Università di Bologna
Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Funzioni della dimostrazione nella pratica della matematica NUC

Relatore:
Prof. Maffia Andrea

Candidato:
Macchinizzi Giacomo
Matricola: 0001122040

19 dicembre 2025

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Introduzione

L'Etnomatematica studia il legame che c'è tra cultura e sviluppo della matematica, e si occupa di indagare pratiche, artefatti, valori e teorie matematiche che emergono in diversi gruppi culturali. Come disciplina, nasce per studare la matematica nelle popolazioni indigene, mentre oggi si sta spostando verso quella occidentale, o come verrà chiamata in questa tesi, matematica NUC (Near Universal Conventional). Ciò che la differenzia da altre matematiche è l'eredità lasciata dagli antichi greci, che si sono distinti per aver sviluppato il pensiero astratto e introdotto le dimostrazioni. Proprio la pratica del dimostrare è divenuta il principale strumento epistemico ad uso dei matematici, ma resta un fatto umano culturalmente situato, che è mutato nel tempo e si è adattato ai valori culturali di epoca in epoca. Studiare la dimostrazione significa studiare un tratto identitario, forse il principale, della cultura matematica occidentale. In questa tesi, nel capitolo uno, si fornisce una panoramica sui risultati più rilevanti dell'Etnomatematica, dividendoli per le dimensioni di cui si occupa: cognitiva, concettuale, storica, epistemologica, educativo-didattica e politica; ciò permette di comprendere e formulare la direzione di ricerca intrapresa: lo studio della cultura matematica che si esprime nel contesto accademico occidentale. Successivamente, si riporta il problema didattico riguardante la dimostrazione, approfondendo il suo legame con l'argomentazione e le funzioni che esercita; alla fine di questo capitolo si hanno tutte le conoscenze per comprendere e formulare la domanda di ricerca: quali funzioni della dimostrazione emergono dalla pratica didattica e di ricerca della matematica NUC accademica? Nel terzo capitolo, si prova a rispondere alla domanda attraverso un'indagine riguardo le convizioni di alcuni docenti di matematica su ruoli e funzioni ricoperti dalla pratica del dimostrare nella ricerca e nella didattica universitaria di oggi. Per fare ciò, si sono organizzati due diversi focus group, ricreando una micro-comunità di matematici, e sono state somminstrate le seguenti domande:

1. Come fare matematica senza dimostrare?

2. Come insegnare matematica senza dimostrare?

Dall'analisi delle trascrizioni e delle registrazioni delle discussioni è stato possibile individuare tre funzioni caratterizzanti del dimostrare come pratica matematica: il capire, inteso come far comprendere a se stessi; il sistematizzare, ossia l'organizzare i risultati ottenuti nel sistema deduttivo della matematica; e il formare l'intuizione, per la quale non si intende solamente il contribuire alla costruzione di modelli intuitivi riguardo gli oggetti matematici, ma il costruirne anche riguardo agli oggetti meta-matematici, come la Dimostrazione. In questo senso, si individua una nuova funzione, qui chiamata Didattica, che si esprime nell'azione didattica e che ha lo scopo di insegnare il ragionamento matematico, ossia le diverse modalità di pensiero che i matematici mettono in atto per risolvere un problema. Un secondo risultato altrettanto interessante è la quasi totale assenza del riferimento al ruolo argomentativo che la dimostrazione dovrebbe ricoprire. Questo suggerisce che la dimostrazione possa essere vista come un processo non argomentativo e caratterizzato dal suo ruolo nella comprensione, sistematizzazione e formazione di intuizione nella disciplina. Questo risultato apre nuove strade nello studio dell'Etnomatematica, in quanto fornisce un quadro teorico per ricercare processi dimostrativi in culture in cui l'argomentazione per deduzione inferenziale non si è diffusa.

1. Introduzione all'Etnomatematica

1.1 Cosa si intende con Etnomatematica

L'Etnomatematica è ispirata dagli studi più generali di Etnoscienza, che iniziano a svilupparsi agli inizi degli anni sessanta come ricerche delle pratiche scientifiche di tribù indigene. Mentre diverse discipline scientifiche come l'astronomia, la botanica e la chimica sono evidentemente influenzate dall'ambiente che offre osservazioni, piante e materiali differenti, la variabilità della matematica è più difficile da cogliere, poiché ritenuta astratta, nonché stendardo di universalità, oggettività e neutralità. Ciononostante, gli studi portati avanti da antropologi mostrarono evidenti differenze tra le pratiche matematiche sviluppate in diversi contesti culturali. Tali studi spinsero D'Ambrosio a porre le basi di una nuova disciplina che si occupasse di studiare la mutua influenza tra cultura e matematica. Così, nel 1985 pubblicò un importante articolo [25] in cui definì l'Etnomatematica come quel campo di ricerca che si pone al confine tra storia e antropologia culturale, e che ha come oggetto di studio i sistemi numerici, spaziali e relazionali. Essa si fonda sul quadro teorico in cui la cultura è definita come l'insieme delle strategie di azione condivise dalla società per rispondere alla realtà che scaturisce dagli eventi generati dalle azioni della società stessa. D'Ambrosio chiarisce questo ciclo con uno schema:

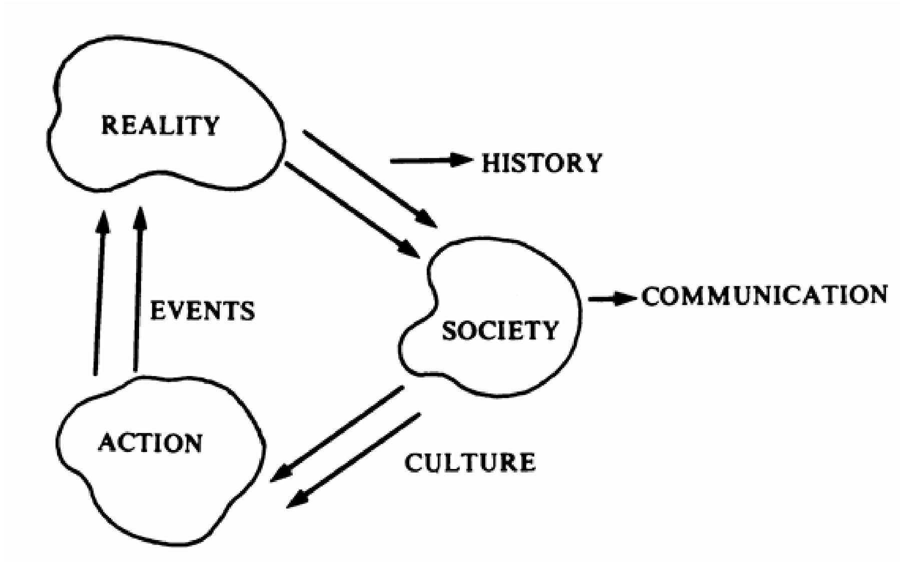

Figura 1.1

In questa tesi il ruolo occupato dalla società sarà talvolta preso da gruppi culturali specifici. L'articolo descrive, poi, un piano di ricerca con l'obiettivo di identificare uno statuto epistemologico per l'Etnomatematica e ritiene necessario rispondere alle seguenti domande per il suo raggiungimento:

1. Le pratiche e le soluzioni dei problemi come passano da essere *ad hoc* a diventare *metodi*?

2. I metodi come diventano teorie?

3. Le teorie come evolvono in invenzioni scientifiche?

Il programma etnomatematico proposto da D'Ambrosio è stato accolto da numerosi ricercatori. Tra di essi troviamo Milton [89], che prima lo presenta: *"this program is concerned with the motives by which memebrs of specific cultures (ethno) developed, over history, the measuring, calculating, inferring, comparing and classifying techniques, and ideas (tics) that allow them to model natural and social enviroments and contexts in order to explain and understand these phenomena (mathema)."* E poi descrive sei importanti dimensioni che si sono sviluppate dal lavoro di D'Ambrosio al 2016: cognitiva, concettuale, storica, epistemologica, educativo-didattica e politica. Esse sono collegate tra di loro con l'obiettivo di analizzare le radici socioculturali della conoscenza matematica. Le ricerche in matematica che si intrecciano con una o più di esse si raccolgono tutte sotto la disciplina Etnomatematica. Si procede ora approfondendo ciascuna dimensione.

1.1.1 Dimensione Cognitiva

La conoscenza matematica viene acquisita, accumulata, sistematizzata e disseminata di generazione in generazione. Così, le idee matematiche che stanno alla base di essa come la quantificazione, la misurazione e lo studio di relazioni; queste idee hanno uno stretto legame con la società e la cultura all'interno delle quali si sviluppano. In questa tesi i termini *congizione matematica*, *processi congitivi matematici* e *pensiero matematico* saranno usati come sinonimi laddove non è indicato diversamente, e faranno riferimento a tutti quei processi mentali che coinvolgono l'acquisizione, la comprensione e l'uso della conoscenza matematica, che comprende funzioni congitive come l'elaborazione numerica, il ragionamento spaziale e il pensiero astratto. D'Ambrosio già nel 1985 spiega come lo studio del legame tra cultura e matematica sia di fondamentale importanza alla luce delle ricerche che legano i processi cognitivi all'ambiente culturale citando il lavoro di Lancy: *Cross-cultural studies in cognition and mathematics. Academic Press, New York (1983).* Oggi, dopo più di quarant'anni, ne abbiamo numerose conferme. In generale sui processi cognitivi, Nisbett [77] riporta come ci siano buone ragioni per credere alle seguenti proposizioni:

1. Alcuni contenuti cognitivi sono universali: i bambini nascono pronti a sviluppare particolari modelli della realtà, tra come teorie della meccanica, teorie dei tipi naturali e la teoria della mente.

2. Tali contenuti universali pongono dei vincoli alla diversità del pensiero umano e alla varietà delle culture possibili.

3. Alcuni processi cognitivi considerati di base sono molto suscettibili al cambiamento anche per gli adulti.

4. Diverse culture differiscono notevolmente nel tipo di procedure inferenziali che usano tipicamente per risolvere uno stesso problema.

5. Le differenze culturali nei processi cognitivi sono così legate alle differenze culturali che risiedono nelle assunzioni di base sulla natura del mondo che la

tradizionale distinzione tra contenuto e processo inizia a sembrare in qualche modo arbitraria.

6. Le pratiche culturali incoraggiano e sostengono certi tipi di processi cognitivi, che a loro volta perpetuano le pratiche culturali.

A sostegno di questi punti Nisbett, riporta delle ricerche che mostrano come i fenomeni culturali siano modellati da fattori cognitivi. Ad esempio, i lavori di Lévy-Strauss [69], [70] descrivono come i miti siano costruiti su metafore del contrasto, come quelle tra natura e cultura, tra bene e male, tra crudo e cotto. E che in ogni società umana si usano il corpo umano e le differenze tra maschio e femmina come simboli per rappresentare diverse relazioni sia del mondo naturale che di quello sociale. La teoria generale sui vincoli che la cognizione pone sulla cultura fu poi esposta da Sperber e dai suoi colleghi antropologi [101], [102], [103]. Essa spiega le caratteristiche culturali in temini di "ecologia delle credenze", secondo cui, per via di condizioni ecologiche, ci sono idee umane che risultano "più facili" da pensare e da comunicare. Tali idee si sviluppano in tutte le culture e sono facilmente trasmissibili da una cultura all'altra. Un esempio è riportato da Berlin e colleghi [14], [12] che evidenziano come ci sia una consistenza sul come le persone categorizzano gli organismi. Nello sviluppare tale tema, Atran [5], argomenta che tutti i gruppi umani usano categorie popolari-biologiche (*folk-biological categories*) che sono basate sulla nozione di specie. Risulta che la classificazione tassonomica per gruppi di ordine dal minore al maggiore (specie, genere, famiglia, etc) sia la stessa per culture tanto distanti come quella degli studenti americani e quella dei Maya analfabeti. Altri lavori come quelli di Boyer [19] e di Hirschfield [56], [57] indagano relativamente le credenze religiose e la classificazione dei gruppi sociali. Queste ricerche convincono sul come la cultura sia modellata da fattori cognitivi. Nisbett riporta evidenze anche a sostengo del viceversa: come i fenomeni cognitivi sono modellati dalla cultura. Nel suo articolo riporta che in psicologia si definisce *Schema* una struttura di conoscenze che governano il pensiero attraverso l'attenzione, la ritenzione e l'uso delle informazioni di cui si è a disposizione; ne è un esempio la sequenza di azioni che portano uno studente da casa a scuola: spegnere la sveglia, alzarsi dal letto, prepararsi per uscire, andare alla fermata dell'autobus, etc. Partendo da questo concetto, D'Andrade [28] introduce l'idea di *schemi culturali* come dei modelli di base che costituiscono un sistema di idee, pratiche e simboli che organizzano e danno senso alla realtà. Gli schemi culturali che sono condivisi intersoggettivamente in un gruppo sono conosciuti come *modelli culturali* di quel gruppo [27], [58] e [96]. Tale oggetto teorico aiuta a organizzare e spiegare come mai il contenuto della mente umana possa differire radicalmente di cultura in cultura e apre la strada all'indagine sul *come* i modelli culturali possano influenzare effettivamnte i processi congitivi con cui le persone conoscono il mondo. Una delle ipotesi più famose su come la cultura possa influenzare il pensiero è conosciuta come *Sapir-Whorf Hypotesis* [114], che prende in considerazione il linguaggio come attività umana che fa parte di un qualche modello culturale. A sostegno di quest'ipotesi, Nisbett riporta tre importanti filoni di ricerche. Il primo riguarda i lavori di Berlin e Key [13] che esaminarono la classificazione dei colori in diverse culture, ripresi in seguito da Heider e Oliver [55] e confermati sperimentalmente da Roberson, Davies e Davidoff [88], i quali offrirono evidenze che uno scarso rendimento in fatto di memoria e classificazione, più che a una mancanza di istruzione formale, era dovuta ad una povertà lessicale, e dunque ad un Modello Culturale di linguaggio. Il secondo filone di ricerca riguarda il modo in cui la categoria del numero viene resa grammaticalmente: lavori di Carroll e Casagrande [22] e gli studi di Lucy e dei suoi colleghi [67], [68] esaminarono come il pensiero fosse influenzato dall'utilizzo dei numeri nella grammatica della costruzione delle frasi. In inglese (In modo uguale all'italiano NdA) l'aggettivo numerale può accompagnare direttamente il soggetto o l'oggetto che accompagna (es., una candela), mentre nella lingua Maya Yucateca e in molte altre come il cinese e il giapponese, gli aggettivi numerali sono sempre accompagnati da una descrizione del materiale che compone l'oggetto (es., una cera lunga e sottile). L'esperimento proposto da Lucy richiedeva di classificare degli oggetti attraverso delle prove non verbali e i risultati mostrarono come i parlanti Yucatec preferissero una classificazione basata sui materiali, mentre quelli inglesi optarono per una classificazione basata sulla forma. L'ultimo filone è stato portato avanti da Levinson [65] e colleghi, e si concentra sul diverso modo di riferirsi alle coordinate spaziali. In particolare, le lingue indo-europee utilizzano naturalmente coordinate corporali (es., la donna è a destra della macchina), mentre il linguaggio Guugu Yiimithirr (una lingua aborigena australiana) preferisce utlizzare coordinate cardinali (es., la donna è a ovest della macchina). Utilizzando sempre dei test non linguistici per misurare la capacità di localizzare gli oggetti e manipolando i sistemi di riferimento con delle rotazioni si è osservato che i parlanti Guugu Yiimithirr non erano influenzati dalle variazioni ed erano in grado di localizzare gli oggetti con precisione, al contrario dei parlanti inglesi, che trovarono difficoltà ad orientarsi in un sistema ruotato. Nello specifico dei processi cognitivi matematici, lo studio è stato altrettanto ampio e proficuo. Ricerche come quella portata avanti da Wynn in [117] mostrano che la cognizione matematica appare nei bambini fin dalla più tenera età, mentre studi come quelli di Deahene e colleghi [32] o quelli di Rugani et all. [91], [86] ne individuano radici biologiche sia nell'uomo che negli animali. D'altra parte la storia della matematica ci mette davanti alla realtà che diverse popolazioni abbiano sviluppato sistemi numerici che differiscono sia nella scelta della base che nel sistema di rappresentazione. Ad esempio, gli antichi babilonesi utilizzavano la base 60, i Maya e gli Aztechi la base 20, e la rappresentazione posizionale è nota essere stata introdotta in Europa solo nel XIII secolo da Fibonacci, che la apprese dalle popolazioni arabe. Tali differenze sono spiegabili attraverso l'ipotesi che la cultura influenzi in modo sostanziale il pensiero matematico. A sostegno di questa idea e in conclusione di questo paragrafo si riporta un importante studio dovuto a Saxe [92], il cui obiettivo è quello di indagare il contrasto che c'è tra la matematica scolastica occidentale e quella emergente da attività non scolastiche. Lo studio mostra che bambini venditori di caramelle in brasile sviluppano una comprensione della matematica attraverso le loro attività fuori da scuola differente da quella che si sviluppa in un contesto scolastico di non venditori. Nella propria attività essi si ritrovano a dover affrontare le seguenti sfide pratiche: rappresentazione di valori numerici grandi, aritmetica con unità di misura grandi, confronto tra rapporti e adeguamento dei prezzi di compravendità dovuti all'inflazione. Saxe esamina in che modo vengono risolti problemi matematici collegati ad esse e riporta come i venditori di caramelle utilizzino un sistema matematico proprio ispirato strutturalmente al sistema valutario che utilizza la moneta corrente come medium di rappresentazione numerica e mette in evidenza che tale sistema si distanzia sempre di più da quello scolastico dei coetanei non venditori con l'aumentare della complessità dei compiti. Inoltre, mostra che l'educazione scolastica influisce sulla competenza matematica che copre l'utilizzo simbolico dei numeri, ma non sulla correttezza della soluzione dei problemi, sostenendo l'ipotesi che i venditori manifestino processi cognitivi matematici differenti da quelli classici e che tale manifestazione sia fondamentalmente dovuta al contesto socio-culturale in cui crescono.

1.1.2 Dimensione Concettuale

Lo sviluppo della matematica è strettamente collegato ai bisogni e alle sfide a cui un determinato gruppo culturale deve rispondere nella vita di tutti i giorni per poter sopravvivere. La dimensione concettuale comprende quali pratiche, metodi e teorie matematiche emergono dal gruppo per rappresentare la realtà. Il più antico strumento matematico a testimonianza dell'intreccio tra realtà e concetto matematico è l'osso di Lebombo: una fibula di babbuino incisa con 29 tacche. Risultati di ricerche [37] lo fanno risalire a circa 44 mila anni fa e un'ipotesi riguardo al suo scopo avanzata da Overmann [82] prevede che possa essere servito per tenere conto del tempo che scorre, in alternativa alla più diffusa e semplice che suggerisce fosse utilizzato per contare il bestiame. In entrambi i casi, l'osso di Lebombo mostra come alcuni aspetti della realtà possano essere rappresentati attraverso la pratica matematica del conteggio. Proseguendo con la storia, lo storico greco antico Erodoto [43], ha tramandato l'ipotesi ancora oggi sostenuta secondo cui la geometria in Egitto fosse nata per la necessità di dover prevedere e arginare le esondazioni del Nilo, così da proteggere il raccolto. Inoltre, si può notare un evidente parallelismo tra la pratica degli agrimensori e alcuni postulati e definizioni degli Elementi di Euclide che, a opinione diffusa, segnano la nascita della matematica astratta. Ad esempio, Giusti [46] scrive che le tecniche introdotte dagli agrimensori egizi e utilizzate poi fino al XVII secolo sono principalmente due: la prima è il tendere una fune, la seconda è la rotazione di una fune tesa fissata ad un chiodo per un'estremità. Tracciare una linea retta, per Euclide, significa proprio tracciare una linea tra due estremi in modo che giaccia uniformemente tra di essi; proprietà evidentemente analoga all'uniformità che una fune assume nel momento in cui viene tesa tra due chiodi nel terreno. Nel caso della circonferenza, la sua definizione è ridotta esattamente alla proprietà di equidistanza tra punti e centro che risulta evidente dalla pratica dell'agrimensura[1]. Si può dunque sostenere che la nascita e la struttura della stessa matematica ellenistica[2] siano state influenzate dalle sfide che il popolo greco doveva affrontare per poter sopravvivere. È importante sottolineare l'aggettivo *ellenistica*,

[1] Per una lettura degli Elementi e delle definizioni precise si suggerisce il lavoro di Healt [54]

[2] Ci si riferisce a quella raccolta negli Elementi di Euclide

in quanto uno degli obiettivi dell'Etnomatematica è proprio quello di mostrare come esistano diverse matematiche e che ne potrebbero esisterne una varietà infinita in potenza. Per quanto riguarda la matematica occidentale, cioè quella che discende dall'impostazione euclidea, si possono indivudare numerosi casi in cui le pratiche e le teorie matematiche si sono formate per affrontare le sfide emergenti dalla realtà. A sostegno di ciò, Barton [11] riporta come diversi gruppi culturali possano sviluppare differenti sistemi matematici di rappresentazione; di seguito ne è illustrato un esempio. Generalmente, per individuare un oggetto sul piano si utilizzano due coordinate, metodo utilizzato fin dal tempo degli antichi greci[3]. Da un punto detto *origine* si tracciano due rette perpendicolari; dunque, la posizione del punto è determinata dalle misurazioni della sua distanza dall'origine lungo la verticale e lungo l'orizzontale. Un altro modo, che prevede pur sempre un'origine, è il sistema di coordinate polari, che utilizza l'angolo direzionale della retta che passa per l'origine e il punto, e la loro distanza lungo tale retta. Questi sistemi possono essere entrambi trasposti nel mondo della matematica attraverso coppie ordinate di punti appartenenti ad un insieme che dipende dall'origine[4]. Ispirandosi al contesto Maori, invece, Barton si immagina un sistema influenzato da una cultura in cui la localizzazione degli oggetti sia a due osservatori, nel quale la posizione di un punto è individuata dagli angoli delle rette che passano per le due origini.

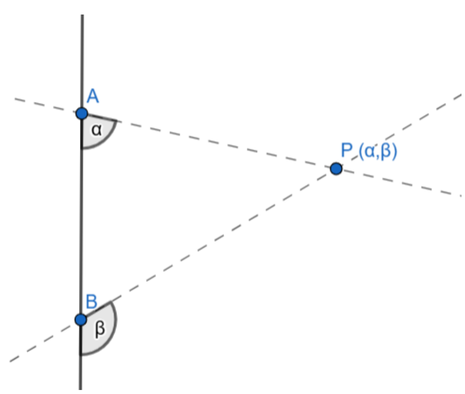

Figura 1.2

In questo caso, nella matematizzazione non c'è equivalenza di struttura con il

[3]Anche se in modo diverso. Si può consultare [18] a pagina 185 per l'uso delle coordinate di Apollonio di Perga.

[4]Cambiare l'origine, cambia il significato di ogni elemento.

sistema a coordinate ereditato dalla tradizione ellenistica, in quanto ogni insieme di coppie di coordinate dipende da due origini e non da una. Dunque, il concetto matematico che emerge dalla sfida di individuare la posizione di un oggetto nello spazio può svilupparsi in diversi modi. Il sistema a due osservatori è talvolta utilizzato anche nella matematica occidentale; Barton si interroga sulle ragioni per le quali si sia preferito un sistema piuttosto che l'altro e propone di ricercare la risposta nelle differenze culturali. L'elemento della cultura maori riportato per spiegare il loro possibile sistema di localizzazione è l'attenzione al punto di vista dell'interlocutore che si riflette prima nella lingua e poi nel sistema matematico. Nel loro vocabolario, esistono tre aggettivi dimostrativi per indicare oggetti che sono *vicino a chi parla*, *lontano da chi parla*, o *vicino a chi ascolta*. In inglese, invece, esistono solamente *this* e *that* per indicare oggetti vicini o lontano da chi parla. Tenendo in considerazione anche l'italiano la differenza sussiste: la parola *codesto*, che asserve proprio alla funzione di localizzare oggetti vicini a chi ascolta, ha origine latina e non greca, dunque non può aver influenzato la nascita delle coordinate utilizzate da Apollonio e poi riprese nel XVII secondo da Descartes e Fermat. Per quanto riguarda l'elemento della storia occidentale che può avere influenzato la nascita di un sistema ad una sola origine, invece, lo si può individuare nell'antica grecia, in particolare nella ricerca filosofica di cui è stata culla. Gli scritti classici greci sono testimonianza della ricerca attiva nel trovare un'origine per tutte le cose, ad esempio Talete credeva fossea l'acqua, Anassimene l'aria ed Eraclito il fuoco. Tra le risposte a questa domanda esistenziale ritroviamo anche quella data dalla scuola pitagorica, la quale individua il numero come ente fondamentale. Tale credenza fu un vero e proprio *stress concettuale*, come direbbe Wilder [115], che portò alla costruzione di nuova conoscenza matematica conseguentemente alla scoperta di grandezze incommensurabili. La tradizione della ricerca di un ente solo in grado di spiegare l'universo è stata poi ripresa da Descartes nel suo famoso Discorso sul Metodo [33], fissando una visione egocentrata per la comprensione e la descrizione dell'universo; fissando un'origine per la descrizione di ciò che ci circonda, come gli oggetti e la loro posizione.

1.1.3 Dimensione Storica

La dimensione concettuale si interseca inevitabilmente con quella storica, che si occupa di esaminare come la conoscenza matematica si ponga nelle esperienze individuali e collettive. In questa direzione si studia come l'umanità ha analizzato e spiegato fenomeni matematici nel corso della storia. Se non fosse che la maggior parte delle ricerche sulla storia della matematica sono eurocentriche, l'Etnomatematica sarebbe riconducibile allo studio della storia contemporanea. Ciò risulta necessario per comprendere il contributo dato dalle persone nello sviluppo della conoscenza matematica e viceversa di come la cultura dei matematici possa influenzare il lavoro dei singoli. Un primo esempio che si vuole riportare riguarda lo sviluppo dei numeri complessi. L'origine del concetto risale al 1545, anno in cui Cardano pubblica l'*Ars magna*. In quest'opera sono studiate le soluzioni di tutte le equazioni di terzo grado, ma non riesce a trattare in modo completo i casi che, nel processo di risoluzione, richiedono l'estrazione di radici quadrate di numeri negativi. Cardano studiò il problema per più di vent'anni senza trovarne una soluzione, poiché la sua attenzione era focalizzata sul trovare quale segno attribuire a tali quantità in modo che le usuali regole del calcolo tra numeri fossero valide, non chiedendosi mai se effettivamente tale segno potesse esistere. Sarà con Bombelli e la sua introduzione di nuovi segni matematici che si combinano in modo nuovo che si metteranno le basi per un nuovo paradigma, scardinando l'idea che le radici di numeri negativi debbano avere dei segni che seguano le regole del calcolo tra numeri reali. È interessante notare che Cardano fosse uno studioso immerso in una comunità accademica, mentre su Bombelli non ci sono fonti che certificano alcuna preparazione matematica, ma solo ingegneristica [63]. Nonostante non sia l'unico fattore, è fondamentale osservare come i diversi contesti culturali in cui sono cresciuti abbiano inevitabilmente influenzato la produzione di conoscenza matematica: Cardano sviluppò la teoria delle equazioni in modo eccellente, seguendo le regole del contesto accademico, mentre Bombelli, al di fuori di esso, ne ampliò le vedute risolvendo un problema durato decenni e scostandosi dalle regole ritenute inviolabili. La rinuncia a regole che appaiono ovvie e necessarie alla matematica non è un evento raro, la stessa tradizione dei numeri complessi è proseguita con la loro rappresentazione geometrica dovuta a Argand e Gauss, che risulta particolarmente efficace per trattare le rotazioni di oggetti bidimensionali.

E tale idea fu poi ripresa da Hamilton che voleva costruire un analogo dei numeri complessi in modo che si potessero trattare con più semplicità anche le rotazioni nello spazio. Così, furono introdotti i quaternioni, che trovarono posto nella conoscenza matematica solo grazie alla rinuncia della proprietà commutativa. Queste importanti tappe della storia dell'algebra sono esemplari per capire come la cultura della comunità matematica influenzi il pensiero dei matematici e come i contributi dei singoli possano inserirsi nel processo di costruzione di conoscenza attraverso l'abbandono di paradigmi pre esistenti e l'accoglienza di nuovi punti di vista, in modo simile a quel che scrive Kuhn per tutte le altre scienze [64]. Questo fenomeno si può osservare anche al contrario nella tortuosa storia della geometria, nella quale l'accettazione effettiva delle geometrie non euclidee dovette aspettare che l'intera comunità matematica ripensasse al proprio statuto disciplinare. Infatti, la convinzione che il quinto postulato di Euclide fosse necessariamente vero accompagnò i matematici dai greci fino alla seconda metà dell'Ottocento. I tentativi di dimostrarne la validità furono numerosi e fallimentari. Il più famoso è dovuto a Saccheri, il quale costruì un'eccellente teoria non euclidea, che ritenne errata poiché andava in contrasto con l'idea che l'universo, a priori, non potesse che essere euclideo. Dopo di lui, anche i lavori di Bolyai, Gauss e Lobačevskij non furono accettati finché Beltrami, appoggiandosi alla teoria delle superfici di Reimann, non ne dette una base convincente [24]. Essa, però, rimase lo stesso avvolta nella discussione del dubbio, poiché il matematico italiano, a tutti gli effetti, costruì un modello di geometria iperbolica situato nello spazio euclideo. Un lavoro analogo a quello che Menelao di Alessandria fece per la geometria sferica in *Sphaerica* [49] più di 2000 anni fa, in cui il matematico alessandrino descrisse le proprietà di una geometria sferica all'interno di uno spazio euclideo. La differenza tra Beltrami e Menelao può essere vista di certo in ciò che studiano e nel linguaggio che adottano, ma è il contesto culturale che più di tutto ne ha determinato l'influenza. Infatti, la pseudosfera di Beltrami fu considerata da lì a poco un ottimo esempio di *modello* matematico, concetto sviluppatosi proprio a cavallo del 1900 e fondamentale per il cambio di paradigma, grazie al quale si è rinunciato al senso euclideo di spazio per poter accettare nuovi tipi di geometrie. In conclusione, ripercorrere questi fatti storici mette in luce come lo sviluppo della matematica sia simile a quello di qualsiasi altra scienza: affinchè la disciplina possa svilupparsi, la sua comunità deve mettere in discussioni paradigmi per poterne accettare di nuovi. La profonda differenza, però, è che nel XX secolo gli studi sulla logica fatti da Gödel [100] e Tarski [107] sigillano questa pratica culturale a *teorema*, portando a compimento il cambiamento di concezione della matematica suggerito da Hilbert e dai formalisti all'inizio del 1900 ed escludendo, di fatto, che la matematica debba appoggiarsi ad assiomi *veri* per poter avere terreno fertile di sviluppo. Così, oggi, l'accettazione di nuove idee matematiche non è ostacolata dalla necessità di ottenere un riscontro vero nella realtà e teorie innovative che poggiano su principi controintuitivi come la non universalità della commutatività o la negazione del V postulato di Euclide trovano meno difficoltà nel destare l'interesse della comunità scientifica. Dunque, anche matematiche non occidentali, come quelle interessate dagli studi etnomatematici dovrebbero essere studiate e indagate per il loro potenziale epistemologico, inteso come potenzialità di produrre conoscenza, anche se si sviluppano in modo differente dalla matematica occidentale.

1.1.4 Dimensione Epistemologica

Un problema che emerge è come giustificare questo potenziale epistemologico in un ambiente in cui la neutralità e l'oggettività della matematica occidentale sono valori condivisi dalla quasi totalità della comunità scientifica. Dalle ricerche riguardanti la costruzione dei concetti matematici, sia nella contemporaneità che nella storia, emergono delle domande riguardo a come si generano, organizzano e disseminano i sistemi di conoscenza matematica. Alcune domande guidano l'epistemologia:

- Come si creano metodi e sperimentazioni a partire da pratiche e osservazioni?
- Come ci si sposta dalle sperimentazioni e i metodi, alla riflessione e astrazione?
- Come si continua fino a costruire nuove teorie?

Esse vanno riflettute secondo gli obiettivi e i fondamenti dell'Etnomatematica che aggiungono al dibattito la componente culturale. La sfida è quella di pensare ad una filosofia che contempli matematica e cultura senza rinunciare ai principi di uguaglianza culturale rispetto alla veridicità e all'oggettività. Barton [10] spiega come mai le correnti filosofiche attuali non risultino adeguate. Le visioni assolutiste come Platonismo, Logicismo, Intuizionismo e Formalismo risultano immediatamente incompatibili con la visione a *molte matematiche*. Infatti, se assumessimo una visione realista, per cui la verità matematica ha valore universale a priori, si potrebbe inserire l'aspetto culturare assumendo che le diverse visioni della matematica siano dovute all'inadeguatezza dell'uomo a comprendere a pieno tali verità della matematica. Dunque, ne conseguirebbe che la matematica sia un'approssimazione culturale della verità. Un'implicazione di questo fatto sarebbe l'accettazione della visione eurocentrica e colonialista per la quale esistono matematiche primitive e matematiche sofisticate. In modo simile anche le scuole logiciste, intuizioniste e formaliste che spostano l'attenzione dal "Cos'è la matematica?" a "Come siamo sicuri delle verità matematiche?" [110], sottintendono rispettivamente che ci sia una logica, un'intuizione o una forma di comprensione universali grazie alle quali, una volta posti dei fondamenti ben sicuri per la matematica, si possano derivare conseguenze vere. Anche in questo caso, si dedurrebbe l'esistenza di una matematica primitiva e un'altra sofisticata, discriminate da quanto una cultura influenzi l'espressione di logiche, intuizioni e forme di comprensioni tanto più vicini a quelle universali. Per quanto riguarda le visioni relativiste, emergono altre incompatibilità. Ad esempio, il relativitsmo storico [108] spiega come l'oggettività matematica sia illusoria e dipendente dal contesto storico, e assume che i cambiamenti concettuali siano progressivi e direzionati verso una più autentica oggettività, rendendo quella passata inadeguata. Questa filosofia non tiene conto del relativitsmo culturale, che per l'Etnomatematica significa che il progresso matematico avviene in diverse direzioni egualmente valide e oggettive senza che se ne elegga una a *migliore*. La differenza con il relativismo storico sta nel voler considerare *matematica* sia quella accademica occidentale, sia quella Maori, o anche quella usata dai carpentieri. Allo stesso modo, altre visioni come il neo-realismo [87], [71], il fallibilismo e il quasi-empirismo [110] accettano che possano esserci più matematiche, ma che la loro coesistenza prima o poi evolverà un conflitto dal quale ne emergerà una. Così, ogni cultura matematica sarebbe solo un'ombra di quella *vera*. Che sia ricerca di verità, di oggettività o di senso, l'idea che esista una matematica ideale a cui tendere permea le maggiori scuole di filosofia matematica e questo è un problema per gli etnomatematici; poiché, come spiegato da Bishop [17], la matematica *neutrale* e *universale* è l'arma segreta del colonialismo e dell'egemonia culturale. Dunque, il problema epistemologico risulta di fondamentale importanza per gli etnomatematici, e Barton [10] ne propone uno. Per poter parlare di matematica introduce il concetto di sistema QRS come sistema di conoscenze per dare significato alle quantità, alle relazioni e allo spazio. Dopodiché scrive della matematica come l'insieme dei diversi sistemi QRS che si sviluppano in diversi gruppi culturali e come la matematica occidentale sia uno di essi. Quest'ultima riveste un ruolo importante nelle discussioni di Etnomatematica e gli è dato il nome di matematica NUC (Near Universal Conventional). Ora che si ha questo nuovo modo di pensare la matematica, si hanno diverse domande a cui rispondere. Per prima cosa si deve risolvere l'egemonia guidata da un'universalità; due popoli con diversi sistemi QRS che si incontrano influenzeranno vicendevolmente i propri sistemi; potrebbe emergerne uno nuovo o uno potrebbe prevalere sull'altro, ma non perché uno di essi sia più *vero* dell'altro, ma per un processo umano e culturale che si sviluppa internamente all'incontro tra i due gruppi. Un secondo problema riguarda l'ontologia degli oggetti matematici: essendo un sistema QRS un modo per dare senso alle cose, ci si può riferire alla filosofia di Wittgenstein [116], per la quale gli oggetti matematici esistono nel linguaggio e non al di fuori di esso. Dunque la matematica non riguarda lo studio di qualcosa, ma è un modo di pensare a quel qualcosa. Ci si può riferire ad essa come il modo in cui diamo senso alla tecnologia: una diga non resiste grazie alla matematica, ma perché è costruita efficacemente. La matematica è un modo per discutere e capire cosa significhi *costruire efficacemente*. Un altro problema da affrontare è la sorpredente utilità della matematica, ovvero: se la matematica è un'arbitraria invenzione umana, come mai corrisponde così bene al nostro mondo? Barton risponde che il processo che ha portato la matematica ad essere simile in molte parti del mondo è analogo a un processo evolutivo di adattamento all'ambiente, così come avere due occhi risulta più funzionale per vedere, allora la quantificazione è un potente strumento per l'organizzazione sociale. In questo caso l'argomentazione presenta delle criticità su cui riflettere e dimostra la difficoltà del problema avanzato da Barton. Infatti, sembra considerare la matematica più diffusa come quella migliore, più capace di rispondere alle sfide sociali e ambientali che possono presentarsi a un gruppo culturale, riflettendo un'idea fallibilista per spiegare come mai le matematiche tendano ad assomigliarsi. Per ricondurci alla filosofia per sistemi QRS ci si può appoggiare alle evidenze congitive portate avanti dalla neuroscienza: le matematiche si somigliano poiché i processi che quantificano, relazionano e danno senso allo spazio hanno radici anche biologiche. Parallelamente, le radici culturali sulla cognizione permettono e spiegano come mai questa somiglianza non sia un uguaglianza. La proposta di Barton riprende i principi di D'Ambrosio proponendo un'epistemologia disciplinare a priori. Di recente è stato pubblicato un articolo che analizza, invece, quale filosofia emerge dagli studi di Etnomatematica offrendo una prospettiva a posteriori. Il lavoro di Alghar et all. [2] mette in evidenza come le ricerche in Etnomatematica tendano a semplificare troppo i concetti matematici, e trattano la conoscenza occidentale come base per interpretare quella indigena, ad esempio ricercando l'esistenza di *concetti di triangolo* e usando i metodi occidentali per validarne la matematicità, sottintendendo una certa gerarchia di matematiche e supportando una visione fallibilista. Inoltre, l'interpretazione e la rappresentazione di valori culturali di un certo gruppo da parte degli studiosi, ne provoca una distorsione che danneggia sia la metodologia di ricerca che i valori filosofici etnomatematici. In primo luogo si evidenzia un uso superficiale dei metodi di ricerca qualitativa riguardo le ricerche etnografice, in secondo luogo si sottolinea come la distorsione vada a distruggere l'autenticità dei significati espressi da un gruppo culturale, contraddicendo la filosofia Wittgenstaniana. Oltre a questo studio di analisi, non mancano le risposte dirette alla filosofia per sistemi QRS; Pais [83] riprende la critica mossa da Rowlands e Carson [90], e sostenuta da Horsthemke e Schäfel [59], che difendono una visione essenzialista, secondo cui la conoscenza, seppur costruita dagli umani, resti aldilà di essi e che si manifesti attraverso gli invarianti delle diverse matematiche, indipendentemente dalla loro verità. La forte posizione che prendono riguardo l'epistemologia è l'esclusione degli aspetti sociali e politici nella genesi della conoscenza. È evidente che la veridicità della filosofia impiegata non può essere verificata e la scelta di seguirne una piuttosto che l'altra è guidata da una scelta personale. Così il tesista segue l'interpretazione a sistemi QRS, che meno contraddice i principi di eguaglianza valoriale dell'Etnomatematica.

1.1.5 Dimensione Educativo-Didattica

L'etnomatematica, prima del manifesto di D'Ambrosio, è stata sviluppata e ricercata dagli insegnanti che ebbero l'obiettivo di portare a lezione come la matematica fosse collegata alle pratiche di vita quotidiana. Un esempio pioneristico è il lavoro di Zaslavsky [118] riguardo lo studio della matematica africana e al come implementarla nel curriculum didattico americano per mostrare come lo sviluppo della matematica sia legato alle sfide quotidiane e possa apparire diverso in diverse parti del mondo. Per questo non stupisce che la dimensione dell'etnomatematica più ampia sia proprio la didattica della matematica. Inoltre, è ormai consensuale che la didattica prenda vita in contesti scolastici, i quali sono luoghi di educazione. Per questo Didattica ed Educazione sono indissolubilmente intrecciate. Da questo punto di vista Milton [89] scrive che supportare il programma etnomatematico non significa rifiutare le conoscenze e le pratiche accademiche, ma incorporarle con valori umanitari come il rispetto, la tolleranza, la cura, la dignità, l'integrità, l'inclusione e la pace. In questo contesto l'etnomatematica promuove un insengamento della matematica che evidenzi le idee, le procedure e le pratiche presenti nella vita di tutti i giorni, così che una matematica storicamente e criticamente situata possa sostenere gli scopi umanitari guidati dai valori sopra elencati. Le ricerche relative alla didattica si sono concentrate sullo studiare i sistemi QRS di matematiche non occidentali e su come implementarli in aula. Questa tesi non vuole essere una raccolta di sperimentazioni didattiche in cui sono utilizzate le ricerche etnomatematiche, ma si ritiene utile fornire degli esempi in questa direzione. Oltre ai lavori già citati di Zaslavsky, Eglash [38] descrive diversi aspetti culturali dell'africa occidentale riguardo acconciature, gioielli e l'architettura, trovando modelli frattali nella geometria africana legata a tali aspetti. Successivamente tali studi vengono usati da Eglash [39] e Babbitt [6] per la realizzazione di attività didattiche di matematica e informatica situate culturalmente. Le ricerche svolte insieme a queste attività rilevano come riferirsi a pratiche culturali nell'azione didattica migliori l'apprendimento e inneschi un interesse maggiore sia per la disciplina che per la propria cultura. Anche nelle Americhe sono stati condotti numerosi studi; Ortiz-Franco descrive esempi di matematica Spagnola confrontandola con le matematiche Azteca e Olmeca [81], [45]. Riguardo i Nativi Americani, sono noti i lavori di Ascher [4] e Rauff [85] che trattano come portare la probabilità in classe con dei giochi Irochesi. Per quanto riguarda i continenti orientali, invece, troviamo alcuni esempi nei lavori di Barton [11] in cui riporta la sua esperienza nella costruzione di un linguaggio matematico per i Maori descrivendo la tensione tra la necessità di adottare parole inglesi per parlare di alcuni oggetti matematici e il manteminento dell'identità culturale. Tale sfida assume importanza nell'azione didattica poiché, come riportato da Neville e Barton [76], studenti con lingua madre il mandarino a cui viene insegnata la matematica in inglese affrontarono problemi in entrambe le lingue ottenendo risultati migliori in tutti quelli proposti nella lingua madre, tranne che per un problema riguardante il *gradiente*, unico concetto matematico insegnato per la prima volta in inglese e il cui termine non si traduce facilmente in mandarino. La componente didattica è strettamente legata a quella educativa: in questa direzione D'Ambrosio [36] [26] sostiene che non è sufficiente essere un buon matematico bravo a insegnare matematica per essere un buon insegnante, ma che ci si dovrebbe chiedere anche "Cosa sarà fatto con la matematica che sto sviluppando?" e "Come vivranno i miei studenti? Saranno consapevoli del loro impegno morale nella vita professionare che faranno?". Denuncia come la visione ingenua di Hardy sull'innocenza dei matematici e l'inutilità della teoria dei numeri [51] sia totalmente contraddetta da come le tecnologie militari si appoggino quotidianamente alla matematica anche più astratta, e sostiene che sia necessaria un'azione didattica per combattere l'ignoranza riguardo ai valori e alla diversità culturale, la quale causa incomprensioni che portano a escalation violente. Per questo, gli studi etnomatematici sono fondamentali per portare avanti la sua idea di *matematica non omicida*. Da un punto di vista dell'inclusione, invece, Shirley [95] scrive come l'etnomatematica in aula contribuisca a favorire l'inculturazione [16] degli studenti di culture sottorappresentate ed esponga agli studenti sovrarappresentati culture nuove, così da favorire la costruzione del rispetto alla diversità e all'inclusione. Alla luce di questo tra gli etnomatematici è praticamente unanime la necessità di inserire le loro ricerche nei curriculum didattici di matematica, ma emergono delle domande riguardo al cosa e al come. Pais [83], nonstante riconosca l'importanza dell'etnomatematica per fare una migliore riflessione sulla storia ed epistemologia della matematica, ritiene che le implicazioni educativo-didattiche non siano così ovvie e riporta alcune critiche. Rowlands e Carson [90] sostengono che i programmi etnomatematici sviluppati in Sud Africa abbiano aumentato le differenze etniche sostituendo l'apprendimento della matematica formale con quella contestuale e pratica; secondo gli autori è proprio la matematica formale che dà accesso al mondo privilegiato e ogni studente dovrebbe avere la possibilità di accedere a questo mondo. Rowlands e Carson contestano l'uso dell'etnomatematica in aula poiché ritengono che la scuola debba essere un luogo in cui le persone entrano in contatto con una cultura più universale, che di fatto è quella occidentale. Forse il problema sta proprio nel dare per scontato che il mondo privilegiato sia privilegiato. O scritto come farebbe Pais: *"a problematization of society and the role of school in society is, in my opinion, a priority in a research program like ethnomathematics. But, that is far from happening"*. Altri argomenti che andrebbero approfonditi secondo Skovsmose e Vithal [112] sono innanzitutto la mancanza di attenzione riguardo la relazione tra cultura e potere. Secondariamente sostengono che l'etnomatematica assuma senso solamente dalla prospettiva della matematica accademica. Come terza questione pongono la mancanza di pensiero critico riguardo al come la matematica modellizzi in effetti la realtà. Infine, problematizzano il fatto che gli studi di etnomatematica non affrontano il tema del *foreground*, ovvero l'insieme delle opportunità che il contesto sociale e culturale rende accessibile allo studente per accedere a diverse possibilità per il suo futuro. Pais commenta e approfondisce queste critiche nel suo articolo, citando anche la risposta di Adam, Alangui e Barton [1] all'articolo di Rowlands e Carson. In questo paragrafo non si vuole approfondire ulteriormente la questione, ma si ritiene fondamentale citarla sper capire che il dibattito riguardo l'etnomatematica non è scontato e sono necessarie ulteriori riflessioni riguardo alle sue implicazioni nella didattica.

1.1.6 Dimensione Politica

L'etnomatematica ha l'obiettivo di studiare la storia, la tradizione e il pensiero matematico di diversi gruppi culturali. Riconoscere e rispettare le radici socioculturali di un gruppo diverso dal proprio rinforza tali radici attraverso il dialogo tra culture nel rispetto e nell'accoglienza della diversità. Per raggiungere questo obiettivo è importante guidare gli studenti ad assumere maggiore consapevolezza anche della propria cultura riconoscendo l'origine della conoscenza matematica contestualizzandola storicamente e culturalmente. Gli studi che toccano questa dimensione rispondono ad alcune critiche riportate da Pais e comprendono l'indagine della relazione tra matematica e potere, e lo studio dei modelli matematici culturalmente situati usati per rappresentare la realtà. L'articolo già citato di D'Ambrosio [36] a supporto di una matematica non omicida coinvolge esplicitamente anche la scuola proponendo un curriculum che integri tali valori attraverso un insegnamento che tenga conto delle sfide umane per cui è stata sviluppata. Per D'ambrosio la sopravvivenza della vita umana procede finché non si rompe il triangolo formato dai vertici: individuo, società e natura i cui lati sono le relazioni tra essi; questo schema relazionale è detto *triangolo primordiale*. Inoltre, ciascuna relazione è investigata e potenziata naturalmente dall'uomo. Questo fenomeno è detto trascendenza, in quanto significa vivere oltre al sopravvivere. In questo caso, il triangolo che rappresenta la stabilità di questa strascendenza è detto *triangolo migliorato* ed è costituito dai vertici: linguaggio, strumenti e produzione.

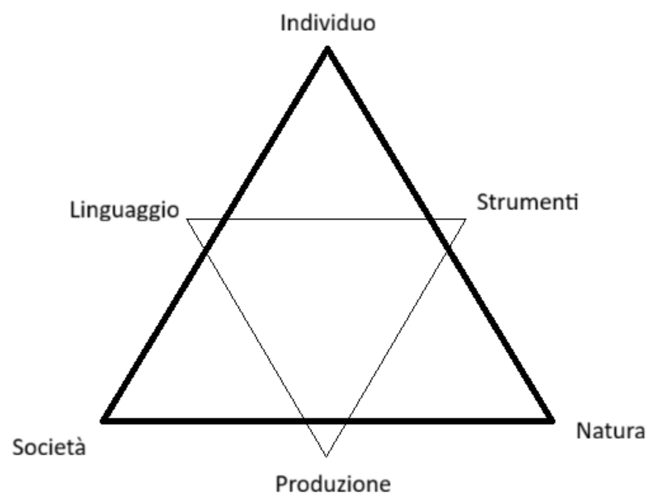

Figura 1.3: Triangolo migliorato.

Il mantenimento della pace individuale, sociale, ambientale e militare è necessario per non distruggere questi triangoli, e dunque per non distruggere la vita umana. Il sapere matematico, d'altronde, è intrinsecamente legato a questo mantenimento, ma la storia e le evidenze insegnano come conduca anche alla sua possibile rottura e alla minaccia di estinzione. Per questo, il curriculum pensato da D'Ambrosio prevede l'insegnamento della matematica attraverso due step necessari per rendere studenti e matematici consapevoli e preparati a contribuire all'idea di matematica non omicida:

1. *" Life explained as the solidarity of individual, other(s), nature and how they relate. A methodology is to discuss the primordial triangle and explain the biological factors keeping its integrity. A first mention of the primordial ethics is important in this moment."*

2. *"In discussing the evolution of the human species, to reach the enhanced triangle, we elaborate on individual, other(s), reality, instruments, language and production. Attention should be given to the concept of reality, as enlarged perception of nature, comprising natural, cultural and social environments. A return to the primordial ethics is needed."*

Un'altra sfida che emerge in un qualsiasi gruppo culturale, che risulta estremamente attuale nei paesi più sviluppati, riguarda la gestione delle tecnologie che esistono proprio grazie allo sviluppo della matematica. Skovsmose espone la sua idea di *educazione critica* intesa come una didattica che discute le condizioni fondamentali per ottenere conoscienza, con consapevolezza riguardo i problemi sociali, di disuguaglianza, soppressione etc., la didattica critica deve guardare all'insegnamento come una forza di progresso sociale reagendo alle contraddizioni della società [99]. Skovsmose scrive che la didattica della matematica debba essere orientata allo sviluppo di *competenza matematica*, *competenza tecnologica* e *competenza riflessiva*[5]. Per competenza matematica si intende quella individuata da Niss [78]: *La competenza matematica è l'abilità di capire, giudicare, fare e usare matematica in una varietà di contesti e situazioni (intra e extra matematici) in cui la matematica gioca o potrebbe giocare un ruolo.* Con competenza tecnologica non si fa riferimento alle tecnologie utilizzabili a scopo didattico, bensì a quelle la cui progettazione è influenzata profondamente dalla matematica. Infine, la competenza riflessiva fa riferimento alla capacità di saper valutare criticamente l'uso della matematica e le possibili conseguenze nell'uso di tecnologie che la coinvolgono. Per Skovsmose gli approcci epistemologici usati in didattica della matematica sviano da questo pensiero critico, poiché ignorano la componente umana e culturale che sta alla genesi della conoscenza matematica, ed è solo attraverso una riflessione sulle conseguenze dell'impresa tecnologica che può esserci una reale didattica della matematica. Per poter raggiungere questi obiettivi è importante chiedersi quali valori e quali fattori socio-culturali emergono nell'attività scientifica, prima che il sapere diventi oggetto di insegnamento. Per fare ciò, uno strumento adatto allo studio del complesso rapporto che c'è tra matematica, potere, tecnologia e politica è quello del *Family Resemblance Approach* [60], secondo il quale la produzione di conoscenza scientifica descritta dagli obiettivi disciplinari, i metodi, le pratiche e le conoscenze risulta immersa in un contesto

[5] In originale è *conoscenza* e non *competenza*, ma Skovsmose stesso poi parla di competenza.

sociale e istituzionale, che nell'ottica etnomatematica sono indissolubilmente legati a fattori culturali. Per Family Resemblance Approach (FRA) si intende un modo per modellizzare e descrivere l'attività scientifica in cui ogni singola scienza è distinta dal proprio statuto epistemologico, ma risulta accomunata alle altre per alcune caratteristiche, proprio come accade in una famiglia. Considerare la matematica come attività umana immersa in un contesto culturale permette di farla rientrare in questa grande famiglia di scienze, e dunque è possibile individuare tutte quelle categorie descritte dal FRA che caratterizzano la matematica come attività scientifica e studiarne il legame con la cultura. Ad oggi le categorie individuate sono 12 e si dividono tra Epistemiche-Cognitive (1-4) e Sociali-Istituzionali (5-12) [40], [41], [61]. Si riportano le proposte in lingua originale:

1. **Aims and Values**: the scientific enterprise is underpinned by adherence to a set of values that guide scientific practices. These aims and values are often implicit and they may include accuracy, objectivity, consistency, skepticism, rationality, simplicity, empirical adequacy, prediction, testability, novelty, fruitfulness, commitment to logic, viability, and explanatory power.

2. **Scientific practices**: the scientific enterprise encompasses a wide range of cognitive, epistemic, and discursive practices. Scientific practices such as observation, classification, and experimentation utilize a variety of methods to gather observational, historical, or experimental data. Cognitive practices, such as explaining, modeling, and predicting, are closely linked to discursive practices involving argumentation and easoning.

3. **Methods and methodological rules**: scientists engage in disciplined inquiry by utilizing a variety of observational, investigative, and analytical methods to generate reliable evidence and construct theories, laws, and models in a given science discipline, which are guided by particular methodological rules. Scientific methods are revisionary in nature, with different methods producing different forms of evidence, leading to clearer understandings and more coherent explanations of scientific phenomena.

4. **Scientific knowledge**: theories, laws, and models (TLM) are inter-related products of the scientific enterprise that generate and/or validate scientific

knowledge and provide logical and consistent explanations to develop scientific understanding. Scientific knowledge is holistic and relational, and TLM are conceptualized as a coherent network, not as discrete and disconnected fragments of knowledge.

5. **Professional activities**: scientists engage in a number of professional activities to enable them to communicate their research, including conference attendance and presentation, writing manuscripts for peer-reviewed journals, reviewing papers, developing grant proposals, and securing funding.

6. **Scientific ethos**: scientists are expected to abide by a set of norms both within their own work, and during their interactions with colleagues and scientists from other institutions. These norms may include organized skepticism, universalism, communalism and disinterestedness, freedom and openness, intellectual honesty, respect for research subjects, and respect for the environment.

7. **Social certification and dissemination**: bypresenting their work at conferences, and writing manuscripts for peer-reviewed journals, scientists' work is reviewed and critically evaluated by their peers. This form of social quality control aids in the validation of new scientific knowledge by the broader scientific community.

8. **Social values of science**: the scientific enterprise embodies various social values including social utility, respecting the environment, freedom, decentralizing power, addressing human needs, and equality of intellectual authority.

9. **Social organizations and interactions**: science is socially organized in various institutions including universities and research centers. The nature of social interactions among members of a research team working on different projects is governed by an organizational hierarchy. In a wider organizational context, the institute of science has been linked to industry and the defense force.

10. **Political power structures**: the scientific enterprise operates within a political environment that influences the direction and use of science. The outco-

mes of science are not always beneficial for individuals, groups, communities, or cultures.

11. **Financial systems**: the scientific enterprise is mediated by economic factors. Scientists require funding in order to carry out their work, and state and national level governing bodies provide significant levels of funding to universities and research centers. Assuch, these organizations have an influence on the types of scientific research funded, and ultimately conducted.

12. **Reward systems**: is possible to identify two types of reward in science: intellectual and non-intellectual. The intellectual reward is driven by the curiosity to understand the workings of nature and constituted by the sense of achievement and satisfaction one gets when one makes a scientific discovery or invention. Non-intellectual rewards can be classified as social, professional, and mate rial. Social rewards consist of recognition and prestige in the scientific community and gaining high status in the society. Professional rewards are about moving up the career lad der. Finally, material rewards can be monetary, larger lab space and better equipment, and so on. Sometimes, winning a prize as prestigious as the Nobel Prize brings fame, prestige, high status and sizable financial gain all at once.

In riferimento a questo modello, in questa tesi si vuole indagare la pratica espitemica del *dimostrare*, che più di ogni altro fenomeno culturale caratterizza la matematica NUC, studiandola con l'obiettivo di caratterizzarla attraverso le funzioni della dimostrazione che emergono sia come attività scientifica che didattica. Per capire come questo approccio sia innovativo e utile alla ricerca in didattica della matematica, si entrerà nel dettaglio dei principali risultati delle ricerche riguardanti la dimostrazione.

2. La dimostrazione in didattica

Questo capitolo riguarda le ricerche sulla matematica NUC, per questo motivo, ogni volta che si scriverà matematica, si intenderà quella NUC.

2.1 Dimostrare come problema didattico

Chi fa matematica al giorno d'oggi dovrà, prima o poi, confrontarsi con il complesso compito di dimostrare una qualche congettura. Questa pratica è indissolubilmente legata alla materia fin dagli antichi greci ed è ciò che la distingue dalle scienze sperimentali. La competenza matematica non è ridotta solamente al saper produrre dimostrazioni, ma resta necessario imparare a farlo, poiché significa imparare il ragionamento matematico. Questa visione è ampiamente diffusa sia in ambito accademico che in ambito scolastico ed è descritta da Niss e Højgaard in [79], in cui descrivono le varie dimensioni della competenza matematica, tra cui quella del ragionamento:

"The core of the mathematical reasoning competency is to analyse or produce arguments (i.e., chains of statements linked by inferences) put forward in oral or written form to justify mathematical claims. This competency involves both constructively providing justification of mathematical claims and critically analysing and assessing existing or proposed justification attempts. The competency deals with a wide spectrum of forms of justification, ranging from reviewing or providing examples (or counter-examples) over heuristics and local deduction to rigorous proof based on logical deduction from certain axioms."

Lo sviluppo di questa competenza, per quanto fondamentale, risulta estremamente delicato e complesso. Mariotti scrive come le ricerche rivelino che studenti di ogni grado scolare facciano fatica a produrre argomenti a sostegno delle proprie affermazioni e presenta delle ipotesi alla base di questa difficoltà [72]. La prima cosa che mette in luce è la ricezione che hanno gli studenti alla richiesta di spiegare un certo risultato; sembra che i contratti didattici [20] passino in modo inconsapevole e che la richiesta di un perché sia percepita come il voler portare alla luce un errore commesso, più che al voler capire la ragione dietro un'affermazione. Gli studi di Anthony e Walshaw [113], Bicknell [15], e Ruthven e Coen [23] supportano questa tesi mostrando come gli studenti possano sentirsi a disagio nello spiegare il proprio ragionamento ad altri e come esprimano anche incertezza riguardo alle aspettative dell'insegnante che chiede spiegazioni: *perché lo fa?*. La stipulazione di questo patto implicito, probabilmente, ha origine nelle pratiche didattiche guidate dal Comportamentismo, che individuano la risposta corretta come giustificazione di un ragionamento corretto, con la conseguente mancanza di necessità di argomentare da parte dello studente. La riluttanza nell'accompagnare una risposta è dunque spiegabile dalla convinzione che l'insegnante debba spiegare e lo studente apprendere; rendendo di fatto rinunciabile l'insegnare ad argomentare. Le ricerche di oggi in merito a questo tema forniscono nuove prospettive e sostengono l'importanza di insegnare la pratica dimostrativa. Per comprende in che modo, è necessario richiamare alcuni punti fondamentali delle teorie dell'apprendimento più recenti. Il Comportamentismo pone la base fondamentale su cosa sia effettivamente l'apprendimento, ovvero una modificazione del comportamento di un soggetto in seguito a determinati stimoli. Il limite di questa teoria sta nel ritenere indagabile il processo mentale che c'è tra ricezione dello stimolo e comportamento di risposta, e che ottenere una risposta attesa da un determinato stimolo sia sufficiente per dire che il soggetto abbia appreso correttamente. Le ricerche dimostrano che tale fenomeno non comporta un reale apprendimento [7]. Il Cognitivismo, con l'obiettivo di spiegare come avviene tale modificazione, introduce il concetto di processo cognitivo come collegamento interno al soggetto tra stimolo e comportamento. Le ricerche cognitiviste individuano e spiegano come tali processi cambiare all'interno del soggetto attraverso assimilazione e accomodamento, ma non tengono conto delle componenti sociali e culturali di chi sta apprendendo. Questa integrazione avviene con il Socio-Costruttivismo, che vede l'apprendimento come un processo in cui il soggetto dà senso alle proprie esperienze attraverso la costruzione di significati nell'interazione con l'ambiente [93]. Ciò che resta oscuro a queste teorie è cosa effettivamente significhi costruire significati per dare senso alle esperienze. Una possibile risposta la fornisce la recente teoria del Connettivismo introdotta da Siemens [97] e ripresa da Downes [34] e Goldie [47]. Il connettivismo nasce come teoria dell'apprendimento nell'era digitale in cui imparare viene visto come costruzione di significati tra reti umane e non umane. Tra i suoi principi troviamo:

- L'apprendimento è un processo di connessione tra nodi o risorse di informazione.
- La capacità di conoscere è più importante della conoscenza in possesso.
- La capacità di vedere connessioni tra campi, idee e concetti è un'abilità fondamentale per l'apprendimento.

Dimostrare significa costruire una relazione tra ipotesi e tesi, che possono essere interpretate come nodi o risorse di informazione; dunque, dimostrare qualcosa significa apprendere qualcosa. Inoltre, imparare a dimostrare non si riduce ad imparare a memoria una serie di passaggi, ma implica l'ampliamento della capacità di conoscere attraverso lo sviluppo della competenza dell'argomentazione, che permette di spostarsi tra diversi oggetti e fatti matematici (sempre nodi e risorse di informazione), nonchè di vedere connessioni tra campi, idee e concetti matematici. In questo quadro teorico, dimostrare risulta fondamentale non solo per il valore che assume nello statuto disciplinare, ma anche per l'apprendimento diretto della matematica. Alla luce di tutto questo, è importante avere a disposizione dei modelli per poter descrivere le dimostrazioni, valutarle e insegnare a produrle senza cadere nell'apprendimento puramente mnemonico. Un importante studio in questa direzione è stato fatto da Harel e Sowder [52] che classificano diversi schemi dimostrativi a cui gli studenti del college attingono per accertarsi che le proprie affermazioni siano giustificate adeguatamente; ottengono una tassonomia assai ampia composta da 16 diversi schemi raggruppati in tre categorie: Convinzione esterna, Empirica e Analitica. Tale ricerca è interessante e porta un contributo indiscutibile riguardo alle possibili concezioni che gli studenti hanno riguardo le dimostrazioni, ma come scrive Mariotti: *"Il contributo è certamente interessante, ma proprio per la ricchezza e* *varietà delle categorie non sembra offrire uno strumento unificante per comprendere e quindi per superare le difficoltà che descrive"* [72]. Dunque, si ricercano modelli meno ampi che possano offrire nuove chiavi di lettura e che risultino più utilizzabili ai fini della ricerca e dell'insegnamento. La strada che si intraprende esce dalla didattica della matematica e conduce ad un quadro teorico che vede la dimostrazione come una particolare argomentazione.

2.2 Dimostrazione come argomentazione

Il rapporto tra dimostrazione e argomentazione è complesso; entrambe le pratiche sembra abbiano origine nell'antica grecia, la prima per andare alla ricerca della verità, la seconda per convincere o persuadere gli interlocutori della validità di un'affermazione. Questa distinzione ha accompagnato l'uomo fino al secolo scorso. La crisi dei fondamenti della matematica del XX secolo ha radicalmente cambiato lo statuto epistemologico della matematica, portando i matematici ad abbandonare la ricerca della verità oggettiva in virtù del trovare giustificazioni adeguate per le proprie affermazioni, partendo da assiomi non necessariamente veri. Il focus della matematica si sposta dal dimostrare per capire se qualcosa è vero al capire se la dimostrazione sia una giustificazione adeguata. Per chi si occupa di matematica la differenza può apparire invisibile, ma per chi fa ricerca in didattica questo ha implicazioni profonde: ciò che si considera una buona giustificazione non è oggettivo, non si può entrare nella comunità dei matematici e capire i criteri di accettabilità di una dimostrazione da un giorno all'altro, anche perchè cambiano al variare del settore disciplinare e sarebbe umanamente impossibile comprenderli tutti [66]. Dunque, risulta necessaria una riflessione su cosa significhi *giustificare adeguatamente* in ottica di insegnare a dimostrare. Il tema delle giustificazioni non riguarda solo la matematica, in ogni disciplina giustificare risulta necessario e viene perseguito con la pratica dell'argomentazione. Nella seconda metà del '900 gli studi a riguardo si concentrano sull'osservare, analizzare e descrivere le modalità di argomentazione che emergono da contesti e situazioni reali. Perelman e Olbrechts-Tyteca in [84] propongono la prospettiva secondo cui l'efficacia di un argomento dipende da chi ascolta e non fa ricorso alla nozione di verità. L'obiettivo di un'argomentazione è influenzare l'uditorio cercando di convincerlo o persuaderlo ad accettare una certa affermazione. Il caso in cui l'obiettivo sia convincere, ovvero rendere l'ascoltatore certo di qualcosa, è studiato nel dettaglio da Toulmin, che vede un'argomentazione come un discorso costituito da giustificazioni e ragioni a sostegno di una data affermazione [109]. Toulmin individua in ogni argomentazione sei diverse parti:

1. Conclusione: l'affermazione sostenuta che si vuole argomentare.
2. Dati: l'insieme dei dati che sono in relazioni con la conclusione.
3. Garanzia: la regola di inferenza che collega i Dati alla Conclusione.
4. Forza: il grado di certezza che l'argomentazione esprime, espresso attraverso avverbi come probabilmente o necessariamente.
5. Confutazione: un possibile caso in cui i dati non possono concludere l'affermazione sostenuta, in genere un'aggiunta di qualche elemento che invalida l'argomentazione.
6. Supporto: il supporto alla Garanzia che permette di accettare la regola di inferenza.

Egli afferma che questo scheletro è invariante dal contesto, mente ciò che cambia è il *campo dell'argomento*; con le parole di Toulmin: *"Si dirà che due argomenti appartenengono allo stesso campo quandi i dati e le conclusioni in ciascuno dei due argomenti sono rispettivamente, dello stesso tipo logico: si dirà che provengono da campo diversi quando il supporto o le conclusioni in ciascuno dei due argomenti non sono dello stesso tipo logico Le dimostrazioni negli Elementi di Euclide, ad esempio, appartengono a un campo, i calcoli eseguiti nella preparazione di un numero dell'Almanacco Nautico appartengono ad un altro"*. Il campo varia da contesto a contesto, anche all'interno della stessa disciplina, un po' come accade nella distinzione tra Congettura e Teorema: la prima ha un'argomentazione informale, il secondo ha una dimostrazione accettata dalla comunità: i dati e le conclusioni possono essere gli stessi, mentre le logiche a supporto dell'argomentazione cambiano. Riguardo a queste logiche, sulla scia degli studi di Perelman, Olbrechts-Tyteca e Toulmin si inserisce Duval, che individua una differenza tra la dimosrazione e gli altri tipi di argomentazione seguendo un approccio cognitivista. Duval introduce il concetto di *valore epistemico* come il grado di affidabilità posseduto da un'affermazione, non troppo diverso da ciò che Toulmin chiama Forza dell'argomentazione, ma associato alla giustificazione (o Garanzia per Toulmin). E sostiene che, nelle dimostrazioni, il valore epistemico dipenda più dallo *statuto teorico* che dal valore semantico di ciò che si afferma [35]; dove lo statuto teorico di una proposizione è la sua validità teorica all'interno di una teoria, ossia l'essere una definizione, un assioma, o un teorema. Questa distinzione sposta l'attenzione dal valutare la semantica di una proposizione al valutarne la validità teorica, che dipende dai criteri di accettabilità della teoria di riferimento, ovvero dipende da cosa si accetta come definizione, assioma, o teorema. Riguardo a quest'ultima istanza, i criteri di accettabilità di un teorema dipendono da quelli della dimostrazione che lo accompagna, che come si è detto prima, dipendono dal contesto e si differenziano da gruppo culturale in gruppo culturale. La ricerca fin'ora si è concentrata sulla didattica, in particolare Stylianides scrive quali caratteristiche dovrebbe avere una dimostrazione in un contesto di classe [105]: usare enunciati accettati dalla comunità della classe che sono ritanuti veri e accessibili senza ulteriore giustificazione; usare forme di ragionamento validi e conosciuti dalla comunità della classe; è comunicata attraverso forme di espressione che sono appropriate per la comunità della classe [7]. Risulta cruciale, dunque, condividere i criteri di accettabilità, e per farlo è importante che sia condiviso anche il senso di una dimostrazione, ossia a quali obiettivi risponde, quando si richiede e perchè.

2.3 Funzioni della dimostrazione

Per poter portare la dimostrazione in classe, è importante sapere quale senso abbia per la comunità dei matematici ed è in questa direzione che si muove questa tesi. Prima di portare il punto di vista dell'Etnomatematica, è presentato un riassunto delle più importanti ricerche svolte finora. Come riporta Mariotti, gli studenti evidenziano come per loro non sia affatto chiaro a cosa servano le dimostrazioni, specialmente quando accompagnano fatti ritenuti ovvi [72]. La tensione che si crea riguarda le dimostrazioni che non spiegano il perché le cose funzionino in un certo modo. Il tema è affrontato per la prima volta da un punto di vista filosofico da Steiner [104] e successivamente ripreso per aspetti didattici da Hanna [50], in entrambi i lavori emerge come ci sono dimostrazioni che spiegano e altre che dimostrano soltanto. Per le dimostrazioni che non spiegano ci sono svariati esempi: spesso quelle per induzione non spiegano, ma mostrano che le cose funzionano in un certo modo applicando un principio accettato dalla comunità; notevole è l'esempio della somma di Gauss dei primi n numeri. Anche le dimostrazioni per assurdo, che si appoggiano al principio, condiviso e spesso non formalizzato, del terzo escluso, tendono a non avanzare spiegazioni soddisfacenti; se la dimostrazione dell'irrazionalità della radice di due può sembrare che spieghi qualcosa, mostrare l'irrazionalità di π è totalmente un'altra questione[1]. Trovare dimostrazioni che spiegano non è semplice e a volte proprio non ce ne sono; anche capire cosa significhi che una dimostrazione *spieghi* non è per nulla banale. In questa direzione risultano fondamentali i lavori ben spiegati da Mariotti[2] di Mopondi [73] che considera la spiegazione come un atto che mira a far comprendere; e i lavori di Sierpinska [98] e Sfard [94] che cercano di mettere in luce cosa significhi in effetti *comprendere*. Per Sierpinska un atto di comprensione è un processo mentale personale e soggettivo che si realizza mettendo in relazione un oggetto noto, detto *base*, ad un oggetto non noto, detto *di comprensione*. In presenza di un oggetto non noto che il soggetto è intenzionato a capire, la comprensione avviene per costruzione di una rete di atti di comprensione legati da inferenze e deduzioni a partire da una base nota. Dopodichè, ci si può riferire allo spiegare come una produzione discorsiva con l'obiettivo di far costruire questa rete attraverso la descrizione dell'oggetto nuovo e l'argomentazione del perchè accettare tale oggetto. Un interessante contributo su *come* possa svilupparsi un discorso di spiegazione è dato da Lolli [66], che fa riferimento a cinque diversi modi in cui una dimostrazione possa spiegare. Innanzitutto, ci si può ricondurre agli assiomi, in corrispondenza all'idea di Sierpinksa e anche alle origini storiche della dimostazione. Per secondo, una spiegazione può avvenire mediante la generalizzazione di un risultato: passare da esempi che supportano una congettura alla dimostrazione può mettere in evidenza quali proprietà degli oggetti in gioco siano fondamentali affinchè il teorema sia vero. Un terzo modo è per sussunzione, specialmente nel caso di fatti strani, o sorprendenti: passare da una teoria particolare ad una teoria più generale può spiegare molto più di un singolo fatto, si pensi a come cambia la comprensione dell'analisi reale alla luce dei risultati di analisi complessa. Un quarto fatto riguarda lo spiegare mediante semantica, trovando le ragioni di un fatto nella struttura teorica

[1] Come si può vedere dalla dimostrazione di Niven [80]

[2] sempre in [72].

che lo riguarda, spiegando caratteristiche della struttura, più che del fatto. Infine, una dimostrazione può spiegare *perché non*, come quelle che riguardano l'impossibilità di costruzioni con riga e compasso, o i teoremi d'indipendenza, come quello sull'ipotesi del continuo. Lolli individua altre 34 funzioni della dimostrazione, che spesso sono sfumature della stessa, come accade per la spiegazione. Il suo contributo sarà ripreso nel terzo capitolo quando si parlerà del rapporto tra dimostrazione e intuizione. Un lavoro più compatto e degno di nota è stato fatto da De Viller [111], che oltre a riprendere l'esplicatività, descrive altre quattro funzioni fondamentali: convincimento, sistematizzazione, comunicazione e scoperta.

2.3.1 Dimostrare per convincere

Convincere è un po' il cuore della dimostrazione e riprende la sua natura argomentativa. De Viller scrive che, tranne poche eccezioni, gli insegnanti di matematica credono che una dimostrazione conferisca lo stato di assoluta certezza al matematico e che sia l'unica via per dare validità ad una congettura in modo che diventi teorema. Nella realtà dei fatti, prima di fornire una dimostrazione, sembra si debba già essere convinti in qualche modo di ciò che si sta dimostrando e che la scrittura formale assuma più un ruolo giustificativo, non sulla verità del teorema, ma sul modo in cui dalle ipotesi si possa dedurre la tesi.

2.3.2 Dimostrare per sistematizzare

La dimostrazione svolge il cruciale ruolo di costruire un'assiomatizzazione della matematica a posteriori, aiuta a identificare le minime ipotesi affinchè certi risultati siano veri, li semplifica e li unisce fornendo una prospetiva globale sull'albero della conoscenza matematica. In pratica la dimostrazione permette di organizzare gli oggetti matematici per assiomi, definizioni e teoremi. Ripensando alle ricerche di Duval sull'importanza dello statuto teorico nella didattica della dimostrazione, la funzione di sistematizzazione risulta fondamentale.

2.3.3 Dimostrare per comunicare

Il terzo ruolo cruciale che la dimostrazione assume nella condivisione del sapere matematico riguarda proprio la comunicazione della matematica. Si pensi che dimostrare, nella maggior parte delle volte, è proprio una forma di discorso, un modo di comunicare tra matematici. Non avrebbe alcun senso produrre una dimostrazione che non possa essere comunicata, poichè nasce dall'esigenza sociale di condividere nuova conoscenza, e come argomenta anche De Toffoli [30]: la comunicabilità di una dimostrazione è un criterio di accettabilità più fondamentale del suo rigore [30].

2.3.4 Dimostrare per scoprire

La quarta funzione che si realizza dimostrando è quella di scoperta. Ciò può avvenire direttamente, come si può vedere nella storia delle geometrie non euclidee: la costruzione di nuovi spazi avviene proprio grazie alla dimostrazione di teoremi a partire da nuovi assiomi. O può anche avvenire con una lettura a posteriori: il processo di generalizzazione che avviene dimostrando porta a vedere una serie di esempi, apparentemente scollegati tra di loro, da una prospettiva più ampia; così, il matematico vede nuove strade da sviluppare nel mondo della conoscenza e individua delle proprietà che contribuiscono in modo essenziale alla sussistenza del teorema. Per un approfondimento di questa funzione si rimanda ad un altro lavoro di De Villier, in cui illustra il ruolo esplicativo e di scoperta delle dimostrazioni [31].

L'ultimo contributo che si vuole citare riguarda un'importante ricerca sperimentale portata avanti da Healy e Hoyles [53] sulle concezioni che studenti di 14 e 15 anni hanno riguardo le dimostrazioni di algebra. Lo studio risponde a diverse domande di ricerca, tra cui una di particolare interesse per questa tesi: quali convinzioni emergono sulla funzione della dimostrazione? La maggior parte degli studenti riconosce che dimostrare sia uno strumento di convincimento o di spiegazione, e solo l'1% riconosce i ruoli di scoperta e sistematizzazione. Un altro dato sorprendente è che i risultati non sembrano dipendere dagli insegnanti, i quali sono formati in ambienti accademici diversi; questo, in un'ottica Etnomatematica, apre la strada a cercare cause più generali dietro la sedimentazione di certe convinzioni: apre la strada alla ricerca di cause culturali. Quali valori guidano la didattica della dimostrazione? Quali vengono trasmessi? Quali funzioni della dimostrazione emergono dalla pratica didattica e di ricerca che si svolge in ambiente accademico? Quest'ultima domanda è proprio ciò a cui questa ricerca vuole dare una risposta.

3. Ricerca e risultati

La maggior parte della produzione scientifica riguardo la cultura occidentale della matematica è scritta da singoli matematici che ritengono il problema rilevante. I numerosi quadri teorici che si sviluppano hanno bisogno di essere ricercati e verificati. L'Etnomatematica, fino ad oggi, si è occupata di studiare le culture indigene conforntandole implicitamente con la propria, spesso e volentieri occidentale. Ma si è sicuri di conoscere questa cultura? Tale domanda apre una voragine apparentemente incolmabile e che richiede uno sforzo collettivo per poter essere risposta. La ricerca presentata in seguito è un piccolo mattone nel palazzo che si vuole costruire e indaga la pratica culturale della dimostrazione negli ambienti accademici, in particolare si chiede quali aspetti culturali emergono dalla pratica didattica e di ricerca della dimostrazione.

3.1 Metodologia

Come evidenziato anche da Morgan [29], i focus group sono ottimi per analizzare motivazioni e convinzioni legate ad un certo argomento e possono produrre una grande quantità di dati. Per questo motivo, tale metodologia è stata ritenuta particolarmente adatta per far emergere e studiare aspetti culturali della didattica della dimostrazione in università. Inoltre, l'analisi è stata mirata a individuare pochi aspetti specifici, così da evitare di ottenere molti dati tutti diversi.

3.1.1 Composizione dei Focus Group.

Sono stati organizzati due diversi focus group di docenti universitari di matematica sul tema della dimostrazione, denominati FGA (Focus Group A) e FGB (Focus

Group B). Ciascuno di essi è stato composto in modo da avere rappresentati di diversi settori disciplinari, cercando di ricostituire una micro comunità matematica sulla base dei dati raccolti da Morana e Sagramora dal Portale dei dati dell'Istruzione Superiore riguardo la distribuzione di docenti STEM per grado di carriera accademica e genere [74], [75]. I dati riportano le seguenti percentuali: il personale docente e ricercatore degli atenei statali nell'area delle scienze matematiche e informatiche è così distribuito: professori di I e II fascia 59,7%; ricercatori 23,6% e titolari di assegni di ricerca 16,7%. La presenza femminile nel sistema universitario italiano si assesta al 50% tra i titolari di assegni di ricerca, al 46% tra i ricercatori universitari, al 42% tra i professori associati e al 27% tra i professori ordinari. Al gruppo FGA hanno partecipato un professore associato di analisi, una professoressa associata di didattica della matematica, una professoressa associata di geometria, un professore ordinario di probabilità, un ricercatore di analisi numerica e un dottorando di analisi. Al gruppo FGB hanno partecipato un professore associato di analisi numerica, una professoressa associata di storia della matematica, una professoressa associata di algebra, un professore associato di fisica matematica e una dottoranda di algebra. Inoltre, in entrambi il tesista è stato moderatore, mentre solo nel primo è stato presente un osservatore col solo scopo di prendere appunti.

Settore disciplinare	Grado in carriera	Genere	Codice
MAT/03 (Geometria)	Associato	F	GAFA
MAT/04 (Matematiche Complementari)	Associato	F	DAFA
MAT/05 (Analisi Matematica)	Associato	M	AAMA
MAT/05 (Analisi matematica)	Dottorando	M	ADMA
MAT/06 (Probabilità e Statistica Matematica)	Ordinario	M	POMA
MAT/08 (Analisi Numerica)	Ricercatore	M	NRMA

Tabella 3.1: Composizione Focus Group A

Settore disciplinare	Grado in carriera	Genere	Codice
MAT/02 (Algebra)	Associato	F	AAFB
MAT/02 (Algebra)	Dottorando	F	ADFB
MAT/04 (Matematiche Complementari)	Associato	F	SAFB
MAT/07 (Fisica Matematica)	Associato	M	FAMB
MAT/08 (Analisi numerica)	Associato	M	NAMB

Tabella 3.2: Composizione Focus Group B

3.1.2 Progettazione e gestione del Focus Group.

Ogni focus group è stato svolto online in una videochiamata di cui è stata fatta una registrazione audiovisiva. Ciascuna intervista è durata circa due ore ed è stata scandita da quattro fasi: dopo aver spiegato come si sarebbe strutturata la discussione, è stata presentata a ciascun partecipante una prima domanda: "Come fare matematica senza dimostrare?" (Q1). Ogni partecipante ha risposto privatamente e non anonimamente attraverso il software web Padlet, una lavagna virtuale. La scelta di iniziare con una parte scritta è stata fatta per dare il tempo ai partecipanti di raccogliere le idee e potersi focalizzare sull'argomento per evitare momenti di dispersione durante la successiva discussione, nonchè per contenere alcune dinamiche di gruppo come l'effetto di conformità di Asch [3], secondo il quale il comportamento degli individui in un gruppo è influenzato da come si comporta la maggioranza, o come il pensiero di gruppo, per il quale l'opinione del singolo non viene espressa criticamente per mantenere la coesione all'interno del gruppo [62]. Dopo una lettura delle risposte da parte del moderatore, è stato chiesto ai partecipanti di esporre la risposta per iniziare la discussione di gruppo. Dopodiché, è iniziata la seconda fase del focus group, nel quale gli intervistati hanno prima risposto ad una seconda domanda per iscritto privatamente: "Come insegnare matematica senza dimostrazione?" (Q2), per poi avviare la discussione nelle stesse modalità della prima. Talvolta, il moderatore è intervenuto con lo scopo di chiedere chiarimenti o approfondimenti su alcuni argomenti emersi.

3.1.3 Analisi

L'analisi condotta ha seguito le linee guida espresse da Raibee [42], che si rifà ai celeberrimi lavori di Krueger. Per ogni gruppo si è prodotta una trascrizione dell'intervista e per ogni frase detta da ciascun intervistato si è risposto alla sequenza di domande:

1. Il partecipante risponde alla domanda?
2. La risposta aggiunge qualcosa di importante all'argomento?
3. Ci sono commenti aggiuntivi che pur non rispondendo alla domanda risultano rilevanti nel tema di ricerca?

4. La risposta è già stata data in precedenza?

L'ultima domanda ha permesso di creare delle categorie di risposta caratterizzate dalle parole utilizzate, dal contesto emergente, dalla consistenza dimostrata, dalla frequenza, intensità e specificità della risposta. Questo processo è stato svolto per ciò che emerge durante la discussione, mentre la parte scritta è stata usata per controllare la consistenza interna delle risposte. Le domande guida della discussione sono poste in modo tale da far risaltare ciò che resta quando si toglie la dimostrazione o ciò che bisogna far emergere in assenza di essa. Per questo sono emerse risposte che esprimono convizioni e motivazioni implicitamente. Eccone un esempio: *"[...] [senza dimostrazione NdA] non sei sicuro che funzioni. [...] si vede qui si vede anche la mia ignoranza di matematica applicata. Una cosa che ho pensato invece è che possono succedere delle cose, del tipo io scrivo un algoritmo e vedo che funziona e magari non ho la dimostrazione completa però lo studio, un po' come se fosse uno studio sperimentale."* In questo intervento, AAFB allude a come si possa capire il funzionamento di un fatto matematico in assenza della dimostrazione, evidenziando come, in presenza di quest'ultima, il problema non si porrebbe. In questo senso diversi altri interventi sono stati inseriti nelle categorie di riferimento.

3.2 Risultati

Quali funzioni emergono dalla pratica di ricerca e didattica del dimostrare in università? Il principale risultato della ricerca è l'aver individuato delle possibili funzioni della dimostrazione, che la caratterizzano come una pratica matematica che segue determinati obiettivi disciplinari: capire il mondo matematico, sistematizzare la conoscenza matematica e formare l'intuizione matematica . Questo approccio permette di vedere i processi dimostrativi staccati dai processi argomentativi, così che possano essere individuati anche in pratiche non accademiche.

3.2.1 Dimostrare per capire la matematica.

L'unità di analisi considerata sono entrambe le discussioni, nelle quali sono stati ricercati i verbi *capire, apprendere, spiegarsi, dare un senso, funzionare* con eventuali desinenze. Ecco una lista delle ricorrenze di termini quando usati esclusivamente in rifermento a come dimostrare serva a comprendere il mondo matematico accompagnati da un esempio:

- Capire: 16, *AAFB: "Se vuoi poi davvero capire cos'è la matematica, secondo me una dimostrazione ci va."*
- Funzionare: 9, *DAFA: "io [..] la dimostrazione l'ho sempre intesa [...] come il momento in cui capisci per davvero come funzionano le cose".*
- Dare un senso: 6, *AAMA: "[...] senza dimostrazione di fatto la matematica non c'è, ci sono piccoli pezzi di matematica. Ma non c'è il senso pieno".*
- Apprendere: 2, *NRMA: "[...] si potrà fare matematica senza dimostrazione, ma trovo che si perderebbe proprio uno strumento in qualche modo didattico per apprendere appieno un risultato".*
- Spiegarsi: 2, *NRMA: "[...] in realtà la dimostrazione è una spiegazione del risultato stesso".*

Tali termini ricorrono sia all'inizio, che a metà, che alla fine dell'intervista, mostrando una certa stabilità della convinzione che la dimostrazione serva a capire la matematica. Alcuni interventi non contengono le parole ricercate, ma rientrano comunque nella semantica della comprensione.

NRMA: [...] mi sono accorto sempre di più come una dimostrazione sia in qualche modo una spiegazione del risultato stesso, soprattutto quando si sottolineano i ruoli specifici delle varie ipotesi. Una volta capito il risultato, grazie anche alla sua dimostrazione, si può poi apprezzare anche l'impatto che questo risultato ha. In conclusione, si potrà sicuramente fare matematica senza dimostrazioni, ma credo che si toglierebbe un importante strumento per comprendere ed assimilare a pieno la matematica stessa.

NRMA avvia così la discussione di gruppo esponendo agli altri partecipanti ciò che ha scritto. Tale affermazione tratta il *dimostrare* come un'attività che il matematico svolge per se stesso e la dimostrazione come strumento. Questo aspetto è di fondamentale importanza per comprendere la sfumatura nell'affermazione: "Si dimostra per comprendere". GAFA la esprime spontaneamente durante la discussione:

GAFA: "[...] prima di imbarcarsi nel leggere una dimostrazione io mi devo fidare che il risultato ha un certo valore di verità".

In questa frase, che viene accolta dal gruppo e mai contestata, si evidenzia come la convizione della verità di un fatto debba essere precedente alla sua dimostrazione. Questo aspetto è così fondamentale anche per DAFA, che dice di aver criticato aspramente, in passato, le dimostrazioni portate a termine con l'ausilio di un calcolatore, come quella del Teorema dei quattro colori. In questa critica emerge una sorta di frustrazione dovuta al dover rinunciare a un aspetto del cercare una dimostrazione, anche considerando la sua citazione riguardo al valore affettivo che lega alla dimostrazione:

DAFA: "[...] a me la dimostrazione mi è sempre piaciuta da morire perché [...] secondo me ha una valenza estetica e affettiva, nel senso che quando riesci a fare la dimostrazione di un risultato [...] che hai in mente e tutte le cose ti vanno a posto, è il momento secondo me bello del fare matematica e è il momento gratificante del fare matematica".

Più nello specifico scrive anche:

DAFA: "[...] nella simulazione tu hai un qualcosa che non controlli fino in fondo, [...] a me questa cosa qui istintivamente mi è sempre sembrata una cosa che [...] toglie tutto il gusto del lavoro, no? Nel senso che cioè ti rimane un qualcosa del quale non ti fidi perché non lo sai come è stato trovato".

Questo legame affettivo si lega alla mancanza di comprensione: la dimostrazione permette di fidarsi in quanto aiuta a stabilire il grado di verità un risultato, tale fiducia conclude il processo di comprensione. Infine, è notevole la presa di posizione riguardo al formalismo:

DAFA: "Ecco, io non l'ho mai intesa come una cosa di formalismo, la dimostrazione l'ho sempre intesa più come a un certo punto diceva NRMA come il momento in cui *capisci per davvero come funzionano le cose"*

Da cui emerge la convinzione che un pensiero dimostrativo considerabile tale è quello di comprensione, non quello di formalizzazione. Tuttavita, questa visione pare non essere del tutto condivisa dal gruppo, alcuni membri si riferiscono all'atto di dimostrare come fase finale di un processo di scoperta e intuizione matematica:

ADMA: "[...] la dimostrazione serve a rendere rigoroso [...] un ragionamento che è stato fatto, però secondo me il focus deve rimanere un po su l'idea, anche intuitiva, che ti ha portato a fare.. A impostare un problema in un certo modo."

GAFA: "Quindi l'attività di dimostrazione è un'attività che arriva alla fine di qualcosa molto lungo, nel senso che è la fase finale di un processo in cui uno di solito prima studia tanto per capire qual è il contesto, cerca di fare delle ipotesi, si fa un sacco di esempi e tenta di fare dei controesempi per smontare le ipotesi e poi alla fine, quando è abbastanza convinto che l'affermazione che sta scrivendo è un affermazione sensata, tenta di fare una dimostrazione un pochino più formale [...]. La dimostrazione è una fase di un percorso molto più lungo."

Eppure, anche se sembrano in contrasto, le due visioni rientrano nella stessa categoria; infatti, questa fase finale di dimostrazione risponde all'esigenza della comunità dei matematici di sistematizzare la conoscenza, ma nell'ottica del soggetto dimostratore, risponde alla necessità di voler accettare una nuova conoscenza matematica che prima aveva solo intuito. In questo senso, la comprensione coincide con l'accettazione che ciò che si ha intuito sia effettivamente parte integrante del mondo matematico. Questo raggiungimento avviene attraverso il processo dimostrativo, e si può quindi estrapolare la seguente caratterizzazione: **un processo matematico che permette al soggetto che lo attua la comprensione di un fatto matematico è un possibile processo dimostrativo**.

In parallelo, nella discussione portata avanti dal FGB, AAFB ha sostenuto le stesse idee con parole molto simili:

"Se non hai dimostrato qualcosa, o non l'ha dimostrata qualcun altro, non puoi essere sicuro che sia vera."

"non è che io non faccio la dimostrazione. Io nella mia testa me la sono fatta, magari non la scrivo nell'articolo però lo so che funziona."

"[...] ci sono computer che fanno dimostrazioni automatiche, però non è tanto quello che vogliamo la mia idea è che poi la dimostrazione ti dà un po' le certezze."

Mentre FAMB prende posizione su come per lui la dimostrazione debba essere per comprendere e non per dimostrare:

"[...] Da questo punto di vista, per esempio, io tendo a non raccontare quasi mai le dimostrazioni per contraddizione, ma solo quelle per quelle costruttive. Non dico che non servano, però diciamo che per quello che insegno io tipicamente do molto più peso alla costruzione di un risultato, di un modello, eccetera".

Altri partecipanti, invece, il *dimostrare per capire* non lo esplicitano, esprimendo una certa necessità del dover dimostrare per fare matematica, senza rendere chiaro a cosa risponda questa necessità.

ADFB: "Non si può fare matematica senza dimostrare. Anche perché cosa sarebbe la matematica senza le dimostrazioni? Una serie di frasi prese per vere/false senza verifica?"

ADFB: "[...] è vero che però la congettura la vogliamo dimostrare, quindi cioè comunque stiamo andando verso, cioè puntiamo alla dimostrazione e dalla congettura nascono cioè piccoli risultati per dimostrare o per confutare la congettura."

SAFB: "[...] quando ho letto la domanda [Q1 NdA] la mia risposta immediata sarebbe stata di dire che non era possibile fare matematica senza dimostrazione."

SAFB:"Diciamo per le esperienze didattiche che ho, la dimostrazione faccio un po' *fatica a evitarla, magari in alcuni casi provo ad assegnare gli studenti la lettura di dimostrazioni fatte da altri e poi di commentare con loro [...] il procedimento. [...] non riesco a non far vedere le dimostrazioni."*

3.2.2 Dimostrare per sistematizzare la conoscenza matematica.

La sistematizzazione è l'azione collettiva di una comunità per costruire una conoscenza condivisa tramandabile e comunicabile. In matematica questo avviene grazie alla dimostrazione delle congetture: un teorema entra a fare parte dell'insieme della conoscenza sistematizzata quando è dimostrato in una teoria. Dalle discussioni questo emerge chiaramente:

FAMB: "[...] Parisi ha vinto il Nobel a partire dalla sua soluzione di questo modello. La dimostrazione è arrivata anni e anni e anni dopo. Però [...] lui ha sviluppato una tecnica simil rigorosa, cioè non rigorosa.[...] finché non ha avuto la dimostrazione di matematica nessuno aveva il coraggio di parlarne come se fosse matematica."

AAMA: "[...] senza dimostrazione di fatto la matematica non c'è, ci sono piccoli pezzi di matematica. [...] Tant'è vero che nessuno di noi credo che se sottomette un articolo qualsiasi, poi la rivista scientifica, glielo prendono solo perché c'è una bella intuizione, ma poi non c'è scritto una dimostrazione".

AAFB: "Se non hai dimostrato qualcosa, o non l'ha dimostrata qualcun altro, non puoi essere sicuro che sia vera."

ADFB: "La dimostrazione fornisce l'universalità modulo essersi concordati sulle regole".

[M: Come fare matematica senza dimostrare?]:

DAFA: "La risposta istintiva e immediata è, per quanto mi riguarda, "impossibile". Nella mia esperienza sia di studente che di ricercatore, la dimostrazione è sempre *stata uno dei cardini del fare matematica".*

AAMA: "In senso pieno, non si può fare. Rimanendo a livello dell'intuizione o della procedura, si fa una matematica monca".

ADFB: "Non si può fare matematica senza dimostrare. Anche perché cosa sarebbe la matematica senza le dimostrazioni? Una serie di frasi prese per vere/false senza verifica?"

Ciò che è meno ovvio di quanto sembri è come le dimostrazioni *dimostrino* le congetture e dunque come avvenga in concreto la sistematizzazione. Il problema non è banale ed è sollevato e affrontato da De Toffoli [30], in cui discute come la maggior parte delle presunte dimostrazioni che esistono siano in realtà *simil-dimostrazioni*, ovvero argomenti che soddisfano i criteri di accettabilità per dimostrazioni di una determinata comunità matematica. Lolli [66] definisce le dimostrazioni come *bolle di accompagnamento che certificano la sussistenza di "A implica B"*, e ci tiene a non definire meglio cosa sia una *bolla di accompagnamento* o come essa possa in effetti *certificare* la validità di un ragionamento, poiché non è possibile farlo: nella storia e nelle diverse sottodiscipline della matematica se ne trovano di tutti i formati, ed è difficile ricondurli tutti ad uno stile unico. La cosa fondamentale è che il ragionamento sia finito per poterlo trasmettere. In conclusione, ciò che è una dimostrazione non è universale, ed è dunque ragionevole considerare che ogni cultura possa sviluppare i propri criteri dimostrativi e possa condividere proprie simil-dimostrazioni. Questo fatto emerge in FGA in risposta ad una domanda posta dal moderatore su quali siano i criteri di accettabilità di una dimostrazione:

GAFA: "[...] io faccio topologia e da noi per le dimostrazioni si guardano immagini [...], prima di leggere un risultato guardi la figura [OK] nel senso che di solito la figura è portatrice di più informazioni che non il testo che la accompagna, quindi abbiamo dei criteri di accettabilità molto diversi da, per esempio, il mio collega di ufficio che fa l'analista e non ha mai una figura dentro un articolo e quindi credo che la risposta sia che dipende dalla comunità."

DAFA: "Io se mi posso esprimere su questa cosa sono perfettamente d'accordo con quello che dice GAFA sul discorso della comunità di riferimento."

AAMA: "direi che tantissimo lo fa il contesto, un po' come hanno detto adesso GAFA e DAFA, [...] io vengo da una nottata di correzione esami, all'interno dello stesso esame c'erano cose che valutavo positivamente pur non essendo dimostrazioni rigorose dall'inizio alla fine e altre in cui seccavo giù perché andavano fatte per bene, perché erano magari conseguenze dirette di definizioni quindi andavano fatte. Quindi boh, direi che il contesto fa tutto."

E per quanto riguarda la matematica NUC, da entrambe le discussioni emerge *essere rigoroso* come condizione necessaria affinché un argomento sia una dimostrazione:

ADMA: "[...] la dimostrazione serve a rendere rigoroso, eh, un ragionamento che è stato fatto".

GAFA: "[...] quando è abbastanza convinto che l'affermazione che sta scrivendo è un affermazione sensata, tenta di fare una dimostrazione un pochino più formale".

AAMA: "È vero che è bellissimo quando uno vede quel passaggio che fa tornare qualcosa, è uno delle esperienze più gratificanti, e però questo è come il primo passo che poi ti porta alla formalizzazione di tutto".

ADMA: "[...] te hai avuto l'idea, hai avuto l'intuizione, poi la devi formalizzare. La formalizzazione può essere molto tecnica, molto difficile."

NAMB: "Quindi io vedo la dimostrazione come un'applicazione rigorosissima e giustissima, cioè che forse è quella più riconoscibile nella matematica in generale, però è specchio di uno dei processi della mente umana, cioè logici, che è la deduzione".

SAFB: "[A studenti non di matematica NdA] non ho necessità di formalizzare in maniera rigorosa tutti i risultati so, non ho necessità di dare la dimostrazione dei teoremi".

Per concludere il ragionamento citiamo il lavoro di Burgess e De Toffoli [21] in cui scrivono che il rigore è ciò che garantisce la correttezza di un risultato; ne consegue che una dimostrazione rigorosa è corretta, che a sua volta implica che sistematizza la conoscenza. Come fatto per la funzione di capire la matematica, si trova una nuova possibile caratterizzazione del *dimostrare* nella matematica NUC: **un processo matematico che ha lo scopo di sistematizzare la conoscenza matematica è un possibile processo dimostrativo.**

3.2.3 Dimostrare per formare l'intuizione matematica.

Per Fischbein [44] un'intuizione è una conoscenza matematica auto-esplicativa, ovvero non che richiede l'esigenza di essere giustificata; risulta evidente alla mente, cioè facilmente immaginabile, ed è intrinsecamente certa, indipendentemente dalla percezione di quanto sia giustificiabile. Le intuizioni sono perseveranti e coercitive, ossia rimangono nel tempo e sono difficili da abbandonare, e spesso sono organizzate in strutture simili a teorie, da cui si possono anche estrapolare nuove conoscenze. Più intuizioni possono organizzarsi in sistemi utilizzabili come modelli per la risoluzione di problemi; in generale un sistema B rappresenta un modello del sistema A se, sulla base di un certo isomorfismo, una descrizione o una soluzione prodotta in termini di A può essere riportata coerentemente in termini di B e viceversa. Quando il sistema B è un sistema di intuizioni, allora il modello è detto *intuitivo*. Tali costruzioni mentali intervengono nella risoluzione di problemi e questo paragrafo supporta l'ipotesi che dimostrare ha la funzione di costruire un modello intuitivo per la dimostrazione o la confutazione di congetture. Innanzitutto sono presentati alcuni interventi introduttivi sulla differenza che c'è tra studenti di triennale e di magistrale.

NAMB: "[...] si presuppone abbiano già acquisito, essendo magari la laurea magistrale, [...] la capacità [...] di analizzare una dimostrazione a loro fornita senza doverla ripercorrere passo passo e si presuppone abbiano le capacità di seguire tutti passi di questa dimostrazione nel momento in cui la dimostrazione non presupponga *passi molto particolari. [...] nel fare didattica [...] si dà per scontato che gli studenti possano seguirla da soli, o che si possa adattare una dimostrazione in maniera abbastanza facile. "*

AAFB: "[...] io penso che una volta che loro sanno cos'è una dimostrazione puoi anche permetterti di dire: ve la andate a vedere, non te la devo rifare tutta. Però questa idea che è dentro all'essenza della matematica, cioè [...] avere visto una dimostrazione, in effetti ce l'ho."

NRMA: "[...] se io scelgo di dimostrare un certo risultato è perché penso che [...] la dimostrazione di quel risultato dia un valore aggiunto [...] forse questo va anche un po' nella direzione di una matematica o di un insegnamento della matematica o di qualche disciplina della matematica anche senza dimostrazioni, però anche ad un livello un po' più avanzato. Cioè non siamo al primo anno della triennale, ma siamo con studenti al primo, secondo anno della magistrale, che hanno una confidenza maggiore anche con gli strumenti della matematica."

GAFA: "È più preoccupante quando sono poco in grado di muoversi, soprattutto pensando a matematici, quando sono un po' più grandi, cioè nel senso, quando tu arrivi coi corsi sulla magistrale e c'è di nuovo il problema che se non metti tutti i dettagli da soli non riescono a cavarseli fuori, quello diventa un po' problematico".

Da queste risposte emerge, innanzitutto, come il dimostrare a lezione abbia un carattere fortemente didattico, poiché si riduce con l'aumento della competenza dello studente da cui ci si aspetta una certa autonomia. Inoltre, si evidenziano quali siano queste competenze attese, ovvero il sapere analizzare, capire e produrre dimostrazioni di fatti noti. Il commento di GAFA esprime una condizione precisa riguardo al possibile fallimento di tale azione, ovvero l'incapacità dello studente di risolvere i problemi che possono emergere nello studio o nella produzione di una dimostrazione senza l'aiuto di un esperto. Chiarito l'obiettivo, risulta interssante come questo viene perseguito:

AAFB: "[...] devo dire e il problema è dopo capire se loro hanno recepito cosa *vuol dire davvero dimostrare una cosa. E secondo me, nella loro testa loro l'hanno dimostrato, ma non è vero [...] e finché non gliele faccio, anche un tot., secondo me loro la differenza non la capiscono."*

AAMA: "[...] se tu sei al primo anno e io ti devo introdurre a questa nuova cosa della dimostrazione, c'è bisogno che io te le faccia vedere un po'. [...] poi piano piano cerco di accompagnarti nel fartele da sole. "

GAFA: "[...] fare alcune dimostrazioni insegna [...] delle tecniche di dimostrazione."

AAMA: "Perché si possa, come dire, sperare che lo studente impari a muoversi, impari magari a scrivere una dimostrazione, io devo, direi, come minimo fornirti un pacchetto di dimostrazioni che ho fatto per bene."

GAFA: "[Fare alcune dimostrazioni NdA] è molto importante nella matematica, quindi diciamo o dimostrazioni che insegnano qualcosa dal punto di vista del fare la dimostrazione oppure l'altro motivo per cui si fanno dimostrazioni è per allenare, [...] questa è una cosa che è messa anche prima, cioè il valore della dimostrazione è quello di ripulire l'idea. [...] Quindi fare dimostrazioni ti allena o comunque ti impone di parlare a qualcun altro."

ADFB: "[...] c'è una gran differenza tra triennale e magistrale, come si diceva già anche adesso, quindi in triennale impari cos'è una dimostrazione, [...] impari a maneggiarla eccetera; In magistrale [...] ha senso mostrare una dimostrazione [...] che usa tecniche magari nuove, innovative, diverse rispetto a quelle precedenti e quindi che sono tecniche che tu studente poi potresti riapplicare nel tuo progetto di ricerca."

In un quadretto quasi umoristico, pare che dimostrare a lezione sia una pratica necessaria per insegnare a dimostrare. Di certo per *dimostrare a lezione* non si intende il cercare la dimostrazione di una congettura, ma il trovare dimostrazioni a fatti già noti e ben sistematizzati. Dunque è corretto dire: dimostrare a lezione fatti noti è una pratica necessaria per insegnare a dimostrare fatti non noti. Questa pratica didattica persegue proprio lo scopo di far costruire agli studenti un modello intuitivo da usare quando si deve affrontare un problema nuovo: si è visto che la Dimostrazione ha una definizione molto vaga e per nulla operativa, così risulta necessario fornire allo studente un pacchetto di esempi di dimostrazione abbastanza grande a cui poter attingere nel momento in cui affronta un problema nuovo. Quello che si ritiene succeda è qualcosa di molto simile alla formazione di diverse *concept image* [106] del concetto matematico astratto di dimostrazione. Oltre all'evidenze esplicite riportate sopra, dalle interviste risulta che le parole *intuzione* e *intuitivo/a* relative al fare matematica e/o dimostrare emergono 14 volte nel FGA e 8 volte nel FGB, questi dati indicano che gli intervistati ritengono che dimostrare sia in qualche modo legato all'intuizione matematica in generale. Ciò viene messo in evidenza anche dal fatto che l'intuizione matematica è ciò che si vuole salvare in una matematica senza dimostrazioni.

ADMA: "secondo me il focus deve rimanere un po' sull'idea, anche intuitiva, che ti ha portato a fare.. A impostare un problema in un certo modo."

DAFA: "[La dimostrazione NdA] è la parte proprio in cui a un certo punto le rotelline del cervello ti si mettono al posto giusto, no? E questa cosa è completamente cancellata, secondo me, dal lavoro [...] in cui tu hai una scatola nera [Dimostratori automatici NdA], il passaggio [...] che lo fa da solo."

POMA: "[Sull'insegnare senza dimostrare NdA] [...] io trovo molto divertente e istruttivo usare i controesempi. [...] controesempi controintuitivi, cioè controesempi che si possono costruire ma che sfuggono all'intuizione, casi più patologici, [...] questa matematica negativa di dimostrare ciò che non è vero attraverso controesempi credo sia molto istruttivo e anche fantasioso".

NAMB: "[...] bisogna fargli far capire loro, cioè insomma, far capire loro che il rigore nel ragionamento è importantissimo anche per gli ingegneri. Attenzione, Eh, non solo per i matematici, ma anche per gli ingegneri, per cui in quel caso lì effettivamente la dimostrazione secondo me sì che acquisisce veramente importanza."

Questo legame che emerge implicitamente non è ben supportato dai dati, in quanto le affermazioni risultano poco precise. Però, questa funzione della dimostrazione in grado di domare le intuizioni è ben riconosciuta in storia della matematica. La famosa frase di Cantor: *"Io vedo, ma non lo credo"*, riguardo la dimostrazione sull'equipotenza di un quadrato e del suo lato ne è la prova esemplare. Lolli scrive che dimostrare può avere la funzione di sostituire, permettere, raffinare e definire l'intuizione, portando il matematico a vedere quel che non c'è, ovvero a formare una nuova intuizione sul mondo matematico [66]. Si può finalmente concludere che **un processo matematico con lo scopo di formare un'intuizione matematica o un modello intuitivo sulle dimostrazioni è un possibile processo dimostrativo.**

4. Conclusioni e Implicazioni

Questa tesi rientra nel campo di ricerca dell'Etnomatematica, ossia il campo di ricerca posto al confine tra storia, antropologia culturale e matematica. La letteratura offre un'ampia varietà di ricerche che toccano diverse dimensioni. La dimensione cognitiva indaga le origini biologiche e culturali della cognizione matematica e fornisce un supporto teorico di ampio consenso su come aspetti cognitivi e culturali siano due facce della stessa medaglia; la dimensione concettuale si occupa di studiare come un problema reale possa essere affrontato in modi diversi e come ciascuno di essi porti allo sviluppo di differenti astrazioni e modelli della realtà, tutti con un proprio potenziale epistemologico; la dimensione storica offre delle evidenze tratte dalla storia della scienza riguardo a come lo sviluppo delle idee matematiche sia effettivamente influenzato da aspetti culturali e viceversa; la dimensione epistemologica fornisce nuovi quadri teorici per poter parlare di matematica, ampliando il dibattito filosofico includendo gli aspetti culturali. La dimensione educativo-didattica si occupa di proporre nuove prospettive educative e didattiche proponendo curriculum che non snaturarino l'insegnamento della matematica, ma che tengano conto delle ricerche, dei principi e dei valori dell'Etnomatematica; infine, la dimensione politica si concentra sullo studio degli aspetti culturali di diversi gruppi, così da riconoscere le radici socioculturali, in modo da promuovere il rispetto alla diversità, il dialogo interculturale e aumentare la consapevolezza riguardo la conoscenza matematica. Questa ricerca supporta le proposte epistemologiche più recenti[1] e si pone nell'intersezione tra la dimensione educativo-didattica e quella politica: negli studi svolti finora ci si è concentrati sulle matematiche non occidentali, spesso confrontandole implicitamente con un'idea di matematica occidentale mai formalizzata e data per scontata. Questa ricerca promuove questa formalizzazione e vuole evidenziare quali

[1] Barton, [10].

aspetti possono davvero essere dati per scontati e quali no. Il tesista, con l'obiettivo di contribuire alla ricerca sugli aspetti culturali della matematica NUC, si è interrogato su quali funzioni della dimostrazione emergessero nella pratica del dimostrare nel lavoro del matematico. Tenendo conto dell'ampio bagaglio di ricerche sul tema della dimostrazione, sono stati organizzati due focus group composti da docenti universitari per individuare quali funzioni ricopre il dimostrare nell'attività del matematico. I dati sono stati analizzati una volta e richiederebbero almeno una seconda analisi per poter garantire la validità delle interpretazioni date. Le risposte che si sono raggiunte possono considerarsi comunque soddisfacenti per le nuove prospettive che offrono, anche se non rispondono definitivamente ad alcuna questione. Di seguito si conclude la discussione sull'analisi dei dati e sono presentate nuove strade di ricerca sia in didattica che in Etnomatematica.

4.1 La funzione Didattica della dimostrazione

Un interessante dato che emerge è che il termine *argomentare* non viene mai detto da nessun'intervistatore. Come interpretarlo? È possibile che sia sempre sottinteso? Nel secondo capitolo si è visto come l'essere un'argomentazione emerga dalla funzione di convincimento; i riferimenti ad essa, cercati attraverso le parole: *convincere, validare*, o sostantivi derivati, si presentano solamente 5 volte nel FGA e una volta nel FGB:

GAFA: "[...] c'è un livello di convinzione di validità del risultato, indipendentemente dalla dimostrazione."

POMA: "[...] cioè invece di dimostrare, si fa l'enunciato, si fa la figura, si cerca di convincersi così sul buon senso empiricamente della validità dell'enunciato".

POMA: "[Fare matematica per controesempi NdA] È una matematica senza dimostrazione. Però diciamo dove riesci ad ottenere un convincimento della validità dell'enunciato, ecco".

GAFA: "[Il matematico NdA] quando è abbastanza convinto che l'affermazione che *sta scrivendo è un affermazione sensata, tenta di fare una dimostrazione un pochino più formale.".*

GAFA: "Voglio dire: l'ipotesi di Riemann, c'è una comunità intera che pensa che sia vera, che ha un certo convincimento sul fatto che sia vera, anche se non esiste una dimostrazione".

NAMB: "[...] trovo che sia limitativo pensare alla matematica solo, e nessuno l'ha detto, solo come processo di deduzione. Perché si rischia di creare delle bellissime cose valide, ma di non aggiungere magari delle, come dire, delle altre cose che possono essere ricavate con processi logici diversi che possono essere l'abduzione".

Quest'ultimo commento è l'unico che sembra far emergere la funzione di convincere/validare, anche se il riferimento scritto riguarda i processi deduttivi, non le dimostrazioni, e come ben descritto dalle ricerche[2] non basta che un'argomentazione sia deduttiva per essere una dimostrazione. Dagli altri interventi, invece, sembra che il convincersi della validità di un risultato avvenga prima della produzione di una dimostrazione. Così, un'interpretazione dei dati più coerente è che la dimostrazione, vista come ultimo tassello di un lungo lavoro di ricerca matematica, o vista come bolla di accompagnamento ad un'affermazione, è un processo non necessariamente argomentativo. Dall'analisi dei focus group emergono, invece, altre convinzioni riguardo il ruolo della dimostrazione nella ricerca in matematica e nella sua didattica. Si individuano tre funzioni che potrebbero caratterizzare un processo dimostrativo senza fare uso del concetto di argomentazione:

- dimostrare per capire la matematica;
- dimostrare per sistematizzare la matematica;
- dimostrare per formare l'intuizione matematica.

Per capire si intende far comprendere a se stessi: dimostrare, per un matematico, svolge la funzione di spiegare a se stesso fatti e concetti matematici. Per sistematizzare si intende proprio la funzione individuata da De Villier di organizzazione dei

[2] Toulmin [109], Duval [35], Balacheff [8], [9].

vari tipi di risultato nel sistema deduttivo della matematica. Infine, per formare l'intuizione non si intende solamente il contribuire alla costruzione di modelli intuitivi riguardo gli oggetti matematici, come ne discute Lolli, ma di costruirne anche riguardo agli oggetti meta-matematici come la Dimostrazione. In questo senso si individua una nuova funzione della dimostrazione che si esprime nell'azione didattica e che si pone lo scopo di insegnare il ragionamento matematico, ossia le diverse modalità di pensiero che i matematici mettono in atto per risolvere un problema. La si chiamerà funzione Didattica. Aver individuato questa funzione apre nuove domande di ricerca: è vero che dimostrare a lezione forma un'intuizione a riguardo? Se sì, quali modalità favoriscono o inibiscono questo processo di apprenimento?

4.2 Sistemi QRS e Processi CSI

I lavori di Bishop e Barton studiano quali processi matematici possono essere considerati universali[3], e la dimostrazione non rientra tra di essi. Questo può essere dovuto alla visione tradizionale dell'accostare dimostrazione ad argomentazione: se una popolazione non ha la tradizione di argomentare alcuni fatti, allora non dimostra. Questo ragionamento pare molto simile a: se una popolazione non ha sviluppato un sistema assiomatico, allora non fa matematica; che è proprio ciò che le ricerche in Etnomatematica confutano. Questa tesi mostra come la dimostrazione possa essere vista come un processo non argomentativo e caratterizzato dal suo ruolo nella comprensione, sistematizzazione e formazione di intuizione della disciplina. Tali funzioni potrebbero essere, per la pratica scientifica matematica e la dimostrazione, ciò che quantità, relazioni e spazialità sono per i sistemi QRS e la matematica NUC; e potrebbero essere una buona caratterizzazione per individuare un nuovo processo, detto *CSI (Capire, Sistematizzare, formare l'Intuzione)*, comune a più culture e così definito: **un Processo CSI è un processo matematico, ossia una pratica sviluppata in un sistema QRS, che esercita le funzioni di: capire il sistema QRS, sistematizzare il sistema QRS e formare l'intuizione riguardo al sistema QRS**. Dove formare l'Intuizione riguardo al sistema QRS significa costruire l'intuizione sugli oggetti del sistema e sui possibili processi CSI accettati dal gruppo; la Dimostrazione (NUC) è un Processo CSI e le dimostrazioni sono processi CSI.

[3] Ossia condivisi da tutte le culture conosciute.

Chiaramente questo singolo studio non prova l'universalità di tali processi, ma può fornire un nuovo quadro teorico per poter parlare di dimostrazione in contesti al di fuori della matematica NUC.

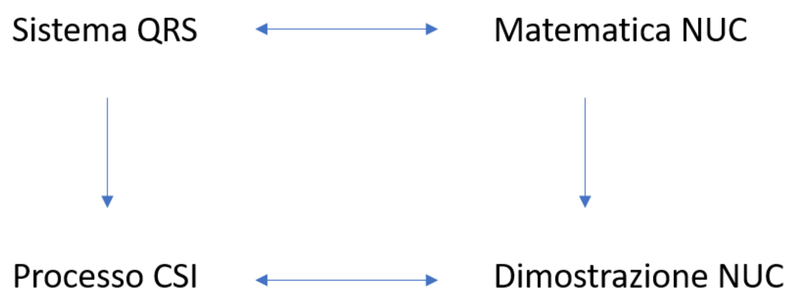

Figura 4.1: Schema rapporto Processo CSI - Dimostrazione NUC

Un possibile sviluppo di ricerca può essere proprio quello di cercare questi processi in sistemi QRS diversi dalla matematica NUC.

Bibliografia

[1] Shehenaz Adam, Wilfredo Alangui, and Bill Barton. A comment on: Rowlands & carson"where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? a critical review". *Educational Studies in Mathematics*, 52(3):327–335, 2003.

[2] Muhammad Zia Alghar and Rina Sari Lubis. Misuse in ethnomathematics research: A review of philosophy of mathematics and mathematics education. *Journal of Matematics In Teaching and Learning*, 4(1):263–274, 2025.

[3] Solomon E Asch. Effects of group pressure upon the modification and distortion of judgments. In *Organizational influence processes*, pages 295–303. Routledge, 2016.

[4] Marcia Ascher. *Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas.* Belmont Wadsworth Inc., 1991.

[5] Scott Atran. Folk biology and the anthropology of science: Cognitive universals and cultural particulars. *Behavioral and brain sciences*, 21(4):547–569, 1998.

[6] Bill Babbitt, Dan Lyles, and Ron Eglash. From ethnomathematics to ethnocomputing: Indigenous algorithms in traditional context & contemporary simulation. In *Alternative forms of knowing (in) mathematics: celebrations of diversity of mathematical practices*, pages 205–219. Springer, 2012.

[7] Anna Ethelwyn Baccaglini-Frank, Pietro Di Martino, Roberto Natalini, Giuseppe Rosolini, et al. *Didattica della matematica.* Mondadori università, 2018.

[8] Nicolas Balacheff. Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, 18(2):147–176, 1987.

[9] Nicolas Balacheff. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216:235, 1988.

[10] Bill Barton. Ethnomathematics and philosophy. *ZDM*, 31(2):54–58, 1999.

[11] Bill Barton. *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Springer, 2008.

[12] Brent Berlin. *Ethnobiological classification: Principles of categorization of plants and animals in traditional societies*. Princeton University Press, 1992.

[13] Brent Berlin and Paul Kay. *Basic color terms: Their universality and evolution*. Univ of California Press, 1991.

[14] Brent Berlin, Dennis E Breedlove, and Peter H Raven. General principles of classification and nomenclature in folk biology. *American anthropologist*, 75 (1):214–242, 1973.

[15] Brenda Anne Bicknell. *The writing of explanations and justifications in mathematics: a thesis presented in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Education, Massey University*. PhD thesis, Massey University, 1998.

[16] Alan Bishop. Mathematical acculturation, cultural conflicts, and transition. In *Transitions between contexts of mathematical practices*, pages 193–212. Springer, 2002.

[17] Alan J Bishop. Western mathematics: The secret weapon of cultural imperialism. *Race & Class*, 32(2):51–65, 1990.

[18] Carl Benjamin Boyer. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 1968.

[19] Pascal Boyer. *The naturalness of religious ideas: A cognitive theory of religion*. Univ of California Press, 1993.

[20] Guy Brousseau. Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(9.3):309–336, 1990.

[21] John Burgess and Silvia De Toffoli. What is mathematical rigor? 2022.

[22] John Bissel Carroll and Joseph B Casagrande. The function of language classification in behavior. In *Readings in social psychology*, pages 18–31. Henry Holt, 1958.

[23] Robert Coe and Kenneth Ruthven. Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British educational research journal*, 20(1):41–53, 1994.

[24] A. Cogliati. *La geometria non euclidea. Una breve storia dall'antichità a Poincaré*. Studi superiori. Carocci, 2024.

[25] Ubiratan d'Ambrosio. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics*, 5(1):44–48, 1985.

[26] Ubiratan D'Ambrosio. Nonkilling mathematics? the ethics of mathematics in the final analysis. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (41), 2024.

[27] Roy G d'Andrade. *The development of cognitive anthropology*. Cambridge University Press, 1995.

[28] Roy G d'Andrade, Richard A Shweder, and Robert A Le Vine. Cultural meaning systems. *Adams, Robert McC, Ed.; And Others Behavioral and Social Science Research: A National*, 197, 1984.

[29] Morgan David. Focus groups. *Annual Review of Sociology*, 22:129–152, 08 1996.

[30] Silvia De Toffoli. Proofs for a price: Tomorrow's ultra-rigorous mathematical culture. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 61:395–410, 05 2024.

[31] Michael De Villiers. An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, 33(3):1–8, 2012.

[32] Stanislas Dehaene, Ghislaine Dehaene-Lambertz, and Laurent Cohen. Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Neurosciences*, pages 355– 361, 01 1998.

[33] René Descartes. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.* 1637.

[34] Stephen Downes. Connectivism. *Asian Journal of Distance Education*, 17(1), 2022.

[35] Raymond Duval. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1):103–131, 2006.

[36] Ubiratan D'Ambrosio. A nonkilling mathematics. *Toward a nonkilling paradigm*, pages 241–270, 2009.

[37] Francesco d'Errico, Lucinda Backwell, Paola Villa, Ilaria Degano, Jeannette J. Lucejko, Marion K. Bamford, Thomas F. G. Higham, Maria Perla Colombini, and Peter B. Beaumont. Early evidence of san material culture represented by organic artifacts from border cave, south africa. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(33):13214–13219, 2012.

[38] Ron Eglash. African fractals: Modern computing and indigenous design. 1999.

[39] Ron Eglash, Mukkai Krishnamoorthy, Jason Sanchez, and Andrew Woodbridge. Fractal simulations of african design in pre-college computing education. *ACM Transactions on Computing Education (TOCE)*, 11(3):1–14, 2011.

[40] Sibel Erduran and Zoubeida R Dagher. Family resemblance approach to characterizing science. In *Reconceptualizing the nature of science for science education: Scientific knowledge, practices and other family categories*, pages 19–40. Springer, 2014.

[41] Sibel Erduran, Zoubeida R Dagher, and Christine V McDonald. Contributions of the family resemblance approach to nature of science in science education: A review of emergent research and development. *Science & Education*, 28(3): 311–328, 2019.

[42] Raibee Fatemeh. Focus-group interview and data analysis. *Proc Nutr Soc.*, 63(4):655–60, 2004.

[43] Detlev Fehling. Herodotus on egypt - alan b. lloyd: Erodoto, le storie, vol. ii: Libro 2, l'egitto (introduzione, testo e commento a cura di alan b. lloyd, traduzione di augusto fraschetti). (scrittori greci e latini.) pp. lxxxii + 410; 13 maps. milan: Fondazione lorenzo valla, arnoldo mondadori, 1989. l. 45,000. *The Classical Review*, 41(2):309–310, 1991.

[44] Efraim Fischbein. *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Springer, 2002.

[45] Luis Ortiz Franco. Prolegómenos a las etnomatemáticas en mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 7(2):171–185, 2004.

[46] Enrico Giusti. *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Bollati Boringhieri, 1999.

[47] John Gerard Scott Goldie. Connectivism: A knowledge learning theory for the digital age? *Medical teacher*, 38(10):1064–1069, 2016.

[48] Daniel W Graham. *The texts of early Greek philosophy: the complete fragments and selected testimonies of the major Presocratics*. Cambridge University Press, 2010.

[49] E. Halley and G. Costard. *Menelai Sphaericorum libri III*. Sumptibus Academicis, 1758.

[50] Gila Hanna. Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1):6–13, 1990.

[51] Godfrey Harold Hardy. *A mathematician's apology*. Cambridge University Press, 1992.

[52] Guershon Harel and Larry Sowder. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2:805–842, 2007.

[53] Lulu Healy and Celia Hoyles. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 31(4):396–428, 2000.

[54] Thomas Little Heath et al. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation, 1956.

[55] Eleanor Rosch Heider and Donald C Olivier. The structure of the color space in naming and memory for two languages. *Cognitive psychology*, 3(2):337–354, 1972.

[56] Lawrence A Hirschfeld. On acquiring social categories: cognitive development and anthropological wisdom. *Man*, pages 611–638, 1988.

[57] Lawrence A Hirschfeld. Is the acquisition of social categories based on domain-specific competence or on knowledge transfer. *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture*, pages 201–233, 1994.

[58] Dorothy Holland and Naomi Quinn. *Cultural models in language and thought*. Cambridge University Press, 1987.

[59] Kai Horsthemke and Marc Schafer. Does' african mathematics' facilitate access to mathematics? towards an ongoing critical analysis of ethnomathematics in a south african context. *Pythagoras*, 2007(65):2–9, 2007.

[60] Gürol Irzik and Robert Nola. A family resemblance approach to the nature of science for science education. *Science & education*, 20(7):591–607, 2011.

[61] Gürol Irzik and Robert Nola. Revisiting the foundations of the family resemblance approach to nature of science: Some new ideas. *Science & Education*, 32(5):1227–1245, 2023.

[62] Irving L Janis. Victims of groupthink: A psychological study of foreign-policy decisions and fiascoes. 1972.

[63] S. A. Jayawardene. Bombelli rafael, engineer-architect: Some unpublished documents of the apostolic camera. *Isis*, 56(3):298–306, 1965.

[64] Thomas S Kuhn and Ian Hacking. *The structure of scientific revolutions*, volume 2. University of Chicago press Chicago, 1970.

[65] Stephen C Levinson. Language and space. *Annual review of Anthropology*, 25 (1):353–382, 1996.

[66] Gabriele Lolli. *QED*. 2005.

[67] John A Lucy. *Grammatical categories and cognition: A case study of the linguistic relativity hypothesis*. Cambridge University Press, 1996.

[68] John A Lucy and Suzanne Gaskins. Grammatical categories and the development of classification preferences: a comparative. *Language acquisition and conceptual development*, 3:257, 2001.

[69] Claude Lévy-Strauss. *The Savage mind*. Unversity of Chicago Press, 1966.

[70] Claude Lévy-Strauss. *Structural Anthropology*. Anchor Books, 1967.

[71] Penelope Maddy. *Realism in Mathematics*. Oxford:Clarendon Press, 1990.

[72] Maria Alessandra Mariotti. *Argomentare e dimostrare come problema didattico*. UTET università, 2022.

[73] Bendeko Mopondi. Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 15(3):7–52, 1995.

[74] Maria Teresa Morana. Focus "il personale docente e non docente nel sistema universitario italiano - a.a 2022/2023". 12 2023.

[75] Maria Teresa Morana and Simonetta Sagramore. Focus "le carriere femminili in ambito accademico". 3 2024.

[76] Pip Neville-Barton and Bill Barton. The relationship between english language and mathematics learning for non-native speakers. 2005.

[77] Richard Nisbett, Eugene and Ara Norenzayan. *Culture and Cognition*, volume 2, pages 561 – 598. 3 edition, 2002.

[78] Mogens Niss. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, pages 115–124, 2003.

[79] Mogens Niss and Tomas Højgaard. Mathematical competencies revisited. *Educational studies in mathematics*, 102(1):9–28, 2019.

[80] Ivan Niven. A simple proof that is irrational. *Pi: A Source Book*, page 276, 2004.

[81] Luis Ortiz-Franco. Chicanos have math in their blood: Pre-columbian mathematics. *The Radical Teacher*, pages 10–14, 1993.

[82] Karenleigh A. Overmann. The beginning of time. *Cambridge Archaeological Journal*, 34(4):693–709, 2024. doi: 10.1017/S0959774324000106.

[83] Alexandre Pais. Criticisms and contradictions of ethnomathematics. *Educational studies in mathematics*, 76(2):209–230, 2011.

[84] Chaïm Perelman, Lucie Olbrechts-Tyteca, et al. Tratado de la argumentación. 1989.

[85] J Rauff. Native american dice games and discrete probability. *Journal of Mathematics and Culture*, 4(1):50–62, 2009.

[86] L Regolin, M Loconsole, O Rosa-Salva, K Brosche, M Macchinizzi, A Felisatti, and R Rugani. Numerical cognition in birds. *Nature Reviews Psychology*, pages 1–15, 2025.

[87] Michael Resnik. *A naturalized epistemology for a platonist mathematical ontology*. Albany: SUNY Press, 1993.

[88] Debi Roberson, Ian Davies, and Jules Davidoff. Color categories are not universal: replications and new evidence from a stone-age culture. *Journal of experimental psychology: General*, 129(3):369, 2000.

[89] Milton Rosa and Daniel Clark Orey. *State of the Art in Ethnomathematics*, pages 11–37. Springer International Publishing, 2016.

[90] Stuart Rowlands and Robert Carson. Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? a critical review of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1):79–102, 2002.

[91] Rosa Rugani, Giorgio Vallortigara, Konstantinos Priftis, and Lucia Regolin. Number-space mapping in the newborn chick resembles humans' mental number line. *Science*, 347(6221):534–536, 2015.

[92] Geoffrey Saxe. *Candy Selling and Math Learning*, volume 17, pages 86 – 106. 2008.

[93] Dale H Schunk. Learning theories. *Printice Hall Inc., New Jersey*, 53, 1996.

[94] Anna Sfard. *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press, 2008.

[95] Lawrence Shirley. Mathematics of students' culture: A goal of localized ethnomathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 8(2):316–325, 2015.

[96] Bradd Shore. *Culture in mind: Cognition, culture, and the problem of meaning*. Oxford University Press, 1998.

[97] George Siemens. Connectivism: Learning as network-creation. *ASTD Learning News*, 10(1):1–28, 2005.

[98] Anna Sierpinska. *Understanding in mathematics*. Routledge, 2013.

[99] Ole Skovsmose. Towards a critical mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 27(1):35–57, 1994.

[100] Raymond M Smullyan. *Godel's incompleteness theorems*. Oxford University Press, 1992.

[101] Dan Sperber. Anthropology and psychology: Towards an epidemiology of representations. *Man*, pages 73–89, 1985.

[102] Dan Sperber. The modularity of thought and the epidemiology of representations. *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture*, 39:67, 1994.

[103] Dan Sperber. *Explaining culture: A naturalistic approach*, volume 21. Oxford Blackwell, 1996.

[104] Mark Steiner. Mathematical explanation. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 34(2):135–151, 1978.

[105] Andreas L Stylianides. Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3):289–321, 2007.

[106] David Tall and Shlomo Vinner. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2):151–169, 1981.

[107] Alfred Tarski. The semantic conception of truth: and the foundations of semantics. *Philosophy and phenomenological research*, 4(3):341–376, 1944.

[108] Mary Tiles. *Bachelard: Science and objectivity*. Cambridge University Press, 1984.

[109] Stephen E Toulmin. *The uses of argument*. Cambridge university press, 2003.

[110] Thomas Tymoczko. *New directions in the philosophy of mathematics: An anthology*. Princeton University Press, 1998.

[111] Michael Villiers. The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24:17–24, 11 1990.

[112] Renuka Vithal and Ole Skovsmose. The end of innocence: a critique of'ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2):131–157, 1997.

[113] Margaret Walshaw and Glenda Anthony. The teacher's role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of educational research*, 78(3):516–551, 2008.

[114] Benjamin Lee Whorf. *Language, thought, and reality: Selected writings of Benjamin Lee Whorf*. MIT press, 2012.

[115] Raymond Louis Wilder. *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press, 1981.

[116] Ludwig Wittgenstein, Georg Henrik von Wright, Rush Rhees, and Gertrude Elizabeth Margaret Anscombe. *Remarks on the Foundations of Mathematics.* MIT press Cambridge, MA, 1978.

[117] Karen Wynn. Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2):155–193, 1990.

[118] Claudia Zaslavsky. *Africa Counts.* 1974.