

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

LA FORMA DI MAURER-CARTAN
E APPLICAZIONI ALLE
TEORIE DI GAUGE

Relatore:
Prof. Emanuele Latini

Presentata da:
Francesco Vassallo

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

La seguente tesi si dà l'obiettivo di introdurre il contesto matematico necessario per studiare le teorie di gauge da un punto di vista geometrico, ponendo particolare attenzione alla forma di Maurer-Cartan. Il quadro matematico delle teorie di gauge è la geometria differenziale, di cui l'elaborato presenta diversi concetti fondamentali, tra cui le varietà differenziabili, gli spazi tangenti e cotangenti, i campi vettoriali e covettoriali. Definiamo e studiamo le strutture matematiche di gruppo di Lie e algebra di Lie. Proseguendo, studiamo la forma di Maurer-Cartan, definita sui gruppi di Lie, vedendone la forma per gruppi di matrici e dando anche qualche cenno sui fibrati. Infine, definiamo una teoria di gauge come una connessione su un fibrato principale e studiamo, come esempi, due teorie di gauge con gruppi di simmetria $U(1)$ e $SU(2)$.

Indice

Introduzione	3
1 Cenni di geometria differenziale	4
1.1 Varietà topologiche	4
1.2 Varietà differenziabili	5
1.3 Vettori e spazi tangenti	8
1.3.1 Vettori tangenti alle varietà	9
1.3.2 Fibrato Tangente	12
1.3.3 Campi vettoriali	12
1.3.4 Parentesi di Lie	15
1.4 Covettori e Spazi cotangenti	17
1.4.1 Covettori sulle varietà	17
1.4.2 Fibrato Cotangente	18
1.4.3 Campi covettoriali	19
2 Gruppi di Lie	21
2.1 Gruppi di Lie	21
2.2 Algebra di Lie	23
3 Forma di Maurer-Cartan	27
3.1 Esempi di forme di Maurer-Cartan	27
3.2 Trivializzazione dei gruppi di Lie	29
4 Applicazioni alle trasformazioni di gauge	33
4.1 Campi di Gauge	34
4.2 Caso $U(1)$: interazione elettromagnetica	35
4.3 Caso $SU(2)$: interazione nucleare debole	36
Conclusioni	38

Introduzione

La prima teoria di gauge apparsa nella storia della fisica, oltre ad essere la prima teoria di campi, è la formulazione dell'elettrodinamica dovuta a J.C. Maxwell nel suo articolo *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* pubblicato nel 1865. L'elettromagnetismo presenta due importanti simmetrie: l'invarianza di Lorentz e la simmetria di gauge. Queste simmetrie sono state ignorate per molti anni, erano necessarie le formulazioni della meccanica quantistica e della relatività ristretta e generale per comprenderle a pieno. Nel 1929, Weyl, Fock e London scoprirono che l'elettrodinamica era invariante sotto trasformazioni

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\chi; \quad \psi \rightarrow e^{\frac{ie\chi}{\hbar c}} \psi,$$

dove A_μ è il quadripotenziale e ψ la funzione d'onda quantistica. In altre parole, queste trasformazioni lasciavano invariate le equazioni quantistiche che descrivono una particella carica, di fatto creando la prima teoria di gauge moderna. Essendo un cambio di fase la simmetria della elettrodinamica quantistica (QED) è il gruppo abeliano $U(1)$. Nel 1954, Yang e Mills usarono le teorie di gauge nel tentativo di descrivere l'interazione forte e la conservazione dell'isospin, usando come gruppo di simmetrie non abeliano $SU(2)$. Dopo molti anni di studi, da parte di grandi fisici tra i quali Glashow, Weinberg, Salam, Higgs, Gell-Mann, Han, Nambu e molti altri, si è arrivati alle formulazioni dell'interazione elettrodebole e della cromodinamica quantistica (QCD). Il culmine di queste ricerche è il modello standard, teoria di gauge con gruppo di simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ che descrive tutte le interazioni conosciute a meno della gravità.

Le teorie di gauge sono al giorno d'oggi usate anche in molte altre branche della fisica, tra cui teoria delle stringhe, relatività generale, quantizzazione BRST, e studiate largamente anche in branche della matematica come la geometria differenziale e la fisica matematica. Per approfondimenti il lettore può consultare [Gro92] o [JO01].

In questo lavoro di tesi ci proponiamo di descrivere le strutture matematiche su cui le teorie di gauge vivono. In particolare diremo cos'è una varietà differenziabile, oggetto alla base della geometria differenziabile, e studieremo strutture e mappe connesse ad essa nel Capitolo 1. Nel Capitolo 2 aggiungeremo una struttura di gruppo alla nostra varietà, sarà chiamato un gruppo di Lie, e studieremo le relative algebre di Lie, entrambi oggetti fondamentali non solo per questo lavoro ma per tantissimi ambiti fisici e matematici. Nel Capitolo 3 definiremo la forma di Maurer-Cartan, di importanza vitale perché connessione naturale sui gruppi di Lie e perché emerge naturalmente nelle trasformazioni di gauge. Daremo anche cenni di teoria sui fibrati. Infine nel Capitolo 4 parleremo delle trasformazioni di gauge, prima da un punto di vista matematico come connessioni su fibrati principali, poi facendo due esempi fisici: $U(1)$ e $SU(2)$.

1 Cenni di geometria differenziale

1.1 Varietà topologiche

Iniziamo richiamando velocemente alcuni concetti di topologia necessari, per poter poi definire una varietà topologica, che sarà la nostra struttura matematica di partenza.

Definizione 1.1 (Topologia). *Sia X un insieme. Chiamiamo **topologia su X** una collezione τ di sottoinsiemi di X tali che:*

- $X, \emptyset \in \tau$,
- $U_1, \dots, U_n \in \tau \rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau$
- $\{U_i\} \in \tau \rightarrow \bigcup_i U_i \in \tau$

Chiamiamo **spazio topologico** un insieme con una topologia su esso, e lo indichiamo come una coppia (X, τ) .

Definizione 1.2 (Base Topologica). *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una sottocollezione β di τ è una **base** per τ se $\forall U \in \tau$ e $p \in U$ possiamo trovare $V \in \beta$ tale che $p \in V \subset U$.*

In altre parole, β è una base topologica per qualche topologia su X se ogni aperto in X può essere scritto come unione di insiemi in β .

Definizione 1.3 (Hausdorff). *Uno spazio topologico X è detto di Hausdorff, o T_2 , se dati due punti diversi $x, y \in X$ è sempre possibile trovare due aperti disgiunti $U, V \subseteq X$ tali che $x \in U$ e $y \in V$.*

Definizione 1.4 (Second Countable). *Uno spazio topologico è detto second countable se ammette una base topologica numerabile.*

Definizione 1.5 (Localmente euclideo). *Sia M uno spazio topologico. Chiamiamo M localmente euclideo di dimensione n se ogni punto $p \in M$ ha un intorno U che è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n . In altre parole esiste un omeomorfismo (funzione continua biettiva con inversa continua) $\varphi : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$*

Definizione 1.6 (Varietà Topologica). *Uno spazio topologico è chiamato **varietà topologica** se è di Hausdorff, ammette una base topologica numerabile (second countable) ed è localmente euclideo.*

Diciamo che la varietà ha dimensione n per indicare la dimensione dello spazio euclideo a cui i suoi punti sono omeomorfi. Equivalentemente diciamo che è una n -varietà.

In pratica, chiamiamo varietà topologica uno spazio i cui punti siano distinguibili gli uni dagli altri e tali che si possa sempre trovare un intorno di un punto generico e metterlo in corrispondenza di un aperto in \mathbb{R}^n .

La proprietà di essere localmente euclideo è particolarmente importante per il nostro scopo, questo legame tra lo spazio dei numeri reali e le varietà ci permetterà di costruire un'analisi su questi spazi rifacendoci a concetti più classici di calcolo. Vedremo successivamente come.

La coppia (U, φ) viene chiamata **carta locale delle coordinate** o semplicemente carta. Ogni punto di una varietà topologica è dentro almeno una carta, cioè appartiene ad un intorno omeomorfo ad un aperto in \mathbb{R}^n , ammette perciò una rappresentazione in coordinate cartesiane.

1.2 Varietà differenziabili

Fin'ora non abbiamo ancora trattato concetti di analisi. Solo con la struttura topologica che abbiamo creato, comunque tentassimo di dare un senso a derivate di funzioni sulle varietà, queste derivate non sarebbero invarianti sotto omeomorfismi.

Abbiamo bisogno di un'altra struttura da aggiungere a quella topologica che ci permetta di decidere quali funzioni sulle varietà siano lisce o meno, la struttura liscia.

La definizione si baserà sull'analisi fatta tra spazi reali: presi due sottoinsiemi aperti U e V di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , rispettivamente, una funzione $F : U \rightarrow V$ è chiamata **liscia** (o **differenziabile** o C^∞) se ogni componente di F ha derivate parziali continue di tutti gli ordini. Se in più F è biettiva con inversa liscia allora è chiamata **diffeomorfismo**. Un diffeomorfismo in particolare è un omeomorfismo.

Consideriamo una n -varietà topologica M , ogni suo punto è nel dominio di una carta di mappa $\varphi : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una definizione plausibile di funzione liscia su M potrebbe essere dire che $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è liscia se e solo se $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lo è nel senso normale dell'analisi. Il problema con questa definizione è che dipende troppo dalla scelta delle carte che coprono M .

Nel dettaglio il problema è che se ho $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e scelgo due carte (U, φ_U) e (V, φ_V) con $U \cap V \neq \emptyset$ e $p \in U \cap V$ allora posso avere per U

$$\hat{f}|_U = f \circ \varphi_U^{-1}$$

liscia in p mentre se ci mettiamo nell'intersezione $U \cap V$ per V posso avere

$$(\hat{f}|_V)|_{U \cap V} = f \circ \varphi_V^{-1}|_{U \cap V} = f \circ \varphi_U^{-1} \circ (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{U \cap V}$$

Se $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ non si comporta molto bene potremmo avere che f è liscia per una carta ma non per un'altra, e questa cosa non va bene.

Per garantire l'indipendenza della differenziabilità di una funzione dalla scelta delle carte concentreremo la nostra attenzione solo su carte che si comportano bene, che siano compatibili. L'insieme di queste "carte lisce" costituirà la nostra nuova struttura da aggiungere.

Definizione 1.7 (Funzione di transizione). *Sia M una n -varietà topologica. Se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte tali che $U \cap V \neq \emptyset$ la mappa composta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ è chiamata **funzione di transizione da φ a ψ** .*

E' una composizione di omeomorfismi e quindi è a sua volta un omeomorfismo.

Definizione 1.8 (Compatibilità in senso liscio). *Due carte (U, φ) e (V, ψ) si dicono compatibili in senso liscio se $U \cap V = \emptyset$ oppure la funzione di transizione $\psi \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo.*

Due carte con questa proprietà d'ora in poi verranno chiamate semplicemente carte compatibili.

Definizione 1.9 (Atlante). *Chiamiamo **atlante di M** una collezione di carte i cui domini siano un ricoprimento per M . Un atlante \mathbb{A} è chiamato atlante liscio se ogni coppia qualsiasi di carte in \mathbb{A} sono compatibili tra loro.*

Il nostro piano è di definire una struttura liscia per M dandogli un atlante liscio e di definire una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ come liscia se e solo se lo è la funzione composta $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$, nel senso ordinario dell'analisi, per ogni carta (U, φ) nell'atlante.

C'è solo un piccolo problema con questa costruzione. In generale, ci possono essere più atlanti che danno la "stessa" struttura liscia. Per risolvere quest'ambiguità diamo la seguente definizione: un atlante liscio \mathbb{A} su M è **massimale** se non è propriamente contenuto in nessun'altro atlante liscio più grande. Significa essenzialmente che qualsiasi carta compatibile con ogni carta di \mathbb{A} è già dentro \mathbb{A} (Un atlante liscio così è anche chiamato **completo**).

Siamo ora pronti a definire il nostro oggetto d'interesse.

Definizione 1.10 (Varietà differenziabile). *Se M è una varietà topologica, una **struttura liscia** su M è un atlante liscio massimale di M . Chiamiamo **varietà differenziabile** una coppia (M, \mathbb{A}) , dove M è una varietà topologica e \mathbb{A} è una struttura liscia su M .*

Nel contesto delle varietà differenziabili, una volta che scegliamo una carta (U, φ) su M , possiamo pensare alla mappa delle coordinate $\varphi : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ come se ci desse

un'identificazione tra U e \hat{U} . Sotto questa identificazione, possiamo pensare a U sia come un aperto di M , sia come un aperto di \mathbb{R}^n , simultaneamente. Per visualizzarlo si può pensare ad una "griglia" disegnata su U rappresentante le preimmagini delle coordinate sotto φ , come mostrato in figura 1.

Sotto questa identificazione, possiamo rappresentare un punto $p \in U$ tramite le sue coordinate $\hat{p} := \varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, e pensare che questa n -upla *sia* il punto p .

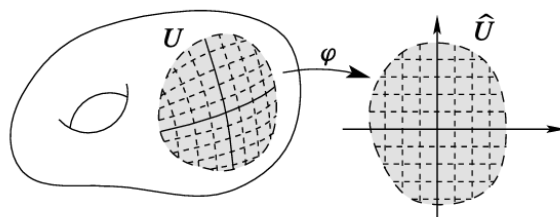


Figura 1: Griglia delle coordinate

Esempio 1.1 (Spazi euclidei). \mathbb{R}^n è una varietà topologica di dimensione n perché è di Hausdorff e l'insieme delle palle aperte con centro e raggio razionale è una base topologica numerabile. La struttura liscia per renderlo una varietà differenziabile è determinata da un atlante composto dalla sola carta $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Esempio 1.2 (Spazi vettoriali). Sia V uno spazio vettoriale reale finito dimensionale. Qualsiasi norma su V determina una topologia, con essa V è una n -varietà topologica. Ciascuna base $\{E_1, \dots, E_n\}$ di V determina un isomorfismo lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $\varphi(x) = x^i E_i$. Questa mappa è un omeomorfismo e (V, φ^{-1}) è una carta globale per V . Quindi è una varietà differenziabile.

Esempio 1.3 (Spazi di matrici). Sia $M(n \times m, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici $m \times n$ a valori reali. $M(n \times m, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione nm sotto l'addizione tra matrici e il prodotto per scalari, quindi è una varietà differenziabile nm -dimensionale. Indicheremo lo spazio delle matrici quadrate con $M_n(\mathbb{R})$.

Esempio 1.4 (Sottovarietà aperte). Sia M una n -varietà differenziabile e sia $V \subseteq M$ un aperto di M . Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante liscio per M , allora $\{(V \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{V \cap U_\alpha})\}$ è un atlante liscio per V , dove $\varphi_\alpha|_{V \cap U_\alpha} : V \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la restrizione di φ_α al sottoinsieme $V \cap U_\alpha$. Quindi V è una varietà differenziabile.

Esempio 1.5 (Gruppo lineare generale). Consideriamo l'insieme delle matrici invertibili $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det \neq 0\}$, chiamato gruppo lineare generale reale. La funzione

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

è continua, quindi $\det^{-1}(0)$ è chiuso in $M_n(\mathbb{R})$. Abbiamo che $GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(0)$ è un aperto di $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Quindi, per l'esempio (1.4), $GL_n(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile.

1.3 Vettori e spazi tangenti

Una delle idee centrali nell'analisi è "l'approssimazione lineare". Per poter dare senso al calcolo sulle varietà abbiamo bisogno di introdurre il concetto di *spazio tangente alla varietà in un punto*, che possiamo pensare come una sorta di "modello lineare" per la varietà vicino al punto.

Iniziamo considerando vettori geometrici tangenti in \mathbb{R}^n , che possono essere pensati come "freccie" attaccate a punti. La definizione di varietà differenziabile è basata sul nostro bisogno di identificare quali funzioni siano lisce o meno, la proprietà dei vettori geometrici tangenti che allora auspichiamo di generalizzare alle varietà differenziabili sarà la loro capacità di agire sulle funzioni lisce come "derivate direzionali". L'osservazione chiave sarà che prendere derivate direzionali dà una corrispondenza tra vettori geometrici tangenti e mappe lineari da $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a \mathbb{R} che soddisfano la regola del prodotto (Tali mappe sono chiamate derivazioni). Con questa motivazione in testa, definiremo un vettore tangente ad una varietà come una derivazione di $C^\infty(M)$ in un punto. Generalizzeremo poi il discorso andando a studiare i campi vettoriali, mappe continue che ad ogni punto associano un vettore. Infine studieremo un'operatore sui campi vettoriali fondamentale per i gruppi di Lie: le parentesi di Lie.

Definiamo \mathbb{R}_a^n come lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n traslato in modo che l'origine sia in $a \in \mathbb{R}^n$. Un **vettore geometrico tangente** in \mathbb{R}^n è un elemento di \mathbb{R}_a^n per qualche $a \in \mathbb{R}^n$ e lo denotiamo v_a (oppure $v|_a$ se è più chiaro).

Ogni vettore geometrico tangente induce una mappa $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, che prende la derivata direzionale nella direzione v in a :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv). \quad (1)$$

Quest'operazione è lineare e soddisfa la seguente regola del prodotto:

$$D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a g + g(a)D_v|_a f. \quad (2)$$

Se $v_a = v^i e_i|_a$ in termini della base standard, allora possiamo scrivere più concretamente

$$D_v|_a f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

Con questa costruzione in mente facciamo la seguente definizione. Se a è un punto di \mathbb{R}^n , una mappa $\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata **derivazione in a** se è lineare in \mathbb{R} e

rispetta la seguente regola del prodotto:

$$\omega(fg) = f(a)\omega g + g(a)\omega f \quad (3)$$

Chiamiamo $T_a\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le derivazioni di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in a . $T_a\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale.

Un fatto molto importante riguardo $T_a\mathbb{R}^n$ è che è finito dimensionale, ed è in realtà isomorfo a \mathbb{R}_a^n , come vediamo di seguito.

Proposizione 1.1. *Sia $a \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Per ogni $v_a \in \mathbb{R}_a^n$, la mappa $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, definita da (1) è una derivazione in a .*
2. *La mappa $v_a \mapsto D_v|_a$ è un isomorfismo da \mathbb{R}_a^n a $T_a\mathbb{R}^n$.*

Corollario 1.1. *Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, le n derivazioni*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_a, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_a \quad \text{definite da} \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

formano una base per $T_a\mathbb{R}^n$, che ha quindi dimensione n .

1.3.1 Vettori tangenti alle varietà

Ora abbiamo gli strumenti per definire uno spazio tangente sulle varietà differenziabili. La definizione è la stessa in entrambi i casi. Sia M una varietà differenziabile e p un suo punto. Una mappa lineare $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata **derivazione in p** se soddisfa

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (4)$$

L'insieme di tutte le derivazioni di $C^\infty(M)$ in p è uno spazio vettoriale chiamato **spazio tangente di M in p** , lo denotiamo T_pM . Un elemento di questo spazio è chiamato **vettore tangente in p** .

Se abbiamo una mappa liscia tra spazi euclidei, la sua derivata totale in un punto (lo Jacobiano) è una mappa lineare che rappresenta la miglior approssimazione lineare alla mappa in quel punto. Nel caso delle varietà differenziabili esiste una mappa lineare simile, ma non ha senso parlare di mappe lineari tra varietà perché non sono spazi lineari globali. Sarà invece una mappa lineare tra gli spazi tangenti.

Definizione 1.11 (Pushforward). *Siano M e N varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Per ogni $p \in M$ definiamo una mappa lineare*

$$F_{*p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N, \quad (5)$$

*chiamata **differenziale di F in p** o **pushforward**, che agisce nel seguente modo. Dato $v \in T_pM$, $F_{*p}(v)$ è la derivazione in $F(p)$ che agisce su $f \in C^\infty(N)$ secondo la regola*

$$F_{*p}(v)(f) = v(f \circ F). \quad (6)$$

Per alleggerire la notazione, spesso ometteremo il pedice "p" dal differenziale di F . Sarà comunque chiaro dal contesto il dominio di F_* .

Proposizione 1.2 (Proprietà del pushforward). *Siano M , N e P varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow P$ mappe lisce, e $p \in M$, allora*

- (a) $(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$
- (b) $(Id_M)_{*p} = Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$
- (c) *Se F è un diffeomorfismo, allora $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è un isomorfismo, inoltre $(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$*

Studiamo la rappresentazione in coordinate locali dei vettori tangenti.

Sia M una varietà differenziabile, e sia (U, φ) una carta per M . φ in particolare è un diffeomorfismo da U ad un aperto $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dalla proposizione (1.2.(c)) vediamo che $\varphi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo. Dal corollario (1.1) sappiamo che le derivazioni $\partial/\partial x^1|_{\varphi(p)}, \dots, \partial/\partial x^n|_{\varphi(p)}$ formano una base su $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Quindi, le preimmagini di questi vettori sotto l'isomorfismo φ_{*p} formano una base per $T_p M$, che chiameremo **base vettoriale**.

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (\varphi_{*p})^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) = (\varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) \quad (7)$$

Usando la definizione di pushforward, vediamo che $\partial/\partial x^i|_p$ agiscono su una funzione $f \in C^\infty(M)$ come

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = (\varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) f = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}). \quad (8)$$

Ogni vettore tangente $v \in T_p M$ può essere quindi scritto univocamente come una combinazione lineare

$$v = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (9)$$

Per semplificare la notazione, a volte scriveremo un elemento della base vettoriale $\partial/\partial x^i|_p$ abbreviandolo come $\partial_i|_p$ o $\partial x_i|_p$.

Pushforward in coordinate

Studiamo come appare il pushforward, o differenziale, di una funzione in termini delle coordinate. Iniziamo studiando il caso speciale di aperti di \mathbb{R}^n .

Siano allora $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \rightarrow V$ liscia e (x^1, \dots, x^n) coordinate nel dominio e (y^1, \dots, y^m) coordinate nel codominio. Allora per ogni $p \in U$ determiniamo la forma di

$F_{*p} : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ in termini delle coordinate standard, vedendo la sua azione su un elemento della base vettoriale:

$$\begin{aligned} F_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j} (F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \\ &= \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \right) f. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$F_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}. \quad (10)$$

In altre parole, la matrice di F_{*p} in termini della base delle coordinate è:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} (p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} (p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} (p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} (p) \end{pmatrix}.$$

Questa altro non è che lo Jacobiano di F in p . Quindi, in questo caso, $F_{*p} : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ corrisponde alla derivata totale $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Ora consideriamo il caso più generale di una mappa liscia $F : M \rightarrow N$ tra varietà differenziabili. Scegliendo delle carte (U, φ) per M contenente p e (V, ψ) per N contenente $F(p)$, otteniamo la rappresentazione in coordinate di F :

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

Chiamiamo $\hat{p} = \varphi(p)$ la rappresentazione in coordinate di p , come raffigurato in figura 2, dove dF_p è F_{*p} . Dai calcoli fatti prima, $\hat{F}_{*\hat{p}}$ è rappresentata dalla matrice Jacobiana di \hat{F} in \hat{p} . Usando il fatto che $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$:

$$\begin{aligned} F_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= F_{*p} \left((\varphi^{-1})_{*\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right) = (\psi^{-1})_{*\hat{F}(\hat{p})} \left(\hat{F}_{*\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right) \\ &= (\psi^{-1})_{*\hat{F}(\hat{p})} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x^i} (\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\hat{F}(\hat{p})} \right) \\ &= \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i} (\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}. \end{aligned}$$

Quindi, F_{*p} è rappresentata dalla matrice Jacobiana della rappresentazione in coordinate di F .

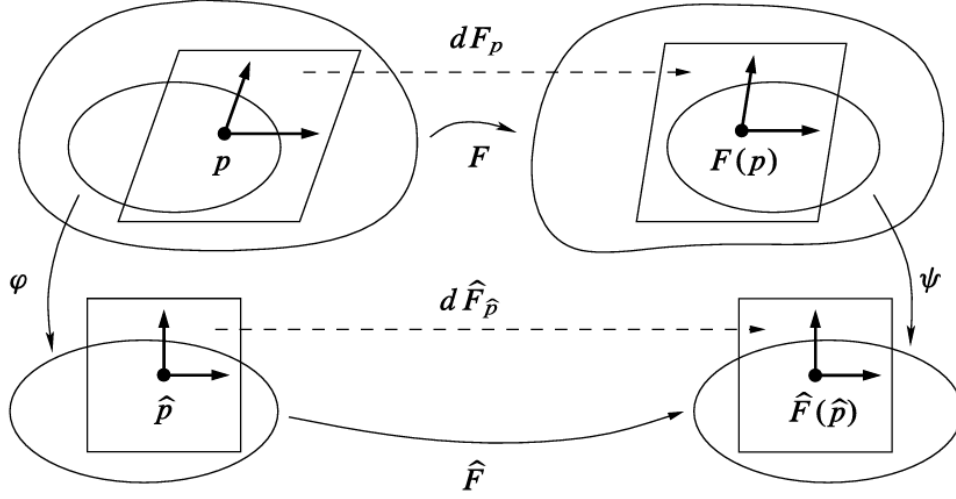


Figura 2: Differenziale in coordinate

1.3.2 Fibrato Tangente

L'insieme di tutti gli spazi tangenti in tutti i punti di una varietà è una nuova struttura che risulterà importante nella trattazione.

Sia M una varietà differenziabile, definiamo il **fibrato tangente di M** , con simbolo TM , come l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti in tutti i punti di M :

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M \quad (11)$$

Scriviamo un elemento di TM come una coppia ordinata (p, v) , con $p \in M$ e $v \in T_p M$. Il fibrato tangente possiede una naturale mappa suriettiva $\pi : TM \rightarrow M$ che manda ogni vettore in $T_p M$ al punto p in cui è tangente: $\pi(p, v) = p$.

Si può dimostrare che il fibrato tangente è in verità una varietà differenziabile $2n$ dimensionale, per la dimostrazione si rimanda a [Lee12] pag. 66.

1.3.3 Campi vettoriali

I campi vettoriali sono oggetti familiari nello studio del calcolo multivariato. In quel contesto, un campo vettoriale su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è semplicemente una mappa continua da U a \mathbb{R}^n , che può essere vista come l'associare ad ogni punto di U una "freccia". Possiamo pensare ad un campo vettoriale su una varietà differenziabile M come una particolare mappa continua X da M al suo fibrato tangente, tale che associa ad ogni punto $p \in M$ un vettore tangente $X_p \in T_p M$. Vediamo come.

Sia M una varietà differenziabile, un **campo vettoriale su M** è una sezione della suriezione $\pi : TM \rightarrow M$. Più concretamente, un campo vettoriale è una mappa continua $\mathbb{X} : M \rightarrow TM$, $p \mapsto X_p$, con la proprietà

$$\pi \circ \mathbb{X} = Id_M \quad (12)$$

o equivalentemente, $X_p \in T_p M$ per ogni $p \in M$.

Siamo interessati a studiare campi vettoriali lisci, quelli che lo sono come mappe da M a TM , con TM equipaggiato di una struttura liscia.

Sia M una n -varietà differenziabile, se $\mathbb{X} : M \rightarrow TM$ è un campo vettoriale e $(U, (x^i))$ è una qualsiasi carta liscia di M , possiamo scrivere il valore di \mathbb{X} in qualsiasi punto $p \in M$ in termini della base vettoriale:

$$X_p := \mathbb{X}(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (13)$$

Questo definisce n funzioni $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, chiamate le **funzioni componenti di \mathbb{X}** sulla data carta.

Proposizione 1.3 (Criterio di lisciezza per campi vettoriali). *Sia M una varietà differenziabile e sia $\mathbb{X} : M \rightarrow TM$ un campo vettoriale. Se $(U, (x^i))$ è una carta liscia qualsiasi su M , allora la restrizione di \mathbb{X} a U è liscia se e solo se le sue funzioni componenti rispetto a questa carta lo sono.*

I campi vettoriali lisci possono essere moltiplicati per funzioni lisce a valori reali: sia $f \in C^\infty(M)$ e $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo $f\mathbb{X} : M \rightarrow TM$ come

$$(f\mathbb{X})_p = f(p)X_p. \quad (14)$$

$f\mathbb{X}$ è ancora un campo vettoriale liscio.

Diamo qualche definizione utile per poi considerare un insieme di particolari sezioni del fibrato tangente.

Definizione 1.12 (Lineare indipendenza e generatori per campi vettoriali). *Sia M una n -varietà differenziabile. Una k -upla ordinata $(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_k)$ di campi vettoriali definiti su un sottoinsieme $U \subseteq M$ è detto **linearmente indipendente** se $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ è una k -upla linearmente indipendente in $T_p M$ per ogni $p \in U$, e si dice che **genera il fibrato tangente** se la k -upla $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ genera $T_p M$ per ogni $p \in U$.*

Definizione 1.13 (Frame). *Una n -upla ordinata $(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$ di campi vettoriali definiti su $U \subseteq M$ è chiamata **frame locale di M** se è linearmente indipendente e genera il suo fibrato tangente. Se $U = M$ allora è chiamato **frame globale di M** .*

Sia M una n -varietà differenziabile. Sappiamo che lo spazio tangente in un qualsiasi punto $p \in M$ ha dimensione n , ed ha come base $\{\partial_i|_p\}_{i=1,\dots,n}$. Definiamo i seguenti campi vettoriali:

$$\partial_i : M \rightarrow TM \quad (15)$$

$$p \mapsto \partial_i|_p \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (16)$$

La n -upla ordinata di tutti i ∂_i è un frame globale per M e viene chiamato **frame delle coordinate di M** . Possiamo riscrivere l'espressione (13) per un campo vettoriale $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$ in termini più generali tramite i frame locali come

$$\mathbb{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (17)$$

dove le X^i sono funzioni lisce e le ∂_i campi vettoriali. Se calcoliamo \mathbb{X} in un punto ritroviamo la (13):

$$\mathbb{X}(p) =: X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$$

Una proprietà fondamentale dei campi vettoriali è che definiscono operatori sullo spazio delle funzioni lisce a valori reali. Se $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(U)$ con $U \subseteq M$, otteniamo una nuova funzione $\mathbb{X}f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$(\mathbb{X}f)(p) = X_p f \quad (18)$$

I campi vettoriali lisci definiscono una mappa da $C^\infty(M)$ a se stesso, tramite $f \mapsto \mathbb{X}f$. Questa mappa è lineare e in più, la regola del prodotto (4) per vettori tangenti diventa la seguente per campi vettoriali:

$$\mathbb{X}(fg) = f\mathbb{X}g + g\mathbb{X}f. \quad (19)$$

In generale, una mappa $\mathbb{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è chiamata **derivazione** (diversamente da "derivazione in un punto p ") se è lineare e rispetta la regola del prodotto (19) per ogni $f, g \in C^\infty(M)$.

Proposizione 1.4. *Sia M una varietà differenziabile. Una mappa $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è una derivazione se e solo se è delle forma $Df = \mathbb{X}f$ per qualche campo vettoriale liscio $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$.*

Grazie a questo risultato, possiamo identificare campi vettoriali lisci su M con le derivazioni in $C^\infty(M)$, usando la stessa lettera per entrambi gli oggetti.

Estendiamo il concetto di pushforward, che ricordiamo definito su spazi tangenti e agenti sui vettori, ai campi vettoriali.

Definizione 1.14 (*F-relatività*). Sia $F : M \rightarrow N$ liscia e $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M), \mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(N)$. Diciamo che \mathbb{X} e \mathbb{Y} sono *F-Relativi* se $\forall p \in M$ abbiamo

$$F_{*p}(X_p) = Y_{F(p)}. \quad (20)$$

Proposizione 1.5. Sia $F : M \rightarrow N$ liscia e $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M), \mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ campi vettoriali. Allora \mathbb{X} e \mathbb{Y} sono *F-Relativi* se e solo se, per ogni $f \in C^\infty(N)$,

$$\mathbb{X}(f \circ F) = (\mathbb{Y}f) \circ F. \quad (21)$$

Proposizione 1.6. Siano M ed N varietà differenziabili e sia $F : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo. Allora, per ogni $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un unico campo vettoriale liscio su N che è *F-relativo* a \mathbb{X} .

Denotiamo l'unico campo vettoriale *F*-relativo a \mathbb{X} come $F_*\mathbb{X}$, e lo chiamiamo il **pushforward di \mathbb{X} tramite F** . $F_*\mathbb{X}$ è definito esplicitamente dalla formula

$$(F_*\mathbb{X})_q = F_{*F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}). \quad (22)$$

Nella figura 3 sono rappresentati dei campi vettoriali *F*-relativi.

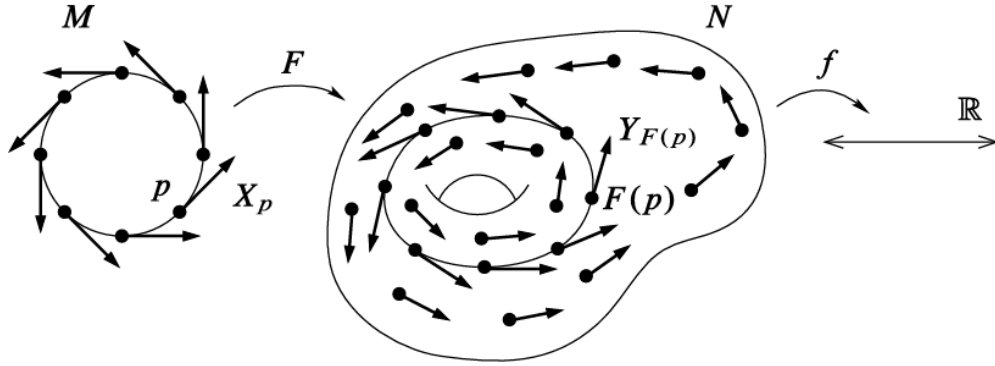


Figura 3: Campi vettoriali F-relativi

1.3.4 Parentesi di Lie

Le parentesi di Lie sono uno strumento molto importante e utile per combinare due diversi campi vettoriali lisci per ottenerne un altro.

In generale, applicare due campi vettoriali lisci ad una stessa funzione non ci assicura che la funzione ottenuta rispetti la regola del prodotto. Se non la rispetta non è una derivazione e quindi neanche un campo vettoriale liscio.

Definizione 1.15 (Parentesi di Lie). Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ operatori su $C^\infty(M)$. Le **parentesi di Lie di \mathbb{X} e \mathbb{Y}** (o **Lie brackets**) è un operatore $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definito da

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]f := \mathbb{X}\mathbb{Y}f - \mathbb{Y}\mathbb{X}f. \quad (23)$$

In modo completamente equivalente, possiamo definire le parentesi di Lie come un prodotto interno sullo spazio dei campi vettoriali lisci:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &\mapsto [\mathbb{X}, \mathbb{Y}] := \mathbb{X}\mathbb{Y} - \mathbb{Y}\mathbb{X}. \end{aligned}$$

Lemma 1.1. Le parentesi di Lie di una coppia qualsiasi di campi vettoriali lisci è un campo vettoriale liscio.

Proposizione 1.7 (Formula delle coordinate per le parentesi di Lie). Siano \mathbb{X}, \mathbb{Y} campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile M , e siano $\mathbb{X} = X^i \partial / \partial x^i$ e $\mathbb{Y} = Y^i \partial / \partial x^i$ la rappresentazione in coordinate per \mathbb{X} e \mathbb{Y} rispetto a qualche coordinata locale (x^i) di M . Allora $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$ ha la seguente espressione:

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (24)$$

o più conciso,

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] = (\mathbb{X}Y^j - \mathbb{Y}X^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (25)$$

Proposizione 1.8 (Proprietà delle parentesi di Lie). Le parentesi di Lie soddisfano le seguenti identità per ogni $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) **BILINEARITÀ:** For $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [a\mathbb{X} + b\mathbb{Y}, \mathbb{Z}] &= a[\mathbb{X}, \mathbb{Z}] + b[\mathbb{Y}, \mathbb{Z}] \\ [\mathbb{Z}, a\mathbb{X} + b\mathbb{Y}] &= a[\mathbb{Z}, \mathbb{X}] + b[\mathbb{Z}, \mathbb{Y}] \end{aligned}$$

(b) **ANTISIMMETRIA:**

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] = -[\mathbb{Y}, \mathbb{X}]$$

(c) **IDENTITÀ DI JACOBI:**

$$[\mathbb{X}, [\mathbb{Y}, \mathbb{Z}]] + [\mathbb{Y}, [\mathbb{Z}, \mathbb{X}]] + [\mathbb{Z}, [\mathbb{X}, \mathbb{Y}]] = 0$$

(d) Per $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[f\mathbb{X}, g\mathbb{Y}] = fg[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] + (f\mathbb{X}g)\mathbb{Y} - (g\mathbb{Y}f)\mathbb{X}.$$

Corollario 1.2 (Pushforward delle parentesi di Lie). Sia $F : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo e $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Allora $F_*[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2] = [F_*\mathbb{X}_1, F_*\mathbb{X}_2]$.

1.4 Covettori e Spazi cotangenti

In questa sezione andiamo a studiare i funzionali lineari sulle varietà, anche chiamati covettori. Iniziamo dando la definizione per spazi vettoriali e poi generalizziamo alle varietà differenziabili. In modo parallelo a quanto fatto con i vettori, studiamo le strutture che la loro esistenza fa emergere e generalizziamo il discorso ai campi covettoriali, mappe continue che ad ogni punto associano un covettore, anche chiamate 1-forme.

Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale su campo reale. Definiamo **covettore su V** una mappa lineare $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$, o in altri termini come un funzionale su V a valori reali. Lo spazio di tutti i covettori su V è a sua volta uno spazio vettoriale, denotato V^* , chiamato **duale di V** .

Ricordando che una mappa lineare è univocamente definita specificando i suoi valori su una base, facciamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.9. *Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita. Data una base qualsiasi $\{E_1, \dots, E_n\}$ per V , siano $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ i covettori definiti da*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i. \quad (26)$$

Allora $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ è una base per V^ , chiamata **base duale di (E_j)** . Quindi, $\dim V^* = \dim V$.*

In generale, se $\{E_j\}$ è una base per V e $\{\varepsilon^i\}$ è la sua base duale, per ogni vettore $v = v^j E_j \in V$ possiamo scrivere

$$\varepsilon^i(v) = v^j \varepsilon^i(E_j) = v^j \delta_j^i = v^i. \quad (27)$$

L' i -esima componente ε^i della base duale agisce su un vettore restituendo la sua i -esima componente rispetto alla base.

Possiamo esprimere un covettore $\omega \in V^*$ rispetto alla base duale come

$$\omega = \omega_i \varepsilon^i \quad (28)$$

dove le componenti sono determinate da $\omega_i = \omega(E_i)$. L'azione di ω su un vettore $v = v^j E_j$ è

$$\omega(v) = \omega_i v^i. \quad (29)$$

1.4.1 Covettori sulle varietà

Consideriamo ora una varietà differenziabile M . Per ogni $p \in M$ definiamo lo **spazio cotangente in p** , denotato T_p^*M , come lo spazio duale di T_pM :

$$T_p^*M := (T_pM)^*. \quad (30)$$

Gli elementi di T_p^*M sono chiamati **covettori tangenti in p** o semplicemente **covettori in p** .

Date delle coordinate locali $\{x^i\}$ su un aperto $U \subseteq M$, per ogni $p \in U$ la base $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ di T_pM induce una base duale per T_p^*M , che denotiamo come $\{dx^i|_p\}$. Ricordiamo che la condizione a cui devono sottostare gli elementi della base duale è: $dx^i|_p(\partial x_j|_p) = \delta_j^i$. Ogni covettore $\omega \in T_p^*M$ può essere scritto in modo univoco rispetto a questa base come

$$\omega = \omega_i dx^i|_p, \quad \text{con} \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) \quad (31)$$

e agisce su un vettore v di T_pM come

$$\omega(v) = \omega_i dx^i|_p(v^j \partial_j|_p) = \omega_i v^i \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1.16 (Pullback). Siano M e N varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Per ogni $p \in M$ definiamo una mappa lineare

$$F_{F(p)}^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M, \quad (32)$$

chiamata **pullback di F in p** o **mappa cotangente di F** , che agisce nel seguente modo. Dato $\omega_{F(p)} \in T_{F(p)}^*N$, $F_{F(p)}^*(\omega_{F(p)}) \in T_p^*M$ ed è quindi un funzionale di T_pM che agisce su un vettore X_p in esso secondo la regola

$$F_{F(p)}^*(\omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_{*p}X_p). \quad (33)$$

Proposizione 1.10 (Proprietà del pullback). Siano M, N e P varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow P$ mappe lisce, e $p \in M$, allora

$$(a) \quad (G \circ F)_{G(F(p))}^* = F_{F(p)}^* \circ G_{G(F(p))}^* : T_{G(F(p))}^*P \rightarrow T_p^*M.$$

$$(b) \quad (Id_M)_p^* = Id_{T_p^*M} : T_p^*M \rightarrow T_p^*M$$

Come con il pushforward, quando sarà chiaro dal contesto ometteremo il pedice " $F(p)$ " da F^* , il quale indica solo lo spazio di partenza.

1.4.2 Fibrato Cotangente

Similmente a quanto fatto con gli spazi tangenti, l'unione disgiunta di tutti gli spazi cotangenti è una nuova struttura importante da considerare.

Per ogni varietà differenziabile M , l'unione disgiunta

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M \quad (34)$$

è chiamato **fibrato cotangente di M** . Ha un naturale mappa suriettiva $\pi : T^*M \rightarrow M$ che manda $\omega_p \in T_p^*M$ in $p \in M$.

1.4.3 Campi covettoriali

Come per i campi vettoriali, chiamiamo **campo covettoriale** una sezione di π per il fibrato cotangente. In altri termini è una mappa continua $\omega : M \rightarrow T^*M$ che associa ad ogni punto $p \in M$ un covettore $\omega_p \in T_p^*M$.

Possiamo scrivere il valore di un campo covettoriale ω in qualsiasi punto $p \in M$ rispetto alla base duale $\{dx^i|_p\}$ come

$$\omega_p = \omega_i(p)dx^i|_p \quad (35)$$

Come abbiamo fatto con i campi vettoriali, consideriamo le seguenti sezioni del fibrato cotangente:

$$dx^i : M \rightarrow T^*M \quad (36)$$

$$p \mapsto dx^i|_p \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (37)$$

La n -upla ordinata dei dx^i è un frame globale per M e viene chiamato **coframe delle coordinate di M** . Possiamo riscrivere l'espressione (35) per un campo covettoriale ω in termini più generali tramite questi coframe locali come

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad (38)$$

dove le ω_i sono funzioni lisce chiamate **funzioni componenti di ω** . Come con i campi vettoriali, se calcoliamo il valore di ω in un punto $p \in M$ ritroviamo la (35).

Se ω è un campo covettoriale e \mathbb{X} è un campo vettoriale su M , possiamo costruire la funzione $\omega(\mathbb{X}) : M \rightarrow \mathbb{R}$ tramite

$$\omega(\mathbb{X})(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M. \quad (39)$$

Se scriviamo $\omega = \omega_i dx^i$ e $\mathbb{X} = X^i \partial_i$ in termini delle coordinate locali, allora $\omega(\mathbb{X})$ ha rappresentazione in coordinate locali

$$\omega(\mathbb{X}) = \omega_i dx^i (X^j \partial_j) = \omega_i X^j dx^i (\partial_j) = \omega_i X^j \delta_i^j = \omega_i X^i \quad (40)$$

dove abbiamo fatto uso della relazione (26) tra base duale rispetto ad un'altra.

Proposizione 1.11 (Criterio di liscenza per campi covettoriali). *Sia M una varietà differenziabile e $\omega : M \rightarrow T^*M$ un campo covettoriale, allora le seguenti sono equivalenti:*

- (a) ω è liscio.
- (b) In ogni carta delle coordinate liscia, le funzioni componenti di ω sono lisce.
- (c) Ogni punto di M è contenuto in qualche carta nella quale ω ha le funzioni componenti lisce.

- (d) Per ogni campo vettoriale liscio $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$, la funzione $\omega(\mathbb{X})$ è liscia su M .
- (e) Per ogni aperto $U \subseteq M$ e ogni campo vettoriale liscio \mathbb{X} su U , la funzione $\omega(\mathbb{X}) : U \rightarrow \mathbb{R}$ è liscia su U .

Definizione 1.17 (Derivata esterna). Sia M una n -varietà differenziabile e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia. Definiamo la sua **derivata esterna** o **differenziale** df come un funzionale su M . Precisamente $df \in \Omega^1(M)$ e agisce su un campo vettoriale $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(M)$ come:

$$(df)(\mathbb{X}) := \mathbb{X} \circ f. \quad (41)$$

Localmente possiamo anche scrivere

$$df = \partial_i f dx^i. \quad (42)$$

2 Gruppi di Lie

In questo capitolo introduciamo e descriviamo i concetti di gruppo di Lie e algebra di Lie, oggetti fondamentali nella nostra trattazione e in moltissime branche della fisica. Lo faremo dando una struttura di gruppo alle nostre varietà differenziabili, studiando le proprietà che emergono da questo. Infine definiremo le algebre di Lie e osserveremo la relazione che hanno con lo spazio tangente all'identità.

2.1 Gruppi di Lie

In algebra, un gruppo è definito come

Definizione 2.1 (Gruppo). *Sia G un insieme su cui è definita un'operazione binaria \cdot , anche chiamata moltiplicazione, che ad ogni coppia $a, b \in G$ associa un elemento $a \cdot b \in G$. Chiamiamo G **gruppo** se l'operazione binaria rispetta le seguenti tre proprietà:*

1. *Associatività:*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in G.$$

2. *Esiste un elemento **neutro** $e \in G$, anche chiamato l'identità, tale che:*

$$g \cdot e = e \cdot g = g, \quad \forall g \in G.$$

3. *Per ogni elemento $g \in G$ esiste un elemento unico, denotato g^{-1} e chiamato **inverso** di g , tale che*

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e.$$

Ometteremo il simbolo dell'operazione binaria \cdot e scriveremo la moltiplicazione tra due elementi del gruppo semplicemente affiancandoli come ab . Diamo ora la definizione di gruppo di Lie.

Definizione 2.2 (Gruppo di Lie). *Un **gruppo di Lie** è una varietà differenziabile G che è anche un gruppo nel senso algebrico del termine, con la proprietà che le mappe di moltiplicazione e inversione, definite come*

$$m : G \times G \rightarrow G \qquad i : G \rightarrow G \qquad (43)$$

$$(g, h) \mapsto gh, \qquad g \mapsto g^{-1}, \qquad (44)$$

sono lisce.

Vediamo ora delle mappe molto importanti all'interno dei gruppi di Lie, che ci permettono di mettere in relazione ogni elemento del gruppo.

Definizione 2.3 (Traslazione a sinistra). Se G è un gruppo di Lie, ogni elemento $g \in G$ definisce una mappa $L_g : G \rightarrow G$, chiamata **traslazione a sinistra**, come

$$L_g(h) = gh. \quad (45)$$

L_g può essere rappresentata come combinazione di mappe lisce

$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G \quad (46)$$

dove $\iota_g(h) = (g, h)$ e m è la moltiplicazione. Segue che L_g è liscia. È in realtà un diffeomorfismo, perché $L_{g^{-1}}$ è un'inversa liscia per L_g .

Definizione 2.4 (Traslazione a destra). Analogamente alla traslazione a sinistra, ogni elemento $g \in G$ definisce una mappa $R_g : G \rightarrow G$, chiamata **traslazione a destra**, come

$$R_g(h) = hg. \quad (47)$$

Anche la traslazione a destra è un diffeomorfismo.

Definizione 2.5 (Automorfismo interno). Sia G un gruppo di Lie, ogni suo elemento $g \in G$ definisce una mappa $Ad_g : G \rightarrow G$, chiamata **automorfismo interno** indotto da g , come

$$Ad_g(h) = ghg^{-1}. \quad (48)$$

Vediamo qualche esempio di gruppi di Lie.

Esempio 2.1. Abbiamo già visto che \mathbb{R}^n è una varietà differenziabile con atlante banale ed è un gruppo con la consueta addizione tra vettori. Quindi è un gruppo di Lie.

Esempio 2.2. $GL_n(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile e costituisce un gruppo sotto l'usuale moltiplicazione tra matrici. La moltiplicazione è liscia perché gli elementi della matrice prodotto AB sono polinomi negli elementi di A e B . L'inversione è liscia per la regola di Cramer. Quindi $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie.

Proposizione 2.1. Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un **sottogruppo aperto**. Allora H è un gruppo di Lie.

Teorema 2.1 (Teorema di Cartan). Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un suo **sottogruppo chiuso**. Allora H è un gruppo di Lie.

Esempio 2.3 (Gruppo ortogonale). Sia $O(n)$ lo spazio delle matrici quadrate ortogonali, definito come

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A^T A = AA^T = I\}. \quad (49)$$

Si può dimostrare (vedasi per esempio [Lee12] pag. 166 o [Tu11] pag. 169) che $O(n, \mathbb{R})$ è sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ e perciò è un gruppo di Lie.

Esempio 2.4 (Gruppo ortogonale speciale). Il gruppo ortogonale speciale $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ è definito come lo spazio delle matrici ortogonali con determinante uguale ad 1. Le matrici in $\text{O}(n, \mathbb{R})$ hanno determinante ± 1 , quindi $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ è un sottogruppo aperto di $\text{O}(n, \mathbb{R})$ ed è un gruppo di Lie.

2.2 Algebra di Lie

Grazie all'esistenza dell'operazione moltiplicazione, i gruppi di Lie sono un caso molto speciale di varietà. Grazie al fatto che la translazione a sinistra L_g definita da (2.3) è un diffeomorfismo che mappa un intorno dell'identità ad un intorno del punto g , tutte le informazioni locali del gruppo sono concentrate in un intorno dell'identità. Inoltre, L_g induce un isomorfismo tra spazi tangenti

$$(L_g)_* : T_e G \rightarrow T_g G, \quad (50)$$

dove omettiamo il pedice "e" per semplificare la notazione. Se siamo in grado di descrivere lo spazio tangente all'identità, allora $(L_g)_*(T_e G)$ darà una descrizione dello spazio tangente $T_g G$ in ogni punto del gruppo $g \in G$.

Vediamo in questa sezione come il dotare $T_e G$ di parentesi di Lie lo renda un oggetto fondamentale e centrale nello studio dei gruppi di Lie.

Iniziamo considerando una particolare classe di campi vettoriali.

Definizione 2.6 (Invarianza a sinistra). Se G è un gruppo di Lie e \mathbb{X} un campo vettoriale su G , diciamo che \mathbb{X} è **invariante a sinistra** se è invariante sotto tutte le translazioni a sinistra, nel senso che è L_g -relativo con se stesso. Più concretamente, significa

$$(L_g)_*(X_{g'}) = X_{gg'}, \quad \forall g, g' \in G. \quad (51)$$

Dato che L_g è un diffeomorfismo, possiamo scrivere $(L_g)_*\mathbb{X} = \mathbb{X}$, per ogni $g \in G$. Chiaramente, un campo vettoriale invariante a sinistra è univocamente definito dal suo valore X_e all'identità, dato che

$$X_g = (L_g)_*(X_e). \quad (52)$$

Visto che $(L_g)_*(a\mathbb{X} + b\mathbb{Y}) = a(L_g)_*\mathbb{X} + b(L_g)_*\mathbb{Y}$, l'insieme di tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra su G è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{X}(G)$. Oltre a questo, vediamo che è uno spazio chiuso rispetto alle parentesi di Lie.

Proposizione 2.2. Sia G un gruppo di Lie e supponiamo che \mathbb{X} e \mathbb{Y} siano campi vettoriali lisci invarianti a sinistra su G . Allora anche $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$ è invariante a sinistra.

Diamo ora la definizione di algebra di Lie.

Definizione 2.7 (Algebra di Lie). Un'algebra di Lie (su \mathbb{R}) è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} dotato di una mappa chiamata **parentesi**

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

(i) *Bilinearità:* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad (53)$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]. \quad (54)$$

(ii) *Antisimmetria:*

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) *Identità di Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Definizione 2.8 (Sottoalgebra di Lie). Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie, un sottospazio lineare $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ è chiamato **sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g}** se è chiuso sotto le parentesi. In questo caso, \mathfrak{h} è un'algebra di Lie con la restrizione alle stesse parentesi.

Definizione 2.9. Se l'operazione di un gruppo algebrico è commutativa chiamiamo quel gruppo **abeliano**. Se un gruppo di Lie è abeliano allora le parentesi di Lie su ciascuna coppia di campi vettoriali in quel gruppo saranno sempre zero. In questo caso chiamiamo anche la sua algebra di Lie **abeliana**.

Lo spazio $\mathfrak{X}(M)$ di tutti i campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile M è un'algebra di Lie sotto le parentesi di Lie grazie alla proposizione (1.8).

Lo spazio dei campi vettoriali lisci invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G è un sottospazio di $\mathfrak{X}(G)$, inoltre grazie alla proposizione (2.2) è chiuso rispetto alle parentesi di Lie. È una sottoalgebra di $\mathfrak{X}(G)$ e perciò è un'algebra di Lie.

Quest'ultima algebra è di importanza fondamentale nello studio dei gruppi di Lie, tanto che prende il nome di **algebra di Lie di G** , indicato come $\text{Lie}(G)$.

$\text{Lie}(G)$ è finito dimensionale e ha le stesse dimensioni di G , come mostrato dal seguente teorema

Teorema 2.2. Sia G un gruppo di Lie. La mappa di valutazione $\varepsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$, data da $\varepsilon(X) = X_e$, è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Perciò, $\text{Lie}(G)$ è finito dimensionale e ha le stesse dimensioni di G .

Grazie a questo isomorfismo tra spazi, possiamo identificare effettivamente l'algebra di Lie su un gruppo di Lie G con lo spazio tangente all'identità. Dato un vettore tangente $A \in T_e G$, possiamo costruire un campo vettoriale \mathbb{X}^A definendolo come

$$X_g^A := (L_g)_* A. \quad (55)$$

Questo campo è invariante a sinistra dato che

$$(L_g)_{*g'}(X_{g'}^A) = (L_g)_{*g'}(L_{g'})_* A = (L_{gg'})_* A = X_{gg'}^A. \quad (56)$$

La corrispondenza è biunivoca perché prendendo un qualsiasi $\mathbb{X} \in \text{Lie}(G)$ possiamo prendere il suo valore all'identità, $X_e \in T_e G$.

Inoltre, possiamo dotare $T_e G$ di parentesi di Lie definendo

$$[A, B] := [\mathbb{X}^A, \mathbb{X}^B]|_e, \quad (57)$$

con $A, B \in T_e G$ e $\mathbb{X}^A, \mathbb{X}^B \in \text{Lie}(G)$ campi vettoriali generati rispettivamente da A e B .

In virtù di questa osservazione, d'ora in poi scegliamo di considerare l'algebra di Lie sul gruppo di Lie G non tanto quanto l'insieme dei campi invarianti a sinistra, ma piuttosto come lo spazio tangente all'identità con le parentesi appena definite, e scriviamo $\mathfrak{g} = T_e G = \text{Lie}(G)$.

Esempio 2.5 (Spazio euclideo). Consideriamo lo spazio euclideo \mathbb{R}^n come un gruppo di Lie con l'addizione. La transizione a sinistra di un elemento $b \in \mathbb{R}^n$ è data dalla mappa $L_b(x) = b + x$. Il suo differenziale $(L_b)_*$ è dato dalla matrice identità rispetto alle coordinate standard, quindi un campo vettoriale $\mathbb{X} = X^i \partial_i$ è invariante a sinistra se e solo se i suoi coefficienti sono costanti. Dato che le parentesi di Lie di due campi vettoriali a coefficienti costanti è zero (dalla (24)), la sua algebra di Lie è abeliana ed isomorfa a \mathbb{R}^n . In conclusione, $\text{Lie}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

Esempio 2.6 (Spazio di Matrici). Lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate $n \times n$ diventa un'algebra di Lie n^2 -dimensionale equipaggiandolo con il **commutatore**:

$$[A, B] = AB - BA.$$

La bilinearità e l'antisimmetria sono ovvie dalla definizione, l'identità di Jacobi segue un semplice calcolo algebrico. Quando pensiamo a $M_n(\mathbb{R})$ come un'algebra di Lie con queste parentesi lo indichiamo con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Esempio 2.7 (Gruppo generale lineare). Il teorema (2.2) ci dice che esiste un isomorfismo tra spazi vettoriali tra $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{R}))$ e lo spazio tangente alla matrice identità $T_{I_n}(\text{GL}_n(\mathbb{R}))$. Inoltre $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, quindi il suo spazio tangente è naturalmente isomorfo proprio a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. La composizione di questi isomorfismi ci dà

un isomorfismo tra spazi vettoriali $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{R})) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

I due spazi vettoriali hanno due strutture di algebra di Lie indipendenti: quella di $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ proviene dalle parentesi di Lie su campi vettoriali mentre quella su $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dai commutatori di matrici. Si può dimostrare ([Lee12] proposizione 8.41 pag 193) che in realtà l'isomorfismo che c'è è tra le algebre di Lie.

Esempio 2.8 (Gruppo delle matrici ortogonali). L'algebra di Lie del gruppo delle matrici ortogonali $\text{O}(2, \mathbb{R})$ è lo spazio delle matrici antisimmetriche 2×2 e lo indichiamo con $\mathfrak{o}(2, \mathbb{R})$. Questo è vero anche per $\text{SO}(2, \mathbb{R})$, e la sua algebra di Lie prende simbolo $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.

3 Forma di Maurer-Cartan

In questo capitolo andiamo finalmente a studiare l'oggetto principale della nostra trattazione. Defineremo la forma di Maurer-Cartan, la scriveremo in forma esplicità per alcuni casi di gruppi di Lie e mostreremo come la sua esistenza ci permetta di trivializzare il fibrato tangente dei gruppi di Lie.

Definizione 3.1 (Forma di Maurer-Cartan). *Sia G un gruppo di Lie. La **forma di Maurer-Cartan** ω_{MC} è una 1-forma differenziale definita globalmente su G e a valori nella sua algebra di Lie \mathfrak{g} . Per ogni $g \in G$, $\omega_{MC}|_g$ agisce sui vettori di $T_g G$ e li trasporta nell'algebra di Lie del gruppo $T_e G \sim \mathfrak{g}$. In simboli:*

$$\omega_{MC} : \mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{g} \quad (58)$$

tale che, $\forall g \in G$,

$$\omega_{MC}|_g : T_g G \rightarrow \mathfrak{g} = T_e G \quad (59)$$

$$X_g \mapsto \omega_{MC}|_g(X_g) = (L_{g^{-1}})_*(X_g) \quad (60)$$

Ricordiamo che le traslazioni a sinistra sono diffeomorfismi, perciò la forma di Maurer-Cartan è un isomorfismo per costruzione.

3.1 Esempi di forme di Maurer-Cartan

Esempio 3.1 (Spazio euclideo). La forma di Maurer-Cartan di \mathbb{R}^n è (dx^1, \dots, dx^n) . Abbiamo visto nell'esempio (2.5) che $\mathfrak{g} = T_e \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, $L_p(x) = p + x$ e $(L_p)_* = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ $\forall p, x \in \mathbb{R}^n$. La forma di Maurer-Cartan agisce su $v \in T_p \mathbb{R}^n$ come $\omega_{MC}|_p(v) = (L_{p^{-1}})_* v = v$. Ora un vettore in $T_p \mathbb{R}^n$ si scrive come $v = v^i \partial_i|_p$, presa una 1-forma $dx^i|_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$ definita come $dx^i|_p(\partial_j|_p) = \delta_j^i$, si ha $dx^i|_p(v) = dx^i|_p(v^j \partial_j|_p) = v^j dx^i|_p(\partial_j|_p) = v^j \delta_j^i = v^i$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Quindi $\omega_{MC} = (dx^1, \dots, dx^n)$.

Esempio 3.2 (Gruppo generale lineare). Se G è un gruppo di matrici, per esempio $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, la sua forma di Maurer-Cartan è $g^{-1}dg$.

Vediamo cosa significa. Ricordiamo che se $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ la sua algebra è lo spazio delle matrici $M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g} = T_e G$. Le traslazioni a sinistra agiscono come moltiplicazioni tra matrici: $L_g(h) = gh$, con $g, h \in G$. Il pushforward di L_g è L_g stesso, dato che gli operatori lineari sono già la miglior approssimazione lineare di se stessi:

$$(L_g)_* h = gh. \quad (61)$$

Giustificiamo questo fatto in modo più rigoroso facendo un calcolo esplicito.

Prendiamo un campo vettoriale $\mathbb{A} = a^{ij} \partial x_{ij} \in \mathfrak{X}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$, un punto $g = g^{km} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e calcoliamo $(L_g)_* \mathbb{A}$ usando la definizione:

$$\begin{aligned} \left((L_g)_* a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right) f(x^{pq}) &= a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} (f \circ L_g)(x^{pq}) \\ &= a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} (f(\overbrace{g^{km} x^{mq}}^{z^{kq}})) \end{aligned}$$

Usiamo la regola della catena per le derivate.

$$\begin{aligned} &= a^{ij} \underbrace{g^{km} \frac{\partial x^{mq}}{\partial x^{ij}}}_{\partial z / \partial x} \frac{\partial}{\partial z^{kq}} f(z) \\ &= \left(a^{ij} g^{km} \delta^{mi} \delta^{qj} \frac{\partial}{\partial z^{kq}} \right) f(z) \\ &= \left(g^{ki} a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \right) f(x) \implies (L_g)_* \mathbb{A} = g \mathbb{A}. \end{aligned} \tag{62}$$

Dove la moltiplicazione finale " $g \mathbb{A}$ " è una moltiplicazione tra matrici.

Sia ω_{MC} la forma di Maurer-Cartan di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Allora, $\forall y \in T_g G$, $\omega_{MC}|_g(y) = g^{-1}y \in \mathfrak{g}$. Ora, possiamo invece usare la lettera g per indicare la funzione identità $g(x) = x$ per ogni matrice x , cioè pensare a g come "ogni elemento" di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e non un "particolare elemento". Il suo differenziale sarà la funzione identità del fibrato tangente, cioè $dg_x(y) = y$, con $y \in T_x G$.

Possiamo scrivere la forma di Maurer-Cartan nel seguente modo:

$$\omega_{MC} = g^{-1} dg, \quad \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \tag{63}$$

che agisce come

$$\omega_{MC}|_x(y) = (g^{-1} dg)_x(y) = g(x)^{-1} dg_x(y) = x^{-1}y. \tag{64}$$

Questa scrittura è equivalente alla definizione che abbiamo dato all'inizio del capitolo, visto che

$$\omega_{MC}|_x(y) = x^{-1}y = (L_{x^{-1}})_* y \tag{65}$$

Scriviamo esplicitamente la forma di Maurer-Cartan per $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Preso $g = (x_{ij})$, dove le x_{ij} sono le funzioni coordinate di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, abbiamo anche $dg = (dx_{ij})$ e $g^{-1}dg = (x_{ij})^{-1}(dx_{ij})$. Riscritto in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \omega_{MC} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ è il determinante di g . Per esempio sia $A = (a^{ij}(h)\partial x_{ij}|_h)$ un vettore che vive in $T_h\text{GL}_2(\mathbb{R})$. Allora abbiamo

$$\omega_{MC}|_h(A) = (g^{-1}dg)_h(A) = h^{-1}dg_h(A) = h^{-1}A. \quad (66)$$

oppure in altri termini, usando il calcolo (62),

$$\omega_{MC}|_h(A) = (L_{h^{-1}})_*A = (h^{-1})^{ki}(a^{im}\partial x_{km}) \quad (67)$$

Esempio 3.3. Prendiamo in considerazione il gruppo delle matrici ortogonali $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \subset \text{M}_2(\mathbb{R})$. In particolare $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ è 1-dimensionale e ammette la seguente parametrizzazione

$$g : \phi \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Il differenziale di g sarà:

$$dg : \phi \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{pmatrix} d\phi =: dg_\phi$$

La forma di Maurer-Cartan di $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ è

$$\begin{aligned} \omega_{MC}|_\phi &= g^{-1}(\phi)dg_\phi \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{pmatrix} d\phi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\phi \end{aligned}$$

L'ultima matrice scritta è la generatrice di $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, il quale è lo spazio delle matrici antisimmetriche.

La forma di Maurer-Cartan agisce su un vettore di $T_\phi\text{SO}(2, \mathbb{R})$ e lo trasporta nell'algebra, preso per esempio $A = a\partial_\phi$ abbiamo

$$\begin{aligned} \omega_{MC}|_\phi(A) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\phi \right) (a\partial_\phi) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3.2 Trivializzazione dei gruppi di Lie

Presa una varietà differenziabile, abbiamo visto come l'unione degli spazi tangenti ad ogni punto crei una nuova struttura chiamata fibrato tangente. Vediamo velocemente in questa sezione alcuni concetti generali sui fibrati e che nei gruppi di Lie il suo fibrato

tangente è **triviale**, cioè può essere scritto come un prodotto cartesiano della varietà di partenza e un altro spazio.

In generale, un fibrato è una quadrupla (E, B, π, F) , dove E è chiamato **spazio totale**, B è chiamata **base** ed F è chiamata **fibra**, e sono tutti spazi topologici. $\pi : E \rightarrow B$ è una funzione suriettiva continua e deve soddisfare la seguente condizione. Per ogni $x \in B$, esiste un intorno aperto $U \subseteq B$ tale che la controimmagine $\pi^{-1}(U)$ è omeomorfa al prodotto $U \times F$ e π su questo prodotto è la proiezione sul primo fattore. In altri termini, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}$$

dove $\text{proj}_1 : U \times F \rightarrow U$ è la proiezione naturale sul primo fattore e $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ è l'omeomorfismo. L'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}$ di tutti gli omeomorfismi viene chiamato **trivializzazione locale** del fibrato.

Se la trivializzazione non è locale ma globale, cioè $E = B \times F$ con $\pi : E \rightarrow B$ proiezione sul primo fattore, allora chiamiamo il fibrato **triviale**. Se E, B ed F sono varietà differenziabili allora il fibrato è chiamato **fibrato liscio**. Daremo per scontato di lavorare con questi tipi di spazi ed ometteremo la parola liscio.

Definizione 3.2 (Sezione). Se (E, B, π, F) è un fibrato, chiamiamo **sezione globale** un'applicazione $\sigma : B \rightarrow E$ liscia tale che $\pi \circ \sigma = \text{Id}_B$. Se σ è definita su un sottoinsieme $U \subset B$ allora la chiamiamo **sezione locale**.

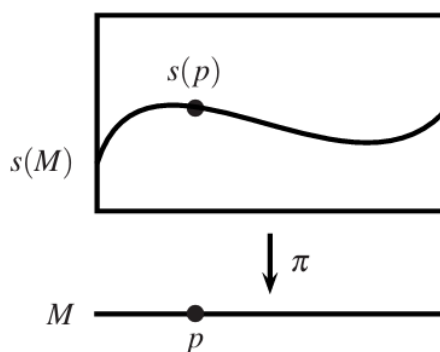


Figura 4: Esempio di sezione

In particolare, se $B = M$ è una varietà differenziabile e lo spazio totale è il suo fibrato tangente TM , le sezioni sono i campi vettoriali.

Definizione 3.3 (Fibrato vettoriale). *Se la fibra $F = \mathbb{R}^k$ e $E_p = \pi^{-1}(p)$ è uno spazio vettoriale finito dimensionale, e quindi di dimensione k , con $p \in B$, allora chiamiamo $(E, B, \pi, \mathbb{R}^k)$ **fibrato vettoriale** di rango k .*

In particolare, i fibrati tangenti e cotangenti definiti in questo lavoro sono fibrati vettoriali. In figura 4 è rappresentata una sezione su un fibrato vettoriale, dove s è il simbolo usato al posto di σ .

Diamo ora la definizione di un particolare fibrato che sarà fondamentale nella costruzione delle teorie di gauge.

Definizione 3.4 (Fibrato principale). *Sia (P, B, π, G) un fibrato, con G gruppo di Lie. Se P ammette un'azione destra libera e transitiva di un gruppo di Lie G , allora si chiama **fibrato principale** con gruppo di struttura G . In particolare un'azione a destra è una mappa definita come:*

$$\begin{aligned} P \times G &\rightarrow P \\ (p, g) &\mapsto pg. \end{aligned}$$

Tale azione si dice **libera** se ogni elemento di G , tranne l'identità, "muove" ogni elemento di P , ed è **transitiva** se $\forall p, g \in P$ esiste un $g \in G$ tale che $h = pg$.

Definizione 3.5. *Una varietà differenziabile M si dice **parallelizzabile** se ammette un frame globale, come definito da (1.13).*

Proposizione 3.1. *Se il fibrato tangente TM di una varietà differenziabile M è triviale allora M è parallelizzabile.*

Se G è un gruppo di Lie e prendiamo lo spazio tangente all'identità $T_e G \sim \mathfrak{g}$ allora esso ammetterà una base vettoriale $\{\partial_i|_e\}$. Possiamo fare il pushforward di questa base in qualsiasi altro spazio tangente, $(L_g)_* \{\partial_i|_e\}$ e l'insieme di questi nuovi vettori risulterà una base vettoriale per $T_g G$. Quindi abbiamo definito un frame globale per G .

Corollario 3.1. *Ogni gruppo di Lie ammette un frame globale invariante a sinistra (un frame composto da campi vettoriali invarianti a sinistra), perciò ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.*

Proposizione 3.2. *Il fibrato tangente di un gruppo di Lie G è triviale: $TG \cong G \times \mathfrak{g}$.*

Infatti, per ogni $v_g \in TG$ abbiamo

$$\begin{aligned} TG &\rightarrow G \times \mathfrak{g} \\ v_g &\mapsto (g, \omega_{MC}|_g(v_g)) \end{aligned}$$

E al contrario

$$\begin{aligned}TG &\leftarrow G \times \mathfrak{g} \\ (L_g)_*A &\leftarrow (g, A)\end{aligned}$$

4 Applicazioni alle trasformazioni di gauge

In fisica, è risaputo dal teorema di Noether che se un sistema fisico ammette una simmetria globale, cioè la lagrangiana che descrive il sistema è invariante sotto questa trasformazione, allora esiste una quantità fisica conservata. Si pensi ad esempio alla quantità di moto come grandezza conservata in sistemi invarianti sotto traslazioni, oppure all'energia per simmetrie temporali.

Una teoria di gauge è una particolare teoria dei campi nella quale si richiede che il sistema, e quindi la lagrangiana, sia invariante sotto trasformazioni locali. In questo tipo di simmetrie, i parametri della trasformazioni variano di punto in punto. Chiamiamo **trasformazioni di gauge** quelle trasformazioni locali che lasciano invariata la lagrangiana del sistema. L'insieme di queste trasformazioni in molti casi di interesse fisico forma un gruppo di Lie, chiamato **gruppo delle simmetrie** del sistema. Come visto in precedenza, ad ogni gruppo di Lie è associata un'algebra di Lie, i campi vettoriali nell'algebra vengono chiamati **campi di gauge**.

L'esempio più classico, oltre che il primo storicamente, di teoria fisica con una simmetria di gauge è l'elettromagnetismo. In formalismo covariante, mettendoci nello spazio di Minkowski nel contesto della relatività ristretta, il campo elettromagnetico può essere scritto come un tensore in termini di un potenziale $A_\mu = (\phi, \vec{A})$, chiamato quadripotenziale, come

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (68)$$

anche chiamato tensore di Maxwell. Le equazioni di Maxwell nel vuoto in forma covariante diventano:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (69)$$

Le simmetrie dell'equazione del moto, cioè le trasformazioni di gauge di questo potenziale, sono: $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$, dove χ è una funzione scalare qualsiasi. Sotto queste trasformazioni il campo elettromagnetico è invariante e quindi anche le equazioni di Maxwell.

Le teorie di gauge sono fondamentali nella costruzione del celebre modello standard, con gruppo di simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Sono inoltre molto importanti in branche quali la relatività generale, le teorie sulla gravità quantistica, in fisica della materia condensata, in fisica nucleare e in fisica delle alte energie.

In questo capitolo diamo una costruzione più rigorosa delle teorie di gauge, mostreremo il ruolo della forma di Maurer-Cartan in tale contesto e infine andremo a studiare due casi importanti: l'interazione elettromagnetica, con gruppo di simmetria $U(1)$, e la forza nucleare debole, con gruppo di simmetria $SU(2)$.

4.1 Campi di Gauge

Una teoria di gauge con gruppo di simmetria G è definita su un fibrato principale (P, M, π, G) con gruppo di struttura G .

Definizione 4.1 (Connessione principale). *Chiamiamo **connessione principale**, o semplicemente **connessione**, su P una 1-forma*

$$\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \quad (70)$$

equivariante, ossia: $R_g^ \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$.*

Se prendiamo una sezione locale del fibrato $\sigma : M \supseteq U \rightarrow P$ possiamo fare il pullback di ω tramite σ :

$$A := \sigma^* \omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}). \quad (71)$$

Osserviamo che ω è un oggetto definito globalmente, non dipende dalle coordinate ed è intrinseco nella struttura del fibrato. A invece dipende dalla scelta della sezione σ , chiamiamo questa scelta "**gauge**", e prende il nome di **campo di gauge** o **potenziale (di gauge) locale**. In fisica si fa uso di A , perché vive in $U \subseteq M$ e ha delle coordinate, bisogna però ricordare che esso è solo la rappresentazione locale di ω , il quale potrebbe essere visto come il "vero" campo di gauge.

Abbiamo evidenziato come A dipenda dalla scelta della sezione σ , vediamo ora cosa succede se cambiamo sezione:

Definizione 4.2 (Trasformazione di gauge). *Una trasformazione di gauge è una mappa*

$$g : M \supseteq U \rightarrow G. \quad (72)$$

Data una trasformazione di gauge possiamo definire un nuovo gauge tramite

$$\sigma' = \sigma g. \quad (73)$$

Osserviamo che σ' è una sezione perché l'azione destra del gruppo di Lie G non cambia la fibra.

Una trasformazione di gauge in fisica altro non è che cambiare la scelta della sezione usata per rappresentare la connessione principale ω . Vediamo esplicitamente come cambia un campo di gauge sotto una trasformazione di gauge. Sia $A = \sigma^* \omega$ un potenziale di gauge. Sotto la trasformazione di gauge

$$\sigma \longrightarrow \sigma' = \sigma g$$

abbiamo

$$A = \sigma^* \omega \longrightarrow A' = (\sigma')^* \omega. \quad (74)$$

Usando la proprietà dei pullback scriviamo

$$(\sigma')^* \omega = (\sigma g)^* \omega = (R_g \circ \sigma)^* \omega = \sigma^* (R_g^* \omega).$$

Le connessioni sono equivarianti, cioè $R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$, però questo vale solo quando g è fisso. Nel nostro caso $g = g(x)$ varia, il calcolo esplicito di R_g^* tocca dei formalismi che esulano dai nostri scopi, per una dimostrazione rigorosa il lettore può consultare [Fig06] o [Nov25] capitolo 7.2.

Una volta svolti i calcoli, si trova che il potenziale varia come:

$$A' = Ad_{g^{-1}} A + g^* \omega_{MC}, \quad (75)$$

dove ω_{MC} è proprio la forma di Maurer-Cartan di G . Il termine g^* serve perché ω_{MC} vive in $\Omega^1(G, \mathfrak{g})$, quindi bisogna portarlo in $U \subseteq M$ tramite il pullback di g .

Se il gruppo di Lie G è un gruppo di matrici, abbiamo visto nel precedente capitolo che $\omega_{MC} = g^{-1} dg$, quindi possiamo riscrivere la trasformazione di gauge in una forma più nota:

$$A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg. \quad (76)$$

4.2 Caso $U(1)$: interazione elettromagnetica

Mettiamoci ora nel caso specifico in cui il gruppo di simmetria del sistema fisico è $U(1)$. $U(1)$ è il gruppo delle matrici complesse unitarie 1×1 , o in altri termini il gruppo dei numeri complessi con valore assoluto uguale ad 1:

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \quad (77)$$

Possiamo quindi indicare qualsiasi elemento di $U(1)$ come $e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. È immediato vedere che è isomorfo al cerchio complesso unitario $U(1) \cong \mathbb{S}^1$ e che è un gruppo di Lie abeliano. La sua algebra di Lie è l'insieme dei numeri immaginari puri: $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$.

Abbiamo quindi (P, M, π, G) fibrato principale, con $G = U(1)$ e M può essere considerato lo spazio di Minkowski $M \cong \mathbb{R}^4$ con un particolare prodotto scalare, ma la nostra trattazione non è limitata da questo e vale in casi anche più generali, quindi lasceremo la lettera M ad indicare la base. Sia

$$\begin{aligned} g : M &\rightarrow U(1) \\ x &\mapsto e^{i\phi(x)}, \end{aligned}$$

con $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, la nostra trasformazione di gauge. È interessante notare come questa altro non sia che un cambio di fase nel piano complesso. Se la fase è costante e applichiamo un cambio di fase ad una funzione d'onda quantistica, la forma dell'equazione di Schrödinger rimane invariata: la meccanica quantistica ha simmetria $U(1)$ globale. Se invece la fase non è costante e dipende da posizione e tempo, cioè imponiamo una simmetria $U(1)$ locale, dobbiamo modificare l'equazione di Schrödinger per mantenere l'invarianza. È possibile mostrare che modificare le equazioni per avere una simmetria locale faccia emergere naturalmente l'interazione elettromagnetica, e che questo fatto valga anche per l'interazione nucleare debole e forte, imponendo $SU(2)$ e $SU(3)$ locali. [Nic]

Sia $A = \sigma^* \omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{u}(1))$ un potenziale di gauge, dove $\sigma : M \rightarrow P$ è una sezione e $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{u}(1))$ è la connessione. Per calcolare come cambia il potenziale sotto la trasformazione di gauge $g = e^{i\phi}$ usiamo l'equazione (76), dato che $U(1)$ è un gruppo di matrici, con $dg = d(e^{i\phi}) = ie^{i\phi}d\phi$:

$$\begin{aligned} A' &= g^{-1}Ag + g^{-1}dg \\ &= e^{-i\phi}Ae^{i\phi} + e^{-i\phi}ie^{i\phi}d\phi \\ &= A + id\phi. \end{aligned}$$

Per ricondurci alla formula fisica elettromagnetica, $\tilde{A}' = \tilde{A} - \partial_\mu \phi$ puramente reale, dove la tilde serve per distinguere $\tilde{A} \in \mathbb{R}^4$ da $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R})$, consideriamo la seguente convenzione: $A = -i\tilde{A}_\mu dx^\mu$ e sostituiamo (espandendo in coordinate $d\phi$):

$$\begin{aligned} A' &= A + id\phi \\ -i\tilde{A}'_\mu dx^\mu &= -i\tilde{A}_\mu dx^\mu + i\partial_\mu \phi dx^\mu \\ \tilde{A}'_\mu &= \tilde{A}_\mu - \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

che è quello che cercavamo.

4.3 Caso $SU(2)$: interazione nucleare debole

Consideriamo adesso il gruppo di simmetria $SU(2)$. $SU(2)$ è il gruppo delle matrici unitarie speciali 2×2 :

$$SU(2) = \{U \in GL_2(\mathbb{C}) \mid UU^\dagger = U^\dagger U = I, \det U = 1\}, \quad (78)$$

dove U^\dagger rappresenta l'hermitiano o complesso coniugato di U . $SU(2)$ è isomorfo al gruppo dei quaternioni a valore assoluto uguale 1, perciò è anche diffeomorfo a \mathbb{S}^3 . $SU(2)$ è un gruppo di Lie 3-dimensionale e la sua algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ è formata dalle matrici anti-hermitiane a traccia nulla. È possibile mostrare che i generatori dell'algebra sono matrici

della forma $T_k = \sigma_k/2i$, dove σ_k sono le matrici di Pauli (per esempio vedere [Buo24]). In particolare $SU(2)$ non è abeliano, e i commutatori agiscono come $[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$, dove ε_{ijk} è il tensore di levi-civita.

Come prima, consideriamo un fibrato principale $(P, M, \pi, SU(2))$, una sezione $\sigma : M \rightarrow P$ e una connessione $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{su}(2))$. Ora consideriamo un potenziale di gauge $A = \sigma^*\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$. Dato che A ha valori nell'algebra, possiamo scriverlo in funzione della base dell'algebra di Lie:

$$A = A_\mu^a(x)T_a dx^\mu. \quad (79)$$

Dove $A_\mu^a \in \Omega^1(M)$. L'indice a può assumere i valori $\{1, 2, 3\}$, come la dimensione di $\mathfrak{su}(2)$. L'indice μ invece varia da 1 a $\dim M$. Notiamo che possiamo scomporre questo potenziale in tre componenti: $\vec{A} = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$. Prendiamo una trasformazione di gauge, definita come: $g : M \rightarrow SU(2)$. Usando l'equazione (76), dato che $SU(2)$ è un gruppo di matrici, il potenziale si trasforma come

$$A'^a T_a = g^{-1}(A^a T_a)g + (g^{-1}dg)^a T_a. \quad (80)$$

dove $A^a = A_\mu^a dx^\mu$. Le combinazioni lineari di \vec{A} , insieme alla rottura spontanea di simmetria di Higgs, sono i bosoni mediatori dell'interazione debole: W^\pm e Z .

Conclusioni

Concludiamo questo lavoro di tesi facendo alcune considerazioni. Siamo riusciti a presentare i concetti alla base della geometria differenziale, quali le varietà differenziabili, gli spazi e campi vettoriali e covettoriali, sino a toccare i gruppi di Lie e le algebre di Lie viste da un punto di vista geometrico. Abbiamo dato cenni sui vari tipi di fibrati che esistono senza entrare nei dettagli. Abbiamo considerato esempi di importanza fisica come gli spazi di matrici $GL_n(\mathbb{R})$ e il suo sottogruppo $SO(n, \mathbb{R})$.

La forma di Maurer-Cartan è emersa naturalmente dai gruppi di Lie come una 1-forma che trasporta l'informazione sulla struttura del gruppo stesso. L'abbiamo anche ritrovata nella trasformazione di gauge di un campo di gauge. In realtà, la forma di Maurer-Cartan trova spazio anche in altri contesti importanti che non siamo riusciti a trattare, come per esempio nello studio delle curvature con l'equazione di Maurer-Cartan, nel metodo dei sistemi di riferimento mobili di Cartan e nella derivata di Lie.

Abbiamo descritto le teorie di gauge da un punto di vista geometrico, dove il fibrato principale è un oggetto fondamentale dove queste teorie vivono. È emerso che le trasformazioni di gauge non sono altro che un cambio di sezione, grazie al quale cambia il modo in cui un potenziale viene rappresentato, ma non il potenziale "vero", la connessione, che vive a sé, nel fibrato principale, indipendente dalle coordinate scelte.

Riferimenti bibliografici

- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifold*. 2^a ed. 2012.
- [Tu11] Loring W. Tu. *An introduction to Manifolds*. 2^a ed. 2011.
- [Fig06] José Figueroa-O'Farrill. *Appunti dal corso "Gauge Theory" tenuto all'University of Edinburgh*. 2006. URL: <https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/GT/>.
- [Nov25] Gabriele Novelli. "The geometry of the Yang-Mills theory". Tesi di laurea magistrale. Università di Bologna, 2025. URL: <https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/35883/>.
- [Nic] Andrea Nicoletti. *"Appunti - Topics in Mathematical Methods and Models in Theoretical Physics"*. Corso tenuto dal prof. Roberto Balbinot presso il dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università degli studi di Bologna.
- [Buo24] Andrea Buonsanti. "Teoria delle rappresentazioni - il caso $SU(2)$ ". Tesi di laurea triennale. Università di Bologna, 2024. URL: <https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/34098/>.
- [McK25] Benjamin McKay. *An introduction to Cartan geometries*. 2025. arXiv: [2302.14457](https://arxiv.org/abs/2302.14457) [math.DG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2302.14457>.
- [Lat] Emanuele Latini. *Appunti del corso "Riemannian geometry" tenuto presso il dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Bologna*.
- [Abb24] Alessandro Abbasciano. "Introduzione alle Geometrie di Klein". Tesi di laurea triennale. Università di Bologna, 2024.

Lecture storiche

- [Gro92] David Gross. "Gauge Theory - Past, Present, and Future?" In: *Chinese Journal of Physics* 30.7 (1992). URL: <https://web.archive.org/web/20090316111749/http://psroc.phys.ntu.edu.tw/cjp/v30/955.pdf>.
- [JO01] J. D. Jackson e L. B. Okun. "Historical roots of gauge invariance". In: *Reviews of Modern Physics* 73 (3 set. 2001), pp. 663–680. DOI: [10.1103/RevModPhys.73.663](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.663). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663>.