ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

TEORIE DI GAUGE NON-ABELIANE

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Marco Donati

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Prefazione

La presente tesi nasce con lo scopo di fornire un'introduzione tecnica alle cosiddette teorie di gauge non-abeliane, comunemente dette anche "teorie di Yang-Mills" dal nome dei due fisici teorici che le hanno introdotte nel 1954.
Sotto questo nome rientrano le trattazioni matematiche alla base di due delle quattro interazioni fondamentali presenti in natura: *l'interazione debole* e *l'interazione nucleare forte*. Ambedue sono basate sul concetto delle *trasformazioni di gauge*, una particolare classe di trasformazioni interne (che non riguardano perciò le coordinate spaziotemporali), che già da fine del XIX secolo hanno rivestito un ruolo fondamentale nell'elettromagnetismo classico permettendo di lasciare invariata la fisica del sistema agendo unicamente sui potenziali.

In particolare, all'interno di questo elaborato è stato inizialmente presentato il framework teorico necessario per lo sviluppo di queste teorie: *la Relatività Ristretta e la sua formulazione quadrivettoriale*. Specificatamente, è stata data enfasi alle trasformazioni di Lorentz e alla definizione degli oggetti che risultano essere scalari, quadrivettori o quadritensori secondo applicazione delle stesse.
Successivamente sono stati introdotti alcuni fondamenti di *teoria relativistica dei campi* ricavando dapprima le equazioni di Eulero-Lagrange tramite principi variazionali ed illustrando poi i principali campi fisici di interesse: *i campi scalari, reali e complessi, ed i campi vettoriali.*
Proseguendo all'interno della trattazione, è stato dedicato spazio ad un'analisi dettagliata delle *trasformazioni di gauge* ed è stato sviluppato un primo esempio di teoria basata su di esse: *l'elettromagnetismo classico*, il quale presenta una simmetria interna rispetto al gruppo abeliano $U(1)$. Particolare attenzione è stata posta sul passaggio matematico e concettuale fondamentale per avere teorie interagenti: forzare una *simmetria locale* partendo da una *globale*.
Infine, quanto visto nel caso elettromagnetico è stato generalizzato a teorie con simmetrie rispetto a gruppi non-abeliani, quali $SU(N)$. Ciò ha portato allo sviluppo delle teorie di Yang-Mills, con relativa lagrangiana e conseguenti equazioni del moto *non lineari* che, in ultima analisi, hanno permesso di descrivere l'autointerazione dei bosoni di gauge.

Capitolo 1

Introduzione alla Relatività ristretta

1.1 Contesto storico

L'analisi scientifica della Natura e dei fenomeni ad essa associati, compito primario di un fisico, richiede obbligatoriamente la formulazione di una teoria che rappresenti il miglior ambiente di lavoro possibile per correlare i fenomeni di nostro interesse a determinati enti matematici che li possano rappresentare.

Storicamente parlando, la *Relatività Galileiana* ha rappresentato il primo, grandioso tentativo in questo senso e, fino ai primi anni del XX secolo, essa è servita da substrato teorico per le principali teorie fisiche atte a descrivere i fenomeni allora conosciuti. Questa teoria si basa sul *Principio di Inerzia*, formulato da Galileo Galilei nel 1632 all'interno del suo celebre *Dialogo sui Massimi Sistemi*, il quale afferma che un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo unifome fintanto che non interviene una forza a variarne il moto. Inoltre, la teoria afferma che il "Tempo" è assoluto e che, in generale, le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Per poter passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro furono sviluppate le cosiddette *Trasformazioni di Galileo*, ovverosia un sistema di equazioni che renda conto delle principali accortezze tecniche da tenere in considerazione quando si vuole descrivere un fenomeno fisico secondo diversi punti di vista. Nel caso di due sistemi di riferimento inerziali S ed S' in moto relativo con velocità costante v lungo l'asse delle x (condizione detta generalmente di *Boost lungo l'asse x*), esse hanno la semplicissima forma:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1.1}$$

Dove, per l'appunto:

- (x, y, z, t) sono le coordinate spazio-temporali nel sistema inerziale S
- (x', y', z', t') sono le coordinate nel sistema inerziale S'
- v è la velocità relativa costante tra i due sistemi lungo l'asse x
- Il tempo è assoluto: $t' = t$

Le principali difficoltà di questa teoria si riscontrarono quando il fisico scozzese James Clerk Maxwell portò a termine il primo, importantissimo, studio dell'elettromagnetismo classico. Difatti, un'attenta analisi delle cosiddette *Equazioni di Maxwell* mostra la presenza di una velocità ben definita di propagazione delle onde elettromagnetiche e, grazie poi agli studi sperimentali di Hertz del 1887, si vide essere proprio pari alla velocità della luce nel vuoto, c.

Ciò, oltre a dimostrare come la luce sia l'onda del campo elettromagnetico, ha portato ad un notevole dilemma nel panorama scientifico di fine del XIX secolo: tale velocità è misurata rispetto ad un determinato sistema di riferimento privilegiato oppure, in maniera del tutto innovativa, risulta essere la stessa in ogni sistema di riferimento? Inizialmente fu battuta la prima tra le due strade citate ma, l'ipotesi di esistenza di una particolare sostanza detta *Etere Luminifero* che permeerebbe l'universo intero, non portò a nessun risultato significativo e fu definitivamente accantonata quando si dimostrò l'inesistenza del "vento d'etere", ovverosia l'effetto dato dal flusso relativo di Etere rispetto al pianeta Terra che avrebbe dovuto muoversi in esso, grazie al celeberrimo esperimento di Michelson e Morley di cui si rimanda ad una trattazione completa in adeguati libri di testo.[1]

Proprio in questo contesto scientifico di inizio del secolo scorso, un giovane e brillante fisico tedesco di nome Albert Einstein, formulò nel 1905 una teoria fisica di primaria importanza che va sotto il nome di *Relatività Speciale* proprio partendo dal secondo punto di vista precedentemente citato, e da lui introdotto, per affrontare il problema. Egli riformulò la meccanica partendo da due principi fondamentali e, la trattazione che ne conseguì, ci fornirà l'ambiente di lavoro teorico a cui faremo riferimento d'ora in poi.

1.2 I principi della Relatività Speciale

La teoria della Relatività Speciale si fonda su due principi, due pilastri fondamentali, a cui è sempre necessario fare riferimento:

- Le equazioni della meccanica e dell'elettromagnetismo hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto, c, è costante in ogni sistema di riferimento inerziale.

Se il primo punto, almeno per quanto riguarda la meccanica, corrisponde al già citato principio di Relatività Galileiana, è proprio il secondo punto invece a segnare una discontinuità significativa con la fisica fino ad allora conosciuta.

Per approcciarci a questo nuovo ambiente di lavoro è necessario introdurre un nuovo formalismo vettoriale, o più genericamente parlando, tensoriale, facendo riferimento ad un nuovo tipo di trasformazioni che permettano di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro: *le trasformazioni di Lorentz*. Punto per punto, procediamo a fornire una veloce trattazione di quanto ci sarà utile per i nostri scopi.

1.3 Trasformazioni di Lorentz e formalismo tensoriale

Nell'ambito della Teoria della Relatività Speciale, utilizziamo come astrazione matematica atta a rappresentare la realtà fisica il cosiddetto *Spaziotempo di Minkowski* $\mathbb{M}$. Esso consiste in uno spazio pseudoeuclideo quadridimensionale dove operiamo tramite oggetti matematici detti *quadrivettori* che seguono un'algebra tensoriale che sostituisce quella vettoriale utilizzata nello spazio tridimensionale euclideo $\mathbb{R}^3$, naturale ambiente di sviluppo della meccanica classica. Nostro principale interesse è quello di definire delle trasformazioni che, risultando compatibili con i due principi cardine della relatività speciale, leghino le coordinate spaziotemporali di due sistemi di riferimento inerziali S ed S'.

1.3.1 Trasformazioni di Lorentz

Introdotte nel 1904 dal fisico olandese Hendrik Lorentz e studiate contestualmente ed approfonditamente nel 1905 dal grande matematico francese Henrì Poincaré, le *trasformazioni di Lorentz* rappresentano le equazioni matematiche fondamentali per passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro in un contesto relativistico. Rappresentano, in questo senso, esattamente ciò che furono le *trasformazioni di Galileo* per la meccanica newtoniana, con la importantissima differenza che anche le equazioni di Maxwell che governano l'elettromagnetismo risultano invarianti rispetto alle nuove trasformazioni. Volendo determinarne la forma, possiamo fare alcune considerazioni:

- Le trasformazioni cercate devono essere *lineari*, poiché il moto relativo tra sistemi di riferimento è rettilineo uniforme. Definito un *evento* come un punto della varietà di Minkowski e dunque un vettore a quattro componenti del tipo:

  $$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$$

  possiamo scrivere la nostra generica trasformazione lineare come:

  $$x^\mu \xrightarrow{L} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.2}$$

dove $\Lambda^\mu{}_\nu$ rappresenta una matrice 4 x 4 e, come sempre d'ora in avanti, si sottintenderà l'utilizzo della *convenzione di Einstein* per la somma sugli indici ripetuti.

- Le nostre trasformazioni cercate, ovviamente, devono essere consistenti con i postulati della relatività di Einstein ed, in particolare, devono tenere conto della costanza della velocità della luce nel vuoto, cosa che le trasformazioni di Galileo non facevano. A questo proposito, introdotta una *struttura riemanniana* nello spazio-tempo tramite la seguente forma quadratica differenziale detta *metrica* di $\mathbb{M}$:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.3}$$

dove $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ e $\eta_{\mu\nu}$ è detto *tensore metrico* che, in forma matriciale, si può scrivere come:

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

otteniamo così un intervallo infinitesimo ds tra due eventi dello spazio-tempo. Per via dei postulati, esso risulta invariante per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali ed è pertanto un primissimo esempio di *invariante relativistico.*
L'utilità di questa formulazione con il tensore metrico è presto detta; possiamo ora infatti definire una *trasformazione di Lorentz* come una trasformazione lineare i cui elementi soddisfano la relazione di invarianza:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

ovverosia un'equazione che otteniamo verificando nel seguente modo come ds^2 risulti invariante per trasformazioni di questa natura:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \tag{1.6}$$

L'importantissima condizione (1.5) può essere riespressa in termini matriciali come:

$$\Lambda^T \eta \; \Lambda = \eta \tag{1.7}$$

dove Λ rappresenta la matrice 4 x 4 delle trasformazioni di Lorentz. Per via della condizione di simmetria della matrice η, dei 16 elementi contenuti in Λ solamente $16 - 10 = 6$ sono effettivamente i parametri liberi della nostra matrice di trasformazione. Questo risultato non ci soprende, è infatti perfettamente in linea con quanto potevamo fisicamente attenderci tenendo a mente che i parametri liberi saranno relativi alle tre direzioni del moto ed ai tre angoli di rotazione.

Fatte le dovute premesse, in virtù delle proprietà di trasformazione secondo Lorentz, siamo quindi interessati a classificare con maggior dettaglio gli strumenti matematici che rappresentano le principali grandezze fisiche di nostro interesse: i *tensori.*

1.3.2 Algebra e formalismo tensoriale

Consideriamo lo spaziotempo di Minkowski $\mathbb{M}$ ed indichiamo ciascuno dei suoi punti, o eventi, come una quaterna di coordinate (x^0, x^1, x^2, x^3).

Partiamo definendo uno *scalare*, o *tensore di rango* $(0,0)$, come un oggetto $\phi(x)$ che, sotto trasformazione di Lorentz delle coordinate $x^\mu \xrightarrow{L} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, viene mandato in sé stesso:

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{1.8}$$

Successivamente, definiamo un *quadrivettore controvariante* $A^\mu(x)$, o *tensore di rango* $(1,0)$, come una quadrupla ordinata di valori $(A^1(x), A^2(x), A^3(x), A^4(x))$ tali che, per via di una trasformazione di Lorentz delle coordinate, il quadrivettore si trasforma in questo modo:

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{1.9}$$

Un possibile esempio di oggetto matematico di questo tipo è rappresentato dalla quadri-posizione nello spaziotempo di Minkowski x^μ o dal quadrimomento $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$.

Analogamente, definiamo un *quadrivettore covariante*, o *tensore di rango* $(0,1)$, come una quaterna ordinata di valori $(A_1(x), A_2(x), A_3(x), A_4(x))$ tali che si trasformino secondo:

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) = [\Lambda^{-1}]^T{}_\mu{}^\nu A_\nu(x) = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \tag{1.10}$$

dove abbiamo utilizzato la notazione simbolica per cui $\Lambda_\mu{}^\nu = [\Lambda^{-1}]^T{}_\mu{}^\nu$: in altre parole, i quadrivettori covarianti si trasformano con la trasposta della matrice inversa di Lorentz. Un esempio di quadrivettori di questa natura è rappresentato invece dal quadrigradiente $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$.

In particolare, si noti come in entrambi i casi di quadrivettori si sia adottata la convenzione di Einstein, sottintendendo quindi una sommatoria sugli indici ripetuti, e si veda come le due tipologie di quadrivettori si distinguano immediatamente dal punto di vista della notazione poiché, quelli controvarianti, presentano un indice posto in alto, mentre gli altri un indice posto in basso.

Queste prime considerazioni sui quadrivettori possono essere immediatamente estese ad un generico tensore di rango (m,n) in virtù del fatto che considereremo una matrice di Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ per ogni indice controvariante ed una matrice inversa $\Lambda_\mu{}^\nu$ per ogni indice covariante. Pertanto, il nostro tensore andrà incontro alla seguente legge di trasformazione per Lorentz:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}{}_{\alpha_m} \Lambda_{\nu_1}{}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_n}{}^{\beta_n} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) \tag{1.11}$$

Introdotti i tensori, definiamo *simmetrici* rispetto allo scambio di due indici quelli tali per cui: $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$, mentre definiamo *antisimmetrici* quelli tali per cui $L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$

e procediamo ad elencare alcune delle principali operazioni dell'algebra tensoriale per poter lavorare correttamente con i tensori:

1. **Combinazioni lineari**
   Se si lavora su tensori dello stesso rango, è possibile effettuare una combinazione lineare di due o più di questi ed ottenere un tensore dello stesso rango di quelli di partenza:

$$(m, n) \oplus (m, n) = (m, n)$$

   Esempio: $aA^{\mu}{}_{\nu} + bB^{\mu}{}_{\nu} = C^{\mu}{}_{\nu}$

2. **Prodotto diretto**
   Presi due tensori di rango qualsiasi, possiamo effettuarne il prodotto diretto che restituisce un tensore con un numero di indici controvarianti e covarianti pari alla somma del numero dei singoli, corrispettivi, indici dei due fattori:

$$(m, n) \otimes (m', n') = (m + m', n + n')$$

   Esempio: $A^{\mu}{}_{\nu} B^{\rho} = C^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho}$

3. **Contrazione**
   Dato un tensore, contrarre uno dei suoi indici alti con uno dei suoi indici bassi significa porli uguali e dunque, tenendo conto della convenzione di Einstein sulla sommatoria degli indici ripetuti, effettuare un'operazione di riduzione del rango del tensore stesso:

$$(m, n) \longrightarrow (m - 1, n - 1) \tag{1.12}$$

   Esempio: $T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\sigma} \longrightarrow T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\rho\sigma} = S^{\rho\sigma}$, dove sono stati contratti gli indici μ e ν.

4. **Differenziazione**
   Dato un tensore di rango (m, n) e derivandolo rispetto al quadrivettore controvariante x^{μ} (utilizzando quindi il quadrigradiente $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ che si comporta da quadrivettore covariante), otteniamo come risultato un nuovo tensore che ha rango covariante incrementato di un'unità:

$$(m, n) \longrightarrow (m, n + 1) \tag{1.13}$$

   Esempio: $T^{\mu\nu} \longrightarrow \partial_{\alpha} T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$

Capitolo 2

Teoria relativistica dei campi

In fisica classica sussiste un'importante e sostanziale distinzione tra il più familiare concetto di *particella* e quello di *campo*, ovverosia una funzione per la quale, ad ogni punto della varietà di riferimento, è associata una quantità di una determinata grandezza fisica. A seconda della natura della funzione, il campo può essere scalare, vettoriale, spinoriale o tensoriale.

Le teorie relativistiche di campo sono modelli teorici utilizzati nella fisica moderna dove, per ogni particella, vi si associa un campo. L'idea alla base di questa modellizzazione consiste nel vedere un campo come un'infinita collezione di oscillatori armonici che, se quantizzati, danno vita ad una teoria di campo quantizzata. In particolare, il *vuoto* corrisponde allo stato in cui tutti gli oscillatori si trovano nel loro stato fondamentale, mentre eventuali eccitazioni quantizzate degli oscillatori stessi corrispondono alla manifestazione di particelle.

In particolare:

- Le particelle a spin nullo (quali il bosone di Higgs o il pione neutro π^0) sono descritte da campi scalari.
- Le particelle a spin $1/2$ (ovverosia quarks e leptoni, le particelle che compongono la materia) sono descritte da campi spinoriali.
- Le particelle di spin uno (quali il fotone, i bosoni $W^{\pm}$, Z^0 ed i gluoni, che rispettivamente mediano l'interazione elettromagnetica, l'interazione nucleare debole e quella forte) sono infine rappresentate da campi vettoriali.

Scopo della nostra trattazione sarà quello di fornire le basi per la realizzazione di una teoria di campo relativistica e, per fare ciò, utilizzeremo una descrizione lagrangiana dei campi mediante formalismo covariante.

2.1 Lagrangiana di un campo ed equazioni di Eulero-Lagrange

Il punto di partenza nella costruzione di una teoria di campo è il *funzionale d'azione* S, sul quale andremo ad applicare dei principi variazionali per ottenere le equazioni del moto dei campi.

Sia $\phi(x^\mu)$ un generico campo, in generale un'azione sullo spaziotempo $\mathbb{M}$ ha la forma:

$$S \ = \int dx^0 \ L = \int dx^0 \int d^3x \ \mathcal{L} = \int d^4x \ \mathcal{L} \tag{2.1}$$

dove L è la vera e propria lagrangiana del campo ϕ, mentre $\mathcal{L}$ rappresenta la *densità di Lagrangiana* che, d'ora in avanti, chiaremeremo semplicemente lagrangiana con un piccolo abuso di notazione.

A priori, la dipendenza della lagrangiana può essere del tutto generale:

$$\mathcal{L} \ (x^\mu, \ \phi(x^\mu), \ \partial_\mu\phi(x^\mu), \ \partial_\mu\partial_\nu\phi(x^\mu), \ \partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma...\phi(x^\mu)) \tag{2.2}$$

ma le azioni di nostro interesse debbono avere la simmetria per il *gruppo di Poincaré*, ovverosia il gruppo delle isometrie dello spaziotempo di Minkowski quali le trasformazioni di Lorentz e le traslazioni, le cui rappresentazioni infinito dimensionali sono le particelle elementari. A tal fine, è necessario anzitutto che la lagrangiana non sia esplicitamente dipendente dalle coordinate x^μ, poichè tale dipendenza non renderebbe le teorie invarianti sotto traslazione.

Ulteriormente, decidiamo di trascurare i termini alto-derivativi poichè, a livello di equazioni del moto, una derivata seconda della lagrangiana fornirebbe termini del terz'ordine che porterebbero a soluzioni dalla difficile, e problematica, interpretazione fisica. Così facendo, possiamo concludere che la lagrangiana di nostro interesse avrà delle dipendenze del tipo:

$$\mathcal{L} \ (\phi(x^\mu), \ \partial_\mu\phi(x^\mu)) \tag{2.3}$$

dove la lagrangiana stessa dovrà risultare essere anche uno scalare di Lorentz affinchè la teoria di campo sia Lorentz invariante, come precedentemente richiesto.

Terminato questo preambolo circa le dipendenze della funzione lagrangiana dal campo e dalle sue derivate, entriamo nel vivo della nostra dissertazione ricavando le equazioni del moto attraverso dei principi variazionali.

Il *principio di Hamilton*, detto anche *principio di minima azione*, afferma che la configurazione reale del campo è quella per cui una variazione infinitesima di esso, $\delta\phi$, con condizione:

$$\delta\phi\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.4}$$

ove $\partial\Omega$ rappresenta il contorno di una varietà quadridimensionale, è tale da essere un'estremale per il funzionale d'azione S. Espressamente, tale condizione richiede dunque che:

$$\delta S = \delta\left(\int_\Omega d^4x\ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right) = \int_\Omega d^4x\ \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\ = 0 \tag{2.5}$$

A questo punto, inoltrandoci nei calcoli, esprimiamo le dipendenze della lagrangiana dal campo e dalla derivata prima di quest'ultimo:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\ (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)) \tag{2.6}$$

dove, poichè le x^μ non variano dato che varia unicamente il campo, si può utilizzare il fatto che:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi \tag{2.7}$$

Conseguentemente, l'equazione (2.6) diventa:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\ (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)) \tag{2.8}$$

e sfruttando la regola di Leibniz, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] \\
&= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)\right] \\
&= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] + \int_\Omega d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi\right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Osservando l'ultimo integrale, notiamo immediatamente che si tratta di un integrale di volume di una quadridivergenza e, pertanto, possiamo utilizzare il teorema di Gauss ricordando inoltre che, data la condizione al contorno sulla variazione del campo espressa nell'equazione (2.4), il termine appena ottenuto si annulla:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] + \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi \\
&= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Affinchè sia vera l'ultima eguaglianza a 0, ovverosia in modo tale che sia correttamente applicato il principio di minima azione, è necessario che l'argomento dell'integranda sia identicamente nullo. Così facendo, otteniamo le cercate *Equazioni di Eulero-Lagrange* del campo ϕ:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{2.11}$$

A margine di questo risultato, è importantissimo sottolineare che la lagrangiana deve essere *reale*, ovvero composta equivalentemente da campi complessi in combinazione tale da renderla reale o direttamente composta da campi reali, per fare in modo che il numero delle equazioni di Eulero-Lagrange sia esattamente pari al numero dei campi in gioco. Se così non fosse, infatti, avremmo due equazioni del moto per ciascun campo, una per la parte reale ed una per la parte immaginaria, rendendo così il problema sovradeterminato.

Giunti alle equazioni di evoluzione dei campi, è conveniente per la nostra trattazione iniziare a presentare in dettaglio le caratteristiche principali degli enti con cui avremo a che fare: campi scalari e vettoriali.

2.2 Campi scalari

Quando parliamo di campi scalari, in generale, ci riferiamo a campi che rimangono invariati sotto trasformazioni di Lorentz delle coordinate:

$$\phi(x^\mu) \xrightarrow[x^\mu \to x'^\mu]{L} \phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) \tag{2.12}$$

A seconda della natura del campo ϕ, possiamo avere campi scalari di due tipologie che esamineremo l'uno dopo l'altro: campi scalari reali e campi scalari complessi.

2.2.1 Campi scalari reali

L'equazione di evoluzione per un campo scalare reale ϕ è data da una Lagrangiana del tipo:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{2.13}$$

dove il primo termine è detto *termine cinetico*, mentre il secondo rappresenta un potenziale del campo.

L'equazione di evoluzione del campo ϕ si ottiene dall'equazione di Eulero-Lagrange (2.11) associata alla lagrangiana espressa nell'eq.(2.13).

Procediamo sviluppando separatamente i due termini alle derivate parziali, per quanto riguarda il primo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left(\frac{1}{2}\partial_\nu \phi\, \partial^\nu \phi\right) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial(\partial_\alpha \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\partial_\beta \phi + \partial_\alpha \phi\,\frac{\partial(\partial_\beta \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\alpha\,\partial_\beta \phi + \partial_\alpha \phi\,\delta^\mu_\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\beta}\partial_\beta \phi + \eta^{\alpha\mu}\partial_\alpha \phi\right) = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi = \partial^\mu \phi
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

e quindi:

$$
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi = \Box \phi \tag{2.15}
$$

dove $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ è detto operatore di D'Alembert.
Passando al secondo termine, più genericamente questo si può scrivere come:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -V'(\phi) \tag{2.16}
$$

A questo punto, unendo i risultati di (2.15) e (2.16) all'interno dell'equazione (2.11), otteniamo l'equazione del moto per il campo scalare reale ϕ :

$$
\Box \phi + V'(\phi) = 0 \tag{2.17}
$$

Caso particolare di questa equazione è quello della celebre *Lagrangiana di Klein-Gordon*:

$$
\mathcal{L}_{KG}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 \tag{2.18}
$$

dove $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ ed il potenziale considerato va sotto il nome di *termine di massa*. L'equazione del moto di questo campo, che si ottiene semplicemente sviluppando l'eq.(2.17) con il potenziale appena indicato, risulta essere:

$$
(\Box + \mu^2)\phi = 0 \tag{2.19}
$$

che va sotto il nome di *Equazione di Klein-Gordon*. Come precedentemente accennato, una teoria di questo tipo è utilizzata per descrivere particelle di spin 0 (campi scalari) e massa m (dal termine quadratico di massa). Il perchè di questa conclusione è possibile comprenderlo andando a ricercare possibili soluzioni ad onde piane per l'equazione (2.19) e dunque della forma $\phi \sim e^{-ik_\alpha x^\alpha}$ dove $k_\mu = (k_0, \vec{k}) = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ indica il quadrivettore d'onda.

Difatti, inserendo tale forma della funzione d'onda all'interno dell'equazione di Klein - Gordon (2.19) e semplificando gli esponenziali otteniamo:

$$
-k^\mu k_\mu + \mu^2 = 0 \tag{2.20}
$$

Questa relazione, che ci permette anzitutto di osservare come k^μ sia un quadrivettore di tipo tempo per via della norma strettamente positiva, si può ulteriormente sviluppare ottenendo:

$$\begin{aligned}-(\frac{\omega}{c})^2 + |\vec{k}|^2 + \mu^2 &= 0 \\ (\frac{\omega}{c})^2 &= |\vec{k}|^2 + \mu^2\end{aligned} \tag{2.21}$$

la quale rappresenta chiaramente una relazione di dispersione. Inoltre, esplicitando μ^2, moltiplicando tutto per $\hbar^2$ e ricordando le relazioni di Planck-Einstein, otteniamo:

$$\begin{aligned}(\frac{\hbar\omega}{c})^2 &= |\hbar\vec{k}|^2 + m^2c^2 \\ (\frac{E}{c})^2 &= |\vec{p}|^2 + m^2c^2\end{aligned} \tag{2.22}$$

che risulta evidentemente la ben nota espressione dell'energia di una particella massiva e a spin nullo.

Infine, notiamo che c'è linearità nell'equazione del moto fintanto che ho termini, al massimo, quadratici in $V(\phi)$. Eventuali termini successivi, di terzo e quarto grado, descrivono l'autointerazione delle particelle mentre termini superiori al quarto grado compromettono la rinormalizzabilità della teoria stessa.

2.2.2 Campi scalari complessi

Passiamo ora a considerare un campo scalare complesso, il cui utilizzo sarà di grande importanza quando si tratteranno particelle massive a spin 0 e cariche elettricamente, come vedremo successivamente.

Un primo modo per procedere nella trattazione consiste nello scrivere il campo complesso come: $\phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(x^\mu) + ib(x^\mu))$ dove $a(x^\mu)$ e $b(x^\mu)$ sono funzioni reali. Per quanto formalmente corretto, però, a questo metodo ne preferiremo un secondo dalle rilevanti conseguenze fisiche: consideriamo la lagrangiana in funzione del campo $\phi(x^\mu)$ e del suo complesso coniugato $\phi^*(x^\mu)$.

In analogia con il caso del campo reale, possiamo definire la *lagrangiana di Klein-Gordon per il campo complesso*, ricordando sempre però che, per quanto detto precedentemente, la lagrangiana deve essere sempre una funzione reale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG} &= \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu a)(\partial^\mu a) - \mu^2 a^2\right] + \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu b)(\partial^\mu b) - \mu^2 b^2\right] \\ &= (\partial^\mu \phi)^*(\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi \\ &= |\partial^\mu \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2\end{aligned} \tag{2.23}$$

Procedendo analogamente a quanto fatto nel caso reale, ricaviamo le due equazioni di Eulero-Lagrange, rispettivamente per il campo $\phi(x^\mu)$ e per il suo complesso coniugato $\phi^*(x^\mu)$:

$$(\Box + \mu^2)\phi = 0 \tag{2.24}$$

$$(\Box + \mu^2)\phi^* = 0 \tag{2.25}$$

Queste due equazioni del moto, declinate qui nel caso particolare del potenziale $V(\phi^*\phi) = \mu^2\phi^*\phi$ caratteristico della lagrangiana di Klein-Gordon, descrivono quindi due particelle diverse ma aventi la stessa massa (codificata nel fattore μ^2). Questa formulazione, difatti, è utilizzata per trattare una particella massiva a spin nullo e la sua corrispondente *antiparticella*.

Il caso complesso risulta infatti essere ulteriormente interessante in quanto vi è una simmetria aggiuntiva che tratteremo molto più nel dettaglio nel prosieguo. Questa simmetria è tale rispetto alle trasformazioni della fase dei campi, ovvero:

$$\begin{cases} \phi(x^\mu) \longrightarrow \phi'(x^\mu) = e^{i\alpha}\phi(x^\mu) \\ \phi^*(x^\mu) \longrightarrow \phi^{*\prime}(x^\mu) = e^{-i\alpha}\phi^*(x^\mu) \end{cases} \tag{2.26}$$

dove α è un parametro costante ed indipendente dalle coordinate x^μ. Queste trasformazioni vanno a formare un gruppo chiamato $U(1)$ e sono dette *trasformazioni di simmetria interne* poiché non agiscono direttamente sulle coordinate spaziotemporali x^μ.

Possiamo immediatamente vedere i frutti di questa considerazione studiando il quadrivettore $j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$, caso particolare di corrente di Noether per il nostro sistema, di cui prendiamo la divergenza:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \left[i\left(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi\right)\right] \\ &= i\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi\right] \\ &= i\left[\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi\right] \\ &= i\left[\phi(-\mu^2\phi^*) - \phi^*(-\mu^2\phi)\right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Questo risultato ci garantisce che la quantità $Q = \int d^3x\ j^0 = i\int d^3x\ (\phi\dot{\phi}^* - \phi^*\dot{\phi})$, ovverosia la carica associata alla corrente, risulti conservata poiché $\frac{dQ}{dt} = 0$. Ecco quindi giustificato il motivo per cui i campi scalari complessi risultano adeguati per descrivere particelle cariche e le loro antiparticelle, quali i pioni π^+ e π^-.

2.3 Campi vettoriali

Passiamo ora a parlare dei campi vettoriali, essenziali per la trattazione analitica delle principali interazioni fisiche ad eccezione di quella gravitazionale. In particolare, nel nostro lavoro, ci concentreremo prevalentemente sull'interazione elettromagnetica di cui siamo interessati a determinarne la lagrangiana del campo e, conseguentemente, le equazioni del moto da essa derivanti: le famosissime *equazioni di Maxwell.*

2.3.1 Lagrangiana del campo elettromagnetico

Al fine di individuare la forma della nostra lagrangiana, facciamo alcune considerazioni:

- Richiediamo anzitutto che essa sia *invariante per trasformazioni di Poincaré*, come già precedentemente richiesto ad inizio della nostra trattazione sulle teorie di campo. Per realizzare ciò è necessario che la lagrangiana non dipenda direttamente dalle coordinate spaziotemporali x^μ e sia un invariante relativistico.

- Successivamente, richiediamo che la teoria sia *invariante per trasformazioni di gauge*, fatto noto dallo studio dell'elettromagnetismo classico. A tal scopo costruiamo la nostra funzione lagrangiana a partire dal tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$, che racchiude in sé le componenti del campo elettrico $\vec{E}$ e di quello magnetico $\vec{B}$ sotto forma di un unico tensore antisimmetrico, nella forma:

$$\begin{cases} F^{0i} = -E_i \\ F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k \end{cases} \tag{2.28}$$

  dove ϵ^{ijk} è detto "simbolo di Levi-Civita" e vale $+1$ per permutazioni pari degli indici, -1 per permutazioni dispari e 0 nel caso di due o più indici uguali.
  Per sua stessa natura, il tensore di Maxwell risulta gauge invariante: tenendo conto che esso si può scrivere come $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, dove $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ rappresenta il quadripotenziale ovverosia un quadrivettore con componenti date dal potenziale scalare e dal potenziale vettore, si nota immediatamente come una trasformazione di gauge del tipo $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ con χ generica funzione scalare, lasci inalterata la forma del tensore di Maxwell:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\mu A^\mu + \partial^\nu \partial^\nu \chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

- Infine, di fondamentale importanza, studiamo più nel dettaglio cosa implica il fatto che la lagrangiana sia un *invariante relativistico.* Combinando questa condizione alla precedente, esprimiamo la nostra funzione nei termini degli scalari di Lorentz che si ottengono dal tensore di Maxwell, ovverosia $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu}$. In realtà, unicamente il primo dei due scalari risulta utile al nostro scopo poiché, con un rapido calcolo, si può mostrare che il secondo invariante è esprimibile come una quadridivergenza e dunque non influisce sulle equazioni del moto, difatti:

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 2\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu \partial_\alpha A_\beta) \tag{2.30}$$

Fatte le dovute premesse, possiamo quindi introdurre la *lagrangiana del campo elettromagnetico in assenza di sorgenti* come:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.31}$$

dove il fattore numerico associato dipende dal sistema di unità di misura utilizzato e dunque, nel nostro caso, dal sistema di Gauss.

Possiamo dunque procedere con il calcolo delle equazioni di Eulero-Lagrange associate al nostro campo, le quali avranno la la seguente forma:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\nu} = 0 \tag{2.32}$$

Sostituendo pertanto l'espressione della lagrangiana elettromagnetica (2.31) nelle equazioni (2.32) vediamo immediatamente come il secondo termine sia chiaramente nullo mentre, per quanto riguarda il primo, procediamo così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = (-\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} F_{\sigma\rho} - \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta})[\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}] \\ &= -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} (\delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu - \delta^\beta{}_\nu \delta^\alpha{}_\mu) = -\frac{1}{8\pi} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.33}$$

In questo modo, l'equazione di Eulero-Lagrange per il campo elettromagnetico si può scrivere come:

$$-\partial_\mu \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.34}$$

e, con un'ultima semplice manipolazione matematica, otteniamo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.35}$$

ovverosia le *equazioni di Mawell non omogenee in assenza di sorgenti* e ciò valida perfettamente la forma inizialmente data alla lagrangiana.

Le teorie di questo tipo sono dette *massless* poiché il termine di massa (presente ad esempio nell'equazione di Klein-Gordon) è assente. Queste teorie di campo vettoriale descrivono dunque particelle a spin $s = 1$ la cui polarizzazione lungo il proprio asse può assumere unicamente i valori ± 1, che rappresentano proprio i gradi di libertà fisici dell'onda elettromagnetica.

Evitando di dilungare eccessivamente la trattazione, è possibile studiare anche la *lagrangiana del campo elettromagnetico in presenza di sorgenti*:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu \tag{2.36}$$

dove le equazioni di Eulero-Lagrange associate si calcolano in modo analogo al caso precedente e vi è unicamente differenza nel secondo termine, precedentemente nullo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} J^\nu \tag{2.37}$$

Come ci attendiamo, le equazioni del moto ottenute saranno esattamente le *equazioni di Maxwell non omogenee in presenza di sorgenti*:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{2.38}$$

Capitolo 3

Principio di Gauge

Poste le basi teoriche per lavorare matematicamente nell'ambito della Relatività Ristretta ed introdotte alcune nozioni basilari di teoria relativistica dei campi, siamo finalmente pronti per entrare nel vivo della trattazione concentrandoci sulla simmetria interna già presentata nell'ambito della teoria elettromagnetica: *la simmetria di gauge.*

Storicamente, questa tipologia di trasformazioni fu introdotta proprio nell'elettromagnetismo classico come formulato nel 1864 dal fisico teorico scozzese James Clerk Maxwell ma, per lunghissimo tempo, la loro utilità fu unicamente rilegata a manipolazioni matematiche. Difatti, tali trasformazioni si prestano molto bene a questo scopo: agiscono unicamente sui potenziali di campo lasciando invariati i campi elettrici e magnetici stessi, non alterando dunque la fisica del sistema. Matematicamente parlando. possiamo così esprimerle:

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} & \textit{per il potenziale scalare} \\ \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi & \textit{per il potenziale vettore} \end{cases} \tag{3.1}$$

dove χ rappresenta una funzione scalare arbitraria. Per continuità di notazione con il formalismo quadrivettoriale finora utilizzato, esse possono anche essere riscritte così:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{3.2}$$

Fu solamente negli anni Venti del secolo scorso che il fisico Hermann Weyl introdusse per la prima volta il termine "gauge" (dal tedesco *Eichlung*, calibrazione) per denominare queste trasformazioni e, con il contemporaneo avvento della meccanica quantistica, ne intuì per primo il profondissimo significato nella fisica delle interazioni fondamentali.

Partendo proprio dalla formulazione dell'invarianza di gauge nella meccanica quantistica, arriveremo alle moderne *teorie di gauge*, le quali fungono da substrato matematico necessario per le teorie di campo quantizzato di tre delle principali interazioni in natura: *elettromagnetica*, *nucleare debole* e *forte.*

3.1 Invarianza di gauge in meccanica quantistica

Partiamo considerando una particella libera, l'operatore hamiltoniano associatovi è:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{3.3}$$

da cui possiamo scrivere l'equazione di Schroedinger nella rappresentazione delle coordinate come:

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2\psi(t,\vec{x}) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\vec{x}) \tag{3.4}$$

Se noi consideriamo però una particella carica in un campo elettromagnetico, e dunque soggetta alla *forza di Lorentz* $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$, allora l'Hamiltoniana classica di particella libera (3.3) deve essere modificata grazie alle *sostituzioni minimali*, ottenendo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi \tag{3.5}$$

dove ϕ e $\vec{A}$ sono rispettivamente il potenziale scalare e vettoriale.[2]
Possiamo pertanto ottenere l'equazione di Schroedinger corrispondente come:

$$[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi]\psi(t,\vec{x}) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\vec{x}) \tag{3.6}$$

la quale può essere ricondotta alla forma dell'equazione (3.4) mediante le seguenti trasformazioni e con l'introduzione degli operatori:

$$\begin{cases} -\hbar\vec{\nabla} \to \hat{\vec{D}} = -\hbar\vec{\nabla} + i\frac{q}{c}\vec{A} \\ \hbar\frac{\partial}{\partial t} \to \hat{D}^0 = \hbar(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{q}{\hbar}\phi) \end{cases} \tag{3.7}$$

Questi quattro nuovi operatori, nel formalismo covariante, possono essere inglobati in un'unica notazione introducendo la *derivata di gauge covariante* D_μ come:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{3.8}$$

e permettono quindi di riscrivere l'equazione (3.6) nella molto più semplice forma:

$$\frac{1}{2m}(-i\hat{\vec{D}})^2\psi(t,\vec{x}) = i\hat{D}^0\psi(t,\vec{x}) \tag{3.9}$$

Fatto ciò, vorremmo anche che l'invarianza di gauge, concetto fondamentale della teoria elettromagnetica classica, continuasse a vivere nella sua formulazione quantistica. A tal scopo, vediamo anzitutto che succede applicando le trasformazioni di gauge (3.1) all'equazione (3.6):

$$\{\frac{1}{2m}[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}(\vec{A} + \nabla\chi)]^2 + q(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t})\}\psi(t,\vec{x}) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\vec{x}) \tag{3.10}$$

L'equazione ottenuta è chiaramente dipendente dalla trasformazione applicata, alterando inevitabilmente la fisica del sistema.
Ci chiediamo allora come sia possibile risolvere questo problema e, a questo fine, comprendiamo come sia necessario che nella formulazione quantistica pure la funzione d'onda $\psi(t,\vec{x})$ sia soggetta ad una trasformazione di gauge. In particolare, la trasformazione a cui andrà incontro è la seguente:

$$\psi(t,\vec{x}) \xrightarrow{gauge} \psi'(t,\vec{x}) = e^{iq\chi(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) \tag{3.11}$$

Osserviamo pertanto che la trasformazione della funzione d'onda altro non è che un cambiamento di fase dello stato rappresentato e mostriamo che questa aggiunta alle trasformazioni di gauge dei potenziali rende finalmente invariante l'equazione (3.6):

<u>*Dimostrazione:*</u>
Lavoriamo per semplicità con le unità naturali, dove $\hbar = c = 1$, e consideriamo primo e secondo termine dell'equazione di Schroedinger:

$$\begin{aligned}
i\hat{\vec{D}}'\psi' &= (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}')\psi' \\
&= \left[-i\vec{\nabla} - q\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right)\right] e^{iq\chi}\psi \\
&= -i(\vec{\nabla}e^{iq\chi})\psi - ie^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi - q\vec{A}e^{iq\chi}\psi - q(\vec{\nabla}\chi)e^{iq\chi}\psi \\
&= q(\vec{\nabla}\chi)e^{iq\chi}\psi + e^{iq\chi}(-i\vec{\nabla}\psi) + e^{iq\chi}(-q\vec{A}\psi) - q(\vec{\nabla}\chi)e^{iq\chi}\psi \\
&= e^{iq\chi}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi \\
&= e^{iq\chi}i\hat{\vec{D}}\psi
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Consideriamo poi il terzo ed il quarto termine:

$$\begin{aligned}
i\hat{D}_0'\psi' &= -q\Phi' + i\frac{\partial}{\partial t}\psi' \\
&= \left[-q\Phi + q\frac{\partial\chi}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial t}\right] e^{iq\chi}\psi \\
&= -q\Phi e^{iq\chi}\psi + q\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{iq\chi}\psi - q\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{iq\chi}\psi + ie^{iq\chi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \\
&= e^{iq\chi}\left(-q\Phi + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi \\
&= e^{iq\chi}i\hat{D}_0\psi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pertanto, grazie ai risultati ottenuti in (3.12) e (3.13), l'equazione di Schroedinger resta formalmente invariata per le nuove trasformazioni di gauge completando così la dimostrazione:

$$\frac{1}{2m}(i\hat{\vec{D}}')^2\psi' = e^{iq\chi}\frac{1}{2m}(i\hat{\vec{D}})^2\psi = e^{iq\chi}i\hat{D}_0\psi = i\hat{D}'_0\psi' \qquad \square$$

In particolare, notiamo che la nostra fase è generica e può tranquillamente dipendere dal punto dello spaziotempo considerato, pertanto diciamo che queste trasformazioni sulla funzione d'onda costituiscono un gruppo detto $U(1)$ *locale*. Quest'ultima considerazione è di primissima importanza, difatti la meccanica quantistica invece risulta invariante per trasformazioni di fase *globali* che costituiscono il gruppo detto *U(1) globale*, in cui la fase non dipende dal punto dello spaziotempo di Minkowski. Ciò è vero poiché i valori medi degli osservabili quantomeccanici dipendono unicamente dal modulo quadro della funzione d'onda stessa secondo la relazione:

$$< \hat{O} > = \int \psi^* \hat{O} \psi d^3x \tag{3.14}$$

e dunque per trasformazioni del tipo $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$ con α costante, la quantità integrata non cambia:

$$\psi'^* \hat{O} \psi' = e^{-i\alpha}\psi^* \hat{O} e^{i\alpha}\psi = \psi^* \hat{O} \psi$$

Proprio per quanto visto all'inizio di questo paragrafo, possiamo iniziare ad intravedere un concetto molto profondo della fisica teorica: per passare da una teoria di particella libera, come quella descritta dall'equazione di Schroendinger (3.4), ad una teoria di particelle interagenti con un campo di radiazione A_μ è necessario forzare nella prima una simmetria *locale*. Questo processo, nel pieno della sua generalità, è detto *"Principio di gauge"* ed ora procediamo a presentarne la sua formulazione ed implementazione matematica.

3.2 Principio di gauge

Pilastro fondamentale della fisica teorica, il principio di gauge si può enunciare come di seguito: "Sia data una teoria che abbia una simmetria globale rispetto ad un gruppo di Lie, ovverosia i cui parametri risultino continui, con N generatori. Volendo imporre che la simmetria diventi locale, è necessario introdurre N nuovi campi che vanno sotto il nome di *campi di gauge* A_μ, i quali rappresentano le nuove interazioni".

Matematicamente parlando, procediamo studiando un utile esempio che ci permetta di comprendere come si formalizza una simmetria locale.

3.2.1 Lagrangiana dell'elettrodinamica scalare

Consideriamo anzitutto una lagrangiana di Klein-Gordon per un campo scalare ϕ complesso e massivo:

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi \tag{3.15}$$

Siamo interessati a modificare questa lagrangiana al fine di descrivere contemporaneamente sia la dinamica di un ulteriore campo elettromagnetico che vogliamo introdurre, sia l'implementazione matematica delle interazioni di quest'ultimo con le particelle descritte dal campo scalare ϕ.
Per poter fare tutto ciò, richiamiamo un'importantissima osservazione fatta nel capitolo precedente: l'utilizzo di campi scalari complessi rende la teoria derivante dalla lagrangiana di Klein-Gordon in equazione (3.15) simmetrica rispetto alle trasformazioni di fase *globali* dei campi ϕ riportate in equazione (2.26). Contestualmente, notiamo però che non vi è simmetria per trasformazioni di fase *locali*, le quali formano il già citato gruppo $U(1)$ *locale*, poiché:

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi' = \partial_\mu (e^{ie\alpha(x)} \phi) = e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu \phi + ie\phi \partial_\mu \alpha(x)) \neq e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \phi \tag{3.16}$$

dove è stata arbitrariamente aggiunta alla fase una costante di accoppiamento pari alla carica elettrica di un elettrone.
Volendo noi imporre che la simmetria diventi locale al fine di avere una teoria interagente, sfruttando il principio di gauge, possiamo notare che la derivata gauge covariante (leggermente ridefinita rispetto a quanto fatto in (3.8) imponendo qui $q = -e$) applicata al campo scalare $D_\mu \phi$ si trasforma così:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu) e^{ie\alpha(x)} \phi = e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu \phi + ie\phi \partial_\mu \alpha(x) - ieA'_\mu \phi) \\ &= e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu) \\ &= e^{ie\alpha(x)} D_\mu \phi \end{aligned} \tag{3.17}$$

a patto di avere la seguente trasformazione per il campo di gauge A_μ:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \tag{3.18}$$

Pertanto il seguente prodotto rimane immutato sotto le trasformazioni di gauge locali e contiene il termine di interazione cercato, composto dai termini misti in A_μ e ϕ:

$$(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) = [(\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^*][(\partial^\mu - ieA^\mu) \phi] \tag{3.19}$$

A questo punto, avendo un'espressione analitica per l'interazione, non ci resta che introdurre il termine cinetico per il campo vettoriale di gauge esattamente come fatto nella costruzione della lagrangiana del campo elettromagnetico in equazione (2.31) e possiamo finalmente riscrivere l'intera lagrangiana cercata $\mathcal{L}$ come:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ie(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)A_\mu + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi \\ &= \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int}\end{aligned} \tag{3.20}$$

la quale prende il nome di *lagrangiana dell'elettrodinamica scalare*. In particolare, è importantissimo sottolineare come la lagrangiana d'interazione $\mathcal{L}_{int}$ sia univocamente fissata dal principio di gauge.

Riassumendo quanto fatto finora per avere un'invarianza di gauge locale, abbiamo introdotto il campo di gauge A_μ e lo abbiamo accoppiato a ϕ tramite la derivata covariante D_μ. Procediamo dunque studiando le equazioni del moto della lagrangiana totale appena trovata, partendo dalla variazione dell'azione rispetto ai campi ϕ e ϕ^*:

$$\begin{cases}\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \\ \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0\end{cases} \tag{3.21}$$

Sostituendo l'espressione (3.20) per la lagrangiana dell'elettrodinamica scalare e svolgendo i relativi calcoli, otteniamo le seguenti *equazioni del moto per i campi scalari*:

$$\begin{cases}\Box\phi + \mu^2\phi = ie\partial_\mu(A^\mu\phi) + ieA^\mu\partial_\mu\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi \\ \Box\phi^* + \mu^2\phi^* = -ie\partial_\mu(A^\mu\phi^*) - ieA^\mu\partial_\mu\phi^* + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\end{cases} \tag{3.22}$$

Rimangono allora da sviluppare le equazioni del moto per il campo di gauge A_μ, ovverosia le equazioni di Eulero-Lagrange come presentate in (2.32) ma per la nostra nuova lagrangiana (3.20). Svolgendo i conti, possiamo verificare che le *equazioni del moto per il quadripotenziale* sono le seguenti:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi[ie(\phi^*\partial^\nu\phi - \phi\partial^\nu\phi^*) + 2e^2A^\nu\phi^*\phi] \tag{3.23}$$

La combinazione delle equazioni presentate in (3.22) e in (3.23) descrive dunque interamente il comportamento di particelle cariche a spin nullo, quali ad esempio i pioni $\pi^\pm$, caratterizzate da interazione elettromagnetica. Come abbiamo più volte osservato, tutto ciò è stato possibile forzando la simmetria di gauge locale $U(1)$ e, pertanto, possiamo dire che l'elettromagnetismo sia una teoria di gauge $U(1)$.

Facciamo infine una piccola osservazione che ci sarà utile nell'immediato proseguimento della trattazione, dove studieremo la generalizzazione di questo approccio a teorie di gauge $SU(N)$. Analizziamo il comportamento del commutatore delle derivate covarianti:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - (\partial_\nu - ieA_\nu)(\partial_\mu - ieA_\mu) \\
&= \partial_\mu\partial_\nu - ieA_\nu\partial_\mu - ie\partial_\mu A_\nu - ieA_\mu\partial_\nu - \mathrm{e}^2 A_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu \\
&\quad + ieA_\mu\partial_\nu + ie\partial_\nu A_\mu + ieA_\nu\partial_\mu + e^2 A_\mu A_\nu \\
&= -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= -ieF_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Risulta quindi utilissimo osservare come il tensore di Maxwell $F_{\mu\nu}$ sia proporzionale al commutatore delle derivate covarianti $[D_\mu, D_\nu]$. [3]

Capitolo 4

Teorie di gauge non-abeliane

Estendiamo ora la nostra trattazione sulle invarianze di gauge locali alle trasformazioni facenti parte di gruppi più complicati di quello delle rotazioni di fase $U(1)$ appena analizzato. In particolare, siamo interessati ai gruppi $SU(N)$ i quali costituiscono un esempio di *gruppi non abeliani*, ovverosia in cui non vale la proprietà commutativa. Tali teorie, specificatamente nel caso dell'isospin-SU(2), furono studiate per primi dai fisici Yang e Mills (1954) e Shaw (1955): la principale differenza tra esse e la teoria derivante dalla simmetria di gauge rispetto a trasformazioni facenti parte del gruppo abeliano $U(1)$ utilizzata precedentemente per l'elettromagnetismo, consiste nel fatto che la natura non-Abeliana delle nuove teorie porta alla *mutua interazione tra i bosoni dei campi di gauge*. Per quanto riguarda l'approccio più prettamente matematico, seguiremo comunque la stessa strategia messa in pratica nel semplice caso elettromagnetico per forzare una simmetria locale partendo da una globale, ma avremo cura di evidenziarne le principali novità e differenze da quanto già visto. [4]

4.1 Implementazione matematica

Al fine di ottenere teorie quanto più generali possibili, consideriamo un multipletto $\mathbf{\Phi}$ di N campi scalari complessi ed il suo aggiunto $\mathbf{\Phi}^\dagger$, ovverosia:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{\Phi}^\dagger = \left(\phi_1^*, \phi_2^*, ..., \phi_N^*\right)$$

Pertanto, in piena analogia con quanto finora visto, la lagrangiana che ne governa il moto risulta essere la seguente:

$$\mathcal{L}_0^{\Phi} = \partial_\mu \mathbf{\Phi} \partial^\mu \mathbf{\Phi}^\dagger - V(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger) \tag{4.1}$$

Supponiamo quindi di operare la seguente trasformazione unitaria locale:

$$\mathbf{\Phi}(x) \to \mathbf{\Phi}'(x) = \Omega(x)\mathbf{\Phi}(x) \tag{4.2}$$

dove, in particolare:

$$\Omega(x) = exp(it^a\theta^a(x)) \qquad con \;\; a = 1, 2, ..., n \tag{4.3}$$

è *un elemento di un gruppo di Lie non-abeliano a n parametri.* Tenendo sempre a mente la convezione di Einstein sugli indici ripetuti e notando come θ^a dipenda espressamente dalla posizione nello spaziotempo, possiamo quindi affermare che l'eq.(4.2) sia una *trasformazione di gauge locale non abeliana.* In essa, i t^a sono detti *generatori* del gruppo nella nostra rappresentazione unitaria N-dimensionale e corrispondono a delle matrici hermitiane NxN. Inoltre, essi soddisfano l'algebra di Lie:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{4.4}$$

dove le f^{abc} sono dette *costanti di struttura del gruppo* e sono antisimmetriche per scambio di indici. Il commutatore non nullo di questi generatori del gruppo è proprio ciò che, da questo punto della trattazione in avanti, separerà il più generale caso non abeliano da quello studiato nel capitolo precedente dove il generatore del gruppo era unico e pari all'unità a meno di un fattore moltiplicativo quale la carica elettrica.
Fatte le dovute premesse sulla forma delle trasformazioni di gauge locali non abeliane, procediamo notando come la lagrangiana $\mathcal{L}_0^{\Phi}$ non sia invariante per questo tipo di trasformazioni e la ragione di questo risultato è da ricercarsi proprio nella sopracitata dipendenza delle θ^a dalle coordinate spaziotemporali x^μ, genericamente abbreviate in x. Difatti, si ha:

$$\partial_\mu\mathbf{\Phi}(x) \to \partial_\mu\mathbf{\Phi}'(x) = \Omega(\partial_\mu\mathbf{\Phi}(x)) + (\partial_\mu\Omega)\mathbf{\Phi}(x) \neq \Omega(\partial_\mu\mathbf{\Phi}(x)) \tag{4.5}$$

Seguendo dunque lo stesso procedimento adottato nel capitolo precedente, introduciamo i *campi di gauge* $A^a_\mu(x)$, in numero pari ai generatori del gruppo considerato, e la corrispettiva *derivata covariante di gauge* agente sui campi scalari ϕ_i, con $i = 1, 2, ..., N$:

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - igt^a_{ij}A^a_\mu(x) \tag{4.6}$$

dove è stata estratta un'arbitraria costante g. D'ora in avanti, utilizzando una notazione più snella e conforme a quanto visto nella definizione (3.8), esprimeremo analogamente la derivata covariante anche come:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu(x) \tag{4.7}$$

A questo punto, avendo introdotto i campi di gauge e le derivate covarianti con lo scopo di ottenere una generalizzazione del quadrigradiente, richiediamo allora che le proprietà di trasformazione delle derivate dei multipletti ci portino ad avere una lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge non abeliane locali. Ciò è possibile a patto che valga la seguente relazione:

$$D_\mu \mathbf{\Phi}(x) \to D'_\mu \mathbf{\Phi}'(x) = \Omega(x) D_\mu \mathbf{\Phi}(x) \tag{4.8}$$

Esplicitando il primo membro, ciò si traduce nella condizione:

$$D'_\mu \mathbf{\Phi}' = (\partial_\mu - ig\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}'_\mu)\Omega \mathbf{\Phi} = (\partial_\mu \Omega)\mathbf{\Phi} + \Omega \partial_\mu \mathbf{\Phi} - ig\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}'_\mu \Omega \mathbf{\Phi} \tag{4.9}$$

la quale risulta essere immediatamente riconducibile alla desiderata relazione (4.8) a patto di avere la seguente *trasformazione per i campi di gauge* $\boldsymbol{A}_\mu$:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}'_\mu = \Omega \mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1} \tag{4.10}$$

Per comprendere ancora più a fondo le implicazioni di quanto si è matematicamente fatto finora, proviamo a studiare le trasformazioni di gauge *infinitesime*:

$$\Omega \simeq \mathbb{1} + i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta} \tag{4.11}$$

Contestualmente, la variazione infinitesima del multipletto scalare $\mathbf{\Phi}$ sarà:

$$\delta \mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{\Phi}'(x) - \mathbf{\Phi}(x) = i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{\Phi} \tag{4.12}$$

Possiamo quindi sostituire l'espressione della trasformazione infinitesima di $\mathbf{\Phi}$ appena ricavata in (4.12) e l'espressione sul commutatore dei generatori del gruppo di riferimento espressa in (4.4) all'interno dell'equazione di trasformazione dei campi di gauge (4.10), ottenendo così:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}'_\mu &= (\mathbb{1} + i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu(\mathbb{1} - i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \frac{i}{g}(i\mathbf{t} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\theta})(\mathbb{1} - i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta}) \\
&= \mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu + i(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta})(\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu) - i(\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu)(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{g}\mathbf{t} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu + i[t^a, t^b]\theta^a A^b_\mu + \frac{1}{g}\mathbf{t} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_\mu - f^{abc} t^c \theta^a A^b_\mu + \frac{1}{g}\mathbf{t} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

da cui si ricava immediatamente che:

$$\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{A}_\mu \equiv \mathbf{t} \cdot (\mathbf{A}'_\mu - \mathbf{A}_\mu) = \frac{1}{g}\mathbf{t} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\theta} - f^{abc} t^c \theta^a A^b_\mu \tag{4.14}$$

e quindi la vera e propria *trasformazione infinitesima dei campi di gauge* risulta essere:

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a - f^{abc} t^c \theta^a A^b_\mu \tag{4.15}$$

Un rapido confronto di quest'ultimo risultato con l'equazione per la trasformazione di gauge del campo A_μ presentata nel capitolo precedente in (3.18) mostra chiaramente come, nel caso in cui tutte le costanti di struttura fossero nulle, cioè $f^{abc} = 0$, le due equazioni sarebbero coincidenti e ci saremmo quindi ricondotti al regime di trasformazioni abeliane, esattamente come si era accennato ad inizio capitolo parlando dei generatori e dei loro commutatori.

Introducendo ora la cosiddetta *rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge*, per la quale i propri generatori T^a saranno matrici n x n con elementi le costanti di struttura:

$$(T^a)_{bc} = -if_{abc} \tag{4.16}$$

Possiamo riscrivere comodamente l'equazione (4.15) come:

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}(D_\mu \theta)^a \tag{4.17}$$

ottenendo dunque la seguente espressione per la derivata gauge covariante nella nuova rappresentazione aggiunta:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{4.18}$$

In particolare, dall'equazione (4.17) possiamo vedere come i campi di gauge si trasformino proprio secondo la rappresentazione aggiunta del gruppo non abeliano ed anche come la derivata covariante assuma forme diverse, rispettivamente quelle in (4.7) e (4.18), a seconda che essa agisca su di un campo scalare o su funzioni che hanno un indice tipo "a"(quali i campi vettoriali di gauge stessi).

4.1.1 Lagrangiana scalare invariante e sue equazioni del moto

Una volta introdotti i principali strumenti matematici di nostro interesse quali le derivate gauge covarianti ed i relativi campi A_μ, possiamo modificare l'espressione della lagrangiana scalare fornita in (4.1) con lo scopo di renderla *invariante per trasformazioni di gauge locali non abeliane*:

$$\mathcal{L}^{\boldsymbol{\Phi}} = (D_\mu \boldsymbol{\Phi})^\dagger (D^\mu \boldsymbol{\Phi}) - V(\boldsymbol{\Phi}^\dagger \boldsymbol{\Phi}) \tag{4.19}$$

Questa nuova formulazione, per via della presenza della derivata covariante, incorpora i termini di interazione tra campi scalari e campi di gauge:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\boldsymbol{\Phi}} &= (D_\mu \boldsymbol{\Phi})^\dagger (D^\mu \boldsymbol{\Phi}) - V(\boldsymbol{\Phi}^\dagger \boldsymbol{\Phi}) \qquad (4.20)\\ &= \partial_\mu \boldsymbol{\Phi}^\dagger \partial^\mu \boldsymbol{\Phi} + ig[\boldsymbol{\Phi}^\dagger \partial^\mu \boldsymbol{\Phi} - (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}^\dagger)\boldsymbol{\Phi}]\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{A}_\mu + g^2(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{A}_\mu)(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{A}^\mu)\boldsymbol{\Phi}^\dagger \boldsymbol{\Phi} - V(\boldsymbol{\Phi}^\dagger \boldsymbol{\Phi})\end{aligned}$$

Siamo quindi pronti per studiare le equazioni del moto per i vari campi in gioco ed iniziamo studiando le equazioni di Eulero-Lagrange associate ai multipletti scalari:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{\Phi}^\dagger} = 0 \tag{4.21}$$

Sostituendovi all'interno l'espressione della lagrangiana fornita in (4.19) e svolgendo i conti analogamente a quanto già visto nel caso elettromagnetico, otteniamo *l'equazione del moto per il multipletto scalare* $\mathbf{\Phi}$*:*

$$D_\mu D^\mu \mathbf{\Phi} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{\Phi}^\dagger} \tag{4.22}$$

4.1.2 Lagrangiana di una teoria di Yang-Mills ed equazioni del moto dei campi di gauge

A questo punto, per completare la descrizione del sistema, è necessario modificare ulteriormente l'espressione della lagrangiana per tener conto anche della dinamica dei campi di gauge sfruttando un nuovo termine gauge-invariante che contenga le derivate al quadrato di A^a_μ e renda le equazioni del moto di questi campi delle equazioni alla derivate parziali del secondo ordine.
A tal scopo, cominciamo dal calcolare il commutatore delle derivate covarianti:

$$[D_\mu, D_\nu] = [ig\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{A}_\mu, ig\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{A}_\nu] = -ig\boldsymbol{t} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu) - ig^2 f^{abc} t^c A^a_\mu A^b_\nu \tag{4.23}$$

Introducendo il *tensore dei campi di gauge*:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{4.24}$$

possiamo allora riscrivere il commutatore in equazione (4.23) come:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{4.25}$$

Procediamo immediatamente ad un confronto tra quest'ultimo risultato appena esposto ed il commutatore ottenuto nel caso elettromagnetico, abeliano, in equazione (3.24):

- Anzitutto nel caso elettromagnetico risulta che il tensore di Maxwell $F_{\mu\nu}$ sia un invariante per trasformazioni di gauge, mentre nelle teorie di gauge non abeliane si può mostrare come il suo analogo $F^a_{\mu\nu}$ non risulti più gauge invariante. Difatti, si ha che la trasformazione di gauge associata a $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ è la seguente:

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \Omega \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \Omega^{-1} \tag{4.26}$$

- In secondo luogo, come è possibile notare osservando il commutatore in equazione (4.23), in esso sono contenuti dei termini *non lineari* di autointerazione tra i campi di gauge stessi che, nel caso abeliano, nemmeno esistevano in quanto il risultato del calcolo del commutatore delle derivate gauge covarianti consisteva unicamente nel tensore di Maxwell $F_{\mu\nu}$.

Mentre il secondo punto sarà oggetto di alcune considerazioni fisiche sui bosoni mediatori delle interazioni fondamentali ed i loro vertici di auto-interazione, il primo punto ci suggerisce di studiare le trasformazioni di gauge *infinitesime* di $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$, esattamente come si è precedentemente fatto per il multipletto scalare, al fine di determinare il corretto termine cinetico gauge-invariante da inserire nella nostra lagrangiana di partenza. Pertanto, inserendo l'espressione per le trasformazioni infinitesime (4.11) all'interno della (4.26), otteniamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} &\simeq (\mathbb{1}+i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(\mathbb{1}-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}) \simeq \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + i[t^a,t^b]\theta^a F^b_{\mu\nu}\\ &= \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - f^{abc}t^c\theta^a F^b_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.27}$$

e dunque, la *variazione infinitesima del tensore di gauge generalizzato* risulta essere:

$$\delta F^a_{\mu\nu} = -f^{abc}\theta^b F^c_{\mu\nu} \tag{4.28}$$

Proprio da quest'ultimo risultato è possibile vedere come una combinazione del tipo $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}$ sia l'esatta relazione cercata per il termine dinamico dei campi di gauge, in piena analogia formale con quanto visto nel caso abeliano. Difatti essa ha le corrette dimensioni fisiche di una funzione lagrangiana, contiene derivate al quadrato dei campi di gauge A^a_μ e, soprattutto, si dimostra essere un'invariante di gauge:

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} \to F'^a_{\mu\nu}F'^{\mu\nu,a} &= (F^a_{\mu\nu} - f^{abc}\theta^b F^c_{\mu\nu})(F^{\mu\nu,a} - f^{ade}\theta^d F^{\mu\nu,e})\\ &\simeq F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} - f^{abc}\theta^b F^c_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} - f^{ade}\theta^d F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,e}\\ &= F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}\end{aligned} \tag{4.29}$$

dove si noti come, nel penultimo passaggio, si è utilizzata la proprietà di antisimmetria per scambio di indici delle costanti di struttura.

Pertanto, a meno di una comoda costante moltiplicativa, possiamo scrivere la *lagrangiana dei campi di gauge* come:

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{16\pi}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} \tag{4.30}$$

Non ci resta quindi che unire il termine della lagrangiana appena introdotto e la precedente espressione della lagrangiana scalare invariante per trasformazioni di gauge locali non abeliane in (4.19) ed otteniamo finalmente la *lagrangiana di una teoria di Yang-Mills*:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\boldsymbol{\Phi})^\dagger(D^\mu\boldsymbol{\Phi}) - V(\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}) - \frac{1}{16\pi}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} \tag{4.31}$$

Si può ora concludere la nostra breve trattazione matematica circa le teorie di gauge non abeliane ricavando le equazioni del moto per i campi A^a_μ. Fare ciò risulta possibile inserendo l'espressione della lagrangiana appena ricavata in (4.31) all'interno delle seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^a_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\nu} = 0 \tag{4.32}$$

Sviluppando rispettivamente primo e secondo termine di questa equazione si ha:

$$\begin{cases} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^a_\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu,a} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\nu} = -\frac{1}{4\pi} g f^{abc} F^{\nu\sigma,b} A^c_\sigma + igt^a [\mathbf{\Phi}^\dagger D^\nu \mathbf{\Phi} - (D^\nu \mathbf{\Phi})^\dagger \mathbf{\Phi}] \end{cases} \tag{4.33}$$

e dunque, mettendo tutto insieme, le tanto cercate *equazioni del moto per i campi di gauge* sono:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu,a} + g f^{abc} A^b_\mu F^{\mu\nu,c} = -4\pi igt^a [\mathbf{\Phi}^\dagger D^\nu \mathbf{\Phi} - (D^\nu \mathbf{\Phi})^\dagger \mathbf{\Phi}] \tag{4.34}$$

oppure, in forma più compatta grazie all'utilizzo della derivata gauge covariante (4.18), possono essere ugualmente riscritte come:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = -4\pi igt^a [\mathbf{\Phi}^\dagger D^\nu \mathbf{\Phi} - (D^\nu \mathbf{\Phi})^\dagger \mathbf{\Phi}] \tag{4.35}$$

Si noti infine come queste equazioni per la dinamica dei campi di gauge non-abeliani siano un esempio di equazioni *non lineari*. Questo risultato non trova assolutamente analogia nella controparte elettrodinamica, espressa nel capitolo precedente in equazione (3.23), ed è alla base della formulazione analitica dei vertici di autointerazione sia tra i bosoni dell'interazione nucleare debole, ovverosia i bosoni $W^\pm$ e Z^0, sia tra i gluoni g che mediano l'interazione nucleare forte.

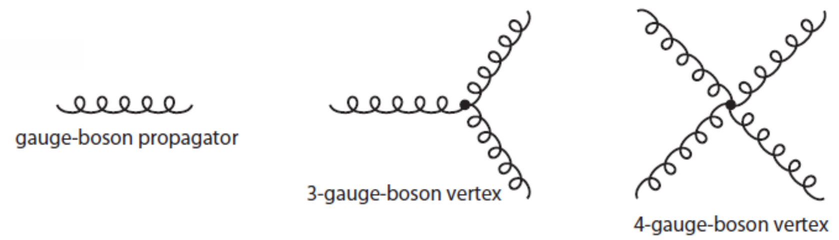

Figura 4.1: *Diagrammi di Feynman relativi ai vertici di autointerazione dei bosoni di gauge. Immagine tratta dal libro di testo di Chris Quigg, pagina 64*

Pertanto, il formalismo matematico delle teorie di Yang-Mills ha portato alla modellizzazione teorica di queste interazioni fondamentali e, specificatamente, ha permesso di inquadrare l'interazione elettrodebole come una teoria di gauge locale $SU(2) \times U(1)$ (dove si avranno quindi 4 generatori e corrispondenti bosoni di cui 3 per la componente strettamente debole) e l'interazione nucleare forte come una teoria di gauge locale $SU(3)$, rendendo perfettamente conto degli 8 possibili gluoni.

Bibliografia

[1] C. Christodoulides. *The Special Theory of Relativity*, pagine 30 – 37. Springer, 2016.

[2] L. Landau, E. Lifšits. *Fisica Teorica II: Teoria dei campi*, pagine 69 – 71. Editori Riuniti university Press, ristampa giugno 2020.

[3] V.Barone. *Relatività, Princìpi ed applicazioni*, pagine 444 – 451 . Bollati Boringhieri, 2004.

[4] C.Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, capitolo 4. Princeton University Press, seconda edizione 2013.