguono le procedure senza percepirla l’astrazione, e la comprensione strutturale, dove l’operazione e la struttura sono oggetti concettuali autonomi. La tendenza dello studente a vedere un concetto estremamente astratto in un’entità più semplice è strettamente legata al modello cognitivo dell’incapsulamento, centrale nella teoria APOS (Actions, Processes, Objects, Schema).

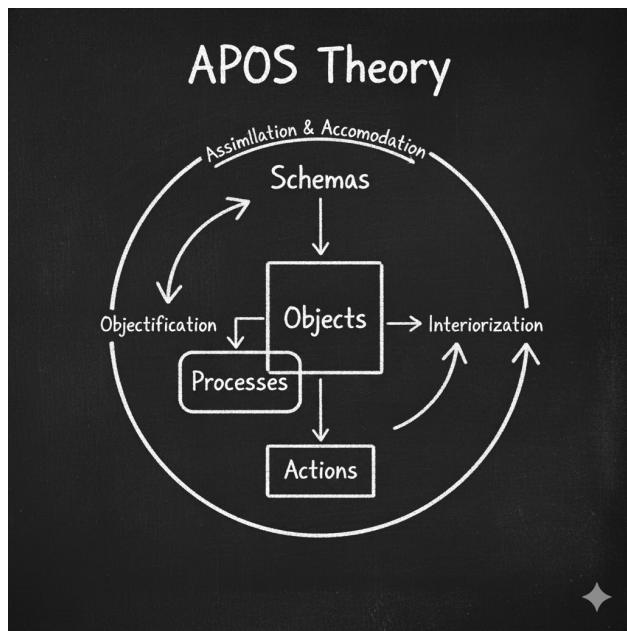


Figura 1.1: Modello della APOS Theory

La piena comprensione di un concetto astratto si realizza solo quando

un’azione o un processo (come eseguire l’operazione di un gruppo o la formazione di classi laterali) viene mentalmente trasformato in un oggetto statico su cui si possono eseguire nuove azioni (per es. l’operazione tra classi laterali).

La “APOS Theory” è una teoria centrale sull’apprendimento dei concetti matematici astratti sviluppata da Dubinsky e McDonald (2001). Si tratta di una teoria dell’apprendimento di stampo costruttivista, secondo cui gli studenti costruiscono mentalmente le proprie rappresentazioni dei modelli matematici attraverso una sequenza progressiva di stadi (Fig. 1.1)

Ogni lettera dell’acronimo APOS rappresenta una delle quattro fasi cognitive:

- Actions (azioni): Sono trasformazioni di un oggetto matematico percepite dallo studente come esterne. Per la loro esecuzione è richiesto il ricorso a procedure algoritmiche o a istruzioni passo dopo passo.
- Processes (processi): Nello stadio successivo, le azioni si evolvono in processi. Questa evoluzione avviene attraverso l’esercizio sistematico, il motore che trasforma la manipolazione esterna in una comprensione interna. L’interiorizzazione che ne deriva permette allo studente di automatizzare la sequenza delle azioni e di eseguire le manipolazioni concettuali mentalmente, senza la necessità di stimoli esterni o di istruzioni specifiche.
- Objects (oggetti): Gli oggetti vengono costruiti a partire dai processi. Questo avviene quando lo studente ne acquisisce piena consapevolezza ed è capace di derivare, attraverso di essi, una generalizzazione dell’oggetto matematico.
- Schemas (schemi): Infine, l’insieme coerente di azioni, processi e oggetti che sono pertinenti a uno specifico concetto matematico viene organizzato in uno schema. Gli studenti acquisiscono la piena padronanza delle nozioni algebriche astratte coordinando schemi diversi per oggetti concettuali differenti.

Il cuore del pensiero strutturalista risiede in una “dialettica fondamentale” tra gli oggetti matematici (ovvero gli elementi specifici, come numeri, matrici o permutazioni) e le strutture assiomatiche che li unificano (le regole che definiscono il gruppo, l’anello, ecc.). Acquisire un “senso strutturale” significa riuscire a operare su questa dinamica. Per questo motivo, la rassegna della letteratura concorda sul fatto che la transizione dalla comprensione strumentale a quella strutturale non è una semplice discontinuità metodologica, ma la radice di molteplici difficoltà di apprendimento che si manifestano in forme specifiche e ricorrenti, come l’ipergeneralizzazione di proprietà (tra cui la

commutatività e l’associatività) o la mancanza di rigore formale nell’uso dei quantificatori e delle definizioni.

1.2 Difficoltà specifiche legate alle proprietà delle strutture algebriche

A partire dalla sfida centrale del pensiero strutturalista, la letteratura di ricerca ha identificato una serie di difficoltà specifiche e ricorrenti che gli studenti incontrano nell’apprendimento dell’algebra astratta. Queste problematiche possono essere ricondotte a due ambiti principali: l’ipergeneralizzazione delle proprietà note e la mancanza di padronanza del linguaggio assiomatico (Veith et al., 2022).

Una delle difficoltà più diffuse è la tendenza degli studenti a “confondere e ipergeneralizzare” proprietà di base come l’associatività e la commutatività. Partendo dall’esperienza con i sistemi numerici, in cui la commutatività è una proprietà onnipresente e spesso sottintesa (es: $2 \times 3 = 3 \times 2$), gli studenti tendono a estenderla inconsciamente a qualsiasi operazione in un gruppo, anche in contesti non abeliani. Questo fenomeno è stato oggetto di studio fin dai primi lavori sull’apprendimento algebrico (Tirosh et al., 1991). Questa dipendenza cognitiva dai modelli mentali procedurali pregressi ostacola la comprensione di un gruppo non abeliano come un’entità unica.

Più recentemente, le ricerche di Melhuish e Fagan (2018) hanno riscontrato questa tendenza in modo significativo, dimostrando come gli studenti tendano a percepire la commutatività e l’associatività come logicamente dipendenti o onnicomprese, non riuscendo a riconoscerle come proprietà che devono essere definite e verificate all’interno di una specifica struttura astratta. Nel contesto di queste difficoltà, la loro ricerca su un campione di 286 studenti universitari ha fornito dati cruciali. Gli autori hanno notato che il 60% degli studenti tendeva a ipergeneralizzare la proprietà commutativa, applicandola anche a strutture per cui non era definita. Sempre nello stesso studio, è stato osservato che la comprensione concettuale dei gruppi è strettamente legata alla piena comprensione delle operazioni binarie, con una percentuale del 45% degli studenti che manifestava confusione tra le proprietà di associatività e commutatività.

Un’altra manifestazione critica di un apprendimento concettuale incompleto è l’incapacità di utilizzare il rigore formale. Spesso, gli studenti faticano a gestire la precisione del linguaggio matematico, in particolare nell’uso dei quantificatori logici come “per ogni” ed “esiste”.

Questo si manifesta in diverse aree tra cui:

- **Chiusura:** La proprietà di chiusura di un insieme rispetto a un’operazione binaria viene spesso data per scontata. Gli studenti tendono a non verificarla formalmente, supponendo che il risultato di un’operazione tra due elementi dell’insieme sia sempre all’interno dello stesso insieme.
- **Unicità dell’elemento neutro:** Gli studenti possono a volte confonderlo con il numero 1 (elemento neutro della moltiplicazione nei numeri reali) o con il numero 0 (elemento neutro della somma nei numeri reali). Inoltre, spesso, non riescono a dimostrarne formalmente l’unicità, un’operazione che richiede la padronanza dei quantificatori (“esiste un unico elemento”). A livello empirico, studi quantitativi recenti come quello di Veith et al. (2022), condotto su 143 studenti tramite il Concept Inventory for Group Theory (CI-GT), hanno rilevato che circa il 40% degli intervistati manifesta difficoltà concettuali nell’identificazione dell’elemento neutro in contesti non canonici.

L’analisi della letteratura evidenzia problemi specifici con concetti che sono pilastri dell’algebra astratta, ma che gli studenti non riescono a padroneggiare a causa di una visione incompleta o di una gestione errata del livello di astrazione. Un esempio ricorrente di questa problematica, analizzato in dettaglio dagli studi di Hazzan (1999), è la tendenza a non vedere il sottogruppo come un’entità che ha una struttura di gruppo a sé stante, ma solo come un semplice sottoinsieme del gruppo più grande. Tale percezione limita la capacità di operare su questo oggetto a un livello superiore e di riconoscere la gerarchia e le relazioni tra le diverse entità algebriche. Questa limitazione è una diretta conseguenza della difficoltà di sviluppare un senso strutturale, il che ostacola l’operatività su oggetti algebrici in costruzioni teoriche più avanzate. Tutto ciò si ricollega direttamente alla problematica dell’incapsulamento dei concetti, un processo chiave nella teoria APOS. L’incapacità di vedere il sottogruppo come un “oggetto” con le sue proprietà ne impedisce l’incapsulamento, ostacolando così la costruzione di una comprensione più profonda.

A questo punto, è fondamentale chiarire il ruolo della concretezza, evidenziato dal lavoro di Hausberger (2020). Sebbene un’eccessiva dipendenza da esempi familiari (come i numeri interi) sia una manifestazione di una limitata maturazione del pensiero strutturale, l’uso strategico di esempi concreti è un pilastro della didattica dell’algebra astratta. Gli esempi, come le permutazioni o le matrici, non sono utilizzati per fermarsi alla rappresentazione concreta, ma per:

- Costruire l'intuizione fornendo un punto di partenza per comprendere una nuova struttura.
- Testare la comprensione permettendo agli studenti di verificare se un concetto astratto (come la chiusura o l'esistenza di un elemento neutro) vale o meno in un contesto specifico, distinguendo tra ciò che è un'assunzione e ciò che è un assioma della struttura.

La rassegna concorda che l'uso degli esempi concreti non è una fine, ma un mezzo. La difficoltà emerge quando gli studenti non riescono a trascendere l'esempio per raggiungere una comprensione puramente astratta, che è il vero obiettivo dell'algebra moderna. Per affrontare queste lacune, la ricerca didattica suggerisce di focalizzare l'attenzione sulla solida comprensione delle definizioni e degli assiomi (Veith et al. (2022)), spesso incoraggiando approcci come l'*Embodiment*² per rendere l'astrazione più accessibile (Soto et al., 2024).

1.3 L'impatto della didattica: isolamento concettuale e dimensione affettiva

Oltre alle sfide intrinseche legate all'astrazione e alle proprietà delle strutture, la letteratura di ricerca evidenzia come le difficoltà in algebra astratta siano spesso acute da fattori contestuali e affettivi. Una delle problematiche più significative è l'isolamento concettuale, ovvero la percezione degli studenti che l'algebra astratta sia una disciplina avulsa dal resto della matematica e priva di rilevanza per i loro futuri percorsi professionali. Questa mancanza di connessioni rappresenta un ostacolo notevole all'apprendimento e alla motivazione. Uno studio condotto da Veith et al. (2024) su 39 futuri insegnanti ha mostrato che la maggior parte di loro (circa l'80%) non considera l'apprendimento della teoria di Galois significativo. Molti faticano a identificare i collegamenti tra una teoria così complessa e l'insegnamento della matematica nelle scuole superiori, nonostante l'algebra astratta offra "le rigorose basi matematiche" per molti argomenti affrontati a scuola (Veith et al., 2024). Questo isolamento concettuale è ben riassunto da un commento di un partecipante allo studio il quale ha espressamente detto "Non ritengo che la teoria di Galois sia necessaria per l'insegnamento scolastico. È troppo

²In didattica, l'*Embodiment* si riferisce al ruolo cruciale del corpo, dei sensi e dell'esperienza motoria nel processo di pensiero e apprendimento. Nel contesto dell'algebra astratta l'approccio si traduce nell'uso consapevole di gesti e interazioni fisiche per "ancorare" la comprensione di strutture astratte (come gruppi o sottogruppi).

specifica e non aiuta a capire meglio l’algebra del liceo.”

Tale riscontro è particolarmente significativo poiché, se la percezione di irrilevanza si manifesta in un campione di futuri docenti (il cui percorso formativo dovrebbe esaltare il valore strutturale della materia), è lecito supporre che questa disconnection sia ancora più marcata per gli studenti universitari con obiettivi professionali diversificati. Tale divario tra il valore epistemologico della disciplina e la percezione degli studenti ne mina l’utilità ai loro occhi. La percezione di irrilevanza si lega intimamente alla dimensione affettiva, influenzando l’interesse e la motivazione. L’isolamento concettuale e la ridotta rilevanza percepita determinano un calo dell’interesse che limita l’attivazione cognitiva profonda necessaria per la comprensione strutturale.

Lo studio di Veith et al. (2022) ha indagato empiricamente il ruolo di queste caratteristiche affettive (come l’ansia, l’interesse e la rilevanza percepita) sull’apprendimento della teoria dei gruppi. Sebbene abbiano riscontrato che l’ansia matematica e l’interesse matematico generale non fossero predittori significativi, i loro risultati suggeriscono che l’interesse specifico e la percezione di rilevanza svolgono un ruolo cruciale, soprattutto in programmi didattici volti a costruire una comprensione concettuale a lungo termine. La dimensione affettiva non è quindi un aspetto secondario, suggerendoci che una didattica efficace non può limitarsi all’aspetto puramente razionale e formale, ma deve attivamente lavorare per collegare l’oggetto astratto alla percezione di utilità e interesse dello studente.

La ricerca evidenzia e lavora su come la didattica possa agire attivamente per contrastare l’isolamento concettuale. Studi sulle pratiche di professori universitari, come quelli di Rupnow et al. (2021), hanno mostrato la consapevolezza dei docenti di questa problematica. I professori si sforzano attivamente di costruire un’esperienza di apprendimento coerente per gli studenti attraverso l’assegnazione mirata di problemi a casa che collegano l’algebra astratta a materiali affrontati in corsi precedenti, come l’algebra lineare o la teoria dei numeri, ed esplorano le applicazioni del contenuto in altri campi scientifici (fisica e chimica) o ad esempi concreti (simmetrie e gruppi diedrali). Nello studio, i docenti hanno spesso dichiarato di assegnare compiti specificamente per “rendere esplicativi i legami tra algebra astratta e algebra lineare” e per “far vedere agli studenti l’utilità del materiale” (Rupnow et al. (2021)). Questo sforzo didattico dimostra che il superamento dell’isolamento concettuale non è un processo automatico, ma un obiettivo consapevole della progettazione didattica per rendere la materia coesa e significativa.

In conclusione, l’ampia rassegna della letteratura sulle difficoltà di apprendimento dell’algebra astratta delinea un problema complesso e sfaccettato. Le criticità non sono riconducibili a una singola causa, ma emergono

dall'intersezione di tre fattori principali:

- Sfide cognitive: La necessità di compiere il salto dall'approccio procedurale al pensiero strutturale (Hausberger (2020) e Hazzan (1999, 2001)) e la difficoltà nell'incapsulamento dei concetti (Teoria APOS).
- Lacune formali e operative: La tendenza all'ipergeneralizzazione di proprietà familiari (Melhuish & Fagan, 2018; Tirosh et al., 1991) e la mancanza di rigore nell'uso degli assiomi e del linguaggio formale (Veith et al., 2022).
- Contesto curriculare e dimensione affettiva: L'isolamento concettuale percepito e la conseguente crisi di rilevanza e motivazione che ostacolano un apprendimento significativo (Rupnow et al., 2021; Veith et al., 2024).

La mia ricerca si inserisce in questo dibattito accademico con l'obiettivo di sviluppare uno strumento di rilevazione empirica in grado di misurare e correlare simultaneamente l'influenza di queste tre macro-categorie di variabili sugli studenti. Il questionario fornisce un quadro diagnostico utile a strutturare futuri interventi didattici mirati, volti a promuovere una visione organica e strutturale della disciplina.

Capitolo 2

Metodologia di ricerca

2.1 Design generale della ricerca

La presente ricerca adotta un approccio quantitativo con l'obiettivo primario di sviluppare e validare uno strumento diagnostico in grado di misurare le difficoltà concettuali percepite dagli studenti nel contesto dell'algebra astratta. Il design della ricerca si articola nelle due fasi fondamentali di un'indagine quantitativa:

1. **Somministrazione:** Raccolta di dati attraverso un questionario strutturato su larga scala.
2. **Analisi statistica:** Elaborazione dei dati al fine di validare lo strumento e individuare le principali tendenze di risposta.

L'analisi è stata condotta presso il dipartimento di matematica dell'Università di Bologna e ha coinvolto 56 studenti frequentanti il corso universitario di *Anelli e Campi*, modulo di algebra astratta del secondo anno della laurea triennale in matematica. La partecipazione è avvenuta su base volontaria e in forma anonima, senza criteri di selezione specifici.

Ho scelto di focalizzare il mio studio sull'algebra astratta per il suo ruolo cruciale nel curriculum matematico universitario, per la sua intrinseca complessità e per il mio interesse personale verso l'argomento.

L'obiettivo principale della ricerca è quello di condurre un'analisi diagnostica delle difficoltà percepite e del vissuto emotivo associato allo studio di questa disciplina. In particolare, il questionario è stato progettato per rispondere a due domande guida:

- Quali sono le principali difficoltà concettuali ricorrenti e i relativi errori di ipergeneralizzazione e di rigore formale manifestati dagli studenti?

- In che misura gli studenti percepiscono l’algebra astratta come una disciplina isolata dal resto del percorso di studi e in che modo la mancanza di connessioni esplicite con la matematica pregressa o con le applicazioni pratiche influenza la loro motivazione e la percezione di rilevanza della materia?

2.2 Strumenti usati per la raccolta dei dati

La presente sezione illustra gli strumenti utilizzati nelle due fasi cruciali della ricerca: la rilevazione dei dati (il questionario) e la loro elaborazione statistica.

2.2.1 Questionario

Lo strumento primario per la raccolta dei dati è stato un questionario auto-compilato, denominato *Questionario didattica dell’algebra astratta*, realizzato tramite Microsoft Forms. La scelta della compilazione digitale ha garantito una somministrazione uniforme, rapida e standardizzata, riducendo al minimo il rischio di bias legati all’intervistatore.

Il questionario è composto da 13 item, formulati per indagare tre macro-categorie di difficoltà emerse dalla rassegna della letteratura:

- **Pensiero strutturalista e rigore formale:**

Questa categoria esplora le difficoltà legate alla manipolazione di strutture algebriche astratte, all’applicazione rigorosa delle definizioni e all’uso corretto dei quantificatori. Include anche la capacità di allontanarsi dagli esempi numerici familiari per ragionare in termini strutturali.

- **Comprensione del linguaggio e degli assiomi:**

Questa sezione si concentra sulla percezione della complessità del linguaggio formale e simbolico dell’algebra astratta e sulla comprensione delle proprietà fondamentali definite dagli assiomi. L’obiettivo è individuare eventuali fragilità nella traduzione tra il linguaggio naturale e il registro formale.

- **Percezione, motivazione e connessioni:**

Questa categoria indaga il vissuto emotivo e metacognitivo degli studenti, affrontando specificamente la percezione dell’algebra astratta come disciplina isolata e la mancanza di connessioni esplicite con la matematica pregressa o le applicazioni pratiche. Tali aspetti risultano cruciali per comprendere motivazione, interesse e percezione di rilevanza della materia.

Per ciascun item è stata adottata una scala Likert a 5 punti (da 1 = minima difficoltà percepita a 5 = massima difficoltà percepita), al fine di quantificare in maniera continua il grado di difficoltà o accordo espresso dagli studenti. La somministrazione è avvenuta interamente in formato digitale: gli studenti hanno compilato il questionario tramite i propri dispositivi mobili, accedendo a un link fornito da me durante la lezione. Il tempo medio di compilazione è stato di circa 5 minuti.

2.2.2 Strumenti per l'elaborazione statistica

L'elaborazione e l'analisi dei dati raccolti sono state condotte interamente tramite software statistici, indispensabili per la validazione psicometrica del questionario. Le analisi sono state condotte utilizzando JASP (versione 0.95.4.0), una piattaforma open-source dedicata all'esecuzione di analisi statistiche avanzate. Oltre all'analisi fattoriale esplorativa (EFA), utilizzata per verificare la struttura interna del questionario e il raggruppamento degli item nei tre fattori emersi, il software è stato impiegato anche per calcolare l'indice di affidabilità interna (α di Cronbach) e per elaborare le statistiche descrittive dei tre nuovi fattori individuati dall'EFA.

Per le fasi preliminari di organizzazione dei dati è stato utilizzato Microsoft Excel, impiegato per la gestione del campione e per le operazioni di codifica, tra cui il reverse-coding (inversione dei punteggi). Le domande formulate negativamente (ovvero quelle in cui un punteggio alto indica una difficoltà, una misconcezione o un atteggiamento negativo) sono state ricodificate invertendo la scala di risposta ($1 < - > 5$, $2 < - > 4$; il valore 3 resta invariato). Questo procedimento garantisce che punteggi più alti corrispondano sempre a una maggiore comprensione concettuale o a un atteggiamento positivo verso la disciplina, rendendo coerente l'interpretazione degli item all'interno del modello statistico.

2.3 Metodi di elaborazione e analisi dei dati

Questa sezione esplicita il processo analitico adottato per la validazione dello strumento e l'analisi dei dati quantitativi. Vengono dettagliati i criteri statistici utilizzati, le fasi dell'elaborazione (dalla pre-analisi alla validazione psicometrica) e le scelte metodologiche che hanno guidato l'interpretazione dei risultati.

2.3.1 Analisi descrittiva e visualizzazione

Prima di procedere con la validazione psicométrica dello strumento, è stata effettuata un'analisi descrittiva finalizzata a fornire una panoramica iniziale delle risposte del campione (cfr. sezione 3.1). Per ogni item sono state calcolate le principali misure di tendenza centrale e di dispersione (media \bar{x} , deviazione standard, mediana e moda), con l'obiettivo di individuare rapidamente eventuali concentrazioni di risposte e possibili effetti pavimento. In particolare, la media è stata utilizzata come indicatore chiave per una prima valutazione della diffusione delle difficoltà percepite. Questa scelta mostra, già in fase preliminare, quali aree presentano maggior accordo o disaccordo da parte degli studenti (valori medi molto bassi indicano una buona comprensione concettuale, mentre valori più elevati suggeriscono la presenza di ostacoli significativi).

Accanto al calcolo delle statistiche descrittive, sono stati analizzati anche i dati relativi alle caratteristiche del campione (l'esperienza formativa pregressa), tramite un grafico a torta che mostra la distribuzione degli studenti in relazione al loro percorso negli insegnamenti di algebra astratta (cfr. grafico 3.1).

Infine, per supportare la lettura delle tendenze emerse e facilitare un confronto immediato tra i diversi item, sono stati utilizzati tre grafici a barre, uno per ciascuna sezione tematica del questionario (cfr. figura 3.4).

Questa rappresentazione consente di osservare come si distribuiscono le risposte lungo la scala Likert e di identificare visivamente pattern ricorrenti, come, in alcuni casi, la tendenza degli studenti a posizionarsi sui valori più alti o più bassi della scala.

Questa analisi preliminare ha fornito un primo quadro delle difficoltà percepite.

2.3.2 Validazione psicométrica

Per valutare la qualità scientifica del questionario, è stata effettuata una validazione psicométrica tramite analisi fattoriale esplorativa (EFA).

L'EFA è una tecnica statistica multivariata utilizzata per individuare le strutture latenti presenti in un insieme di variabili osservate. Essa consente di ridurre la complessità dei dati, raggruppando le variabili che presentano pattern di correlazioni simili in un numero ridotto di fattori interpretabili.

Ogni fattore così individuato rappresenta una dimensione comune, ossia una quota di varianza condivisa tra più item, rendendo possibile l'identificazione di relazioni non immediatamente osservabili nei dati grezzi.

2.3.3 Analisi fattoriale

Nel presente studio, l'EFA è stata utilizzata per esplorare l'organizzazione interna delle risposte degli studenti al questionario. Questa analisi consente di comprendere come gli studenti concepiscono la disciplina, mettendo in luce le dimensioni sottostanti che strutturano la loro esperienza rispetto ai concetti astratti, alle pratiche dimostrative e alla percezione emotiva della materia.

L'obiettivo dell'analisi è verificare la validità di costrutto del questionario, cioè accertare se i 13 item iniziali si organizzano secondo le tre macro-categorie teoriche ipotizzate (cognitive, metodologiche e affettive).

Le domande del questionario sono state formulate sulla base di un'analisi qualitativa della letteratura, con l'intento di indagare specifici fenomeni di difficoltà nell'algebra astratta.

Tuttavia, la struttura empirica emersa non ricalca perfettamente quella teorica attesa: gli item si sono organizzati in tre fattori, ma tali dimensioni riflettono configurazioni parzialmente diverse rispetto alle categorie previste. Ciò suggerisce che gli studenti abbiano interpretato alcune domande in modi differenti da quelli ipotizzati nella fase di costruzione dello strumento.

Il numero finale di item è stato ridotto a 12, poiché il solo item q2 è risultato scarsamente rappresentativo dal punto di vista statistico.

In particolare:

- presentava una varianza molto ridotta (media molto simile tra i partecipanti), indicativa di un effetto pavimento: la maggior parte degli studenti ha risposto nello stesso modo, indicando una solida comprensione del significato dell'elemento neutro;
- non caricava significativamente su nessuno dei fattori: con soglia di visualizzazione a 0.30 non compariva nella matrice dei factor loadings, segno che le sue correlazioni con i fattori erano troppo basse per risultare significative.

Di conseguenza, l'item non contribuiva alla definizione di nessuna delle 3 nuove dimensioni e non avrebbe portato informazioni nel modello fattoriale.

Una volta estratti i fattori, è stata applicata una rotazione al fine di rendere la struttura più leggibile e facilitare l'interpretazione. Tra le diverse tipologie di rotazione disponibili, è stata adottata una rotazione obliqua.

Questa scelta è motivata dal fatto che le dimensioni investigate dal questionario (difficoltà cognitive, abitudini metodologiche e percezioni affettive) non possono essere considerate completamente indipendenti tra loro.

La rotazione obliqua infatti, a differenza di quella ortogonale, non impone l'assenza di correlazione tra i fattori e permette quindi una rappresentazione più realistica delle relazioni strutturali presenti nei dati. Il risultato della rotazione è una matrice dei caricamenti più chiara e interpretabile, in linea con il principio di *struttura semplice*, secondo cui ciascun item dovrebbe saturare fortemente un solo fattore e debolmente gli altri.

Capitolo 3

Risultati

Il dataset è stato elaborato partendo da 56 osservazioni, corrispondenti al numero di studenti che hanno completato il questionario. Come primo passo, è stata analizzata la distribuzione del campione in base all'esperienza formativa pregressa nei corsi di algebra astratta, utilizzando un grafico a torta per visualizzare le frequenze percentuali (3.1). I risultati hanno evidenziato che la stragrande maggioranza dei partecipanti (il 78%, pari a 44 studenti) aveva già superato il corso di “Aritmetica e Gruppi” (corso di algebra astratta del primo anno) e stava frequentando “Anelli e Campi” (corso di algebra astratta del secondo anno) per la prima volta. La quota di studenti che non aveva ancora sostenuto il primo esame di algebra astratta (18%) e quella di coloro che frequentavano il corso avanzato per la seconda volta o più (4%) era una percentuale minore. Questa distribuzione conferma che la maggioranza degli studenti ha già affrontato i fondamenti dell'algebra astratta, ma non ha ancora sviluppato una solida padronanza dell'intera disciplina. Il campione è quindi ideale per valutare le criticità che emergono durante la prima esposizione ai concetti avanzati.

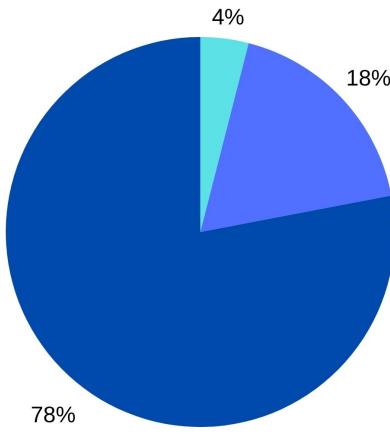


Figura 3.1: Esperienza formativa pregressa dell’algebra astratta

Passando poi alla prima fase di elaborazione dei risultati è stata eseguita una codifica dei dati. Le risposte fornite su scala Likert a 5 punti e su scala Frequenza a 5 punti sono state trasformate in valori numerici, dove il punteggio 5 rappresenta il massimo livello di accordo o la massima frequenza (es: Fortemente d’accordo/Sempre) e 1 rappresenta il minimo (es: Per niente d’accordo/Mai).

L’analisi descrittiva è stata eseguita con Excel e col software JASP per ottenere una panoramica della tendenza centrale e della dispersione delle risposte per ogni item, suddividendo i risultati in macro-sezioni tematiche come nella struttura del questionario. Per ciascuno dei 13 item sono state calcolate la media (\bar{x}), la deviazione standard (DS), la mediana e la moda. La media è stata utilizzata come indicatore principale della tendenza centrale, permettendo di identificare la diffusione di specifici errori concettuali o la frequenza di particolari abitudini di studio (ad esempio, una \bar{x} superiore a 3.5 ha indicato una tendenza all’accordo/alta frequenza).

Per una rappresentazione visiva sintetica e una comprensione immediata della tendenza delle risposte sono stati utilizzati tre distinti grafici a barre di frequenza forniti direttamente da Microsoft Forms al termine della compilazione del questionario (3.4). Tali grafici mostrano la distribuzione percentuale delle risposte per tutti gli item di ciascuna sezione in un’unica visualizzazione. Questa tipologia di rappresentazione permette di identificare immediatamente dove si concentra la maggior parte delle risposte per vedere se c’è un accordo, un disaccordo o un’incertezza su quel tema e per mettere a confronto questa tendenza tra item diversi. Si osserva così che le barre più lunghe sulle categorie “Sempre” o “Fortemente d’accordo” indicano la diffusione di un’abitudine o di un preconcetto.

I diagrammi a barre sono stati adottati anche per fornire una base per la successiva interpretazione analitica supportata dalle misure di tendenza centrale (media) e frequenza (moda).¹

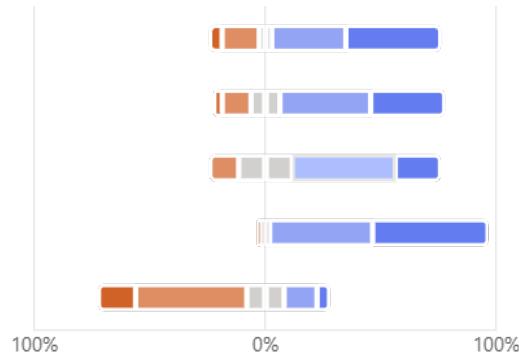


Figura 3.2: Risposte sezione 1

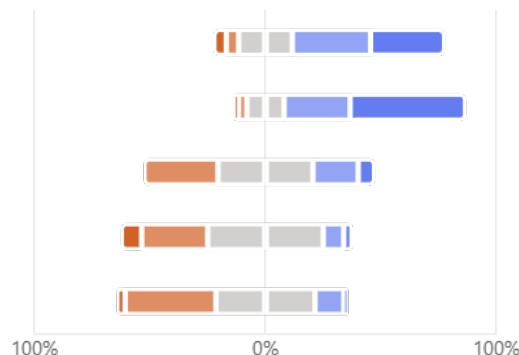


Figura 3.3: Risposte sezione 2

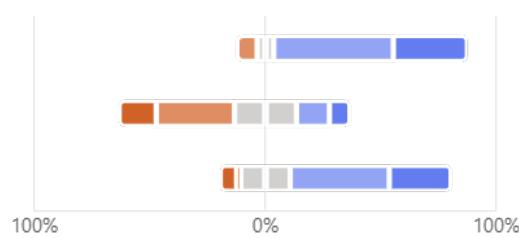


Figura 3.4: Risposte sezione 3

¹Per facilitare l'interpretazione visiva delle distribuzioni, è stato usato un gradiente cromatico progressivo. Le categorie che indicano il massimo consenso o frequenza (Forte-mente d'accordo/Sempre) sono rappresentate dal rosso, mentre quelle di minimo consenso o frequenza (Per niente d'accordo/Mai) sono rappresentate dal blu.

3.1 Analisi descrittiva dei risultati per sezione

3.1.1 Sezione 1

L'obiettivo della prima sezione del questionario è quello di misurare la presenza e la diffusione di specifici errori concettuali e preconcetti frequentemente riscontrati nell'apprendimento dell'algebra astratta. Gli item da q1 a q5 sono stati formulati come affermazioni che riflettono un'interpretazione errata o un'estensione impropria delle proprietà dei gruppi. Per l'interpretazione dei risultati, si è adottata la scala Likert a 5 punti trattata in modo che l'accordo dello studente corrisponda all'adesione all'errore concettuale. Tranne la domanda q5 (che misura la difficoltà percepita del gruppo quoziente), le altre affermazioni (q1 - q4) sono concettualmente sbagliate.

Una media bassa (vicina a 1) indica una corretta comprensione e, di conseguenza, il disaccordo con l'errore. Al contrario, una media alta (vicina a 5) indica un forte accordo con l'affermazione errata e, quindi, l'adesione all'errore concettuale.

Gli item q1 - q4 mostrano una tendenza al disaccordo (media inferiore a 2.5), suggerendo che gli studenti non aderiscono ampiamente a questi specifici preconcetti.

- q1 (Commutatività): Media 2.125 e mediana/moda vicino a 2.000 (In disaccordo). Indica un disaccordo generale con l'idea che l'operazione di un gruppo sia sempre commutativa. L'errore è meno diffuso di quanto si potesse temere.
- q2 (Elemento neutro) e q3 (Chiusura): Medie 2.161 e 2.286. Anche in questo caso, la tendenza è verso il disaccordo. Sebbene la chiusura (q3) sia leggermente più vicina al punto centrale (2.286) rispetto alla commutatività, la maggior parte degli studenti non la ritiene sempre vera senza verifica. Gli studenti dimostrano una solida comprensione e non aderiscono significativamente ai classici errori basati sull'estensione delle proprietà dei numeri reali.
- q4 (Sottogruppo): Con una media di 1.571 e una moda di 1.001 (Per niente d'accordo), questo item mostra il minore accordo. Gli studenti sembrano comprendere che un sottogruppo non è solo un sottoinsieme, ma una struttura completa di gruppo.
- q5 (Gruppo quoziente): Con una media alta di 3.554 e una moda/-mediana di 4.000 (Abbastanza d'accordo), questo è l'item con il più

alto punteggio di accordo. Questo risultato indica un forte consenso tra gli studenti sul fatto che il gruppo quoziente sia difficile da usare come base per ulteriori ragionamenti. Questo suggerisce che, mentre i preconcetti di base sono sotto controllo, i problemi sorgono quando l'argomento diventa più astratto e richiede manipolazione concettuale.

3.1.2 Sezione 2

La seconda sezione del questionario è stata progettata per indagare la frequenza con cui gli studenti adottano specifiche metodologie e abitudini di studio che, secondo la letteratura sulla didattica dell'algebra astratta, tendono a ostacolare il passaggio dal pensiero procedurale a quello strutturale. Gli item da q6 a q10 misurano la suscettibilità dei partecipanti a cadere nell'uso di strategie inappropriate, come l'eccessiva dipendenza dagli esempi concreti e la mancanza di rigore formale. Per questa sezione, la scala di risposta è basata sulla frequenza, dove i punteggi alti (vicini a 5, "Sempre") indicano una frequente messa in atto del comportamento o dell'approccio problematico, mentre i punteggi bassi (vicini a 1, "Mai") ne indicano la rara adozione.

- q6 (Rigore formale - Media 2.946): La media si posiziona esattamente al centro (mediana e moda a 3.000, "Qualche volta"). Questo indica che gli studenti sono molto incerti nell'applicare il rigore formale. A volte fanno attenzione a quantificatori come "per ogni" o "esiste", a volte no, il che suggerisce che il concetto di assioma non è stato completamente interiorizzato come regola universale e vincolante.
- q7 (Confusione assiomatica - Media 2.339): Con una media vicina al 2.000 (In disaccordo), la maggior parte degli studenti risponde che riesce a distinguere la differenza tra la definizione di elemento neutro e l'assioma di esistenza. Questo suggerisce che l'insegnamento ha avuto successo nello stabilire la distinzione base tra questi due elementi fondativi.
- q8 (Approccio procedurale - Media 3.536): La tendenza a concentrarsi più sulla formula/regola che sulle condizioni strutturali è marcata (moda 4.000). Questo si lega perfettamente a q9: la dipendenza dagli esempi porta a dare priorità alla procedura piuttosto che alla logica strutturale degli assiomi.
- q9 (Ancoraggio eccessivo - Media 4.179): Questo è il problema più diffuso e frequente dell'intero questionario, con una moda di 5.000 (Sempre). La stragrande maggioranza degli studenti dipende fortemente

dagli esempi concreti (numeri, matrici) per risolvere problemi astratti. Questo è un indicatore diretto di un blocco nel passaggio dal pensiero procedurale a quello strutturale.

- q10 (Ipergeneralizzazione - Media 3.679): La frequenza di generalizzare l'inverso dai numeri reali a strutture generiche è alta (moda 4.000), confermando che l'ancoraggio (q9) si traduce in una trasposizione impropria delle proprietà.

3.1.3 Sezione 3

La terza e ultima sezione è focalizzata sull'indagare la sfera affettiva e attitudinale, misurando la percezione degli studenti nei confronti della disciplina. Gli item q11 - q13 sono stati formulati per cogliere l'impatto emotivo (frustrazione o stimolo), la motivazione e la percezione della connessione dei contenuti. Per questi item, la scala Likert a 5 punti è interpretata nel modo standard: una media alta (vicina a 5, "Fortemente d'accordo") indica una forte adesione alla percezione espressa (ad esempio, alta frustrazione o forte richiesta di applicazione), mentre una media bassa (vicina a 1, "Per niente d'accordo") indica il rifiuto di tale percezione.

- q11 (Isolamento - Media 2.661): La media si posiziona molto vicino al punto centrale, 3.000 (Né d'accordo né in disaccordo), che è anche la moda. I partecipanti sono indecisi o divisi sulla percezione che l'algebra astratta sia una disciplina isolata. Circa un terzo è d'accordo, un terzo è neutrale e un terzo è in disaccordo. Questo suggerisce che le connessioni interdisciplinari non sono né esplicite né assenti; la percezione dipende dall'esperienza individuale.
- q12 (Esempi applicativi - Media 4.000): Questo item ha una media molto alta, pari a 4.000 (moda a 4.000), evidenziando una forte richiesta di vedere l'utilità e la rilevanza della materia. Gli studenti sono convinti che gli esempi applicativi aumenterebbero notevolmente il loro interesse.
- q13 (Frustrazione - Media 3.804): Con una media alta e una moda di 4.000 (Abbastanza d'accordo), gli studenti concordano in modo significativo sul fatto che la disciplina sia percepita come più frustrante e complessa che stimolante. Questo è un indicatore di forte disagio emotivo e cognitivo. La frustrazione è la diretta conseguenza dei blocchi procedurali e di astrazione rilevati nella sezione 2 (ancoraggio eccessivo, ipergeneralizzazione).

3.1.4 Conclusioni

- Conoscenze di base (Sezione 1): Solida, con pochi errori concettuali diffusi (medie basse per q1 - q4). Il solo punto critico è la difficoltà con il gruppo quoziante.
- Abilità di studio (Sezione 2): Debole, il problema principale è l'ancoraggio eccessivo agli esempi concreti che porta a problemi di ipergeneralizzazione.
- Atteggiamento (Sezione 3): Il corso è percepito come frustrante e c'è una forte richiesta di motivazione tramite le applicazioni.

3.2 Analisi fattoriale esplorativa

Dall'analisi della matrice dei factor loadings è emersa una chiara organizzazione delle variabili osservate in tre fattori principali.

Tutti gli item del questionario sono stati codificati in modo coerente prima dell'analisi: le domande con formulazione negativa sono state invertite (reverse coding), sostituendo il valore 1 con 5, 2 con 4, e viceversa, in modo che punteggi più alti indicassero sempre un livello maggiore di accordo o di difficoltà percepita nella stessa direzione semantica.

L'unico item che non è stato invertito è q12, mantenuto nella forma originale in quanto già orientato positivamente.

Gli item del questionario sono risultati concentrati attorno a tre dimensioni latenti che spiegano la maggior parte della varianza condivisa tra le risposte. Questa struttura a tre fattori conferma la presenza di più aspetti distinti all'interno del questionario, sebbene la distribuzione degli item non coincida esattamente con le tre categorie teoriche ipotizzate in fase di costruzione.

Tabella 3.1: Factor Loadings

	Fattore 1	Fattore 2	Fattore 3
q13_inv	0.613		
q5_inv	0.612		
q9_inv	0.573		
q12	-0.516		
q8_inv	0.428		0.361
q11_inv	0.359	0.323	
q3_inv		0.842	
q4_inv		0.574	
q1_inv		0.396	
q6_inv			0.621
q7_inv			0.523
q10_inv			0.467
q2_inv			

L’item q11 ha mostrato un carico ambiguo nella matrice dei factor loadings, con valori pari a 0.359 sul Fattore 1 e 0.323 sul Fattore 2, entrambi piuttosto bassi e tra loro molto simili. Nonostante ciò, l’item è stato incluso nel Fattore 1 sulla base di una chiara coerenza teorica.

La domanda, infatti, riguarda una dimensione affettiva e contestuale dell’esperienza dello studente, che non rappresenta un errore di tipo assiomatico (come quelli associati al Fattore 2), ma una variabile strettamente connessa alla frustrazione (q13) e alla percezione di difficoltà strutturale (q5).

Tali elementi, pur distinti, concorrono a definire un medesimo costrutto riconducibile al disagio emotivo e cognitivo che accompagna il mancato sviluppo del pensiero strutturale. L’inclusione dell’item q11 nel Fattore 1 consente pertanto di preservare la completezza concettuale del costrutto, che mira a rappresentare la complessiva esperienza dello studente nell’apprendimento dell’algebra astratta.

Un altro aspetto da commentare di questa tabella è il segno negativo dell’item q12. Sebbene l’item fosse stato progettato per misurare l’interesse per la disciplina, il quale è un aspetto positivo, l’analisi fattoriale ha rivelato che, nel campione analizzato, esso si comporta in modo opposto alla direzione del costrutto principale (padronanza cognitiva e atteggiamento positivo).

Infatti, gli studenti che mostrano maggiore padronanza e minore frustrazione (punteggi alti sugli altri item del fattore) tendono a non attribuire grande importanza agli esempi applicativi come fonte di motivazione, riportando quindi punteggi più bassi su q12. Ciò suggerisce che, per questi studenti,

l'interesse verso l'algebra astratta non dipende da fattori esterni, ma da una motivazione intrinseca. Viceversa, chi dichiara di aver bisogno di esempi applicativi per aumentare il proprio interesse sembra esprimere una difficoltà più profonda di padronanza o una distanza affettiva dal pensiero astratto. Il segno negativo del carico fattoriale riflette quindi una relazione inversa tra motivazione e padronanza strutturale: chi è già cognitivamente coinvolto non necessita di ulteriori stimoli esterni per mantenere l'interesse. Si tratta di un risultato coerente con la letteratura, in particolare con la *Self-Determination Theory* (Ryan & Deci, 2000), secondo la quale la motivazione autentica verso un'attività nasce da un interesse intrinseco e dal bisogno di competenza, più che da stimoli esterni o contestuali.

Tuttavia, quanto osservato per l'item q12 meriterebbe un approfondimento qualitativo, ad esempio tramite interviste, per chiarire la natura di questo legame tra padronanza concettuale e percezione dell'interesse.

KMO

Prima di procedere con l'analisi fattoriale esplorativa, è stato condotto il test di adeguatezza campionaria di Kaiser-Meyer-Olkin (KMO), che valuta la pertinenza dei dati per un'analisi fattoriale.

Questo indice misura il grado in cui le variabili osservate condividono una varianza comune, ovvero la forza delle correlazioni parziali tra le variabili. In generale, valori elevati di KMO indicano che le correlazioni tra le variabili sono sufficientemente consistenti e che l'analisi fattoriale può produrre risultati stabili e interpretabili; viceversa, valori bassi suggeriscono una struttura dei dati troppo frammentata o debole per essere ridotta a fattori latenti.

Nel presente studio, il valore complessivo ottenuto (Overall MSA = 0.618) rientra nella fascia di adeguatezza mediocre ma accettabile, secondo le soglie proposte da Kaiser (nel 1974), che considerano valori inferiori a 0.5 come inadeguati, compresi tra 0.5 e 0.7 come mediocri, e superiori a 0.7 come buoni.

Tabella 3.2: Kaiser-Meyer-Olkin Test

	MSA
Overall MSA	0.618
q10_inv	0.440
q11_inv	0.746
q12	0.563
q13_inv	0.695
q1_inv	0.610
q2_inv	0.650
q3_inv	0.589
q4_inv	0.531
q5_inv	0.724
q6_inv	0.562
q7_inv	0.610
q8_inv	0.678
q9_inv	0.537

Questo risultato indica che le correlazioni tra le variabili del questionario sono sufficientemente forti da consentire l'applicazione dell'EFA, pur osservando una moderata eterogeneità tra gli item.

A livello di singole variabili, i valori MSA (*Measure of Sampling Adequacy*) risultano generalmente compresi tra 0.53 e 0.74, con un valore massimo per l'item q11 (0.746) e minimo per q10 (0.440). Quest'ultimo valore segnala una minore integrazione dell'item q10 nella struttura complessiva, ma non tale da compromettere l'analisi nel suo insieme.

Complessivamente, il test KMO conferma la sufficiente adeguatezza del campione e delle correlazioni per procedere con l'analisi fattoriale esplorativa, giustificando l'estrazione dei fattori successiva.

Suddivisione nei 3 nuovi fattori

A seguito dell'analisi fattoriale esplorativa, le 13 domande (ridotte a 12 dopo l'esclusione dell'item q2, come spiegato nella sezione di metodologia di ricerca) si organizzano in tre fattori principali, ciascuno interpretabile come una dimensione distinta ma interconnessa dell'esperienza di apprendimento dell'algebra astratta. Ciascun fattore è stato denominato sulla base del significato teorico prevalente degli item che lo compongono.

- Fattore 1 - *Atteggiamento*

Comprende gli item q13, q5, q9, q12, q8 e q11. È il fattore più articola-

to e rappresenta la complessiva esperienza dello studente, combinando aspetti cognitivi e affettivi. Esso riflette sia la percezione soggettiva della difficoltà e della frustrazione, sia la capacità di affrontare la disciplina con un atteggiamento positivo e di padronanza. Gli item che lo compongono esprimono dunque un intreccio tra componente emotiva e competenza cognitiva, che insieme descrivono il grado di disagio o di fiducia percepito nello studio dell'algebra astratta.

- **Fattore 2 - *Ipergeneralizzazione***

Include gli item q3, q4 e q1. Questo fattore cattura le difficoltà strutturali di base legate a processi di ipergeneralizzazione e resistenza agli assiomi fondamentali della teoria dei gruppi. Esso raccoglie errori concettuali elementari ma persistenti, come l'estensione di proprietà note a contesti astratti non pertinenti, riflettendo una comprensione ancorata a modelli aritmetici intuitivi.

- **Fattore 3 - *Rigore formale***

Comprende gli item q6, q7 e q10. Questo fattore si concentra sulla padronanza del linguaggio formale e logico, e in particolare sulle difficoltà nell'applicazione rigorosa delle definizioni e degli assiomi.

Gli item associati a questa dimensione evidenziano la tendenza a trascurare la precisione logica o a fare affidamento su intuizioni procedurali piuttosto che su argomentazioni strutturate, segnalando fragilità nell'acquisizione del rigore richiesto dalla disciplina.

Correlazione tra i fattori

Tabella 3.3: Factor Correlations

	Factor 1	Factor 2	Factor 3
Factor 1	1.000	0.195	0.042
Factor 2	0.195	1.000	0.195
Factor 3	0.042	0.195	1.000

La matrice di correlazione tra i tre fattori (Tabella 3.3) mostra valori complessivamente molto bassi, con coefficienti compresi tra 0.042 e 0.195. Questi risultati indicano che le tre dimensioni individuate dall'analisi non risultano significativamente correlate tra loro, presentando correlazioni solo deboli e marginali.

Dal punto di vista interpretativo, ciò suggerisce che le tre tipologie di difficoltà o competenze rappresentano aspetti distinti e indipendenti dell'esperienza di apprendimento dell'algebra astratta. La presenza o l'assenza di difficoltà in una dimensione (ad esempio, di tipo affettivo o motivazionale) non implica necessariamente un miglioramento o peggioramento nelle altre (ad esempio, concettuale o formale).

Questa indipendenza fattoriale evidenzia come ciascun ambito richieda interventi didattici mirati e differenziati, poiché si tratta di difficoltà che non si compensano a vicenda. Da un punto di vista pedagogico, ciò suggerisce che l'insegnamento dell'algebra astratta debba riconoscere e trattare distintamente le componenti concettuali, metodologiche e affettive, adottando strategie mirate per ciascuna di esse.

Varianza

La tabella sulla varianza dei singoli fattori calcolata su Jasp riporta gli autovalori e la porzione di varianza spiegata da ciascun fattore, sia nella soluzione non ruotata sia in quella ruotata. Nella soluzione ruotata, il Fattore 1 spiega il 14.2% della varianza totale, il Fattore 2 il 12.9% e il Fattore 3 il 9.0%, per un totale cumulativo pari al 36.1% della varianza complessiva del questionario. Tale valore è pienamente in linea con le ricerche educative basate su questionari di tipo attitudinale o cognitivo, dove la complessità del fenomeno indagato e la presenza di dimensioni eterogenee riducono fisiologicamente la quota di varianza spiegata.

Dal punto di vista interpretativo, il Fattore 1 rappresenta la componente più rilevante e articolata, spiegando quasi la metà della varianza totale tra i tre fattori (circa il 19% nella soluzione non ruotata). Esso raccoglie il contributo combinato delle variabili affettive e di padronanza cognitiva, che costituiscono la parte più ampia dell'esperienza dello studente.

Il Fattore 2, pur composto da soli tre item, spiega una quota consistente (circa il 10%) grazie alla forte saturazione dell'item q3 (relativo alla proprietà di chiusura), che risulta particolarmente influente nel definire il costrutto di ipergeneralizzazione.

Il Fattore 3 contribuisce con un ulteriore 8 - 9% della varianza, rappresentando la dimensione del rigore formale.

Complessivamente, i tre fattori spiegano circa il 40% della varianza totale del questionario, indicando una struttura coerente ma non riduttiva, capace di catturare le principali dimensioni del fenomeno senza semplificarne eccessivamente la complessità.

La distribuzione della varianza conferma che le difficoltà emerse non si concentrano in un'unica dimensione, ma si articolano su più componenti distinte.

Questo risultato è coerente con quanto emerso dall’analisi delle correlazioni tra i fattori (sezione precedente), che ha mostrato una bassa interdipendenza tra le tre dimensioni individuate. Questo suggerisce che l’apprendimento dell’algebra astratta non si può strutturare su un solo aspetto, ma necessariamente su 3 dimensioni distinte, che coinvolgono aspetti concettuali, procedurali e affettivi.

Per una stima più accurata del contributo di ciascun item alla varianza complessiva del modello, è stata calcolata la comunalità, ovvero la quota di varianza condivisa tra ciascun item e i fattori comuni.

Abbassando la soglia di visualizzazione dei caricamenti fattoriali (“display loadings above”) a 0.0, è stato possibile includere anche le saturazioni minori, ottenendo una misura più precisa della varianza spiegata. I valori di comunalità risultano compresi tra 0.14 e 0.72. L’item q3 mostra la comunalità più alta (0.72), indicando una forte rappresentazione nel proprio fattore di riferimento (Ipergeneralizzazione). La maggior parte degli item presenta comunalità medie (0.3 – 0.4), suggerendo una buona coerenza interna e un contributo equilibrato alla varianza complessiva del questionario.

Gli item q1, q2 e q11 presentano valori di comunalità inferiori a 0.30, il che indica che la loro varianza non è ampiamente condivisa con la struttura fattoriale complessiva. In altre parole, questi item non si comportano in modo simile agli altri nelle risposte degli studenti e catturano aspetti più specifici o meno diffusi del fenomeno.

Tuttavia, la loro presenza nel modello è stata mantenuta perché ciascuno di essi risulta coerente con le dimensioni pedagogiche emerse dall’analisi e discusse nella letteratura. Questi item contribuiscono infatti a rappresentare sfumature importanti delle difficoltà degli studenti e anche se non si integrano con gli altri dal punto di vista statistico descrivono comunque difficoltà didattiche reali e rilevanti da un punto di vista teorico.

Nel complesso, la distribuzione delle comunalità conferma la presenza di una struttura multifattoriale coerente ma non riduttiva, in cui ciascun item contribuisce in misura differenziata alla rappresentazione complessiva del costrutto.

Tabella 3.4: Comunalità calcolate a partire dai Factor Loadings
(rotazione oblimin, soglia 0)

	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Comunalità (h^2)
q13_inv	0.613	0.102	0.154	0.41
q5_inv	0.612	0.191	-0.006	0.42
q9_inv	0.573	-0.190	-0.021	0.37
q12	-0.516	0.261	0.231	0.40
q8_inv	0.428	0.095	0.361	0.32
q11_inv	0.359	0.323	-0.095	0.25
q1_inv	0.274	0.396	-0.109	0.25
q7_inv	0.151	0.062	0.523	0.30
q2_inv	0.104	0.284	0.194	0.14
q6_inv	-0.104	0.041	0.621	0.40
q4_inv	0.094	0.574	-0.142	0.36
q10_inv	0.072	-0.285	0.467	0.31
q3_inv	-0.029	0.842	0.066	0.72

La comunalità di ciascun item è stata calcolata come la somma dei quadrati dei suoi caricamenti sui fattori estratti, secondo la formula:

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^m (\lambda_{ij})^2.$$

dove λ_{ij} è il caricamento fattoriale dell'item i sul fattore j e m (nel nostro caso $m = 1, 2, 3$) è il numero di fattori estratti.

Essa rappresenta la quota di varianza dell'item spiegata dalla struttura fattoriale comune.

Alpha di Cronbach

Per verificare se le domande appartenenti a ciascun fattore misurano la medesima difficoltà, ho calcolato l'indice di affidabilità interna (α di Cronbach) tramite Jasp. Questo valore indica quanto gli item di un fattore “lavorano insieme” per descrivere un unico costrutto.

Valori più alti indicano maggiore coerenza. Nei questionari educativi, valori intorno a 0.60 - 0.70 sono considerati adeguati e interpretabili.

Prima del calcolo tutti gli item sono stati invertiti (reverse coding), incluso l'item q12, che è stato trattato analogamente agli altri.

Tabella 3.5: Affidabilità interna dei tre fattori (α di Cronbach)

Fattore	α
Fattore 1: Atteggiamento	0.680
Fattore 2: Ipergeneralizzazione	0.625
Fattore 3: Rigore formale	0.543

Il valore ottenuto per il Fattore 1 è pari a 0.68, con intervallo di confidenza del 95% compreso tra 0.55 e 0.81. Tale valore, pur non elevato, risulta adeguato in un contesto esplorativo e riflette la natura composita del fattore, che integra sia aspetti cognitivi legati alla padronanza strutturale sia componenti affettive e motivazionali.

L’analisi “ α if item dropped” mostra che l’eliminazione dell’item q12 comporterebbe un lieve incremento dell’affidabilità ($\alpha = 0.70$), indicando una minore coerenza statistica di questo item con gli altri. Tuttavia, q12 è stato mantenuto nel modello in quanto concettualmente rilevante: esso intercetta la dimensione dell’interesse verso la disciplina, che rappresenta una componente fondamentale dell’esperienza dello studente e non è riducibile agli altri item del fattore.

Per il Fattore 2 (Ipergeneralizzazione) l’indice α di Cronbach risulta pari a 0.625, con intervallo di confidenza del 95% compreso tra 0.42 e 0.83. Tale valore, pur moderato, è considerato adeguato in un contesto esplorativo, in particolare alla luce del numero ridotto di item che compongono il fattore (solamente 3).

L’analisi “ α if item dropped” mostra che l’eliminazione dell’item q3 comporterebbe una netta diminuzione dell’affidabilità ($\alpha = 0.49$), indicando che q3 rappresenta l’item centrale nella definizione del costrutto. È interessante osservare come il ruolo centrale dell’item q3 emerga in modo coerente sia nell’analisi fattoriale sia nell’analisi di affidabilità interna. Da un lato, q3 presenta il caricamento fattoriale più elevato sul Fattore 2, risultando l’item più rappresentativo del costrutto di ipergeneralizzazione. Dall’altro, l’analisi “ α if item dropped” mostra che la sua eliminazione comporterebbe una diminuzione significativa dell’affidabilità della scala ($\alpha = 0.49$).

Gli item q1 e q4 contribuiscono in modo coerente al fattore, come suggerito dalle rispettive correlazioni item-rest (0.43 e 0.52).

Complessivamente, il Fattore 2 risulta internamente consistente e riflette una forma specifica di difficoltà legata all’ipergeneralizzazione di proprietà strutturali, tipica degli studenti nella fase iniziale di apprendimento dell’algebra astratta.

Il Fattore 3 (Rigore formale) ha un indice α di Cronbach pari a 0.54, con intervallo di confidenza del 95% compreso tra 0.27 e 0.82. Tale valore risulta inferiore rispetto agli altri fattori, ma è in linea con quanto ci aspettavamo considerando che il fattore è anch'esso composto da soli tre item e che essi descrivono aspetti distinti, seppur correlati.

L'analisi “ α if item dropped” mostra che l'eliminazione dell'item q7 comporterebbe un marcato peggioramento dell'affidabilità, indicando che q7 rappresenta l'elemento centrale del costrutto. Gli item q6 e q10, pur contribuendo al fattore, rilevano difficoltà più eterogenee, riflettendo una variabilità maggiore nei modi in cui gli studenti incontrano ostacoli legati alla formalizzazione. Questo risultato indica che la difficoltà legata al rigore formale non emerge come un ostacolo unico e compatto, ma come una serie di punti di debolezza specifici, che si manifestano in modo diverso tra gli studenti e riguardano aspetti distinti del linguaggio matematico.

Statistiche descrittive dei nuovi fattori

Dopo l'EFA e la definizione dei tre fattori emersi dall'analisi dei dati, è stata condotta un'analisi descrittiva per esaminare la distribuzione delle risposte relative a ciascun fattore.

L'obiettivo di questa sezione è quello di valutare il grado medio di difficoltà percepita dagli studenti in relazione alle tre dimensioni individuate e di determinare quale di esse rappresenti l'aspetto più problematico nell'apprendimento dell'algebra astratta.

Per garantire la coerenza con l'analisi descrittiva presente all'inizio del capitolo 4, le statistiche sono state calcolate utilizzando i punteggi non invertiti degli item. Per ciascun fattore sono stati considerati la media, la deviazione standard, il minimo e il massimo.

Tabella 3.6: Medie complessive dei tre fattori individuati

Fattore	Media complessiva
Fattore 1	2.88
Fattore 2	1.99
Fattore 3	2.42

Il Fattore 1 (“Atteggiamento”), composto dagli item q5, q9, q8, q12, q13 e q11, presenta una media complessiva pari a 2.88. Tale valore si colloca leggermente al di sotto della soglia centrale, indicando che gli studenti non mostrano un'elevata percezione di padronanza concettuale né un atteggiamento pienamente positivo nei confronti della disciplina. Le deviazioni standard,

comprese tra 0.87 e 1.18, segnalano una variabilità piuttosto elevata, suggerendo che il livello di fiducia e coinvolgimento verso l'algebra astratta varia sensibilmente da studente a studente. Complessivamente, il fattore riflette un equilibrio instabile tra comprensione cognitiva ed esperienza emotiva, dove l'interesse e la sicurezza concettuale coesistono con elementi di incertezza e frustrazione.

Il Fattore 2 (“Ipergeneralizzazione”), composto dagli item q3, q4 e q1, presenta una media complessiva pari a 1.99, con deviazioni standard comprese tra 0.65 e 1.27. Il valore medio, nettamente inferiore alla soglia centrale della scala, suggerisce che la maggior parte degli studenti non manifesta in modo sistematico gli errori concettuali di ipergeneralizzazione, come l'assunzione implicita della commutatività o la confusione tra proprietà e assiomi.

Tuttavia, la variabilità delle risposte (in particolare nell'item q1, che mostra la deviazione standard più alta) indica che una parte del campione mantiene ancora concezioni poco formalizzate, tipiche delle prime fasi di transizione dal pensiero procedurale a quello strutturale. Complessivamente, il fattore mostra una distribuzione asimmetrica, con prevalenza di studenti che hanno superato le misconcezioni di base ma con una minoranza che ancora fatica ad abbandonare modelli operativi elementari.

Il Fattore 3 (“Rigore formale”), costituito dagli item q6, q7 e q10, presenta una media complessiva pari a 2.42 e deviazioni standard comprese tra 0.81 e 1.11. Questo fattore indaga la capacità degli studenti di gestire il linguaggio assiomatico e di applicare le definizioni in modo formalmente corretto.

Il valore medio, leggermente inferiore alla soglia centrale, suggerisce che gli studenti non percepiscono gravi difficoltà esplicite, ma evidenziano comunque fragilità localizzate nella comprensione dei quantificatori e nella distinzione tra enunciati generali e casi particolari. L'item q10 (“Generalizzo spesso il concetto di inverso dagli elementi numerici...”) mostra la media più alta, indicando una tendenza persistente a confondere i registri operativi e strutturali. Questi dati suggeriscono che il rigore formale rappresenta una dimensione di difficoltà meno vistosa ma più profonda, legata alla capacità di formalizzare concetti in contesti astratti.

Il confronto tra i tre fattori mostra che il valore medio più alto si registra nel Fattore 1 (Atteggiamento), indicandolo come l'ambito di maggiore criticità percepita dagli studenti.

Seguono il Fattore 3 (Rigore formale) e infine il Fattore 2 (Ipergeneralizzazione), che risulta il meno problematico nel campione.

Questa distribuzione conferma che le difficoltà principali non risiedono tanto nella comprensione delle definizioni di base, quanto nella gestione complessiva dell'esperienza cognitiva ed emotiva legata alla disciplina, cioè nel passaggio da una conoscenza procedurale a una strutturale.

In altri termini, gli studenti mostrano di aver interiorizzato gran parte delle nozioni concettuali fondamentali, ma faticano a mantenere un atteggiamento stabile di padronanza e fiducia nell'utilizzo dei concetti astratti.

Capitolo 4

Discussione dei risultati

Il presente capitolo discute criticamente i risultati dell’analisi descrittiva e fattoriale (cfr. 3), mettendoli in relazione con la letteratura accademica sull’apprendimento dell’algebra astratta e con le due domande di ricerca che hanno guidato il lavoro.

Per rispondere alla prima domanda di ricerca, “*Quali sono le principali difficoltà concettuali ricorrenti e le relative strategie di ragionamento inappropriate manifestate dagli studenti?*”, è utile analizzare criticamente ciò che emerge dai risultati del questionario confrontandoli con gli studi presenti in letteratura.

Un primo elemento rilevante riguarda gli aspetti fondamentali della teoria dei gruppi. Nel campione analizzato, gli studenti mostrano una buona padronanza delle nozioni di base: la non commutatività dell’operazione, il ruolo dell’elemento neutro e la distinzione tra sottoinsieme e sottogruppo risultano generalmente ben compresi. Le medie molto basse associate agli item q1–q4 indicano, infatti, un netto disaccordo verso alcune misconcezioni classiche che, secondo diversi studi, tendono a manifestarsi con frequenza nei corsi introduttivi di algebra astratta.

Questo risultato è particolarmente interessante se confrontato con quanto riportato da Veith et al. (2024), i quali osservano che gli studenti spesso incontrano difficoltà anche su aspetti estremamente elementari, come l’identificazione dell’elemento neutro e dell’inverso, soprattutto quando si passa dai contesti numerici classici alle strutture più astratte.

Gli autori mostrano come l’abbandono di esempi concreti, ad esempio $(\mathbb{Z}, +)$, possa generare errori persistenti nella gestione di concetti considerati basilari. Nel mio campione, al contrario, tali difficoltà risultano meno diffuse, suggerendo che gli studenti dell’Università di Bologna possano aver sviluppato una padronanza preliminare più solida rispetto a quella documentata

in altri contesti.

Anche gli studi di Hazzan (1999), che mettono in evidenza come l'elevato livello di astrazione dell'algebra porti frequentemente a confondere proprietà specifiche degli esempi concreti con proprietà generali delle strutture, riportano una maggiore presenza di errori concettuali di base rispetto a quanto osservato nei dati raccolti in questo studio. Il confronto con queste ricerche rafforza l'idea che gli studenti analizzati possiedano, nella fase iniziale dell'apprendimento dell'algebra astratta, una preparazione concettuale più stabile del previsto.

Tuttavia, pur mostrando una buona padronanza dei concetti fondamentali, gli studenti incontrano difficoltà più marcate negli aspetti metodologici e nei processi di astrazione di livello superiore. È qui che il quadro cambia in modo significativo e che emergono le criticità più profonde della loro esperienza di apprendimento.

Gli item della seconda sezione del questionario, dedicati alle strategie di ragionamento e alle abitudini metodologiche, presentano medie nettamente più elevate e rivelano problemi più radicati che si collocano al cuore della transizione dal pensiero procedurale al pensiero strutturale.

L'ostacolo più evidente riguarda l'ancoraggio agli esempi concreti (q9), che ottiene il punteggio medio più alto dell'intero strumento (4.179). Questo risultato è pienamente coerente con un'ampia tradizione di studi che identifica la dipendenza da contesti familiari come uno dei principali impedimenti allo sviluppo del pensiero strutturale (Hazzan, 1999; Selden & Selden, 2003).

Gli studenti faticano a svincolare il proprio ragionamento dalle strutture note, tendendo a ricondurre problemi astratti a schemi già incontrati nell'aritmetica o nella geometria elementare.

Una dinamica molto simile emerge anche nel lavoro di Veith et al. (2022), che analizza l'apprendimento delle classi laterali attraverso attività basate sull'embodiment: sebbene tali attività siano progettate per favorire l'astrazione, molti studenti restano concentrati sulla manipolazione concreta degli oggetti piuttosto che sulle relazioni strutturali che essi intendono modellizzare. Questo parallelismo con il mio campione è significativo: suggerisce che, anche in presenza di approcci didattici innovativi, l'ancoraggio al concreto rimane una strategia cognitiva spontanea e profondamente radicata.

Accanto a questa tendenza emerge un secondo elemento critico: l'approccio procedurale (q8). Molti studenti mostrano una preferenza per regole, formule e algoritmi a scapito della comprensione delle condizioni strutturali che li giustificano. Si tratta di un fenomeno ampiamente descritto nella letteratura sul pensiero matematico avanzato (Biza & Nardi, 2023), secondo cui l'“operazionalizzazione”, ossia il mantenere l'attenzione sul livello operativo senza fare il salto verso le relazioni astratte, costituisce un ostacolo ricorrente

nel passaggio al ragionamento assiomatico.

Un ulteriore problema riguarda l'ipergeneralizzazione (q10), ovvero la tendenza a trasferire erroneamente proprietà tipiche di insiemi noti, come i numeri reali, ad altri contesti strutturali. Questo genere di criticità è coerente con i risultati di Dubinsky e McDonald (2001) e Leron e Dubinsky (1995), che interpretano tali fenomeni come tracce del pensiero aritmetico, non ancora riorganizzato in termini strutturali.

Infine, il rigore formale (q6) mostra una certa fragilità: l'interpretazione dei quantificatori e delle condizioni logiche risulta incerta, molti studenti faticano a cogliere il carattere generale delle proprietà astratte coinvolte nelle definizioni e nelle dimostrazioni.

Nel loro insieme, questi risultati suggeriscono che il campione non presenta gravi misconcezioni elementari ma incontri difficoltà ben più marcate nelle abilità di ordine superiore richieste dall'algebra astratta. I risultati sono coerenti con le evidenze internazionali relative alle difficoltà avanzate, deviano invece dalle interpretazioni che enfatizzano i preconcetti elementari, che nel presente campione appaiono molto meno rilevanti.

Si può quindi affermare, rispetto alla prima domanda di ricerca, che gli studenti incontrano soprattutto difficoltà legate alla transizione dal pensiero procedurale al pensiero strutturale.

Le strategie di ragionamento inappropriate più diffuse riguardano l'ancoraggio agli esempi concreti, l'ipergeneralizzazione e la dipendenza da procedure operative. Al contrario, gli errori concettuali di base risultano meno pervasivi del previsto, delineando un profilo di difficoltà che caratterizza la fase di passaggio verso una comprensione strutturale e formalizzata dell'algebra astratta.

Passando alla seconda domanda di ricerca, “*In che misura il vissuto emotivo e la percezione di isolamento della materia sono correlati alle difficoltà concettuali e metodologiche manifestate dagli studenti?*”, i risultati mostrano che gli aspetti affettivi e motivazionali giocano un ruolo significativo nel modo in cui gli studenti vivono l'algebra astratta.

Nel questionario, gli item q11, q12 e q13 sono stati pensati per esplorare tre componenti della dimensione affettivo-motivazionale: percezione di isolamento, richiesta di applicazioni e livello di frustrazione. L'analisi fattoriale esplorativa indica che questi item convergono tutti nel Fattore 1 (Atteggiamento), insieme ad altri relativi alla percezione di padronanza e alla capacità di orientarsi nello studio.

Questa configurazione si allinea con la nozione di *atteggiamento verso la matematica* proposta da Zan e Di Martino (Di Martino & Zan, 2010; Zan, Di Martino et al., 2007), i quali definiscono l'atteggiamento come un costrutto

composto da tre componenti correlate:

- la visione della matematica;
- le emozioni associate;
- il senso di auto-efficacia.

Alla luce di questa prospettiva, il raggruppamento degli item emotivi, motivazionali e cognitivi in un unico fattore non appare casuale, ma riflette un unico nucleo attitudinale. Gli studenti non percepiscono emozioni, convinzioni e giudizi sulle proprie competenze come aspetti distinti, bensì come parti di una stessa configurazione che orienta il loro modo di affrontare l'algebra astratta.

Assumendo questa chiave interpretativa, è possibile analizzare i singoli elementi che compongono l'atteggiamento emerso.

Un primo aspetto rilevante è l'elevato livello di frustrazione riportato dagli studenti (q13). Molti descrivono lo studio dell'algebra astratta come faticoso e scoraggiante, in accordo con quanto osservato in vari studi presenti nella letteratura (Biza & Nardi, 2023; Hausberger, 2023).

Nel nostro campione, tali emozioni negative risultano collegate a difficoltà concettuali come la dipendenza dagli esempi concreti e l'incertezza nel rigore formale.

Questo quadro è coerente con i modelli di Goldin (2000) e con gli studi di Hazzan (1999, 2001), secondo cui difficoltà nell'acquisire l'astrazione possono generare smarrimento e insicurezza.

Un secondo elemento riguarda la richiesta di esempi applicativi (q12), interpretabile come una strategia per ridurre la distanza percepita tra formalismo e intuizione. Tale esigenza, ampiamente riconosciuta in letteratura (Soto et al., 2024), evidenzia il bisogno di rendere più esplicativi i collegamenti tra concetti astratti e i loro significati, mostrando come definizioni ed esempi concreti si uniscano tra loro nella struttura algebrica studiata.

Il terzo aspetto riguarda la percezione di isolamento disciplinare (q11), il cui profilo eterogeneo (le risposte del questionario risultano distribuite in modo equilibrato tra accordo e disaccordo) è coerente con studi che sottolineano come tale percezione dipenda fortemente dalle scelte didattiche e dal tipo di attività proposte.

Ad esempio, *How Mathematicians Assign Homework Problems in Abstract Algebra*, (Rupnow et al., 2021) mostra che esercizi eccessivamente astratti e poco legati ad esempi reali possono rafforzare la sensazione di lontananza rispetto alla matematica “concreta”.

A livello interpretativo, l'elemento centrale è la struttura interna del Fattore

Atteggiamento: frustrazione, percezione di isolamento e richiesta di applicazioni si intrecciano con la capacità/difficoltà di affrontare concetti astratti, riconoscere relazioni strutturali e gestire il rigore formale. Ciò delinea una configurazione attitudinale in cui componenti emotive e cognitive risultano profondamente interconnesse.

È però importante distinguere questa dinamica interna alla struttura del Fattore 1 dal comportamento generale del modello: l'assenza di correlazioni significative tra i fattori emersi dell'analisi fattoriale esplorativa indica che tale integrazione non può essere estesa all'intera struttura. Non emerge infatti una relazione diretta tra la dimensione cognitiva (Fattore 2) e quella emotivo-motivazionale a livello globale.

Si ottiene quindi un quadro in cui l'interazione tra vissuto emotivo e aspetti cognitivi emerge come una caratteristica specifica della dimensione descritta dal Fattore *Atteggiamento*.

Capitolo 5

Conclusioni

Il presente lavoro ha indagato le difficoltà concettuali, metodologiche ed emotive che caratterizzano l'apprendimento dell'algebra astratta in un corso universitario del secondo anno della laurea triennale in matematica.

Attraverso la costruzione, somministrazione e analisi psicometrica del questionario è stato possibile individuare i principali ostacoli ricorrenti e le aree in cui gli studenti avvertono una maggiore distanza rispetto al livello di astrazione richiesto dalla disciplina.

I risultati hanno mostrato che, se da un lato gli studenti possiedono una buona padronanza delle nozioni fondamentali (come il ruolo dell'elemento neutro o la distinzione tra sottoinsieme e sottogruppo), dall'altro incontrano difficoltà significative nelle competenze di ordine superiore, in particolare nel passaggio dal pensiero procedurale al pensiero strutturale.

Parallelamente, è emerso un legame significativo tra le difficoltà cognitive e il vissuto emotivo: frustrazione, percezione di isolamento disciplinare e richiesta di applicazioni non costituiscono fenomeni separati, ma interagiscono direttamente con i processi di elaborazione concettuale messi in atto dagli studenti.

5.1 Implicazioni didattiche

I risultati ottenuti suggeriscono alcune indicazioni utili per la progettazione dei corsi di algebra astratta per sostenere la transizione degli studenti verso forme di pensiero più astratte e strutturali.

Un primo aspetto riguarda il ruolo delle applicazioni. La richiesta, espressa da una parte consistente degli studenti, di vedere esempi d'uso o collegamenti con altri ambiti della matematica va interpretata come un bisogno cognitivo di ancorare i concetti astratti a strutture note.

Le applicazioni non dovrebbero essere presentate come elementi accessori e marginali, ma integrate in modo consapevole nel percorso didattico, affinché contribuiscano a mettere in luce le proprietà strutturali degli oggetti studiati. Esperienze didattiche riportate in contesti accademici, come lezioni dedicate alla crittografia per illustrare l'uso dei gruppi e degli anelli nei protocolli di sicurezza, mostrano che l'introduzione mirata di applicazioni può aumentare in modo significativo il coinvolgimento degli studenti e rafforzare la comprensione concettuale. Tali interventi, se progettati in continuità con il percorso teorico, possono funzionare come veri e propri *ponti cognitivi*, contribuendo a colmare la distanza percepita tra l'algebra astratta e i contesti matematici da cui gli studenti provengono, sostenendo progressivamente il passaggio verso forme più elevate di astrazione.

A questo punto può emergere un'apparente contraddizione: da un lato gli studenti richiedono più applicazioni, dall'altro faticano ad allontanarsi dagli esempi particolari, come evidenziato dall'elevato punteggio dell'item q9.

Gli esempi noti, quando sono l'unico riferimento mentale per lo studente, possono ostacolare la generalizzazione e impedire il passaggio al pensiero strutturale. Le applicazioni ben progettate, invece, non mirano a sostituire l'astrazione con casi concreti; mostrano piuttosto perché le strutture astratte sono significative, offrendo un ancoraggio concettuale che aiuti a comprendere le proprietà degli oggetti trattati. Applicazioni e “disancoraggio” non sono quindi in contrasto ma rispondono ad esigenze diverse, contribuendo entrambi allo sviluppo del pensiero strutturale.

In questa prospettiva, risultano particolarmente efficaci le attività di *bridging*, strategie didattiche che facilitano un passaggio graduale dalle conoscenze acquisite ai nuovi oggetti astratti. L'idea centrale è quella di rendere esplicite le trasformazioni che avvengono nel passaggio da un contesto numerico/noto a uno strutturale, mostrando quali proprietà si conservano, quali si modificano e perché (Balacheff (2009); Soto et al. (2024)).

Attraverso confronti guidati e situazioni che incoraggiano un progressivo distacco dalle rappresentazioni più automatiche, il *bridging* facilita la ristrutturazione delle conoscenze pregresse e chiarisce la transizione dai contesti matematici iniziali ai livelli più astratti richiesti dall'algebra.

Queste attività possono contribuire a rendere più esplicito ciò che effettivamente cambia quando si passa da un contesto numerico a uno strutturale, e quali aspetti, invece, restano invariati.

Un ulteriore tema riguarda il sostegno allo sviluppo del rigore formale, in particolare nella gestione dei quantificatori e delle condizioni logiche che sottendono definizioni e dimostrazioni. Le oscillazioni osservate nelle risposte suggeriscono che molti studenti non dispongono ancora di un controllo stabile di questi strumenti, percepiti come elementi tecnici e poco motivati.

Interventi didattici che rendano più trasparente la struttura logica, come attività basate sull’investigazione (*Inquiry-Based Learning*, Laursen e Rasmussen (2019)), dimostrazioni guidate, costruzione di esempi e controesempi ed esercizi che richiedono di riformulare una definizione, possono favorire un’elaborazione più profonda.

Infine, l’intreccio tra difficoltà cognitive e vissuti emotivi rilevato dall’analisi fattoriale suggerisce che anche la dimensione affettiva meriti attenzione didattica. Diversi studi in didattica della matematica mostrano che la frustrazione, se non adeguatamente riconosciuta, tende ad amplificare le difficoltà concettuali; al contrario, un ambiente che permette agli studenti di esplorare, sbagliare e riformulare le proprie strategie può contribuire a ridurre l’ansia associata all’astrazione. Questo risultato è infatti coerente con le evidenze riportate da Boaler (2022), secondo cui contesti didattici collaborativi e non giudicanti favoriscono un clima emotivo più sereno e sostengono una maggiore disponibilità ad affrontare compiti matematici complessi.

In questo quadro, momenti di discussione collettiva, revisioni ragionate degli errori e forme di valutazione che valorizzino il processo più che il prodotto possono favorire un rapporto più sereno e produttivo verso la disciplina.

5.2 Limiti della ricerca

Come ogni indagine esplorativa, anche questo studio presenta alcune limitazioni che è opportuno esplicitare per contestualizzare i risultati ottenuti e delineare con maggiore precisione la loro portata interpretativa.

Un primo limite riguarda la dimensione del campione: i 56 studenti coinvolti rappresentano un gruppo numericamente ridotto. Pur offrendo indicazioni significative, soprattutto in relazione alle tendenze ricorrenti nella letteratura, questa numerosità non consente di estendere i risultati a popolazioni più ampie senza adeguate cautele.

Un’ulteriore limitazione è legata al fatto che la ricerca è stata condotta all’interno di un unico ateneo, quello dell’Università di Bologna.

È plausibile che differenze nei curricula, nell’impostazione dei corsi, nelle pratiche didattiche o nelle modalità di valutazione possano generare configurazioni diverse in altre istituzioni accademiche. Di conseguenza, i risultati riflettono inevitabilmente le caratteristiche specifiche del contesto analizzato. Occorre inoltre considerare la natura autovalutativa del questionario: gli studenti hanno espresso giudizi soggettivi sulle proprie difficoltà e sul proprio vissuto emotivo. Sebbene tali percezioni costituiscano un indicatore prezioso del modo in cui gli studenti vivono l’algebra astratta, non sempre coincidono con le loro competenze effettive.

A questo si aggiunge una criticità legata a uno degli item del questionario. L'item q12, relativo alla richiesta di applicazioni, ha mostrato un comportamento atipico nella matrice dei factor loadings per la sua presenza di un caricamento negativo all'interno del fattore in cui è confluito.¹

Questo risultato suggerisce una possibile incoerenza statistica nella sua formulazione rispetto alla direzione del costrutto misurato. In studi futuri sarebbe interessante riformulare l'item, così da garantirne un allineamento più chiaro con la struttura latente dello strumento.

Infine, lo studio non ha potuto contare su dati qualitativi come interviste, think-aloud o osservazioni delle pratiche di studio degli studenti. L'assenza di questo tipo di materiale riduce la possibilità di esplorare in profondità i processi cognitivi e le strategie di ragionamento sottostanti alle risposte fornite nel questionario.

Nel complesso, questi limiti non invalidano i risultati ottenuti, ma invitano a considerarli come un primo passo all'interno di un percorso di indagine più ampio, che potrà beneficiare di campioni più estesi, strumenti affinati e una integrazione sistematica con dati qualitativi.

5.3 Possibili sviluppi futuri

I risultati ottenuti aprono la strada a numerose possibilità di approfondimento, sia sul piano teorico sia sul piano metodologico.

Alcune direzioni di sviluppo appaiono particolarmente promettenti e potrebbero contribuire in modo significativo alla comprensione delle difficoltà legate all'apprendimento dell'algebra astratta.

Un primo percorso riguarda la realizzazione di studi longitudinali, mirati a osservare l'evoluzione delle difficoltà concettuali ed emotive nel passaggio dal primo anno universitario ai corsi avanzati di algebra. Un monitoraggio nel tempo permetterebbe di comprendere quali ostacoli tendono a consolidarsi, quali si attenuano spontaneamente e quali, invece, richiedono un intervento didattico mirato.

Un secondo sviluppo consiste nel confrontare differenti contesti universitari, ampliando l'indagine a più corsi e istituzioni. Un'analisi comparativa tra diversi insegnamenti, curricula e impostazioni didattiche consentirebbe di identificare quali caratteristiche del corso incidono maggiormente sull'emergere delle difficoltà. Una tale comparazione renderebbe più robusta la generalizzabilità dello strumento e dei risultati.

¹In un'analisi fattoriale esplorativa, un loading negativo indica che l'item varia in direzione opposta rispetto al fattore: valori alti dell'item corrispondono a valori bassi del fattore, e viceversa.

Un terzo filone prevede l'integrazione di metodologie qualitative, in particolare le interviste cognitive e i protocolli think-aloud. Quest'ultimo approccio, largamente utilizzato nella ricerca in didattica della matematica, prevede che gli studenti “pensino ad alta voce” mentre risolvono un problema o riflettono su un concetto, permettendo al ricercatore di osservare direttamente i processi di ragionamento, le incertezze e le strategie spontanee.

Infine, i risultati di questo lavoro possono costituire la base per la costruzione di una scala validata, psicomericamente solida, per la misurazione delle difficoltà specifiche dell'algebra astratta. L'attuale questionario rappresenta un primo passo in questa direzione, ma ulteriori fasi di validazione (tra cui l'inclusione di campioni più ampi e contesti differenti) permetterebbero di rendere lo strumento più preciso e affidabile.

Nel complesso, questi sviluppi futuri consentirebbero di perfezionare lo strumento di indagine e di approfondire la natura delle difficoltà che gli studenti incontrano nel passaggio al pensiero strutturale, contribuendo così alla progettazione di percorsi didattici più efficaci e consapevoli.

Appendice A

Struttura Questionario

Qual è la tua attuale esperienza formativa nei corsi di algebra astratta?

- Ho superato l'esame di "Aritmetica e Gruppi" e sto frequentando per la prima volta il corso "Anelli e Campi"
- Non ho ancora sostenuto l'esame di "Aritmetica e Gruppi"
- Sto frequentando per la seconda volta (o più) il corso "Anelli e Campi"

Pensiero strutturalista e rigore formale

Scala Likert da *Fortemente d'accordo* a *Per niente d'accordo*.

1. Posso assumere che, a meno che non sia specificato diversamente, l'operazione di un gruppo sia sempre commutativa.
2. L'elemento neutro in ogni gruppo è sempre il numero 1 (per la moltiplicazione) o il numero 0 (per l'addizione), non ne esistono altri.
3. La proprietà di chiusura è quasi sempre vera nei problemi di algebra astratta; quindi, non è necessario verificarla in modo formale.
4. Un sottogruppo è essenzialmente un sottoinsieme; non è necessario pensarla come una struttura di gruppo completa a sé stante.
5. Dopo aver costruito il gruppo quoziante ho trovato difficile usarlo come punto di partenza per ulteriori ragionamenti o per definire nuove proprietà.

Comprensione del linguaggio e degli assiomi

Scala Likert da *Sempre a Mai*.

6. Nello studio degli assiomi, do per scontato che una proprietà (es. l'inverso) valga per tutti gli elementi del gruppo, senza prestare particolare attenzione ai termini “per ogni” o “esiste”.
7. Non riesco a distinguere chiaramente la differenza tra la definizione dell'elemento neutro e l'assioma che ne richiede l'esistenza in un gruppo.
8. Mi concentro più sulla formula algebrica di un concetto (es. la regola) che sulle condizioni strutturali per cui è valida.
9. Trovo che rimanere ancorato agli esempi concreti (es. numeri, matrici) sia la strategia più efficace per risolvere i problemi astratti.
10. Generalizzo spesso il concetto di inverso dagli elementi numerici (es. opposto o reciproco nei numeri reali) a quelli di una struttura algebrica generale.

Percezione, motivazione e connessioni

Scala Likert da *Fortemente d'accordo a Per niente d'accordo*.

11. L'Algebra Astratta è una disciplina isolata, i cui contenuti non hanno collegamenti evidenti con altri rami della matematica.
12. Studiare esempi applicativi (es. crittografia, simmetria di molecole, codici informatici) aumenterebbe significativamente il mio interesse per l'Algebra Astratta.
13. Trovo che studiare le strutture dell'Algebra Astratta sia più frustrante e complesso che stimolante e interessante.

Bibliografia

- Balacheff, N. (2009). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 115–135). Springer.
- Biza, I., & Nardi, E. (2023). Challenging undergraduate students' mathematical and pedagogical discourses through MathTASK activities. In *Mathematical Challenges For All* (pp. 343–363). Springer.
- Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching*. John Wiley & Sons.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of mathematics teacher education*, 13(1), 27–48.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275–282). Springer.
- Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 209–219.
- Hausberger, T. (2020). Abstract algebra teaching and learning. *Encyclopedia of mathematics education*, 5–9.
- Hausberger, T. (2023). Fostering inquiry and creativity in Abstract Algebra: The theory of banquets and its reflexive stance on the structuralist methodology. In *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 411–429). Springer.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71–90.
- Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 163–172.

- Laursen, S. L., & Rasmussen, C. (2019). I on the prize: Inquiry approaches in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(1), 129–146.
- Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, 102(3), 227–242.
- Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). Connecting the group theory concept assessment to core concepts at the secondary level. In *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (pp. 19–45). Springer.
- Rupnow, R., Hegg, M., Fukawa-Connelly, T., Johnson, E., & Weber, K. (2021). How mathematicians assign homework problems in abstract algebra courses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 64, 100914.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary educational psychology*, 25(1), 54–67.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education*, 34(1), 4–36.
- Soto, H., Lajos, J., & Romero, A. (2024). Teaching Abstract Algebra Concretely via Embodiment. *PRIMUS*, 34(4), 376–391.
- Tirosh, D., Hadass, R., & Movshovitz-Hadar, N. (1991). Overcoming over-generalizations: the case of commutativity and associativity. *PME CONFERENCE*, 3, 310–315.
- Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022). Exploring learning difficulties in abstract algebra: The case of group theory. *Education Sciences*, 12(8), 516.
- Veith, J. M., Girnat, B., Winkler, B., Becker, E., Becher, R., & Bitzenbauer, P. (2024). How do pre-service teachers view Galois theory? A questionnaire study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(1), em2389.
- Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(2), 237–249.
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 289–314.
- Zan, R., Di Martino, P., et al. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. *The montana mathematics enthusiast*, 3(1), 157–168.