ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Il Problema della Dualità degli Ipergrafi

Tesi di Laurea in Informatica Teorica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ENRICO MALIZIA

Presentata da:
NICOLE FAVRE

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

Il presente elaborato mira ad analizzare la classe di complessità del problema $\overline{\text{DUAL}}$. Il problema della dualità degli ipergrafi DUAL è un problema di decisione, definito come segue:

Definizione 0.0.1 (DUAL)**.** Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi. Un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ appartiene al problema della dualità degli ipergrafi, DUAL, se e solo se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono ipergrafi duali.

Il problema della dualità degli ipergrafi, e alcune sue varianti, trova numerose applicazioni pratiche in svariati settori, dalla biologia computazionale [1] [2] al data mining e al machine learning [3].

La nostra trattazione si concentrerà sul collocamento del problema complementare $\overline{\text{DUAL}}$ all'interno della classe di complessità $\text{GC}(\log^2(n), \text{TC}^0)$.

L'elaborato è suddiviso nei seguenti capitoli:

- Capitolo 1: Classi di complessità

  Introduciamo il modello di Macchina di Turing deterministica e non deterministica, definiamo le classi di complessità temporale e spaziale e forniamo un approfondimento sul principale risultato di complessità di questo elaborato.

- Capitolo 2: Concetti preliminari

  Vengono affrontate le prime definizioni riguardanti le istanze del problema e le loro proprietà. Si introducono i concetti fondamentali di dualità, transversal e new transversal di un ipergrafo.

- Capitolo 3: Decomposizione di DUAL

  In questo capitolo ci concentriamo sulla struttura del problema, per permettere la sua semplificazione. Concretamente, vengono introdotti il concetto di assegnamento parziale (σ), albero degli assegnamenti ($\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$) e estensioni di assegnamenti, essenziali per la ricerca di un new transversal.

- Capitolo 4: Algoritmo

  Il fulcro della trattazione si concentra in questo capitolo, il quale analizza l'algoritmo ND-NotDUAL, una procedura non deterministica di *guess and check*, per la risoluzione di $\overline{\text{DUAL}}$. Tale algoritmo è stato originariamente proposto e sviluppato da Georg Gottlob e Enrico Malizia nell'articolo *Achieving New Upper Bounds for the Hypergraph Duality Problem through Logic*[4].

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Classi di complessità

Per studiare la classe di complessità di un problema è necessario, innanzitutto, introdurre alcune basi di Informatica Teorica. Il presente capitolo fornisce, pertanto, le definizioni essenziali che permetteranno di comprendere a pieno la trattazione algoritmica e la formalizzazione del risultato finale, ovvero la dimostrazione che $\overline{\mathrm{DUAL}}$ appartiene alla classe $\mathrm{GC}(\log^2(n), \mathrm{TC}^0)$.

1.1 Macchina di Turing

La Macchina di Turing è un modello matematico astratto di calcolo, ideato da Alan Turing nel 1936, che formalizza il concetto intuitivo di algoritmo. A differenza di un automa a stati finiti, la Macchina di Turing dispone di una memoria illimitata. Questa risorsa le conferisce un potere computazionale notevolmente superiore, rendendola il modello matematico più accurato di un computer *general purpose*. Per questo motivo, il potere di calcolo della Macchina di Turing è ritenuto equivalente a quello di qualsiasi computer esistente.

Il modello della Macchina di Turing utilizza un nastro infinito come sua memoria illimitata. Essa possiede una testina che può leggere e scrivere simboli e muoversi lungo il nastro. Inizialmente il nastro contiene solo la stringa di input ed è vuoto ovunque altrove. Se la macchina ha bisogno di immagazzinare informazioni, può scrivere queste informazioni sul nastro. Per leggere le informazioni che ha scritto, la macchina può muovere la sua testina su di esse. La macchina continua a calcolare finché non decide di produrre un output. Gli output *accept* e *reject* si ottengono entrando in stati di accettazione e di rifiuto designati. Se non entra in uno stato di accettazione o di rifiuto, continuerà all'infinito, senza mai fermarsi.

Definizione 1.1.1 (Macchina di Turing deterministica)**.** Una Macchina di Turing si indica con $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej} \rangle$, tale che:

- Q è un insieme finito di stati della macchina.
- Σ è l'alfabeto di input (non contenente il simbolo di blank, $\sqcup$).
- Γ è l'alfabeto del nastro, con $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è la funzione di transizione, dove L e R indicano lo spostamento verso sinistra e destra della testina, rispettivamente.
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale.
- $q_{acc} \in Q$ è lo stato di accettazione.
- $q_{rej} \in Q$ è lo stato di rifiuto.

In una Macchina di Turing deterministica, lo stato corrente della macchina e i simboli scansionati dalla testina sul nastro determinano inequivocabilmente lo stato successivo della macchina e il movimento della testina. Al contrario, una Macchina di Turing non deterministica può procedere, durante la sua esecuzione, seguendo diverse possibilità.

Definizione 1.1.2 (Macchina di Turing non deterministica)**.** Una Macchina di Turing non deterministica si indica con $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej} \rangle$, tale che:

- Q è un insieme finito di stati della macchina.

- Σ è l'alfabeto di input (non contenente il simbolo di blank, $\sqcup$).
- Γ è l'alfabeto del nastro, con $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ è la funzione di transizione, dove L e R indicano lo spostamento verso sinistra e destra della testina, rispettivamente, e $\mathcal{P}$ indica l'insieme delle parti.
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale.
- $q_{acc} \in Q$ è lo stato di accettazione.
- $q_{rej} \in Q$ è lo stato di rifiuto.

Definizione 1.1.3 (Linguaggio)**.** Sia Σ un insieme di simboli, che chiameremo *alfabeto*. Una *parola* sull'alfabeto Σ è una concatenazione di zero o più simboli provenienti da Σ. Indichiamo con Σ^* l'insieme delle parole, di qualsiasi lunghezza, sull'alfabeto Σ. Sia $L \subseteq \Sigma$, allora diciamo che L è un *linguaggio*.

Ogni problema di decisione è un linguaggio.

Definizione 1.1.4. Diciamo che una Macchina di Turing M *decide* un linguaggio L se $\forall w \in L$, la computazione di M su w termina in uno stato accettante, e $\forall w \notin L$, la computazione di M su w termina in uno stato rifiutante.

Una Macchina di Turing non deterministica termina in uno stato accettante se esiste almeno un branch di computazione che termina in uno stato accettante.

Definizione 1.1.5 (Computation time)**.** Siano M una Macchina di Turing e w una stringa in input per M. Il *computation time* di M su w è il numero di passi che M esegue prima di arrestarsi su w. Se M è non deterministica, il computation time di M su w è dato dalla lunghezza del branch di computazione più lungo.

Definizione 1.1.6 (Time function)**.** Diciamo che una funzione $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una *time function* se è crescente e strettamente positiva.

Sia w una stringa. Da ora in poi, indicheremo con $\|w\|$ la taglia di w.

Definizione 1.1.7 (Running time)**.** Sia $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una time function. Una Macchina di Turing M si dice che ha *running time* $t(n)$ se per ogni stringa w, a parte un numero finito, il computation time di M su w non eccede $t(\|w\|)$.

Definizione 1.1.8 (Classe di complessità temporale)**.** Sia $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una time function. Definiamo la *classe di complessità (temporale)* $\mathrm{DTIME}(t(n)) = \{L \mid L$ è un linguaggio e $\exists M$ Macchina di Turing deterministica che decide L tale che il running time di M è $\mathcal{O}(t(n))\}$.

Definizione 1.1.9 (Computation space)**.** Siano M una Macchina di Turing e w una stringa in input per M. Il *computation space* di M su w è il numero di celle distinte viste da M sul worktape mentre processa w. Se M è non deterministica, il computation space di M su w è dato dal massimo numero di celle viste da M.

Definizione 1.1.10 (Space function)**.** Diciamo che una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una *space function* se è crescente e strettamente positiva.

Definizione 1.1.11 (Running space)**.** Sia $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una space function. Una Macchina di Turing M si dice che ha *running space* $s(n)$ se per ogni stringa w, a parte un numero finito, il computation space di M su w non eccede $s(\|w\|)$.

Definizione 1.1.12 (Classe di complessità spaziale)**.** Sia $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una space function. Definiamo la *classe di complessità (spaziale)* $\mathrm{DSPACE}(s(n)) = \{L \mid L$ è un linguaggio e $\exists M$ Macchina di Turing deterministica che decide L tale che il running space di M è $\mathcal{O}(s(n))\}$.

1.2 Classe $\mathbf{GC}(\log^2(n), \mathbf{TC}^0)$

La procedura di *guess and check* è il modo in cui possiamo pensare al funzionamento di una Macchina di Turing non deterministica durante la risoluzione di un problema di decisione.

Durante la fase di *guess*, la macchina sfrutta il suo non determinismo per indovinare un potenziale certificato o testimone dell'appartenenza di un'istanza $\mathcal{I}$ al problema di decisione studiato. Concettualmente, la macchina esplora simultaneamente tutti i branch di computazione per estrarre, se esiste, un tale certificato.

Successivamente, la macchina dovrà eseguire dei controlli su tale certificato per verificarne la validità. Pertanto, inizia la fase di *check*, durante la quale la macchina agisce deterministicamente.

Definizione 1.2.1. La classe di complessità $\mathrm{GC}(f(n), C)$ contiene tutti i problemi di decisione che dopo un *guess* di $\mathcal{O}(f(n))$ bits può essere deciso (*check*) dentro la classe di complessità C.

Quando trattiamo della classe $\mathrm{GC}(\log^2(n), \mathrm{TC}^0)$, facciamo riferimento alla versione uniforme in tempo logaritmico della classe TC^0. In breve, la classe TC^0 è la classe dei problemi di decisione, risolvibili da circuiti booleani, tale che: la profondità del circuito è limitata da una costante k, indipendentemente dalla dimensione dell'input (n); il numero totale di porte (gates) nel circuito è limitato da un polinomio nella dimensione dell'input (n); le porte utilizzate possono essere le porte AND, OR e NOT, ma, soprattutto, possono anche includere porte a soglia o MAJORITY. Queste ultime sono dei contatori che per far passare 'il segnale' è sufficiente verificare che la maggioranza degli input sia *True*, o che comunque superino almeno una certa soglia.

La verifica dell'appartenenza della fase di *check* dell'algoritmo, proposto in questo elaborato, alla classe TC^0 si basa sulla seguente equivalenza: qualsiasi problema di decisione che può essere risolto da un circuito TC^0 (uniforme in tempo logaritmico) può essere descritto da una formula FO(COUNT), e viceversa. Con FO(COUNT) indichiamo la logica del primo ordine con quantificatori di conteggio ("$\exists!n$"). FO(COUNT) è costituita da due domini: uno contenente oggetti usati per interpretare solo valori numerici, e l'altro contenente tutti gli altri oggetti. Concretamente, la formula $\Phi(n, x) = (\exists!nx)(\varphi(x))$ significa che esistono esattamente n oggetti x che soddisfano la proprietà φ. La variabile x spazia sugli oggetti del dominio non numerico ed è vincolata dal quantificatore di conteggio $\exists!n$, mentre la variabile n spazia sugli oggetti del dominio numerico, libera dal quantificatore di conteggio.

Capitolo 2

Concetti preliminari

In questo capitolo si introducono alcune definizioni e risultati fondamentali per la comprensione del problema DUAL.

2.1 Prime definizioni

Definizione 2.1.1 (Ipergrafo)**.** Un ipergrafo $\mathcal{G}$ è definito come una coppia $\langle V, E \rangle$, dove V è l'insieme finito dei vertici, o nodi, di $\mathcal{G}$ ed E è la famiglia degli iperarchi di $\mathcal{G}$, ossia l'insieme formato da sottoinsiemi non vuoti di V. Formalmente, $E \subseteq 2^V$.

Nella presente trattazione, spesso si identificherà un ipergrafo $\mathcal{G}$ con la sua famiglia di iperarchi (o, più semplicemente, archi) E, i quali a loro volta sono sottoinsiemi di V, l'insieme dei vertici. Pertanto, con la notazione $g \in \mathcal{G}$ si intenderà $g \in E$.

Da ora in poi assumeremo anche che, data un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL, gli ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ siano definiti sullo stesso insieme di vertici V.

Indicheremo con $|\mathcal{G}|$ il numero di archi di un ipergrafo e con $\|\mathcal{G}\|$ la taglia di un ipergrafo, intesa come il numero di bits necessari a rappresentare $\mathcal{G}$. Data un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL, indicheremo con $N = \|\mathcal{G}\| + \|\mathcal{H}\|$ la taglia di $\mathcal{I}$.

Definizione 2.1.2 (Ipergrafo semplice)**.** Sia $\mathcal{G} = \langle V, E\rangle$ un ipergrafo. Si dice che $\mathcal{G}$ è *semplice* (o *Sperner*) se $\forall\ g,h \in \mathcal{G}$, coppia di archi distinti, $g \not\subset h \wedge h \not\subset g$. Ovvero, non esiste un arco di $\mathcal{G}$ che sia sottoinsieme proprio di un altro arco di $\mathcal{G}$.

Definizione 2.1.3 (Transversal)**.** Siano $\mathcal{G} = \langle V, E\rangle$ un ipergrafo e $T \subseteq V$ un sottoinsieme di vertici. Si dice che T è un *transversal* di $\mathcal{G}$ se $\forall\ g \in \mathcal{G}$, $T \cap g \neq \emptyset$.

Intuitivamente è un insieme di vertici di $\mathcal{G}$ che interseca tutti gli archi di $\mathcal{G}$.

Definizione 2.1.4 (Transversal minimale)**.** Un transversal T di un ipergrafo $\mathcal{G}$ si dice *minimale* se $\nexists T' \subsetneq T$ tale che T' è un transversal di $\mathcal{G}$.

Definizione 2.1.5 (Duale)**.** Sia $\mathcal{G}$ un ipergrafo. Chiamiamo *duale* di $\mathcal{G}$, e lo indichiamo con $tr(\mathcal{G})$, l'insieme di tutti i transversal minimali di $\mathcal{G}$.

Osserviamo che $tr(\mathcal{G})$ è una famiglia di sottoinsiemi di V i cui elementi sono i transversal minimali di $\mathcal{G}$. Questa famiglia costituisce essa stessa un ipergrafo definito sull'insieme di vertici V. Di seguito mostriamo un esempio di un ipergrafo e il suo duale.

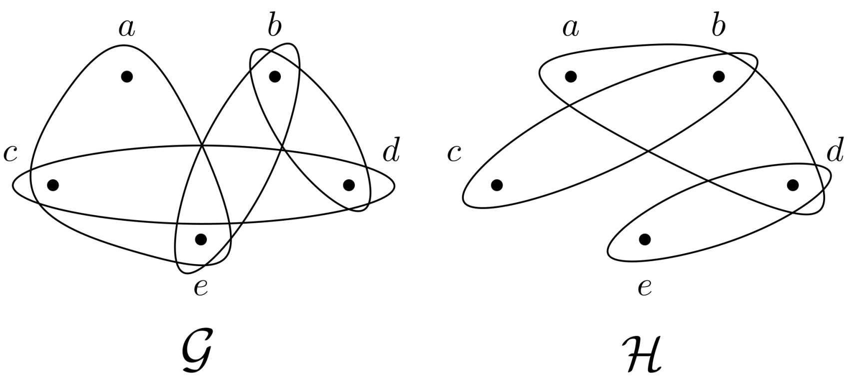

Figura 2.1: Un ipergrafo $\mathcal{G}$ e il suo duale $\mathcal{H} = tr(\mathcal{G})$.

Lemma 2.1.6 (Proprietà di simmetria della dualità)**.** Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi semplici definiti sullo stesso insieme di vertici. Allora:

$$\mathcal{H} = tr(\mathcal{G}) \iff \mathcal{G} = tr(\mathcal{H})$$

In tal caso, diciamo che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono *duali*.

Definizione 2.1.7 (Vertici critici)**.** Dati un ipergrafo $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ e un insieme di vertici T, un vertice $v \in T$ si dice *critico* in T (rispetto a $\mathcal{G}$) se $\exists\ g \in \mathcal{G}$ tale che $g \cap T = \{v\}$. Si dice che g è *testimone* della criticità di v in T.

Definizione 2.1.8 (Independent set)**.** Dato un ipergrafo $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$, si dice che $S \subseteq V$ è un *independent set* di $\mathcal{G}$ se $\forall g \in \mathcal{G}, g \not\subset S$.

Definizione 2.1.9 (New transversal)**.** Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi definiti sullo stesso insieme di vertici V. Un insieme di vertici $T \subseteq V$ si dice un *new transversal* di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ se T è un transversal di $\mathcal{G}$ e T è un independent set di $\mathcal{H}$.

2.2 Proprietà dei transversal

Lemma 2.2.1. Siano $\mathcal{G}$ un ipergrafo e $T \subseteq V$ un transversal di $\mathcal{G}$. Allora, T è un transversal minimale di $\mathcal{G}$ se e solo se $\forall v \in T$, v è un vertice critico in T.

Dimostrazione. Se $\emptyset \in \mathcal{G}$ (arco vuoto), allora non esiste alcun transversal di $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{G} = \emptyset$, l'unico transversal minimale di $\mathcal{G}$ è l'insieme vuoto, per cui nessun vertice appartiene a T. Consideriamo ora il caso in cui $\mathcal{G}$ contiene solo archi non vuoti.

($\Rightarrow$) Sia T un transversal minimale di $\mathcal{G}$. Supponiamo per assurdo che esista un vertice $v \in T$ non critico. Allora, $\forall g \in \mathcal{G}$ tale che $v \in g \cap T$, $|g \cap T| \geq 2$. Definiamo ora $T' = T \setminus \{v\}$. Osserviamo che $\forall g \in \mathcal{G}, |g \cap T'| \geq 1$. Pertanto, l'insieme $T' \subset T$ è un transversal di $\mathcal{G}$, ma T è minimale per ipotesi, dunque siamo giunti a un assurdo.

($\Leftarrow$) Supponiamo che $\forall v \in T$, v sia un vertice critico in T. Consideriamo un qualsiasi sottoinsieme proprio $T' \subset T$ e sia $v \in T \setminus T'$ un vertice. Poiché v è critico, $\exists g_v \in \mathcal{G}$ tale che $T \cap g_v = \{v\}$. Di conseguenza, $T' \cap g_v = \emptyset$. Ciò implica che T' non è un transversal di $\mathcal{G}$. Pertanto, T deve essere un transversal minimale di $\mathcal{G}$. □

Dato un insieme di vertici $T \subseteq V$, indicheremo con $\overline{T} = V \setminus T$ il suo complementare.

Lemma 2.2.2. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi. Un insieme di vertici $T \subseteq V$ è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ se e solo se $\overline{T}$ è un new transversal di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathcal{G}$.

Dimostrazione. Un ipergrafo che contiene un arco vuoto non può avere né un transversal né un independent set. Se almeno uno tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ contiene un arco vuoto, l'affermazione è vera.

Supponiamo ora che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non contengano archi vuoti. Se T è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$, allora T è un independent set di $\mathcal{H}$. Per definizione, $\forall h \in \mathcal{H}, \exists v \in h \setminus T$. Pertanto, $v \in \overline{T}$. Riassumendo, $\forall h \in \mathcal{H}, \exists v \in h \cap \overline{T}$, dunque $\overline{T}$ è un transversal di $\mathcal{H}$.

Se $\overline{T}$ non fosse un independent set di $\mathcal{G}$ allora esisterebbe $g \in \mathcal{G}$ tale che $g \subseteq \overline{T}$. Ciò implicherebbe che $g \cap T = \emptyset$, il che è assurdo perchè T è un tansversal di $\mathcal{G}$. In conclusione, $\overline{T}$ è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Per mostrare l'implicazione opposta dell'enunciato è sufficiente invertire i ruoli di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. □

Definizione 2.2.3 (Proprietà d'intersezione)**.** Diciamo che due ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ soddisfano la *proprietà d'intersezione* se $\forall g \in \mathcal{G}, \forall h \in \mathcal{H}, g \cap h \neq \emptyset$.

Questa proprietà implica che ogni arco di $\mathcal{G}$ è un transversal di $\mathcal{H}$ e, viceversa, ogni arco di $\mathcal{H}$ è un transversal di $\mathcal{G}$.

Lemma 2.2.4. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi. Allora, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono duali se e solo se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono semplici, soddisfano la proprietà di intersezione e non esiste T new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$)

- (Semplicità) Supponiamo per assurdo che $\mathcal{G}$ non sia semplice. Allora $\exists g, g' \in \mathcal{G}$ tali che $g \subsetneq g'$.

  Se g è un transversal di $\mathcal{H}$, allora g' non è un transversal minimale di $\mathcal{H}$. Ciò è assurdo perchè, per definizione di dualità, ogni arco di $\mathcal{G}$ è deve essere un transversal minimale di $\mathcal{H}$.

  Se g non è un transversal di $\mathcal{H}$, allo stesso modo otteniamo una contraddizione.

  Pertanto, se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono duali allora sono semplici.

- (Proprietà d'intersezione) Supponiamo per assurdo che esistano $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{H}$ tali che $g \cap h = \emptyset$. Ciò implica che g non è un transversal di $\mathcal{H}$, che è assurdo perchè $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono duali.

- (New transversal) Se almeno uno tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ contiene un arco vuoto, allora non ammette transversal o independet set. In tal caso, non esiste un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$, o viceversa.

  Se almeno uno tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ è un ipergrafo vuoto, allora l'altro dovrà contenere un arco vuoto, per la loro dualità. Come prima, non potrà esistere un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$.

  Consideriamo ora il caso in cui $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ contengono solo archi non vuoti. Supponiamo per assurdo che esista T new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Assumiamo, senza perdere di generalità, che T sia minimale. Poiché T è un independent set di $\mathcal{H}$, $\forall h \in \mathcal{H}, h \neq T$. Pertanto, T è un transversal minimale di $\mathcal{G}$ ma non un arco di $\mathcal{H}$. Questo è assurdo perchè $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono duali.

($\Leftarrow$) Per dimostrare la dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ analizziamo i seguenti casi distinti:

- (Caso 1) Supponiamo che $\emptyset \in \mathcal{G}$: Per ipotesi $\mathcal{G}$ è semplice, dunque $\mathcal{G} = \{\emptyset\}$ ($\mathcal{G}$ contiene solo l'arco vuoto). Per la proprietà d'intersezione, ogni arco di $\mathcal{H}$ interseca ogni arco di $\mathcal{G}$, perciò $\mathcal{H} = \emptyset$ ($\mathcal{H}$ non contiene nessun arco). Osserviamo che non può esistere un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ e che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono banalmente duali. Si ottiene lo stesso risultato supponendo che $\emptyset \in \mathcal{H}$.

- (Caso 2) Supponiamo che $\mathcal{G} = \emptyset$: Se, per assurdo, $\emptyset \notin \mathcal{H}$, allora l'arco vuoto è un transversal di $\mathcal{G}$ e un independent set di $\mathcal{H}$. Questa è una contraddizione poiché, per ipotesi, non esiste un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Pertanto, se $\mathcal{G} = \emptyset$ allora $\emptyset \in \mathcal{H}$, e ci riconduciamo così al Caso 1. Si ottiene lo stesso risultato supponendo che $\mathcal{H} = \emptyset$.

- (Caso 3) Supponiamo che sia $\mathcal{G}$ che $\mathcal{H}$ contengano solo archi non vuoti: Vogliamo mostrare che ogni transversal minimale di $\mathcal{G}$ è un arco di $\mathcal{H}$. Sia T un transversal minimale di $\mathcal{G}$. Poiché non esiste un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$, T non è un independent set di $\mathcal{H}$. Allora, $\exists h \in \mathcal{H}$ tale che $h \subseteq T$. Per la proprietà d'intersezione, tutti gli archi di $\mathcal{H}$ sono transversal di $\mathcal{G}$, quindi anche h è un transversal di $\mathcal{G}$. Poiché $h \subseteq T$ e T è minimale, allora $h = T$. Pertanto, $tr(\mathcal{G}) \subseteq H$. Per semplicità di $\mathcal{H}$, si ottiene l'uguaglianza $tr(\mathcal{G}) = \mathcal{H}$.

$\square$

Capitolo 3

Decomposizione di DUAL

L'obiettivo primario di questo capitolo è delineare la strategia algoritmica volta a riconoscere le *istanze-NO* di DUAL. Data un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL, la non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ è verificata se almeno una delle tre condizioni descritte nel Lemma 2.2.4 non è soddisfatta:

1. Almeno uno dei due ipergrafi, $\mathcal{G}$ o $\mathcal{H}$, non è semplice.

2. $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non soddisfano la proprietà di intersezione.

3. Esiste un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ (o viceversa).

La verifica delle prime due condizioni è computazionalmente immediata. La difficoltà del problema risiede, pertanto, nella dimostrazione dell'esistenza di un new transversal, il che rappresenta il fulcro della trattazione.

L'obiettivo è dunque costruire un insieme di vertici $T \subseteq V$ tale che T è un transversal di $\mathcal{G}$ (T interseca tutti gli archi di $\mathcal{G}$) e T è un independent set di $\mathcal{H}$ (nessun arco di $\mathcal{H}$ è contenuto dentro T). A tal fine, la strategia adottata consiste nella progressiva valutazione dei vertici $v \in V$. Partendo da $T = \emptyset$, a ogni passaggio, includeremo in o escluderemo da T un vertice di V. Concretamente, partizioneremo l'insieme dei vertici V in tre sottoinsiemi:

1. $In = \{$vertici inclusi nel candidato a new transversal $T\}$

2. $Ex = \{$vertici esclusi dal candidato a new transversal $T\}$

3. $Free = \{$vertici *liberi*, che non sono ancora stati valutati$\}$

3.1 Assegnamenti e istanze ridotte di DUAL

Formalizziamo ora questi concetti.

Definizione 3.1.1 (Assegnamento e vertici liberi)**.** Sia $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ un'istanza di DUAL e sia V l'insieme dei vertici su cui $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono definiti. Un *assegnamento* $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ è una coppia di sottoinsiemi di V, tale che $In \cap Ex = \emptyset$. Diciamo che un vertice $v \in V$ è *libero* rispetto a un assegnamento σ se $v \notin In \wedge v \notin Ex$ e scriviamo $Free = V \setminus (In \cup Ex)$.

Definizione 3.1.2 (Estensione)**.** Siano $\sigma_1 = \langle In_1, Ex_1 \rangle$ e $\sigma_2 = \langle In_2, Ex_2 \rangle$ due assegnamenti relativi a un insieme di vertici V. Se $In_1 \cap Ex_2 = \emptyset \wedge In_2 \cap Ex_1 = \emptyset$, allora indichiamo con $\sigma_1 + \sigma_2 = \langle In_1 \cup In_2, Ex_1 \cup Ex_2 \rangle$ l'*estensione* di σ_1 con σ_2. In generale, si dice che $\sigma_1 = \langle In_1, Ex_1 \rangle$ è *estensione* di $\sigma_2 = \langle In_2, Ex_2 \rangle$ se $In_2 \subseteq In_1 \wedge Ex_2 \subseteq Ex_1$, e in tal caso scriviamo $\sigma_2 \sqsubseteq \sigma_1$.

Definizione 3.1.3 (Coerenza di un assegnamento)**.** Siano $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ un'istanza di DUAL e T un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Diciamo che un assegnamento $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ è *coerente* con T se $In \subseteq T$ e $T \cap Ex = \emptyset$. Questa condizione può essere espressa in modo equivalente come $In \subseteq T \subseteq V \setminus Ex$.

Gli algoritmi proposti in letteratura per il problema DUAL si basano sull'estensione sequenziale di un assegnamento parziale $\sigma = \langle In, Ex \rangle$, definito sull'insieme dei vertici V. Ciascuna di tali estensioni induce una nuova *istanza ridotta* del problema DUAL, sulla quale l'algoritmo viene invocato in modo ricorsivo.

Questa strategia è efficace in quanto la dimensione dell'istanza del problema si riduce progressivamente:

1. L'atto di includere vertici, inserendoli in In, incrementa il numero di archi di $\mathcal{G}$ che intersecano il transversal in costruzione. Di conseguenza, tali archi di $\mathcal{G}$ non necessitano di essere considerati ulteriormente nell'istanza ridotta.

2. Simmetricamente, l'atto di escludere vertici, inserendoli in Ex, incrementa il numero di archi di $\mathcal{H}$ che sono certamente non contenuti nel transversal T in costruzione. Come prima, tali archi di $\mathcal{H}$ non necessitano di essere più considerati nell'istanza ridotta.

Le seguenti definizioni sono cruciali per la comprensione della definizione rigorosa di istanza ridotta di DUAL.

Definizione 3.1.4. Siano $\mathcal{G}$ un ipergrafo e S un insieme di vertici. Allora definiamo i seguenti ipergrafi:

1. $\mathcal{G}_S = \langle S, \{g \in \mathcal{G} \mid g \subseteq S\}\rangle$
2. $\mathcal{G}^S = \langle S, \min(\{g \cap S \mid g \in \mathcal{G}\})\rangle$

In questo contesto $\min(\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ ipergrafo, indica l'insieme degli archi minimali di $\mathcal{H}$. Formalmente $\min(\mathcal{H}) = \{h \in \mathcal{H} \mid \nexists h' \in \mathcal{H} \text{ tale che } h' \subseteq h\}$

Definizione 3.1.5 (Istanza ridotta relativa a un assegnamento)**.** Siano $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H}\rangle$ un'istanza di DUAL e $\sigma = \langle In, Ex\rangle$ un assegnamento. Allora definiamo l'*istanza ridotta* derivata da $\mathcal{I}$ e indotta da σ come:

$$\mathcal{I}_\sigma = \langle \mathcal{G}(\sigma), \mathcal{H}(\sigma)\rangle = \left\langle \left(\mathcal{G}_{V\setminus \mathrm{In}}\right)^{V\setminus(\mathrm{In}\cup\mathrm{Ex})}, \left(\mathcal{H}_{V\setminus \mathrm{Ex}}\right)^{V\setminus(\mathrm{In}\cup\mathrm{Ex})}\right\rangle$$

Si osserva che sia $\mathcal{G}(\sigma)$ che $\mathcal{H}(\sigma)$ sono ipergrafi semplici e che se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono definiti sullo stesso insieme di vertici, allora anche $\mathcal{G}(\sigma)$ e $\mathcal{H}(\sigma)$ saranno definiti sullo stesso insieme di vertici.

Lemma 3.1.6. Due ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono duali se e solo se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono semplici, soddisfano la proprietà di intersezione e, per ogni assegnamento σ, $\mathcal{G}(\sigma)$ e $\mathcal{H}(\sigma)$ sono duali.

Definizione 3.1.7 (Assegnamento ricoprente)**.** Sia $\sigma = \langle In, Ex\rangle$ un assegnamento. Se $\exists h \in \mathcal{H}$ tale che $h \subseteq In$ o $\exists g \in \mathcal{G}$ tale che $g \subseteq Ex$, allora si dice che In e Ex sono *ricoprenti*, rispettivamente. Se almeno uno tra In e Ex è ricoprente, allora si dice che σ è un *assegnamento ricoprente.*

Intuitivamente, durante la costruzione del candidato a new transversal, possiamo evitare di esplorare assegnamenti ricoprenti:

1. (Ex ricoprente) Se $\exists g \in \mathcal{G}$ tale che $g \subseteq Ex$, allora $T \cap g = \emptyset$, dove T è il candidato a new transversal associato all'assegnamento σ. Dunque, T non soddisfa la condizione di transversal di $\mathcal{G}$ e, pertanto, non può essere un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$.

2. (In ricoprente) Se $\exists h \in \mathcal{H}$ tale che $h \subseteq In$, allora, per definizione, T non può essere un independent set di $\mathcal{H}$ e, di conseguenza, neanche un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$.

3.2 Albero degli assegnamenti

La strategia algoritmica di decomposizione ricorsiva in istanze ridotte di DUAL consiste nell'esplorazione di specifiche estensioni degli assegnamenti parziali. L'insieme degli assegnamenti considerati durante l'esecuzione ricorsiva può essere analizzato efficacemente tramite una struttura ad albero. Concettualmente, assoceremo un nodo a ogni assegnamento parziale esplorato e collegheremo due nodi se i loro assegnamenti sono uno la diretta estensione dell'altro.

In termini rigorosi, data un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL in input, l'albero degli assegnamenti $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \langle N, A, r, \sigma, l \rangle$ associato a $\mathcal{I}$ è definito nel seguente modo:

- N è l'insieme dei nodi.

- σ è la funzione che a ogni nodo assegna un'etichetta.

- A è l'insieme degli archi.

- l è la funzione che a ogni arco assegna un'etichetta.

- La radice r di $\mathcal{T}$ è etichettata con l'assegnamento vuoto, $\sigma_\epsilon = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$.

- Ogni nodo p di $\mathcal{T}$ è etichettato con un assegnamento $\sigma_p = \langle In_p, Ex_p \rangle$.
- Un nodo p di $\mathcal{T}$ ha un figlio q se esiste un'estensione diretta da σ_p a σ_q.
- Un arco (p, q) (collega il nodo p al nodo q) è etichettato col tipo di estensione utilizzato per passare da σ_p a σ_q.
- Le *foglie* di $\mathcal{T}$ sono tutti i nodi di $\mathcal{T}$ privi di vertici liberi ($Free_p = \emptyset$) o il cui assegnamento è ricoprente.

Definizione 3.2.1 (Cammino)**.** Un cammino $\Pi = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ in $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ identifica il percorso univoco che, partendo dalla radice dell'albero, raggiunge un nodo specifico tramite la catena di archi con etichette $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Indichiamo con $\mathcal{N}(\Pi)$ il nodo finale del cammino Π.

Ai fini del nostro lavoro, l'analisi di ciascun nodo p, caratterizzato dall'assegnamento $\sigma_p = \langle In_p, Ex_p \rangle$, non richiede l'esplicita costruzione dell'istanza ridotta $I_p = \langle \mathcal{G}(\sigma_p), \mathcal{H}(\sigma_p) \rangle$. Prediligiamo, invece, l'utilizzo diretto dei seguenti insiemi:

- $Sep_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p) = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cap In_p = \emptyset\}$, l'insieme di tutti gli archi di $\mathcal{G}$ *separati* da σ_p;
- $Com_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p) = \{h \in \mathcal{H} \mid h \cap Ex_p = \emptyset\}$, l'insieme di tutti gli archi di $\mathcal{H}$ *compatibili* con σ_p.

Con abuso di notazione, quando gli ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono inequivocabilmente determinati dal contesto, $Sep_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p)$ e $Com_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p)$ verranno indicati semplicemente con $Sep(\sigma_p)$ e $Com(\sigma_p)$.

3.3 Estensioni di assegnamenti

Per determinare l'esistenza di un new transversal di $\mathcal{G}$, l'approccio algoritmico non può permettersi di esplorare esaustivamente tutte le possibili estensioni d'assegnamento parziale $\sigma = \langle In, Ex \rangle$, poiché comporterebbe una complessità computazionale di ordine esponenziale. La trattazione si concentrerà, dunque, sull'applicazione di due specifiche tipologie di estensione d'assegnamento.

Definizione 3.3.1 (Estensioni ammissibili)**.** Sia $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'albero degli assegnamenti associato a un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL. Sia p un nodo di $\mathcal{T}$, tale che p non sia una foglia, e sia $\sigma_p = \langle In_p, Ex_p \rangle$ l'assegnamento associato. Indichiamo con $Free_p$ l'insieme dei vertici liberi non ancora esplorati dall'assegnamento. Allora p ha esattamente i seguenti figli:

- (Estensione di tipo 1): $\forall v \in Free_p$, p ha un figlio q tale che $\sigma_q = \sigma_p + \langle \emptyset, \{v\} \rangle$. L'arco che connette p a q è etichettato con $-v$.
- (Estensione di tipo 2): $\forall g \in Sep(\sigma_p), \forall v \in g$ tale che $v \in Free_p$, p ha un figlio q tale che $\sigma_q = \sigma_p + \langle \{v\}, g \setminus \{v\} \rangle$. L'arco che connette p a q è etichettato con (v, g).

Lemma 3.3.2. Sia $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'albero degli assegnamenti associato a un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di DUAL e sia $\Pi = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ un cammino in $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Allora:

$$\sigma_{\mathcal{N}(\Pi)} = \langle \bigcup_{(v,g) \in \Pi} \{v\}, \left(\bigcup_{-v \in \Pi} \{v\} \right) \cup \left(\bigcup_{(v,g) \in \Pi} (g \setminus \{v\}) \right) \rangle.$$

Capitolo 4

Algoritmo

In questo capitolo descriveremo nel dettaglio l'algoritmo ND-NotDUAL, una procedura non deterministica impiegata per la risoluzione del problema $\overline{\text{DUAL}}$, ossia la verifica della non dualità tra due ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Di seguito, presentiamo alcune definizioni preliminari cruciali per la comprensione dell'algoritmo.

Definizione 4.0.1 (Insieme di etichette)**.** Sia $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'albero degli assegnamenti associato a un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di $\overline{\text{DUAL}}$. Definiamo $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \{-v \mid v \in V\} \cup \{(v, g) \mid g \in \mathcal{G} \wedge v \in g\}$, come la famiglia di tutte le possibili estensioni di assegnamento. Chiamiamo *insieme di etichette* un sottoinsieme Σ di $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

Definizione 4.0.2. Sia $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'albero degli assegnamenti associato a un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ di $\overline{\text{DUAL}}$. Definiamo l'insieme:

$$\mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \{\Sigma \mid \Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \wedge 0 \leq |\Sigma| \leq \lfloor \log |\mathcal{H}| \rfloor + 1\}$$

Sia ora $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Indichiamo l'insieme dei vertici inclusi ed esclusi, tramite le estensioni d'assegnamento contenute dentro Σ, con:

$$In(\Sigma) = \bigcup_{(v,g) \in \Sigma} \{v\}$$

$$Ex(\Sigma) = \left(\bigcup_{-v \in \Sigma} \{v\} \right) \cup \left(\bigcup_{(v,g) \in \Sigma} (g \setminus \{v\}) \right)$$

Infine, definiamo $\sigma(\Sigma) = \langle In(\Sigma), Ex(\Sigma)\rangle$, l'assegnamento associato a Σ.

Definizione 4.0.3 (Consistenza)**.** Sia $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Diciamo che Σ è *consistente* se $In(\Sigma) \cap Ex(\Sigma) = \emptyset$.

Il problema $\overline{\text{DUAL}}$, data un'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H}\rangle$, consiste nello stabilire la non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. Come evidenziato nel Capitolo 3, l'ostacolo computazionale risiede nella dimostrazione dell'esistenza di un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Per ovviare a questo problema adottiamo un principio fondamentale stabilito dal Lemma 4.1.7: L'esistenza di un new transversal T è equivalente all'esistenza di un insieme di etichette $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ che conduca a un *testimone doppio* della non-dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ (concetto, definito successivamente, che garantisce la non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$).

L'algoritmo non deterministico ND-NotDUAL implementa direttamente questa equivalenza, riconducendo il problema di ricerca a una procedura di *guess and check*:

- *Guess*: La fase iniziale consiste nella scelta non deterministica di un insieme di etichette Σ, il cui ruolo è quello di rappresentare un cammino logaritmico all'interno di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

- *Check*: La fase di verifica è strutturata in una serie di controlli deterministici volti a verificare le precondizioni su $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ (semplicità e proprietà d'intersezione), garantire la validità e la consistenza dell'insieme di etichette Σ scelto e, infine, confermare l'individuazione del testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Algorithm 1 ND-NotDUAL

1: **procedure** ND-NotDual($\mathcal{G}, \mathcal{H}$)
2:     $\Sigma \leftarrow$ **guess**(un insieme di etichette da $\mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$)
3:     **if** $\neg$CHECK-SIMPLE-AND-INTERSECTION($\mathcal{G}, \mathcal{H}$) **then**
4:         **return** accept;
5:     **end if**
6:     **if** $\neg$CHECK-CONSISTENCY($\mathcal{G}, \Sigma$) **then**
7:         **return** reject;
8:     **end if**
9:     **if** CHECK-AUG-DOUBLEWITNESS($\mathcal{G}, \mathcal{H}, \Sigma$) **then**
10:         **return** accept;
11:     **end if**
12:     **return** reject;
13: **end procedure**

L'algoritmo termina in uno stato accettante (*return accept*) se $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ è un'*istanza-SI* di $\overline{\text{DUAL}}$. Ciò può avvenire in due modi:

1. Linea 4: Si verifica il fallimento di una delle due precondizioni su $\mathcal{G}$ o $\mathcal{H}$ (semplicità o proprietà d'intersezione).

2. Linea 10: Il cammino Σ scelto supera tutti i controlli intermedi e conduce a un assegnamento che risulta essere un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

L'algoritmo, invece, rifiuta l'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ (*return reject*) in due scenari:

1. Linea 7: Si verifica il fallimento della proprietà di consistenza dell'insieme di etichette Σ, il che genera un assegnamento associato incoerente ($In(\Sigma) \cap Ex(\Sigma) \neq \emptyset$).

2. Linea 12: Tutti i controlli falliscono, ovvero: le precondizioni sono soddisfatte, il cammino è consistente, ma non conduce a un testimone

doppio. Questo significa che l'insieme di etichette Σ scelto non genera il testimone cercato. Poiché l'algoritmo è non deterministico, affinché $\overline{\text{DUAL}}$ termini in uno stato accettante, è sufficiente che esista almeno un insieme di etichette Σ che porti all'accettazione finale.

4.1 Guess

La porzione non deterministica dell'algoritmo ND-NotDUAL è interamente contenuta nella Linea 2:

$$\Sigma \leftarrow \textbf{guess}(\text{un insieme di etichette da } \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$$

Per comprendere appieno la validità di questa scelta, formalizziamo ora alcuni concetti introdotti nel paragrafo precedente.

Definizione 4.1.1. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi e $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ un assegnamento. Diciamo che σ è *testimone* dell'esistenza di un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ se In è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ o se Ex è un new transversal di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathcal{G}$.

Se In è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ e Ex è un new transversal di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathcal{G}$, allora si dice che σ è un *testimone doppio* dell'esistenza di un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$.

Quindi diciamo che σ è testimone della *non dualità* di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

L'individuazione di un assegnamento σ, che soddisfi la condizione di testimone doppio, permette all'algoritmo di terminare in uno stato accettante. La ricerca di tale testimone avviene attraverso l'estensione di assegnamenti parziali all'interno di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Il seguente lemma è fondamentale per garantire che, se un transversal T esiste, la strategia di estensione basata sull'inclusione di vertici critici sia sempre percorribile e coerente con T.

Lemma 4.1.2. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi, T un new transversal minimale di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ e $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ un assegnamento coerente con T. Allora $\forall v \in Free_\sigma \cap T, \exists g \in Sep(\sigma)$ tale che $v \in g$ e $\sigma + \langle \{v\}, g \setminus \{v\} \rangle$ è coerente con T.

Dimostrazione. Sia $v \in Free_\sigma \cap T$. Applicando il Lemma 2.2.1, la minimalità di T implica che v è un vertice critico in T. Quindi $\exists g \in \mathcal{G}$ tale che $g \cap T = \{v\}$ e, dato che $v \notin In$, si ha che $g \in Sep(\sigma)$. Allora $\sigma + \langle \{v\}, g \setminus \{v\} \rangle$ è coerente con T. □

Il successo dell'algoritmo non dipende solo dalla possibilità di estendere l'assegnamento (come garantito dal Lemma 4.1.2), ma dalla capacità di convergere rapidamente verso il testimone T. Per garantire questa convergenza veloce, si sfrutta il principio formalizzato nel seguente lemma.

Lemma 4.1.3. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi che soddisfano la proprietà d'intersezione. Siano σ un assegnamento non ricoprente e $v \in Free_\sigma$. Definiamo:

$$\varepsilon_v^{Com(\sigma)} = \frac{|\{h \in Com(\sigma) \mid v \in h\}|}{|Com(\sigma)|} \tag{4.1}$$

Allora:

$$|Com(\sigma + \langle \varnothing, \{v\} \rangle)| = \left(1 - \varepsilon_v^{Com(\sigma)}\right) \cdot |Com(\sigma)| \tag{4.2}$$

Sia ora $g \in Sep(\sigma)$ tale che $v \in g$, allora:

$$|Com(\sigma + \langle \{v\}, g \setminus \{v\} \rangle)| \leq \varepsilon_v^{Com(\sigma)} \cdot |Com(\sigma)| \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Equazione (4.2):

$$|Com(\sigma + \langle \varnothing, \{v\} \rangle)| = |Com(\sigma)| - |\{h \in Com(\sigma) \mid v \in h\}| =$$

$$= \big(1 - \frac{|\{h \in Com(\sigma) \mid v \in h\}|}{|Com(\sigma)|}\big) \cdot |Com(\sigma)| = \big(1 - \varepsilon_v^{Com(\sigma)}\big) \cdot |Com(\sigma)|$$

Equazione (4.3):

Definiamo i seguenti insiemi:

$$K_{\{v\}} = \{h \in \mathrm{Com}(\sigma) \mid h \cap g = \{v\}\}$$

$$K_{[v]} = \{h \in \mathrm{Com}(\sigma) \mid h \cap g \ni v\}$$

Allora:

$$K_{\{v\}} \subseteq K_{[v]} \Rightarrow |K_{\{v\}}| \leq |K_{[v]}| = |\{h \in \mathrm{Com}(\sigma) \mid v \in h\}| = \varepsilon_v^{Com(\sigma)} \cdot |Com(\sigma)|$$

Ora basta mostrare che $K_{\{v\}} = Com(\sigma + \langle\{v\}, g \setminus \{v\}\rangle)$. Dato che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ soddisfano la proprietà d'intersezione e $Com(\sigma + \langle\{v\}, g \setminus \{v\}\rangle) \subseteq \mathcal{H}$, allora ogni arco di $Com(\sigma + \langle\{v\}, g \setminus \{v\}\rangle)$ interseca g. Allora:

$$g \setminus \{v\} \subseteq Ex_\sigma \Rightarrow \forall h \in Com(\sigma + \langle\{v\}, g \setminus \{v\}\rangle), h \cap g = \{v\}$$

Quindi $K_{\{v\}} = Com(\sigma + \langle\{v\}, g \setminus \{v\}\rangle)$. $\square$

Mostriamo, di seguito, come l'esclusione di v (Estensione di Tipo 1, Eq. 4.2) o l'inclusione critica di v (Estensione di Tipo 2, Eq. 4.3) ci permetta di ridurre la cardinalità di $Com(\sigma)$ di almeno la metà.

- (Estensione di Tipo 1) Se v appartiene ad almeno la metà degli archi di $Com(\sigma)$, allora $\varepsilon_v^{Com(\sigma)} \geq \frac{1}{2}$. Dunque, applicando un'estensione di tipo 1, si ottiene:

$$|Com(\sigma + \langle\varnothing, \{v\}\rangle)| = \left(1 - \varepsilon_v^{Com(\sigma)}\right) \cdot |Com(\sigma)| \leq \frac{|Com(\sigma)|}{2}$$

- (Estensione di Tipo 2) Alternativamente, se v appartiene a meno della metà degli archi di $Com(\sigma)$, allora $\varepsilon_v^{Com(\sigma)} \leq \frac{1}{2}$. Dunque, applicando un'estensione di tipo 2, si ottiene:

$$|Com(\sigma + \langle\{v\}, G \setminus \{v\}\rangle)| \leq \varepsilon_v^{Com(\sigma)} \cdot |Com(\sigma)| \leq \frac{|Com(\sigma)|}{2}$$

Al fine di massimizzare l'efficacia di questa proprietà, analizzeremo la *frequenza* dei vertici liberi per decidere se l'estensione più efficiente sia l'inclusione o l'esclusione.

Definizione 4.1.4 (Vertici frequenti)**.** Sia σ un assegnamento. Un vertice $v \in Free_\sigma$ si dice *frequente* in σ se v è contenuto in almeno la metà degli archi di $Com(\sigma)$. In caso contrario, diciamo che v è *infrequente* in σ. Indicheremo con $Freq_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma)$ e $Infreq_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma)$ gli insiemi dei vertici frequenti e infrequenti, rispettivamente.

Come per $Sep_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p)$ e $Com_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma_p)$, quando gli ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono inequivocabilmente determinati dal contesto, $Freq_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma)$ e $Infreq_{\mathcal{G},\mathcal{H}}(\sigma)$ verranno indicati semplicemente con $Freq(\sigma)$ e $Infreq_(\sigma)$.

Definizione 4.1.5 (Vertici convenienti)**.** Sia σ un assegnamento coerente con un new transversal minimale T di $\mathcal{G}$, tale che $Com(\sigma) \neq \emptyset$. Sia $v \in Free_\sigma$. Se $v \in Freq(\sigma) \wedge v \notin T$, allora diciamo che v è un vertice *conveniente da escludere*. Viceversa, se $v \in Infreq(\sigma) \cap T$ diciamo che è *conveniente da includere*. In entrambi i casi, diremo che v è un vertice *conveniente*.

Abbiamo dunque descritto una strategia per la scelta delle estensioni d'assegnamento $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ da adottare a ogni passaggio ricorsivo. Lo scopo primario di questa strategia è convergere rapidamente a un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Durante questo processo, l'algoritmo può raggiungere un assegnamento σ, testimone della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, e in tal caso si arresta.

Tuttavia, in assenza di vertici convenienti, le uniche assegnazioni coerenti con un new transversal T devono soddisfare:

- $v \in Freq(\sigma) \Rightarrow v \in In$.
- $v \in Infreq(\sigma) \Rightarrow v \in Ex$.

Definizione 4.1.6 (Assegnamento aumentato)**.** Sia $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ un assegnamento. Definiamo $\sigma^+ = \langle In \cup Freq(\sigma), Ex \cup Infreq(\sigma) \rangle$ come l'assegnamento *aumentato* di σ.

I seguenti lemmi formalizzano il risultato cardine della sezione *Guess*.

Lemma 4.1.7. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi che soddisfano la proprietà d'ntersezione. Allora esiste T new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ $\iff$ esiste p nodo di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, a profondità al più $\lfloor \log |\mathcal{H}| \rfloor + 1$, tale che σ_p^+ sia un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia T un new transversal minimale di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. L'assegnamento vuoto σ_ϵ, associato alla radice di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, è chiaramente coerente con T. Sia p un nodo di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tale che σ_p sia coerente con T, $Com(\sigma_p) \neq \emptyset$ e σ_p sia estendibile tramite un vertice conveniente. Sia σ_q tale estensione d'assegnamento, tramite vertice conveniente. Osserviamo che esiste un nodo q in $\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{H})$, figlio di p, tale che l'assegnamento associato a q sia σ_q. Ciò è garantito dal fatto che $\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ rappresenta tutte le possibili estensioni d'assegnamento ammissibili.

Induttivamente, a partire dalla radice, costruiamo una sequenza di nodi $s = (p_0, p_1, \ldots, p_k)$ di lunghezza massimale, dove ogni nodo p_i è ottenuto estendendo $\sigma_{p_{i-1}}$ tramite l'inclusione o l'esclusione di un vertice conveniente coerente con T. Per il Lemma 4.1.3, ogni estensione conveniente dimezza $|Com(\sigma)|$. Poiché $|Com(\sigma_\epsilon)| \leq |\mathcal{H}|$, la lunghezza k della sequenza è limitata: $k \leq \lfloor \log |\mathcal{H}| \rfloor + 1$.

Per dimostrare che $\sigma^+_{p_k}$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ dobbiamo analizzare due casi distinti:

1. $Com(\sigma_{p_k}) = \emptyset$: Ciò implica che Ex_{p_k} interseca ogni arco di $\mathcal{H}$, quindi Ex_{p_k} è un transversal di $\mathcal{H}$ per definizione. Per la coerenza di σ_{p_k} con T, si ha che $Ex_{p_k} \cap T = \emptyset$. Dato che T interseca tutti gli archi di $\mathcal{G}$, Ex_{p_k} non potrà contenere nessun arco di $\mathcal{G}$, dunque Ex_{p_k} è un independente set di $\mathcal{G}$.

   Otteniamo così che Ex_{p_k} è un new transversal di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathcal{G}$.

   Osserviamo che:

   $$Com(\sigma_{p_k}) = \emptyset \Rightarrow Freq(\sigma_{p_k}) = Free_{p_k}$$

   Allora:

   $$\sigma^+_{p_k} = \langle In_{p_k} \cup Freq(\sigma_{p_k}), Ex_{p_k} \cup Infreq(\sigma_{p_k})\rangle = \langle In_{p_k} \cup Freq(\sigma_{p_k}), Ex_{p_k}\rangle$$
   $$= \langle \overline{Ex_{p_k}}, Ex_{p_k}\rangle$$

   Pertanto, dal il Lemma 2.2.2, si ha che $\overline{Ex_{p_k}}$ è un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$, quindi $\sigma^+_{p_k}$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

2. $Com(\sigma_{p_k}) \neq \emptyset$: Poiché la sequenza non può essere estesa ulteriormente, non ci sono vertici convenienti in σ_{p_k} rispetto al transversal T.

Nel caso in cui $Sep(\sigma_{p_k}) \neq \emptyset$, allora l'assenza di vertici convenienti, combinata con la coerenza di σ_{p_k} con T, impone che $Freq(\sigma_{p_k}) \subseteq T \wedge Infreq(\sigma_{p_k}) \subseteq \overline{T}$. Si ottiene dunque che:

$$\sigma_{p_k}^{+} = \langle In_{p_k} \cup Freq(\sigma_{p_k}), Ex_{p_k} \cup Infreq(\sigma_{p_k})\rangle = \langle T, \overline{T}\rangle.$$

Quindi $\sigma_{p_k}^{+}$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Tuttavia, se $Sep(\sigma_{p_k}) = \emptyset$, allora significa che In_{p_k} interseca tutti gli archi di $\mathcal{G}$, dunque è un transversal di $\mathcal{G}$. Dato che T è un transversal minimale e, per coerenza di σ_{p_k} con T, $In_{p_k} \subseteq T$, allora $In_{p_k} = T$. Sia $v \in Free_{\sigma_{p_k}}$, allora $v \in (\overline{T} \setminus Ex_{p_k})$. Se per assurdo $v \in Freq(\sigma_{p_k})$ allora v sarebbe stato un vertice facile da escludere, ma dato che una tale estensione non è stata eseguita, significa che $v \in Infreq(\sigma_{p_k})$.

Allora:

$$\sigma_{p_k}^{+} = \langle In_{p_k} \cup Freq(\sigma_{p_k}), Ex_{p_k} \cup Infreq(\sigma_{p_k})\rangle =$$

$$= \langle In_{p_k}, Ex_{p_k} \cup Infreq(\sigma_{p_k})\rangle = \langle In_{p_k}, \overline{In_{p_k}}\rangle = \langle T, \overline{T}\rangle$$

Come prima, otteniamo che $\sigma_{p_k}^{+}$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

($\Leftarrow$) Se esiste un tale nodo p di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, allora, per definizione di testimone doppio, esiste un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. $\square$

Il Lemma 4.1.8 dimostra come l'ordine con cui le etichette compaiono nel cammino non deterministico Π è ininfluente. Solo l'insieme delle etichette Σ è determinante per la generazione finale del testimone aumentato $\sigma(\Sigma)^+$.

Lemma 4.1.8. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi che soddisfano la proprietà d'ntersezione. Allora esiste T new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$ $\Longleftrightarrow$ esiste $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ consistente tale che $\sigma(\Sigma)^+$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia T un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Per il lemma precedente, l'esistenza di T equivale all'esistenza di un cammino Π in $\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ di lunghezza limitata $k \leq \lfloor \log |\mathcal{H}| \rfloor + 1$, tale che l'assegnamento aumentato $\sigma(\Pi)^+$ sia un testimone doppio. Definiamo ora Σ^Π come l'insieme delle etichette contenute in Π, ignorandone l'ordine. Poiché la lunghezza di Π è limitata logaritmicamente, Σ^Π appartiene a $\mathcal{L}^{log}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

Si ha che $\sigma(\Sigma^\Pi)^+ = \sigma(\Pi)^+$. Infatti gli insiemi di vertici inclusi (In) ed esclusi (Ex) generati da un assegnamento σ dipendono solo dalle etichette presenti e non dal loro ordine di applicazione.

Poiché Π è un cammino in $\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\sigma(\Pi)$ è per definizione un assegnamento consistente. La relazione $\sigma(\Sigma^\Pi) = \sigma(\Pi)$ garantisce quindi che l'insieme Σ^Π sia consistente. Infine, poiché $\sigma(\Pi)^+$ è un testimone doppio, anche $\sigma(\Sigma^\Pi)^+$ risulta esserlo.

($\Leftarrow$) Se esiste un tale insieme di etichette Σ, allora, per definizione di testimone doppio, esiste un new transversal di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. $\square$

4.2 Check

La fase di verifica (*Check*) richiede che i concetti matematici discussi (ipergrafi e assegnamenti) siano espressi in FO(COUNT). Sia $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G},\mathcal{H} \rangle$ un'istanza di $\overline{\text{DUAL}}$. L'approccio adottato consiste, dunque, nell'associare all'istanza $\mathcal{I}$ una struttura relazionale $\mathcal{A}_{\langle \mathcal{G},\mathcal{H} \rangle}$. L'universo $A_{\langle \mathcal{G},\mathcal{H} \rangle}$ della struttura $\mathcal{A}_{\langle \mathcal{G},\mathcal{H} \rangle}$ è costituito da oggetti che rappresentano tutti gli elementi dell'istanza:

$$A_{\langle \mathcal{G},\mathcal{H} \rangle} = \{o_v \mid v \in V\} \cup \{o_g \mid g \in \mathcal{G}\} \cup \{o_h \mid h \in \mathcal{H}\} \cup \{o_\mathcal{G}, o_\mathcal{H}\}$$

dove sono inclusi:

- Un oggetto o_v per ogni vertice $v \in V$.
- Un oggetto o_g per ogni arco $g \in \mathcal{G}$ e un oggetto o_h per ogni arco $h \in \mathcal{H}$.
- Due oggetti distinti, $o_\mathcal{G}$ e $o_\mathcal{H}$, per rappresentare globalmente i due ipergrafi.

Le relazioni che utilizzeremo sono le seguenti:

- $Vertex(x)$ è una relazione unaria. Significa che l'oggetto x è un vertice. Possiamo esprimere questa relazione nel seguente modo:

$$v \in V \equiv Vertex(v)$$

- $Hyp(x)$ è una relazione unaria. Significa che l'oggetto x è un ipergrafo.

- $EdgeOf(x, y)$ è una relazione binaria. Significa che l'oggetto x è un arco dell'oggetto y, il quale rappresenta un ipergrafo. Possiamo esprimere la relazione di appartenenza di un arco a un ipergrafo nel seguente modo:

$$g \in \mathcal{G} \equiv Hyp(o_{\mathcal{G}}) \wedge EdgeOf(g, o_{\mathcal{G}})$$

$$h \in \mathcal{H} \equiv Hyp(o_{\mathcal{H}}) \wedge EdgeOf(h, o_{\mathcal{H}})$$

- $In(x, y)$ è una relazione binaria. Significa che l'oggetto x è un vertice che appartiene all'oggetto y, il quale rappresenta un arco. Possiamo esprimere questa relazione nel seguente modo:

$$v \in g \equiv In(v, g)$$

Tuttavia, l'algoritmo ND-NotDUAL esegue dei controlli deterministici non solo su ipergrafi, ma anche su insiemi di etichette. Dunque, dobbiamo esprimere tramite la logica del primo ordine anche l'insieme di etichette Σ, scelto non deterministicamente.

Per definizione Σ è costituito da etichette associate alle due tipologie di estensione d'assegnamento. Pertanto, descriviamo le seguenti relazioni:

- $S_1(x)$ è una relazione unaria. Significa che l'oggetto x è un vertice tale che $-x \in \Sigma$. Possiamo esprimere questa relazione nel seguente modo:

$$-v \in \Sigma \equiv S_1(v)$$

- $S_2(x, y)$ è una relazione binaria. Significa che l'oggetto x è un vertice e l'oggetto y è un arco, tali che $(x, y) \in \Sigma$. Possiamo esprimere questa relazione nel seguente modo:

$$(v, g) \in \Sigma \equiv S_2(v, g)$$

Dedicheremo i seguenti paragrafi alla spiegazione di tutti i controlli deterministici presenti all'interno dell'algoritmo ND-NotDUAL.

CHECK SEMPLICITÀ e PROPRIETÀ D'INTERSEZIONE Il primo controllo eseguito nell'algoritmo è la verifica CHECK-SIMPLE-AND -INTERSECTION$(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ (Linea 3). Nel caso in cui ritorni *False*, l'algoritmo si arresta in uno stato accettante, il che significa che $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ è un'*istanza-SI* si $\overline{\text{DUAL}}$.

I seguenti lemmi mostrano come esprimere i concetti di semplicità e proprietà d'intersezione di ipergrafi in FO(COUNT).

Lemma 4.2.1. Sia $\mathcal{G}$ un ipergrafo. Decidere se $\mathcal{G}$ è semplice è esprimibile in FO(COUNT).

Dimostrazione. Ricordiamo che un ipergrafo $\mathcal{G}$ è semplice se non esiste un arco di $\mathcal{G}$ che sia sottoinsieme proprio di un altro arco di $\mathcal{G}$.

$$\begin{gathered} \mathit{simple}(x) \equiv \mathit{Hyp}(x) \land (\forall g, h)\big((g \in x \land h \in x \land g \neq h) \to (\exists v) \\ (v \in V \land v \in g \land \neg(v \in h))\big) \end{gathered}$$

□

Lemma 4.2.2. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi. Decidere se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ soddisfano la proprietà d'intersezione è esprimibile in FO(COUNT).

Dimostrazione. Ricordiamo che due ipergrafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ soddisfano la proprietà d'intersezione se $\forall g \in \mathcal{G}, \forall h \in \mathcal{H}, g \cap h \neq \emptyset$.

$$\begin{gathered} \mathit{intersection\text{-}property} \equiv (\forall g, h)\big((g \in \mathcal{G} \land h \in \mathcal{H}) \to \\ (\exists v)(v \in V \land v \in g \land v \in h)\big). \end{gathered}$$

□

CHECK CONSISTENZA Il secondo controllo CHECK -CONSISTENCY($\mathcal{G}, \Sigma$) (Linea 6) ha la funzione di verificare che il cammino Σ selezionato non generi un assegnamento incoerente. Pertanto, l'algoritmo rifiuta i *guess* non consistenti.

Definizione 4.2.3 (Congruenza)**.** Diciamo che l'insieme di etichette Σ scelto non deterministicamente è *congruente* se, per ogni oggetto x per cui la relazione unaria $S_1(x)$ è soddisfatta, l'oggetto x deve rappresentare effettivamente un vertice (quindi $Vertex(x)$ è $True$), e, per ogni coppia di oggetti (x, y) per cui la relazione binaria $S_2(x, y)$ è soddisfatta, l'oggetto x deve rappresentare effettivamente un vertice appartenente all'oggetto y, il quale deve rappresentare un arco di $\mathcal{G}$ (quindi $Vertex(x), EdgeOf(y, \mathcal{G})$ e $In(x, y)$ sono $True$).

Lemma 4.2.4. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi e sia Σ un insieme di etichette di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Decidere la congruenza e la consistenza di Σ è esprimibile in FO(COUNT).

Dimostrazione. La seguente espressione indica la proprietà di congreunza di Σ:

$$congruentGuess \equiv (\forall v)(S_1(v) \rightarrow v \in V)\wedge$$

$$(\forall w, g)(S_2(w, g) \rightarrow w \in V \wedge g \in \mathcal{G} \wedge w \in g)$$

Ricordiamo che Σ è consistente se $In(\Sigma) \cap Ex(\Sigma) = \emptyset$. Al fine di stabilire la consistenza di Σ, si formalizza inizialmente la condizione di inconsistenza per un vertice generico v, per poi successivamente verificarla per ogni vertice appartenente all'insieme V.

$$inconsistent(w) \equiv w \in V \wedge (\exists g)(S_2(w, g) \wedge (S_1(w)\vee$$

$$(\exists v, h)(S_2(v, h) \wedge v \neq w \wedge w \in h)))$$

$$consistentGuess \equiv (\forall v)(v \in V \rightarrow \neg inconsistent(v))$$

□

CHECK TESTIMONE DOPPIO Dopo aver superato i controlli di congruenza e consistenza di Σ, l'algoritmo procede alla verifica finale tramite CHECK-AUG-DOUBLEWITNESS($\mathcal{G}, \mathcal{H}, \Sigma$) (Linea 9). In questa fase, l'algoritmo determina se l'assegnamento aumentato $\sigma(\Sigma)^+$, generato dall'insieme di etichette Σ, costituisce effettivamente un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

La verifica si basa sul seguente lemma, che fornisce un criterio necessario e sufficiente per riconoscere un testimone doppio in termini degli insiemi $Sep(\sigma)$ e $Com(\sigma)$:

Lemma 4.2.5. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi e $\sigma = \langle In, Ex \rangle$ un assegnamento. Allora σ è testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ se e solo se

$$\mathrm{Sep}(\sigma) = \emptyset \wedge \mathrm{Com}(\sigma) = \emptyset \tag{4.4}$$

Lemma 4.2.6. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due ipergrafi e sia Σ un insieme di etichette di $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Decidere se $\sigma(\Sigma)^+$ è testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ è esprimibile in FO(COUNT).

Dimostrazione. Sfruttando l'equivalenza imposta dal lemma precedente, è sufficiente dimostrare che la condizione (4.4) è esprimibile con FO(COUNT). Sia $\sigma(\Sigma) = \langle In(\Sigma), Ex(\Sigma) \rangle$ l'assegnamento associato a Σ. Le seguenti formule valutano l'appartenenza di un vertice a $In(\Sigma)$ e $Ex(\Sigma)$:

$$I\text{-}guess(v) \equiv v \in V \wedge (\exists g)(S_2(v, g))$$

$$E\text{-}guess(v) \equiv v \in V \wedge (S_1(v) \vee (\exists w, g)(S_2(w, g) \wedge w \neq v \wedge v \in g)).$$

Definiamo ora le seguenti relazioni:

- $PLUS(x, y, z)$ è una relazione ternaria. Rappresenta la somma e risulta *True* se $x + y = z$.
- $SUCC(x, y)$ è una relazione binaria. Risulta *True* se l'oggetto y è l'immediato successore dell'oggetto x.

Per rappresentare il concetto di frequenza di un vertice v in $\sigma(\Sigma)$, dobbiamo verificare che v appartenga ad almeno la metà degli archi di $Com(\sigma)$. La seguente formula risulta *True* se $y = \lceil \frac{x}{2} \rceil$:

$$half(x, y) \equiv PLUS(y, y, x) \vee (\exists z)(PLUS(y, y, z) \wedge SUCC(x, z)).$$

In ordine, le seguenti formule verificano: che un arco appartenga ad $Com(\Sigma)$, il numero di archi di $Com(\Sigma)$, il numero di archi di $Com(\Sigma)$ che contengono un vertice v e che un vertice v sia frequente in $\sigma(\Sigma)$.

$$\mathit{com}(h) \equiv h \in \mathcal{H} \wedge (\forall v)((v \in V \wedge v \in h) \rightarrow \neg \mathit{E\text{-}guess}(v))$$

$$\mathit{count\text{-}com}(n) \equiv (\exists! nh)(h \in \mathcal{H} \wedge \mathit{com}(h))$$

$$\mathit{count\text{-}com\text{-}inc}(v, n) \equiv v \in V \wedge (\exists! nh)(h \in \mathcal{H} \wedge \mathit{com}(h) \wedge v \in h)$$

$$freq(v) \equiv v \in V \wedge \neg \mathit{I\text{-}guess}(v) \wedge \neg \mathit{E\text{-}guess}(v) \wedge$$

$$(\exists n, m, o)(\mathit{count\text{-}com}(n) \wedge \mathit{count\text{-}com\text{-}inc}(v, m) \wedge half(n, o) \wedge (o = m \vee o < m)).$$

Ora, le due formule successive eseguono un controllo sui vertici, per verificare se appartengono ai vertici inclusi ed esclusi, rispettivamente, di $\sigma(\Sigma)^+$:

$$\mathit{I\text{-}aug}(v) \equiv v \in V \wedge (\mathit{I\text{-}guess}(v) \vee freq(v))$$

$$\mathit{E\text{-}aug}(v) \equiv v \in V \wedge (\mathit{E\text{-}guess}(v) \vee \neg freq(v))$$

Infine, esprimiamo in FO(COUNT) la condizione (4.4), verificando prima l'appartenenza di un arco agli insiemi $\mathit{Sep}(\sigma(\Sigma)^+)$ e $Com(\sigma(\Sigma)^+)$

$$\mathit{sep\text{-}aug}(g) \equiv g \in \mathcal{G} \wedge (\forall v)((v \in V \wedge v \in g) \rightarrow \neg \mathit{I\text{-}aug}(v))$$

$$\mathit{com\text{-}aug}(h) \equiv h \in \mathcal{H} \wedge (\forall v)((v \in V \wedge v \in h) \rightarrow \neg \mathit{E\text{-}aug}(v))$$

$$CheckGuessAugDoubleWitness \equiv (\forall g)(g \in \mathcal{G} \rightarrow \neg \mathit{sep\text{-}aug}(g)) \wedge$$

$$(\forall h)(h \in \mathcal{H} \rightarrow \neg \mathit{com\text{-}aug}(h))$$

□

4.3 Correttezza algoritmica e risultati di complessità

Per concludere, mostriamo la correttezza dell'algoritmo ND-NotDUAL e il risultato fondamentale di complessità del problema $\overline{\text{DUAL}}$, dal quale seguono immediatamente due corollari.

Teorema 4.3.1. Sia $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ un'istanza di $\overline{\text{DUAL}}$. Allora, l'istanza $\mathcal{I}$ appartiene al linguaggio $\overline{\text{DUAL}}$ se e solo se esiste un ramo di computazione dell'algoritmo ND-NotDUAL($\mathcal{G}, \mathcal{H}$) che termina in uno stato accettante.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Assumiamo che esista un ramo di computazione dell'algoritmo ND-NotDUAL($\mathcal{G}, \mathcal{H}$) che termini in uno stato accettante. L'accettazione può avvenire esclusivamente in due punti dell'algoritmo:

1. Linea 4: Significa che la verifica CHECK-SIMPLE-AND-INTERSECTION è fallita. Cioè, o $\mathcal{G}$ e/o $\mathcal{H}$ non sono semplici, oppure $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non soddisfano la proprietà di intersezione. Per il Lemma 2.2.3, si conclude che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono non duali.

2. Linea 10: Significa che i controlli precedenti sono stati superati, quindi l'insieme di etichette Σ scelto non deterministicamente è risultato consistente. Il successo del controllo CHECK-AUG-DOUBLEWITNESS alla Linea 9 implica che l'assegnamento aumentato $\sigma(\Sigma)^+$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. Per il Lemma 4.1.8, l'esistenza di tale Σ è equivalente all'esistenza di un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Tramite il Lemma 2.2.3, l'esistenza di un new transversal implica che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non sono duali.

In entrambi i casi, l'accettazione da parte dell'algoritmo implica la non dualità dell'istanza, il che significa che $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ un'istanza di $\overline{\text{DUAL}}$.

($\Rightarrow$) Supponiamo che $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ sia un'*istanza-SI* di $\overline{\text{DUAL}}$. Per il Lemma 2.2.3, se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non sono duali, allora si verifica uno dei seguenti scenari:

1. Almeno uno tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non è un ipergrafo semplice: l'algoritmo riconosce tale condizione alla Linea 3, tramite il controllo ¬CHECK-SIMPLE -AND-INTERSECTION($\mathcal{G}, \mathcal{H}$), terminando in uno stato accettante.

2. $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non soddisfano la proprietà d'intersezione: come nel punto precedente, l'algoritmo riconosce tale condizione alla Linea 3, terminando in uno stato accettante.

3. Esiste un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$: dal Lemma 4.1.8, questa condizione è equivalente all'esistenza di un insieme di etichette consistente $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tale che l'assegnamento aumentato $\sigma(\Sigma)^+$ sia un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. Poiché l'algoritmo ND-NotDUAL è non deterministico, abbiamo la garanzia che possa scegliere (o indovinare) non deterministicamente tale Σ alla Linea 2. Pertanto, tale ramo di computazione raggiungerà la Linea 9, superando i controlli precedenti e terminando in uno stato accettante.

Abbiamo, dunque, dimostrato che in ogni caso di non dualità esiste un ramo computazionale in cui l'algoritmo termina in uno stato accettante. □

Teorema 4.3.2. $\overline{\text{DUAL}} \in \text{GC}(log^2(N), \text{TC}^0)$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla scomposizione dell'Algoritmo ND-NotDUAL nelle sue componenti deterministica (*Check*) e non deterministica (*Guess*):

- ($Check \in \text{TC}^0$) Nel capitolo Check abbiamo mostrato che tutti i controlli deterministici presenti nell'algoritmo ND-NotDUAL sono esprimibili in logica del primo ordine con operatori di conteggio (FO(COUNT)). Quindi, la fase di verifica deterministica appartiene a TC^0.

- ($Guess \in \mathcal{O}(\log^2 N)$) La fase non deterministica (Linea 2) richiede di indovinare l'insieme di etichette $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Dobbiamo dimostrare che la dimensione totale di questo guess è limitata da $\mathcal{O}(\log^2 N)$ bits.

Supponiamo che $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non siano duali. Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ non sono semplici o non soddisfano la proprietà d'intersezione, allora l'algoritmo riconosce direttamente $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ come non duali, ignorando l'insieme di etichette Σ e, di conseguenza, anche quanti bits sono necessari al *Guess*.

Alternativamente, se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ soddisfano entrambe le precondizioni di semplicità e proprietà d'intersezione, allora esiste un new transversal T di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{H}$. Dal Lemma 4.1.8, esiste $\Sigma \in \mathcal{L}^{log}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ consistente tale che $\sigma(\Sigma)^+$ è un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. Poiché avevamo indicato con $N = \|G\| + \|H\|$ la taglia dell'istanza $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$, allora $|\Sigma| \in \mathcal{O}(\log N)$. Ogni elemento di Σ è un'etichetta associata a un'estensione d'assegnamento, rappresentata da un vertice o da una coppia vertice arco. Dato che $\mathcal{O}(\log N)$ bits sono sufficienti a rappresentare vertici e archi di un ipergrafo, anche ogni etichetta di Σ è rappresentabile con $\mathcal{O}(\log N)$ bits.

In conclusione, sono necessari solo $\mathcal{O}(\log^2 N)$ bits per rappresentare correttamente Σ.

Quindi $\overline{\text{DUAL}} \in \text{GC}(log^2(N), \text{TC}^0)$. □

Corollario 4.3.3. $\overline{\text{DUAL}} \in \text{GC}(log^2(N), \text{LOGSPACE})$

Dimostrazione. Deriva direttamente dell'inclusione nota

$$\text{TC}^0 \subseteq \text{LOGSPACE}$$

□

Corollario 4.3.4. $\text{DUAL} \in \text{DSPACE}[log^2(N)]$

Dimostrazione.

$$\overline{\text{DUAL}} \in \text{GC}(log^2(N), \text{LOGSPACE}) \subseteq \text{DSPACE}[log^2(N)]$$

La chiusura di $\text{DSPACE}[log^2(N)]$ rispetto al passaggio al complementare implica che $\text{DUAL} \in \text{DSPACE}[log^2(N)]$. □

Conclusioni

Il presente elaborato ha avuto come obiettivo l'analisi e la collocazione formale del problema $\overline{\text{DUAL}}$ all'interno della classe $\text{GC}(\log^2(n), \text{TC}^0)$. Per dimostrare questo risultato, è stata adottata una procedura basata sul modello di calcolo non deterministico, nota come *guess and check*, formalizzato nell'algoritmo ND-NotDUAL.

Il problema $\overline{\text{DUAL}}$ stabilisce se un ipergrafo $\mathcal{H}$ non sia il duale di un ipergrafo $\mathcal{G}$. L'attenzione dell'elaborato è rivolta alla ricerca di un new transversal, condizione sufficiente alla non dualità. Tuttavia, l'algoritmo ND-NotDUAL non cerca concretamente un new transversal, ma una prova della sua esistenza, ovvero un testimone doppio della non dualità di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

La prima fase non deterministica consiste nella scelta di un certificato di prova Σ, un insieme di etichette di piccola dimensione. Abbiamo dimostrato che il *guess* totale richiede soltanto $\mathcal{O}(\log^2(N))$ bits di memoria.

La seconda fase deterministica esegue una serie di controlli volti alla verifica che almeno una delle tre condizioni del Lemma 2.2.4 fallisca. Si è dimostrato che tutti questi controlli possono essere espressi in logica del primo ordine con quantificatori di conteggio (FO(COUNT)). Ciò permette di collocare la fase di *check* nella classe TC^0.

Unendo questi due risultati, si ottiene la classificazione finale del problema $\overline{\text{DUAL}}$, collocandolo in $\text{GC}(\log^2(n), \text{TC}^0)$.

Bibliografia

[1] S. Klamt, "Generalized concept of minimal cut sets in biochemical networks," Biosystems, vol. 83, no. 2–3, pp. 233–247, Jan. 2006. Disponibile all'url

https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0303264705001322?via%3Dihub

[2] S. Klamt e E. D. Gilles, "Minimal cut sets in biochemical reaction networks," Bioinformatics, vol. 20, no. 2, pp. 226–234, Jan. 2004. Disponibile all'url

https://academic.oup.com/bioinformatics/article/20/2/226/204870

[3] D. Gunopulos, H. Mannila, R. Khardon e H. Toivonen, "Data mining, hypergraph transversals, and machine learning (extended abstract)," in Proc. Sixteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symp. on Principles of Database Systems (PODS '97), New York, NY, USA, 1997, pp. 209–216. Disponibile all'url

https://dl.acm.org/doi/10.1145/263661.263684

[4] G. Gottlob e E. Malizia, "Achieving New Upper Bounds for the Hypergraph Duality Problem through Logic," SIAM J. Comput., vol. 47, no. 2, pp. 456–492, 2018. Disponibile all'url

https://arxiv.org/abs/1407.2912

[5] M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation, 3a ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

[6] J. L. Balcázar, J. Díaz, e J. Gabarró, Structural Complexity I, 2a ed. Berlin: Springer, 1995.