

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Geometria conforme e diagrammi di Penrose

Relatore:  
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:  
Emanuele Camponesco

Anno Accademico 2024/2025



## Sommario

I diagrammi di Penrose sono rappresentazioni bidimensionali capaci di mostrare in modo chiaro e compatto la struttura causale di uno spaziotempo, portando a distanza finita punti che sarebbero infinitamente lontani senza alterarne la causalità. Questa tesi si propone di studiare i fondamenti di geometria conforme che permettono la costruzione di tali diagrammi, per poi applicare questi strumenti ad alcune delle più rilevanti soluzioni delle equazioni di Einstein.

Dopo aver introdotto la teoria generale alla base della geometria conforme, i diagrammi saranno costruiti e analizzati inizialmente per gli spaziotempi massimamente simmetrici, ossia Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter.

Successivamente, l'attenzione sarà rivolta agli spaziotempi con buco nero, in particolare alle soluzioni di Schwarzschild, Reissner–Nordström e Kerr, per le quali i diagrammi di Penrose offrono una descrizione della ricca struttura causale (con orizzonti, singolarità e possibili estensioni oltre i buchi neri).

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Geometria differenziale e Relatività generale</b>	<b>5</b>
1.1 Geometria differenziale . . . . .	5
1.1.1 Varietà differenziabili . . . . .	6
1.1.2 Curve, funzioni e vettori . . . . .	6
1.1.3 Uno-forme e tensori . . . . .	7
1.1.4 Tensore Metrico . . . . .	8
1.1.5 Derivata di Lie . . . . .	9
1.1.6 Derivata covariante e geodetiche . . . . .	10
1.1.7 Tensore di Riemann e curvatura . . . . .	12
1.2 Relatività generale . . . . .	12
1.2.1 Introduzione . . . . .	12
1.2.2 Equazioni gravitazionali . . . . .	13
1.2.3 Soluzione di Schwarzschild . . . . .	14
1.2.4 Metrica di Reissner-Nordström . . . . .	15
1.2.5 Metrica di Friedman-Robertson-Walker . . . . .	16
<b>2 Geometria conforme e diagrammi di Penrose</b>	<b>18</b>
2.1 Geometria conforme . . . . .	18
2.1.1 Riscalamenti e trasformazioni conformi . . . . .	18
2.1.2 Estensioni e compattificazioni conformi . . . . .	19
2.1.3 Trasformazione del tensore di Riemann . . . . .	19
2.1.4 Piattezza conforme . . . . .	20
2.1.5 Geodetiche conformi . . . . .	20
2.2 Diagrammi di Penrose . . . . .	22
2.2.1 Cosa sono i diagrammi di Penrose? . . . . .	22
2.2.2 Spaziotempi a simmetria sferica . . . . .	23
2.2.3 Universo statico di Einstein . . . . .	24
2.2.4 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski . . . . .	24
2.2.5 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di de Sitter . . . . .	27
2.2.6 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo anti-de Sitter . . . . .	29
<b>3 Diagrammi di Penrose per spaziotempi statici a simmetria sferica</b>	<b>31</b>
3.1 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild . . . . .	31
3.1.1 Massima estensione analitica dello spaziotempo di Schwarzschild	31
3.1.2 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild . . . . .	33

3.2	Diagrammi di Penrose per spaziotempi statici a simmetria sferica . . .	35
3.2.1	Metodo per costruire il diagramma di Penrose di spaziotempi statici a simmetria sferica . . . . .	36
3.2.2	Diagrammi di Penrose per lo spaziotempo di Reissner-Nordström	40
3.2.3	Oltre gli spaziotempi con simmetria sferica . . . . .	42
<b>Conclusione</b>		<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>47</b>

# Introduzione

Nel contesto della relatività generale, realizzare una rappresentazione grafica che racchiuda le principali caratteristiche di una soluzione delle equazioni di Einstein non è affatto un'impresa facile. Trattiamo spaziotempi 4-dimensionali, con coordinate che sono definite, in generale, in domini infiniti, quindi è difficile anche solo immaginare un modo di rappresentarli in un foglio di carta. Fu in questo contesto che Roger Penrose (1931-) ispirato anche dal lavoro di Brandon Carter (1942-), a partire dagli anni 60 del secolo scorso, costruì un formalismo capace di creare diagrammi bidimensionali dello spaziotempo capaci di portare i punti all'infinito al finito, mantenendo comunque una descrizione esatta della sua struttura causale. Questi grafici presero il nome di *diagrammi conformi* o, più comunemente, *diagrammi di Penrose*.

Penrose fu da sempre molto interessato alla geometria di oggetti “impossibili”; già da prima della formulazione dei diagrammi conformi, Penrose divenne noto per aver creato alcune figure geometriche paradossali, come il triangolo e la scala di Penrose, ossia oggetti tridimensionali di cui si può solo fare una rappresentazione bidimensionale, quindi che non possono essere costruiti nello spazio. Questi influenzarono e furono influenzati dal famoso artista olandese *M. C. Escher*, ed è interessante pensare a come l'arte possa essere stata uno spunto per un tale progresso scientifico.

Oltre al loro valore concettuale, i diagrammi di Penrose possiedono anche una notevole efficacia didattica. Introdotti da Roger Penrose in una lezione del 1963 alle Écoles de Physique Théorique di Les Houches, vennero rapidamente adottati come strumento pedagogico nella comunità della Relatività Generale. Grazie alla loro capacità di rappresentare la struttura causale in maniera compatta e intuitiva, i diagrammi di Penrose resero possibile visualizzare concetti complessi con una chiarezza mai raggiunta prima. In questo senso, i diagrammi di Penrose non sono soltanto un potente strumento teorico, ma anche un mezzo didattico di straordinaria efficacia.

Questa tesi si propone di introdurre e analizzare i principali concetti della geometria conforme, e di applicarli alla costruzione e all'interpretazione dei diagrammi di Penrose per alcune delle più importanti soluzioni delle equazioni di Einstein. Nel primo capitolo verranno esposti i fondamenti geometrici e matematici della Relatività Generale, con particolare attenzione agli strumenti della geometria differenziale necessari a formulare in modo rigoroso il linguaggio della teoria. Inoltre, saranno introdotte le soluzioni di Schwarzschild, Reissner–Nordström e (anti-)de Sitter, che costituiranno la base per le costruzioni successive.

Nel secondo capitolo si entrerà nel cuore del lavoro, sviluppando il formalismo della geometria conforme. Successivamente, verranno costruiti e analizzati i diagrammi di Penrose per gli spaziotempi più semplici da trattare (poiché *conformemente piatti*), cioè il caso di Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter.

Il terzo capitolo sarà infine dedicato alla costruzione e allo studio dei diagrammi di Penrose di spaziotempi statici e con simmetria sferica, che presentano una sorgente gravitazionale. In particolare, oltre ad analizzare un metodo generale per costruire diagrammi di Penrose di spaziotempi di questo tipo, si analizzeranno i diagrammi conformi delle soluzioni di Schwarzschild e Reissner–Nordström, per poi finire con una breve parentesi sullo spaziotempo di Kerr.

L’obiettivo complessivo di questo lavoro di tesi è dunque di introdurre gli strumenti fondamentali di geometria conforme per costruire e comprendere i diagrammi di Penrose, per mostrare come questi strumenti grafici permettano di interpretare in modo efficace la struttura globale delle soluzioni della Relatività Generale, rendendo visibili in modo immediato proprietà che altrimenti resterebbero nascoste nelle loro espressioni matematiche.

# Capitolo 1

## Geometria differenziale e Relatività generale

In questo primo capitolo verranno gettate le basi teoriche necessarie per comprendere gli argomenti trattati nei capitoli successivi. Prima di descrivere i diagrammi di Penrose, che sono il cuore di questa tesi, è infatti utile introdurre gli strumenti fondamentali della geometria differenziale e della relatività generale. Ci soffermeremo sui concetti di spazio-tempo, metrica e connessione, e sul modo in cui la curvatura viene collegata alla materia attraverso le equazioni di Einstein. L'obiettivo è fornire un quadro chiaro e coerente delle idee alla base della teoria, così da poter affrontare con maggiore consapevolezza i temi analizzati nei capitoli centrali della tesi. Questo primo capitolo sarà una sintesi e rielaborazione (con alcune aggiunte necessarie) di argomenti trattati più approfonditamente in [1].

### 1.1 Geometria differenziale

Per descrivere correttamente i concetti fondamentali della relatività generale, abbiamo bisogno di un formalismo geometrico che permetta di descrivere le equazioni matematiche in sistemi di riferimento arbitrari. Inoltre, vogliamo abbandonare il concetto nato già a partire dalla meccanica di Newton di sistema di riferimento globalmente inerziale: non vogliamo che esista un insieme di sistemi di riferimento “privilegiati” che sono gli unici che usiamo per descrivere la fisica. Inoltre, sarà necessario descrivere trasformazioni *locali* (molto spesso non lineari), visto che ogni misurazione può essere solo locale e tali trasformazioni risulterebbero quindi fondamentali per adattare i risultati dei calcoli teorici con le grandezze effettivamente misurate. È per questa serie di motivi che fu introdotta la geometria differenziale, che fornisce il linguaggio matematico necessario per trattare tali trasformazioni e che permette di riformulare in maniera coerente concetti come distanza, derivata, spostamento, e molti altri in modo da poterli applicare a uno spaziotempo curvo. Gli strumenti geometrici necessari per la relatività generale sono molti, quindi per mantenere il capitolo compatto verranno solo introdotti, senza entrare troppo nel dettaglio.



### 1.1.1 Varietà differenziabili

Lo spazio geometrico che utilizzeremo per descrivere lo spaziotempo è detto **Varietà differenziabile**. Essenzialmente, questo è uno spazio topologico  $\mathcal{M}$  che localmente assomiglia a  $\mathbb{R}^n$ . Una *mappa* è un'applicazione da un sottoinsieme  $D \subseteq \mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}^n$

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Una mappa è detta continua se mappa ogni sottoinsieme aperto di  $D$  in un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una *carta* è una coppia  $(A, \phi)$  dove  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una mappa continua e invertibile. Un *atlante* è una collezione di carte  $\{(A_i, \phi_i)\}$  che copre l'intera varietà. Inoltre, se  $P \in A_i \cap A_j$ , deve esistere una relazione invertibile  $\psi : \phi_i(A_i) \rightarrow \phi_j(A_j)$  tale per cui

$$\psi(\phi_i(P)) = \phi_j(P). \quad (1.2)$$

Poiché tali funzioni  $\psi_{ij}$  sono cambi di coordinate in  $\mathbb{R}^n$ , tutte le carte devono avere la stessa dimensione  $n$ , che viene detta **dimensione della varietà**. Formalmente, una varietà differenziabile può essere vista come una classe di equivalenza di atlanti (due atlanti sono equivalenti se sono legati da una relazione biettiva).

Abbiamo quindi introdotto una struttura geometrica che consente di definire coordinate locali, ma le cui proprietà sono indipendenti dalla scelta delle coordinate: una condizione essenziale per descrivere coerentemente lo spaziotempo in relatività generale.

### 1.1.2 Curve, funzioni e vettori

Definiamo adesso alcuni strumenti che serviranno per esprimere le grandezze fisiche che ci interessano in termini della geometria differenziale.

Una *curva* è una mappa continua della forma

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \quad (1.3)$$

con cui possiamo introdurre la funzione composta (tramite le coordinate date da  $\phi$ )  $\phi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , che scriviamo come  $x^i(\lambda)$ , dove  $\lambda$  è il parametro reale della curva.

Una funzione è un'applicazione

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

che abitualmente scriviamo tramite le coordinate come  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La notazione usata più frequentemente per una funzione è  $f(x^i)$ , che non distingue tra la funzione stessa e la sua composizione con una carta. Se prendiamo un'altra carta  $\phi'$ , la relativa funzione composta sarà diversa, ma rispetterà la relazione

$$f'(x'(P)) = f(x(P)) \quad (1.5)$$

che è la proprietà fondamentale di un campo scalare.

Un vettore è un'applicazione che, in un punto  $P$ , associa a una funzione  $f$  la sua derivata lungo una curva  $\gamma$ :

$$\bar{v}_\gamma(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P}. \quad (1.6)$$

Se sfruttiamo anche le coordinate date dalla carta  $\phi$ , possiamo riscrivere il vettore come

$$\bar{v}_{\gamma_P} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_P}.$$

dove gli indici ripetuti vengono sommati. Omettendo adesso la generica funzione  $f$  e il punto  $P$ , scriviamo

$$\bar{v}_\gamma = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \bar{e}_i$$

dove  $\bar{e}_i$  è un vettore di base. I vettori costituiscono, in ogni punto  $P$ , uno spazio detto *Spazio Tangente*  $T_P$ .

Un *campo vettoriale* è una funzione che associa a ogni punto di un sottoinsieme aperto  $U$  di  $\mathcal{M}$  un vettore  $\bar{v}(P)$ . Chiamiamo *curva integrale* di un campo vettoriale  $\bar{V}$  quella curva  $\gamma(\lambda)$  tale per cui

$$\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \quad (1.7)$$

per ogni  $P \in \gamma$ . Introducendo come sempre una carta, vediamo che le coordinate della curva integrale sono date dai seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} = V^i(\lambda) \\ x^i(\lambda_0) = x^i(P_0) \end{cases} \quad (1.8)$$

che in generale hanno soluzione data dalla *mappa esponenziale*

$$x^i(\lambda) = e^{(\lambda-\lambda_0)\bar{V}} x^i \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Uno-forme e tensori

Una *1-forma*  $\tilde{w}$  in un punto  $P$  è un funzionale lineare che agisce su vettori dello spazio tangente  $T_P$

$$\tilde{w} : T_P \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

1-forme di questo tipo costituiscono lo spazio duale  $T_P^*$  dello spazio tangente  $T_P$ . Partendo da una base  $\bar{e}_i$  di  $T_P$  è possibile definire la *base duale* di  $T_P^*$  tramite

$$\tilde{e}^i(\bar{e}_j) = \delta_j^i. \quad (1.11)$$

Un esempio semplice di 1-forma è il gradiente. Infatti, se  $f$  è una funzione e  $\bar{V}$  un campo vettoriale, allora

$$\bar{V}(f) = \frac{df}{d\lambda}.$$

In maniera equivalente, possiamo definire la 1-forma  $\tilde{d}f$  in maniera opposta come

$$\bar{V}(f) = \frac{df}{d\lambda} = \tilde{d}f \left( \frac{d}{d\lambda} \right).$$

Un *tensore*  $T$  di tipo  $(n, m)$  è un funzionale lineare che agisce su  $n$  1-forme e  $m$  vettori.

$$T : \underbrace{T_P^* \otimes \cdots \otimes T_P^*}_n \otimes \underbrace{T_P \otimes \cdots \otimes T_P}_m \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

È più comodo però definire i tensori a partire dal prodotto tensoriale  $\otimes$  tra vettori e 1-forme:

$$(\bar{V} \otimes \bar{W})(\tilde{e}^i, \tilde{e}^j) = V^i W^j$$

da cui possiamo esprimere il tensore  $\bar{V} \otimes \bar{W}$  come

$$\bar{V} \otimes \bar{W} = V^i W^j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.$$

### 1.1.4 Tensore Metrico

Il *tensore metrico* (o *metrica*) è un oggetto fondamentale per la descrizione degli spaziotempi in relatività generale. Per adesso, lo introduciamo come strumento per definire la nozione di distanza su una varietà.

Il tensore metrico è un tensore (0,2) con le seguenti proprietà:

1. È simmetrico

$$g(\bar{v}, \bar{w}) = g(\bar{w}, \bar{v}) = g_{ij} v^i w^j, \quad (1.13)$$

dove  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ .

2. È non degenere

$$[g(\bar{v}, \bar{w}) = 0, \forall \bar{w} \in T_P \Rightarrow \bar{v} = 0] \iff \det(g_{ij}) \neq 0. \quad (1.14)$$

Il tensore metrico definisce quindi immediatamente un prodotto scalare e un angolo  $\theta$ :

$$g(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w} = vw \cos \theta,$$

dove l'angolo è definito correttamente solo se la metrica è riemanniana.

Il tensore metrico è simmetrico, quindi tramite un appropriato cambio di base è sempre possibile portarlo in forma diagonale. In particolare, tramite un appropriato riscalamento, è possibile trasformare il tensore in *forma canonica*, dove ossia

$$g_{i'j'} = \pm \delta_{i'j'}.$$

In generale, questa forma può essere solo definita in un punto P; allontanandosi da questo punto la forma della metrica si allontanerà da quella canonica. L'unica cosa su cui non abbiamo controllo sono i segni di ogni elemento della diagonale. Se ogni elemento è dello stesso segno, la metrica è detta *Riemanniana* (come, ad esempio, la metrica euclidea), se invece i segni sono, in ordine,  $(+, -, -, -)$  o  $(-, +, +, +)$ , la metrica è detta *Lorentziana*, come per esempio la metrica di Minkowski.

La metrica può essere espressa nella forma

$$g(x) = g_{ij}(x) \bar{dx}^i \otimes \bar{dx}^j$$

che è abitualmente scritta come *elemento di linea*

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j. \quad (1.15)$$

Le metriche degli spaziotempi che analizzeremo saranno scritte in questa forma.

### 1.1.5 Derivata di Lie

È necessario definire, nel contesto della geometria differenziale, il concetto di derivata. In particolare, dovremo innanzitutto definire un modo di comparare oggetti appartenenti a due punti distinti della varietà, che quindi appartengono a spazi tangenti e spazi duali differenti.

Consideriamo un *diffeomorfismo*, ossia una funzione che trasporta punti della varietà  $\mathcal{M}$  lungo un flusso  $\psi : P \rightarrow P'$ . Definiamo una funzione  $f^*$ , detta *trasportata secondo Lie* di  $f$ , tale per cui

$$f^*(P') = f(P) \quad (1.16)$$

Consideriamo adesso una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  bidimensionale, una sua curva  $\Sigma_0$ , e un campo vettoriale  $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \in C^1(\mathcal{M})$ . Una *congruenza* del campo  $\bar{V}$  è la famiglia di curve integrali che partono da  $\Sigma_0$  e coprono  $\mathcal{M}$  (o almeno un suo sottoinsieme aperto). Possiamo allora definire la funzione

$$\phi_{\Delta\lambda} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (1.17)$$

che trasporta ogni punto  $P(\lambda_0)$  lungo la congruenza fino al punto  $P(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ . Questo sarà il diffeomorfismo che sfrutteremo per definire la derivata di Lie.

A questo punto possiamo trasportare secondo Lie sia funzioni

$$f_{\Delta\lambda}^*(Q) = f(P) \quad \phi_{\Delta\lambda}(Q) = P \quad (1.18)$$

che campi vettoriali

$$\bar{W}_{\Delta\lambda}^*(f_{\Delta\lambda}^*) \Big|_Q = \bar{W}(f) \Big|_P. \quad (1.19)$$

Possiamo allora definire la *derivata di Lie* come la derivata lungo una congruenza. La derivata di Lie di una funzione  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  è della forma

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} f \Big|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f_{\Delta\lambda}^*(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \frac{df}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} = \bar{V}(f). \quad (1.20)$$

Per un campo vettoriale  $\bar{W} = \frac{d}{d\mu}$  invece la derivata di Lie è della forma

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{W} = [\bar{V}, \bar{W}] = \left( v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (1.21)$$

Notiamo che la derivata di Lie presenta le seguenti proprietà:

1. Si annulla se le componenti di  $\bar{W}$  sono costanti lungo la direzione definita da  $\bar{V}$ .
2. Soddisfa la regola di Leibniz:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(f\bar{W}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}f)\bar{W} + f\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}. \quad (1.22)$$

3. È lineare:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} + \mathcal{L}_{\bar{W}} = \mathcal{L}_{\bar{V}+\bar{W}}. \quad (1.23)$$

4. Il commutatore soddisfa:

$$[\mathcal{L}_{\bar{V}}, \mathcal{L}_{\bar{W}}] = \mathcal{L}_{[\bar{V}, \bar{W}]}. \quad (1.24)$$

5. Di conseguenza, soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[[\mathcal{L}_{\bar{X}}, \mathcal{L}_{\bar{Y}}], \mathcal{L}_{\bar{Z}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{Y}}, \mathcal{L}_{\bar{Z}}], \mathcal{L}_{\bar{X}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{Z}}, \mathcal{L}_{\bar{X}}], \mathcal{L}_{\bar{Y}}] = 0. \quad (1.25)$$

A partire da queste proprietà, è infine possibile definire la derivata di Lie per 1-forme come

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{w})(\bar{W}) = \mathcal{L}_{\bar{V}}(\tilde{w}(\bar{W})) - \tilde{w}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}). \quad (1.26)$$

Possiamo infine esprimere la derivata di un generico tensore di tipo  $(n, m)$  come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{V}}T(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m) = & (\mathcal{L}_{\bar{V}}T)(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m) \\ & + T(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m) \\ & + T(\tilde{w}_1, \mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m) + \dots \\ & + T(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m) + \dots \\ & + T(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}_m). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Tramite la derivata di Lie possiamo definire il concetto di simmetria. Consideriamo un tensore  $T$  di tipo  $(n, m)$ . Un campo vettoriale  $\bar{V}$  è detto *simmetria* di  $T$  se

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}T = 0 \quad (1.28)$$

Una simmetria del tensore metrico è detta *isometria*, e il campo vettoriale che identifica la simmetria è detto *vettore di Killing*.

### 1.1.6 Derivata covariante e geodetiche

Vogliamo definire il concetto di parallelismo tra due vettori in punti diversi di una varietà differenziale, senza avere bisogno di una metrica. Assumendo di aver definito un'operazione che trasporta parallelamente un campo vettoriale  $\bar{W}$  lungo una curva  $\gamma$  tangente a un campo vettoriale  $\bar{V}$ , possiamo definirne la *derivata covariante* nel punto  $P(\lambda_0)$  come

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{W} \Big|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{W}''_{-\Delta\lambda}(\lambda_0) - \bar{W}(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \quad (1.29)$$

dove  $\bar{W}(\lambda_0)$  è il valore che il campo  $\bar{W}$  assume nel punto  $P(\lambda_0)$ , mentre  $\bar{W}''_{-\Delta\lambda}(\lambda_0)$  è il vettore  $\bar{W}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$  trasportato parallelamente lungo  $\gamma$  fino al punto  $P(\lambda_0)$ . Si nota immediatamente che, se il vettore trasportato parallelamente è uguale al vettore del campo nel punto  $P(\lambda_0)$ , allora la derivata sarà nulla.

È naturale definire la derivata covariante di una funzione come uguale alla sua derivata totale (quindi anche alla sua derivata di Lie)

$$\nabla_{\bar{V}}f = \frac{df}{d\lambda}. \quad (1.30)$$

Per i vettori invece definiamo la derivata covariante in modo tale da avere le seguenti proprietà:

$$\nabla_{\bar{V}}(f\bar{W}) = \frac{df}{d\lambda}\bar{W} + f\nabla_{\bar{V}}\bar{W}, \quad (1.31)$$

$$\nabla_{\bar{V}}(\bar{A} \otimes \bar{B}) = \bar{A} \otimes (\nabla_{\bar{V}}\bar{B}) + (\nabla_{\bar{V}}\bar{A}) \otimes \bar{B}, \quad (1.32)$$

$$\nabla_{\bar{V}}[\tilde{\omega}(\bar{A})] = (\nabla_{\bar{V}}\tilde{\omega})(\bar{A}) + \tilde{\omega}(\nabla_{\bar{V}}\bar{A}), \quad (1.33)$$

che corrispondono alle regole di Leibnitz. Infine, assumiamo che valga

$$\nabla_{f\bar{V}+g\bar{W}} = f\nabla_{\bar{V}} + g\nabla_{\bar{W}}. \quad (1.34)$$

Se adesso introduciamo una base  $\bar{e}_i$  di  $P(\lambda_0)$ , con queste proprietà possiamo scrivere la derivata come

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{W} = V^i[(\nabla_{\bar{e}_i}W^j)\bar{e}_j + W^j(\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j)]. \quad (1.35)$$

Definiamo adesso i *simboli di Christoffel* come

$$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j = \Gamma_{ij}^k\bar{e}_k \quad (1.36)$$

con cui possiamo scrivere la derivata covariante come

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{W} = V^i \left( \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + W^j \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (1.37)$$

dove il primo termine della somma corrisponde alla derivata di  $\bar{W}$  lungo  $\bar{V}$ , mentre il secondo termine (che dipende dai simboli di Christoffel), dipende dalla struttura della varietà su cui si effettua la derivata covariante.

Una connessione molto utile è la cosiddetta *connessione metrica* (o *di Levi-Civita*). Questa è interessante perché è il caso in cui il trasporto parallelo conserva lunghezze e angoli che ovviamente sono definiti solo se la varietà è dotata di una metrica  $g$ . Consideriamo due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  tali per cui  $\nabla_{\bar{V}}\bar{A} = \nabla_{\bar{V}}\bar{B}$ . Allora, la connessione di Levi-Civita è quella tale per cui

$$\nabla_{\bar{V}}[g(\bar{A}, \bar{B})] = 0. \quad (1.38)$$

Questo deve essere valido per ogni coppia di vettori che rispettino la condizione di sopra. In questo modo, è possibile trovare una forma esplicita dei simboli di Christoffel come

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}), \quad (1.39)$$

dove  $g_{il,j} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}$ .

A partire dalla derivata covariante, possiamo definire una *geodetica* come una curva lungo la quale il vettore  $\bar{V}$  tangente alla curva stessa è trasportato parallelamente. Se  $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ , una curva  $\gamma$  è una geodetica se

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{V} \Big|_P = 0, \quad \forall P \in \gamma. \quad (1.40)$$

In coordinate locali, in cui  $\gamma$  è mappata in  $x^k = x^k(\lambda)$ , possiamo riscrivere l'equazione della geodetica come

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \quad (1.41)$$

Le geodetiche sono molto importanti perché generalizzano in una varietà curva il concetto di “linea dritta”. Inoltre, se la varietà è dotata di una metrica, risulta anche che le geodetiche sono curve estremali, ossia sono le curve di lunghezza minima (o massima) che uniscono due punti  $A$  e  $B$  della varietà.

### 1.1.7 Tensore di Riemann e curvatura

Definiamo *tensore di Riemann* il tensore  $R$  di tipo (1,3) che, date due direzioni  $\bar{V}$  e  $\bar{W}$  e un vettore  $\bar{A}$

$$R(\bar{V}, \bar{W})\bar{A} = [\nabla_{\bar{V}}, \nabla_{\bar{W}}]\bar{A} - \nabla_{[\bar{V}, \bar{W}]}\bar{A}. \quad (1.42)$$

Se il commutatore  $[\bar{V}, \bar{W}] = 0$ , il tensore di Riemann permette di descrivere il modo in cui cambia il vettore  $\bar{A}$  se trasportato parallelamente lungo le direzioni definite da  $\bar{V}$  e  $\bar{W}$ :

$$\frac{\delta A}{\delta \mu \delta \lambda} = R_{jkl}^i V^j W^k A^l + O(3). \quad (1.43)$$

Il tensore allora definisce la cosiddetta *curvatura intrinseca* della varietà, poiché descrive il modo in cui cambia un vettore quando viene trasportato parallelamente lungo un percorso chiuso.

A partire dal tensore di Riemann possiamo definire alcune quantità molto utili in relatività generale. Definiamo *tensore di Ricci* il tensore (0,2) dato da

$$R_{ikj}^k = R_{ij}. \quad (1.44)$$

Da qui, definiamo anche lo *scalare di curvatura* come la traccia del tensore di Ricci  $R = R_k^k$ . Chiamiamo *tensore di Weyl* il tensore della forma

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (1.45)$$

dove  $n$  è la dimensione della varietà, mentre  $A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$ .

L'importanza fisica di tutti questi oggetti legati alla curvatura verrà approfondita in seguito, ma è comunque utile cominciare a introdurli nel contesto della geometria differenziale.

Dopo aver costruito questo contesto geometrico in cui lavorare, abbiamo tutti gli strumenti per affrontare i concetti principali di relatività generale, che sono necessari per poter introdurre i diagrammi di Penrose.

## 1.2 Relatività generale

### 1.2.1 Introduzione

Prima di passare allo studio della relatività generale, facciamo alcune puntualizzazioni importanti. D'ora in poi, a meno che non venga indicato esplicitamente, assumeremo che  $c = 1$ ,  $G = 1$ , e che la segnatura delle metriche che considereremo sarà  $(-, +, +, +)$ . Fino ad adesso, tutti i principi fisici di relatività erano legati dal concetto di sistema di riferimento inerziale. I due principi fondamentali sono la **relatività galileiana**, secondo cui le leggi della fisica devono essere uguali in ogni sistema di riferimento inerziale, e il principio di **relatività speciale**, secondo cui le leggi della fisica sono uguali in ogni sistema di riferimento inerziale e la velocità della luce nel vuoto è invariante. Entrambi questi principi sono incompleti: il primo non riesce a descrivere correttamente l'elettromagnetismo, mentre il secondo non descrive la gravitazione, entrambe teorie ampiamente verificate. Nello specifico, il principio di relatività speciale

assume che esistano sistemi di riferimento inerziali globali, che sono legati tra loro tramite trasformazioni di Lorentz.

Nella realtà, idealmente, un sistema di riferimento corrisponde a un apparato di misura. L'apparato ha ovviamente dimensioni spaziali e temporali limitate, e, a priori, non c'è nessuna garanzia che il sistema di riferimento sia inerziale. Sarebbe più corretto allora utilizzare sistemi di riferimento locali generici. Tramite la geometria differenziale, abbiamo già gli strumenti necessari per scrivere le equazioni nella stessa forma in un qualunque sistema di riferimento. Questo corrisponde al

### Principio di Relatività Generale

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento.

Questo vuol dire che ogni grandezza fisicamente rilevante si debba esprimere tramite tensori e operazioni tensoriali nel contesto della geometria differenziale, senza avere legami a priori con le trasformazioni di Lorentz.

Rimane ancora però il fatto che la relatività speciale descrive correttamente molti fenomeni fisici. Dobbiamo allora avere compatibilità tra i due principi di relatività. Cerchiamo di ridefinire il concetto di osservatore inerziale: abbiamo bisogno di determinare se un oggetto sia soggetto o meno a forze. A parte per la gravità, tutte le altre interazioni fondamentali dipendono da cariche che possono essere fissate a 0, quindi per questi casi è facile annullare la forza. L'interazione gravitazionale tra due corpi non può essere annullata, ma se ne possono trascurare gli effetti considerando un osservatore in *caduta libera*, che quindi nel proprio sistema di riferimento non misurerà alcuna accelerazione gravitazionale. Questo corrisponde al seguente

### Principio di equivalenza

Il moto in un campo gravitazionale uniforme è indistinguibile dalla caduta libera.

Questo è uguale al principio di equivalenza galileiano, secondo il quale, per ogni oggetto fisico, la massa gravitazionale è uguale alla massa inerziale

$$m_i = m_g.$$

Abbiamo quindi dato una nuova definizione di osservatore inerziale, che è *locale*.

Il procedimento da seguire allora sarà il seguente: possiamo definire, in un punto P, un osservatore inerziale, per cui le grandezze fisiche sono espresse da tensori del gruppo di Lorentz, mentre allontanandosi dal punto P, passiamo dai tensori del gruppo di Lorentz ai tensori della geometria differenziale, dalla metrica di Minkowski a una generica metrica  $g_{\mu\nu}$ , e dalle derivate parziali alle derivate covarianti.

### 1.2.2 Equazioni gravitazionali

Nel contesto della relatività generale, vogliamo descrivere l'azione della gravità su particelle di test e vogliamo capire quali siano le sorgenti gravitazionali, e in quale modo si possa determinare la gravità a partire da una sorgente conosciuta.

Sia  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  la 4-velocità di una particella di test soggetta solo alla gravità. Nel sistema di riferimento in caduta libera, allora, varrà

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha, \quad (1.46)$$



poiché in questo sistema di riferimento la metrica è quella di Minkowski,  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sim g_{\mu\nu,\beta} = 0$ . Possiamo allora dire che la particella di test segue le geodetiche della metrica dello spaziotempo. Questo vale equivalentemente per la luce; poiché  $u^\mu u_\mu = C$ , vale che

$$u^\nu \partial_\nu C = 2u^\nu u^\mu \nabla_\nu u_\mu = 2u^\mu (u^\nu \nabla_\nu u_\mu) = 0, \quad (1.47)$$

quindi anche la luce (o in generale ogni particella senza massa) si propaga seguendo le geodetiche.

Sappiamo allora qual è il comportamento di una generica particella (massiva o meno) sottoposta solo ad un campo gravitazionale. Rimane adesso da sapere quali sono le sorgenti di quest'ultimo e come sia possibile calcolarne gli effetti sulla geometria dello spaziotempo. Per questo usiamo le seguenti **equazioni di campo di Einstein**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci,  $R$  è lo scalare di Ricci, e  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso. Queste equazioni collegano la geometria dello spaziotempo (quindi i termini a sinistra dell'uguale) alla distribuzione di energia e massa delle sorgenti (che corrisponde al tensore energia-impulso). Il tensore  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  è detto *tensore di Einstein*, è simmetrico (quindi ha 10 componenti indipendenti), e soddisfa la seguente identità di Bianchi:

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0. \quad (1.49)$$

Ovviamente, il tensore energia-impulso deve avere queste stesse proprietà.

Vediamo allora che, vista la presenza del tensore di Ricci nelle equazioni, la presenza di energia e materia determina la curvatura dello spaziotempo. Notiamo invece che il tensore di Weyl non appare nelle equazioni di Einstein: rappresenta infatti quella parte della curvatura che non dipende dalle sorgenti.

### 1.2.3 Soluzione di Schwarzschild

Una delle prime soluzioni delle equazioni di Einstein fu proposta da Schwarzschild. È di particolare rilevanza perché storicamente fu la prima ad introdurre il concetto di *buco nero*, quindi la analizzeremo nel dettaglio, costruendone anche, nei prossimi capitoli, il diagramma di Penrose.

Consideriamo una sorgente statica e con simmetria sferica (ad esempio, potremmo immaginare di studiare gli effetti gravitazionali del sole). Per adesso, non ci interessa approfondire la struttura interna della sorgente, poiché studiamo soltanto la regione esterna. Dato che stiamo considerando il semplice caso di un universo che contiene solo questa sorgente, fuori da essa il tensore energia-impulso sarà nullo ovunque. Le equazioni di Einstein allora si riducono a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.50)$$

Sfruttando le simmetrie del sistema (una temporale vista la staticità e tre spaziali vista la simmetria sferica) possiamo ricavare la *metrica di Schwarzschild*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.51)$$

dove  $M$  è la massa della sorgente come misurata da un osservatore lontano,  $r$  è la cosiddetta coordinata *areale* (quindi non è la distanza radiale dal centro della sorgente), ossia tale per cui ogni superficie con  $r$  fissato ha area  $A = 4\pi r^2$ , mentre  $t, \theta$  e  $\phi$  sono una coordinata temporale e due coordinate angolari. Vista la simmetria per traslazione temporale, assumiamo che il dominio della coordinata  $t$  sia  $(-\infty, +\infty)$ . Le coordinate angolari sono invece definite nei loro domini usuali, ossia  $[0, \pi]$  per  $\theta$  e  $[0, 2\pi]$  per  $\phi$ . Se supponiamo che la sorgente sia molto piccola, quindi con  $r_s \ll R_H = 2M$  (dove  $R_H$  è il cosiddetto *raggio di Schwarzschild*), individuare il dominio di  $r$  diventa più complicato: innanzitutto, se  $r \rightarrow R_H$ ,  $g_{rr} \rightarrow \infty$ . Questo in realtà non è un problema, poiché dipende dalla scelta di coordinate, e non è una vera proprietà fisica dello spaziotempo. Abbiamo però che, se  $r < R_H$ , il segno degli elementi  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$  si scambia; la coordinata  $t$  assumerebbe quindi carattere spaziale mentre  $r$  assumerebbe carattere temporale. Potremmo quindi pensare di dividere la varietà che descrive questo spaziotempo in due parti  $\mathcal{M}^-$  e  $\mathcal{M}^+$  che rappresentano separatamente la regione interna e la regione esterna al raggio di Schwarzschild, ma vedremo nei capitoli successivi che è possibile trovare altre coordinate per questa stessa soluzione che permettono di eliminare totalmente questo problema.

La superficie corrispondente a  $r = R_H$  è detta *orizzonte degli eventi*, e non è possibile ricevere segnali dall'interno di questa superficie. Infatti, vediamo che per un qualunque oggetto sull'orizzonte il cono luce è tangente alla superficie  $r = R_H$ , mentre il futuro causale di ogni oggetto (compresa la luce) interno all'orizzonte è totalmente contenuto nell'orizzonte stesso.

#### 1.2.4 Metrica di Reissner-Nordström

La *metrica di Reissner-Nordström* [2] descrive uno spaziotempo con un corpo massivo di carica elettrica non nulla. È un'evoluzione naturale del caso di Schwarzschild, e partiremo sempre dal presupposto che, fissando la carica elettrica a 0, la metrica deve corrispondere a quella di Schwarzschild. È utile introdurre lo spaziotempo di Reissner-Nordström poiché condivide molte proprietà con lo *spaziotempo di Kerr* (che descrive buchi neri rotanti), più complicato da descrivere ma sicuramente più rilevante dal punto di vista astrofisico.

Consideriamo uno spaziotempo in cui è presente un corpo di massa  $M$ , con simmetria sferica e statico, e con carica elettrica  $Q$ . In questo caso,  $T_{\mu\nu}$  assume la forma del tensore energia-impulso elettromagnetico

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\gamma} F_{\nu}^{\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right), \quad (1.52)$$

che ha traccia nulla; questo vuol dire, che, dalle equazioni di Einstein, anche il tensore di Ricci deve avere traccia nulla, quindi  $R = 0$ . Le equazioni di Einstein diventano allora

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Risolvendo queste equazioni (sfruttando ovviamente la simmetria sferica e la staticità), si ottiene la metrica di Reissner-Nordström

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.54)$$

Notiamo immediatamente che, come previsto, se  $Q = 0$  la metrica diventa uguale a quella di Schwarzschild. In questo caso, l'unica singolarità intrinseca corrisponde a  $r = 0$ , ma ci sono singolarità delle coordinate corrispondenti ai valori della coordinata  $r$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (1.55)$$

e le superfici con  $r = r_+$  e  $r = r_-$  sono chiamate, rispettivamente, *orizzonte esterno* e *orizzonte interno*. Se  $M = |Q|$ , c'è un unico orizzonte degenere per  $r = M$ , mentre se  $M < |Q|$  non ci sono zeri reali. In questo caso, si dice che  $r = 0$  è una “singolarità nuda”, nel senso che la singolarità non è circondata da un orizzonte degli eventi, e quindi può essere vista da osservatori lontani. Non studieremo questo caso nel dettaglio, in quanto la possibilità stessa dell'esistenza di un oggetto del genere è molto dibattuta; secondo l'*ipotesi di censura cosmica* formulata da Penrose stesso, non possono esistere in natura singolarità nude. Ci concentreremo allora soltanto sul caso con  $M > |Q|$ , poiché è quello più interessante per i nostri scopi. Per questa soluzione, le coordinate  $t$  e  $r$  diventano rispettivamente spaziale e temporale una volta superato l'orizzonte  $r = r_+$ , ma recuperano la loro interpretazione originale superando l'orizzonte interno. Vedremo le importanti implicazioni di questo fatto nel dettaglio nel capitolo 3.

### 1.2.5 Metrica di Friedman-Robertson-Walker

Vediamo adesso un'altra metrica molto importante soprattutto nel contesto della cosmologia. Consideriamo uno spaziotempo *omogeneo* e *isotropo*, quindi con simmetria per traslazioni e rotazioni spaziali. In questo caso, non abbiamo nessuna simmetria temporale perché consideriamo l'espansione dell'universo. La metrica per uno spaziotempo del genere è della forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (1.56)$$

dove  $a(t)$  è il fattore cosmico di scala, mentre  $k$  è la costante di curvatura, che assume solo valori  $k = 0, \pm 1$  (in realtà potrebbe assumere valori arbitrari, ma si riscala le coordinate  $t$  ed  $r$  per fare sì che  $k$  abbia quei valori), che descrivono rispettivamente uno spazio *piatto*, *chiuso* e *aperto*. Inserendo questa metrica nelle equazioni di Einstein, si ottengono le seguenti **equazioni di Friedmann**

$$3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} = 8\pi\rho, \quad (1.57)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p). \quad (1.58)$$

Ci concentriamo adesso su uno spaziotempo in cui si trascurano l'energia e la materia ordinaria, e si considera soltanto un'energia di vuoto positiva. Questo è detto *spaziotempo di de Sitter*, e può essere descritto nel contesto delle metriche FRW. È fisicamente molto importante, perché secondo gli attuali modelli cosmologici si pensa che possa descrivere correttamente alcune fasi dell'evoluzione dell'universo primordiale. Assumiamo di avere un universo piatto ma con un energia di vuoto positiva. Allora,  $\rho_{\Lambda} \sim \Lambda$ , quindi dalle equazioni di Friedmann,

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \sim \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \Rightarrow a \sim e^{H_0 t} \quad (1.59)$$

da cui otteniamo la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2H_0 t}(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (1.60)$$

dove  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Si possono fare ragionamenti analoghi con  $k = +1$  e  $k = -1$ , per avere altre descrizioni dello spaziotempo di de Sitter. Riportiamo la metrica del caso  $k = +1$  [3], poiché verrà approfondita nel capitolo 2

$$ds^2 = -dt^2 + H_0^{-2} \cosh^2(H_0 t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2], \quad (1.61)$$

dove  $r = \sin \chi$ .

Vediamo adesso il cosiddetto *spaziotempo anti-de Sitter*, equivalente al caso di de Sitter, solo con energia di vuoto negativa. In questo caso, con  $k = -1$  la metrica prende la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \sin^2(t/\alpha)(d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2), \quad (1.62)$$

dove  $r = \sinh \rho$ , e  $\alpha$  è una costante detta raggio di curvatura. Per i nostri scopi, è più utile scrivere la metrica di questo spaziotempo in un'altra forma (che quindi non risulterà FRW), ossia

$$ds^2 = -\cosh^2(r)dt^2 + \alpha^2(dr^2 + \sinh^2(r)d\Omega^2). \quad (1.63)$$

Entrambi questi spaziotempi verranno analizzati più nel dettaglio nel capitolo 2, ma è comunque utile cominciare a introdurli nel contesto delle metriche FRW.

# Capitolo 2

## Geometria conforme e diagrammi di Penrose

### 2.1 Geometria conforme

La geometria conforme è uno strumento fondamentale per studiare la struttura causale degli spaziotempi in relatività generale. Matematicamente, la geometria conforme studia le trasformazioni che lasciano invariati gli angoli. Anche in relatività generale serve lo stesso scopo: permette di trasformare la metrica dello spaziotempo per renderlo più facile da trattare (e soprattutto da visualizzare), mantenendo però la struttura causale di partenza. In particolare, lo strumento di geometria conforme che sfrutteremo più frequentemente a partire dalla prossima sezione sono le cosiddette *compattificazioni conformi*, ossia trasformazioni dello spaziotempo che “portano gli infiniti al finito”, permettendo quindi di realizzare in uno spazio finito diagrammi (i diagrammi di Penrose) che descrivono l’intera varietà metrica 4-dimensionale.

Questo capitolo seguirà principalmente la trattazione di [4], soprattutto per quanto riguarda la geometria conforme.

#### 2.1.1 Riscalamenti e trasformazioni conformi

Siano  $g$  e  $g'$  due metriche della stessa varietà differenziale  $\mathcal{M}$ . Le due metriche sono dette *conformi* se tra le due esiste una relazione del tipo

$$g'_{\mu\nu} = \Xi^2 g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

dove  $\Xi$  è una funzione scalare  $\Xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  detta *fattore conforme*. Questa definizione fornisce una relazione di equivalenza con cui è possibile costruire la classe di equivalenza  $[g]$ , formata dall’insieme delle metriche di  $\mathcal{M}$  conformi a  $g$ .

Adesso, consideriamo  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$  come due varietà distinte con metriche  $g$  e  $g'$  rispettivamente. Definiamo allora una *trasformazione conforme* come un diffeomorfismo  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  tale per cui il pull-back di  $g'$  sia conforme a  $g$ :

$$\varphi^* g' = \Xi^2 g. \quad (2.2)$$

Nel caso particolare in cui  $g$  è la metrica di Minkowski,  $\mathcal{M}'$  è detta *conformemente piatta* in quanto, tramite una trasformazione conforme, la sua metrica è conforme a quella piatta di Minkowski.

### 2.1.2 Estensioni e compattificazioni conformi

Una funzione  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ , che rispetta la condizione 2.2, è detta **estensione conforme** di  $\mathcal{M}$  se è iniettiva ma non suriettiva. Un sottoinsieme importante delle estensioni conformi è formato dalle **compattificazioni conformi**, ossia le trasformazioni  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{M}$  è una varietà con metrica  $g$ , e  $\mathcal{U}$  è un sottoinsieme aperto, connesso e la cui chiusura è compatta, di una varietà  $\mathcal{M}'$  (con metrica  $g'$ ), tale che

$$\varphi^* g' = \Xi^2 g, \quad (2.3)$$

dove il fattore conforme  $\Xi$  soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\Xi > 0$  in  $\mathcal{U}$ ,
2.  $\Xi = 0$  sul bordo  $\partial\mathcal{U}$ .

Il concetto di compattificazione conforme sarà estremamente importante nelle applicazioni in relatività generale. Una trasformazione di questo tipo permette infatti di passare da una varietà di partenza ad un sottoinsieme di una seconda varietà relativamente compatto. In questo modo i punti all'infinito di  $\mathcal{M}$  corrispondono a punti finiti sul bordo  $\partial\mathcal{U}$ . La condizione (2) garantisce precisamente che le curve che vanno all'infinito in  $\mathcal{M}$  raggiungano il bordo in un tempo finito quando misurate con la metrica  $g'$ .

### 2.1.3 Trasformazione del tensore di Riemann

Per poter studiare la geometria di uno spaziotempo a seguito di una trasformazione conforme della sua metrica è necessario conoscere come cambia il suo tensore di Riemann. Per fare ciò è necessario innanzitutto studiare la trasformazione della sua connessione di Levi-Civita.

Consideriamo due metriche  $g'$  e  $g$  su una stessa varietà conformi tra loro tramite l'espressione (2.1). Chiamiamo  $\nabla'$  e  $\nabla$  le relative connessioni di Levi-Civita. Allora vale che

$$\nabla'_\lambda g'_{\mu\nu} - \nabla_\lambda g'_{\mu\nu} = (\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma'^\rho_{\lambda\mu})g'_{\rho\nu} + (\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma'^\rho_{\lambda\nu})g'_{\rho\mu}$$

Definendo ora l'operatore di transizione  $Q^\rho_{\lambda\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma'^\rho_{\lambda\nu}$  e sfruttando il fatto che la connessione di Levi-Civita si annulla se applicata alla metrica, otteniamo la seguente espressione:

$$2(\Xi^{-1}\nabla_\lambda\Xi)g'_{\mu\nu} = Q^\rho_{\lambda\mu}g'_{\rho\nu} + Q^\rho_{\lambda\nu}g'_{\rho\mu}$$

Si possono ottenere equazioni equivalenti permutando ciclicamente i tre indici, da cui in conclusione si ricava l'espressione del tensore di transizione

$$Q^\nu_{\lambda\mu} = \Xi^{-1}(\nabla_\lambda\Xi\delta^\nu_\mu + \nabla_\mu\Xi\delta^\nu_\lambda - \nabla_\rho\Xi g'^{\rho\nu}g'_{\lambda\mu}) = S^{\nu\rho}_{\lambda\mu}(\Upsilon_\rho) \quad (2.4)$$

Dove  $S^{\nu\rho}_{\lambda\mu} = (\delta^\nu_\lambda\delta^\rho_\mu + \delta^\rho_\lambda\delta^\nu_\mu - g'^{\rho\nu}g'_{\lambda\mu})$  e  $\Upsilon_\rho = \Xi^{-1}\nabla_\rho\Xi$ .

Conoscendo il tensore di transizione, siamo quindi in grado di legare le connessioni di Levi-Civita di due metriche tra loro conformi. A questo punto siamo in grado di calcolare l'espressione della variazione del tensore di Riemann sotto una trasformazione conforme:

$$R^{\nu\rho}_{\rho\lambda\mu} - R^\nu_{\rho\lambda\mu} = 2(\nabla'_{[\lambda}\Upsilon^\nu_{\mu]\rho} + \Upsilon^\nu_{[\lambda|\alpha|}\Upsilon^\alpha_{\mu]\rho}) \quad (2.5)$$

Dove  $\Upsilon_{\mu\nu}^\lambda = S_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \Upsilon_\rho$  e  $T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba})$ .

Dal tensore di Riemann possiamo allora estrapolare il tensore e lo scalare di Ricci (visto che il risultato dipende dalla dimensione ci concentriamo sul caso 4-dimensionale)

$$R'_{\lambda\mu} - R_{\lambda\mu} = -\frac{2}{\Xi} \nabla'_\lambda \nabla'_\mu \Xi - g'_{\lambda\mu} g'^{\nu\rho} \left( \frac{1}{\Xi} \nabla'_\nu \nabla'_\rho \Xi - \frac{3}{\Xi^2} \nabla'_\nu \Xi \nabla'_\rho \Xi \right), \quad (2.6a)$$

$$R' - \frac{1}{\Xi^2} R = -\frac{6}{\Xi} \nabla'_\nu \nabla'^\nu \Xi + \frac{12}{\Xi^2} \nabla'_\nu \Xi \nabla'^\nu \Xi. \quad (2.6b)$$

Infine, possiamo calcolare la variazione del tensore di Weyl, da cui otteniamo

$$C'^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = C^{\lambda}_{\mu\nu\rho} \quad (2.6)$$

Queste relazioni sono molto importanti dal punto di vista fisico. Innanzitutto notiamo che, poiché il tensore di Ricci non è invariante per trasformazioni conformi, le equazioni di Einstein evidentemente non possono mantenere la stessa forma a seguito di una trasformazione di questo tipo. Al contrario, il tensore di Weyl è conservato, quindi possiamo dire che è una proprietà della classe conforme  $[g]$ . Le trasformazioni conformi modificano quindi la scala locale delle distanze e delle durate, ma non alterano quella parte della geometria che non è direttamente determinata dalla distribuzione di materia ed energia. Questo avrà conseguenze molto importanti, ad esempio, nella caratterizzazione degli spazi conformemente piatti.

### 2.1.4 Piattezza conforme

Per caratterizzare una classe conforme  $[g]$ , innanzitutto è fondamentale sapere se la metrica di Minkowski le appartiene. Le metriche conformemente piatte sono ovviamente più facili da trattare, ed è più facile disegnarne il diagramma di Penrose. Per caratterizzare gli spazi conformemente piatti utilizziamo il seguente **Teorema di Weyl-Schouten**

**Teorema 2.1.1.** *Sia  $(\mathcal{M}, g)$  una varietà con metrica di dimensione  $n \geq 4$ . La metrica  $g$  è conformemente piatta se e solo se il suo tensore di Weyl è nullo.*

Si nota che l'implicazione “il tensore di Weyl è nullo se la metrica  $g$  è conformemente piatta” è immediata: il tensore di Weyl (come quello di Riemann) è nullo per la metrica di Minkowski, e poiché si conserva per trasformazioni conformi, sarà nullo anche per  $g$ . Il teorema è intuitivamente sensato. Il tensore di Weyl è quella parte del tensore di Riemann che non dipende dalle sorgenti gravitazionali (quella parte è il tensore di Ricci, che infatti compare nell'equazione di Einstein), e quindi descrive la curvatura “intrinseca” di uno spaziotempo. Il tensore di Ricci non può essere usato in questo criterio in quanto non è invariante sotto trasformazioni conformi. Al contrario, il tensore di Weyl è la parte irriducibile della curvatura, quindi il suo annullamento è una condizione necessaria e sufficiente per far sì che una metrica sia riconducibile, tramite trasformazioni conformi, alla metrica di Minkowski.

### 2.1.5 Geodetiche conformi

Le geodetiche sono tra gli oggetti di geometria differenziale più importanti per la relatività generale. È naturale allora chiedersi come queste curve cambino sotto trasformazione conforme della metrica. Consideriamo una varietà differenziale  $\mathcal{M}$ , dotata

di metrica  $g$ . Denoto con  $x(\lambda)$ ,  $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$  una geodetica di  $\mathcal{M}$ , per cui quindi vale  $\nabla_{x'} x' = 0$ , dove  $x' = \frac{dx}{d\lambda}$ . Considero ora una seconda metrica  $\tilde{g}$  per la stessa varietà, conforme a  $g$ . Vediamo come si trasforma la condizione di geodetica con questa seconda metrica. Per comodità usiamo l'equazione  $\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$ . Per prima cosa, ricordiamo che

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + Q_{\mu\nu}^\rho$$

L'equazione allora diventa

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + Q_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

Da cui ovviamente abbiamo la nuova condizione

$$Q_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

d'ora in poi, per compattezza, chiameremo  $x'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ .

$$Q_{\mu\nu}^\rho x'^\mu x'^\nu = \Xi^{-1} \left( (\delta_\mu^\rho \partial_\nu \Xi + \delta_\nu^\rho \partial_\mu \Xi - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Xi) x'^\mu x'^\nu \right).$$

vediamo ora i singoli termini

$$\begin{aligned} \delta_\mu^\rho \partial_\nu \Xi x'^\mu x'^\nu &= x'^\rho x'^\nu \partial_\nu \Xi = x'^\rho (\partial_\nu \Xi x'^\nu) = x'^\rho (\Upsilon_\nu x'^\nu) \Xi, \\ \delta_\nu^\rho \partial_\mu \Xi x'^\mu x'^\nu &= x'^\mu x'^\rho \partial_\mu \Xi = x'^\rho (\partial_\mu \Xi x'^\mu) = x'^\rho (\Upsilon_\mu x'^\mu) \Xi, \\ -g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Xi x'^\mu x'^\nu &= -g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Xi g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = -g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \Upsilon^\rho \Xi. \end{aligned}$$

Sommando ora tutti i termini otteniamo la seguente espressione dell'equazione di geodetica espressa tramite la connessione di Levi-Civita per la metrica  $\tilde{g}$ .

$$\tilde{\nabla}_{x'} x'^\rho = 2(\Upsilon_\sigma x'^\sigma) x'^\rho - g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \Upsilon^\rho. \quad (2.7)$$

A questo punto è utile riparametrizzare la curva con un nuovo parametro  $\tau = \tau(\lambda)$  dove ora, definendo  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}$  e  $\tau' \equiv \frac{d\tau}{d\lambda}$ , otteniamo

$$\tau'^2 \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}^\rho = (2\tau'^2 (\Upsilon_\sigma \dot{x}^\sigma) - \tau'') \dot{x}^\rho - \tau'^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Upsilon^\rho.$$

Questa espressione ci suggerisce che è conveniente scegliere il parametro  $\tau$  in modo tale da avere

$$\tau'' = 2\tau'^2 (\Upsilon_\sigma \dot{x}^\sigma).$$

Poiché  $\Upsilon$  è noto lungo la curva, questa può essere vista come un'equazione differenziale di secondo ordine che può essere sempre localmente risolta.

L'equazione finale per le geodetiche risulta essere

$$\tau'^2 \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}^\rho = -\tau'^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Upsilon^\rho. \quad (2.8)$$

Questa equazione si annulla solo se  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ , o equivalentemente  $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = 0$ , ossia se la geodetica è di tipo luce. Possiamo concludere allora che **le geodetiche di**



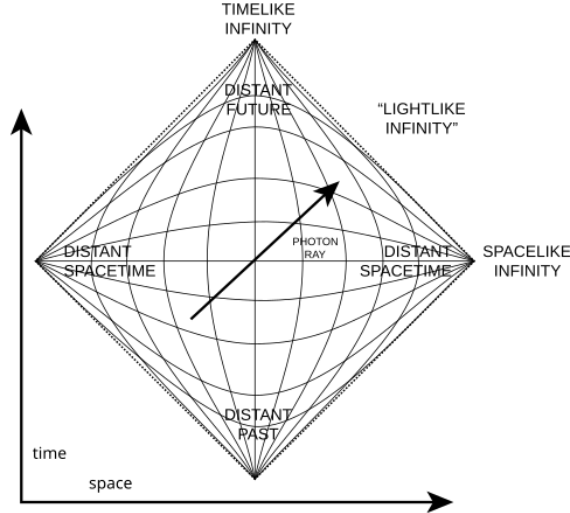


Figura 2.1: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski

*tipo luce restano tali a seguito di trasformazioni conformi.* Questo non è vero in generale per geodetiche di tipo tempo e di tipo spazio, quindi le trasformazioni conformi “distorcono” le distanze sia temporali che spaziali. Questa è una delle proprietà più importanti di questa teoria, ed è il concetto fondamentale alla base dei diagrammi di Penrose. Infatti, con questo tipo di trasformazioni è possibile compattificare uno spaziotempo 4-dimensionale infinito in uno spazio finito, mantenendo però invariate le sue geodetiche di tipo luce, che a loro volta delimitano il cono luce di un osservatore interno allo spaziotempo.

## 2.2 Diagrammi di Penrose

A questo punto, con gli strumenti matematici che abbiamo costruito fino ad adesso, siamo in grado di costruire i primi diagrammi di Penrose per spaziotempi semplici da trattare.

### 2.2.1 Cosa sono i diagrammi di Penrose?

Un **Diagramma di Penrose** è una rappresentazione bidimensionale di uno spaziotempo, che tramite trasformazioni conformi della sua metrica permette di descriverne correttamente la struttura causale e di rappresentare graficamente in uno spazio finito anche i punti all'infinito. Il più semplice diagramma di Penrose, ossia quello per lo spaziotempo di Minkowski, è rappresentato in fig. 2.1. Anche se i dettagli matematici verranno affrontati in seguito, è comunque utile cominciare a capire come sia fatto un diagramma di Penrose. Innanzitutto notiamo che è un diagramma bidimensionale con una variabile temporale nell'asse delle ordinate e una variabile spaziale nell'asse delle ascisse, che chiamiamo rispettivamente  $T$  e  $R$  (che sono diverse dalle coordinate polari standard  $t$  e  $r$ ). Per costruzione, le geodetiche di tipo luce sono rette a  $45^\circ$ . È immediato allora capire che, se un osservatore si trova in un qualunque punto del diagramma, il suo passato e il suo futuro sono contenuti all'interno di due coni delimitati da rette a  $45^\circ$  in maniera completamente analoga al cono luce del diagramma

di Minkowski della relatività speciale. Inoltre, per quanto la metrica “fisica” dello spaziotempo sia distorta dalla trasformazione conforme, le sue geodetiche di tipo luce non lo sono, quindi il diagramma descrive correttamente il cono luce dell’osservatore. Possiamo identificare quattro punti estremi del diagramma, che sono indicati come ***infiniti spaziali*** e ***infiniti temporali***. È qui che entra in gioco il concetto di compattificazione conforme, che permette di rappresentare nel diagramma gli infiniti dello spaziotempo come punti finiti. Inoltre, le traiettorie di tipo luce che congiungono gli infiniti spaziali a quelli temporali sono dette ***infiniti di tipo luce*** o ***infiniti nulli***. Riprendendo la notazione del paragrafo 2.1.2, i quattro punti infiniti e le quattro traiettorie di tipo luce costituiscono il bordo  $\partial\mathcal{U}$  dell’insieme  $\mathcal{U}$  che invece rappresenta l’interno del diagramma.

Qualitativamente, questi punti hanno alcune proprietà immediate da notare. Innanzitutto, per qualunque osservatore interno al diagramma gli infiniti temporali sono sempre parte del cono luce futuro o di quello passato, al contrario gli infiniti di tipo spazio non saranno mai accessibili.

Infine, notiamo che nel grafico ci sono linee curve sia orizzontali che verticali, interne al diagramma, dove ciascuna collega due infiniti dello stesso tipo. Le linee orizzontali sono a  $t$  costante, mentre quelle verticali sono a  $r$  costante, dove  $t$  e  $r$  sono le coordinate standard dello spaziotempo di Minkowski, ossia quelle che (se abbinate alle relative coordinate angolari  $(\theta, \phi)$ ), danno la metrica  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$  (da non confondere con le coordinate conformi sull’asse temporale e su quello spaziale del grafico). È utile rappresentare queste curve nel diagramma perché mostrano chiaramente quanto le coordinate standard  $(t, r)$  vengano distorte nel passaggio alla geometria conforme rappresentata dal diagramma.

## 2.2.2 Spaziotempi a simmetria sferica

Gli spaziotempi a simmetria sferica sono tra i più semplici da trattare e sono quelli che studieremo più nel dettaglio. Uno spaziotempo  $(\mathcal{M}, g)$  è detto a simmetria sferica se le trasformazioni del gruppo  $SO(3)$  sono isometrie per  $(\mathcal{M}, g)$ , con orbite semplicemente connesse, di tipo spazio, complete e bidimensionali. Questo vuol dire che le rotazioni (ossia le trasformazioni del gruppo  $SO(3)$ ) non alterano la metrica dello spaziotempo, e le relative orbite sono 2-sfere spaziali (che, intuitivamente, sono chiuse e senza “buchi”). A questo punto è utile introdurre una varietà quoziente  $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/SO(3)$ , ossia la varietà bidimensionale ottenuta da  $\mathcal{M}$  identificando ogni orbita (data dall’azione del gruppo  $SO(3)$  su un punto di  $\mathcal{M}$ ) con un unico punto della varietà quoziente. Questo spazio bidimensionale è proprio quello che verrà rappresentato graficamente nei diagrammi di Penrose.

Nella varietà quoziente è possibile definire una metrica  $\gamma$  a partire da  $g$ . Esiste infatti una funzione  $\rho : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui

$$ds^2 = ds_{\mathcal{Q}}^2 + \rho^2 d\Omega^2 \quad (2.9)$$

dove  $ds^2$  è l’elemento di linea della metrica della varietà complessiva,  $ds_{\mathcal{Q}}^2$  è l’elemento di linea della metrica della varietà quoziente.

### 2.2.3 Universo statico di Einstein

Adesso introduciamo uno spaziotempo molto utile per descrivere la compattificazione dello spaziotempo di Minkowski necessaria per realizzarne il diagramma di Penrose.

L' **Universo statico di Einstein**, anche detto **Cilindro di Einstein**, è lo spaziotempo  $(\mathcal{M}_\mathcal{E}, g_\mathcal{E})$  dato da

$$\mathcal{M}_\mathcal{E} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3.$$

Per studiarne la metrica è necessario prima introdurre la metrica di  $\mathbb{S}^3$ . Questo è il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  identificato da

$$\mathbb{S}^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 | w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Per descriverlo si utilizzano le coordinate sferiche  $(\psi, \theta, \varphi)$ , con le quali è possibile esprimere

$$w = \cos \psi, \quad x = \sin \psi \cos \theta, \quad y = \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \quad z = \sin \psi \sin \theta \sin \varphi$$

con  $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . In questi termini si può scrivere la sua metrica come

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2$$

dove, convenzionalmente, il punto corrispondente a  $\psi = 0$  è detto polo nord mentre il punto corrispondente a  $\psi = \pi$  è il polo sud.

A questo punto possiamo esprimere la metrica dell'universo statico di Einstein come

$$ds_\mathcal{E}^2 = -dT^2 + d\Omega_3^2 \quad (2.10)$$

dove  $d\Omega_3^2$  è la metrica della 3-sfera. Notiamo che l'universo statico di Einstein è un caso specifico dello spaziotempo di FRW (in particolare con fattore di scala cosmico  $a(t)$  costante), quindi è omogeneo e isotropo, oltre ad essere statico. Per questo motivo, risulta che il suo tensore di Weyl sia nullo, quindi quest'universo è **conformemente piatto**; ciò vuol dire che la sua metrica è conforme a quella di Minkowski.

Inoltre, l'universo statico di Einstein ha simmetria sferica, quindi è possibile ricavarne una varietà quoziente  $\mathcal{Q}_\mathcal{E}$  con metrica nella forma data da 2.9:

$$ds_\mathcal{Q}^2 = -dT^2 + d\psi^2 \quad (2.11)$$

### 2.2.4 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski

A questo punto, abbiamo tutti gli strumenti necessari per realizzare il diagramma di Penrose dello spaziotempo di Minkowski, che chiaramente è il più semplice da trattare. Lo spaziotempo di Minkowski  $(\mathcal{M}, \eta)$  è dato da  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ , con metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Per questa trattazione, è più utile riscrivere questa metrica in termini delle coordinate polari  $(r, \theta, \varphi)$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.12)$$

Ovviamente per questo spaziotempo il tensore di Riemann è nullo, quindi sono nulli anche il tensore di Ricci e il tensore di Weyl. Vediamo adesso come è possibile compattificare questo spaziotempo nel cilindro di Einstein.

Cominciamo definendo le cosiddette **coordinate nulle**  $u \equiv t - r$  e  $v \equiv t + r$ . Questo è un passaggio standard, che sarà necessario per costruire una buona parte dei diagrammi di Penrose che vedremo d'ora in poi. Riscriviamo ora la metrica con queste coordinate:

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2. \quad (2.13)$$

Dobbiamo mantenere la condizione  $r \geq 0$ , quindi deve valere il vincolo  $u \leq v$ . Visto che vogliamo che le coordinate abbiano un dominio finito, introduciamo un altro cambio di coordinate:  $u \equiv \tan U$ ,  $v \equiv \tan V$ , con  $U, V \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  e  $U \leq V$ . Valgono le seguenti relazioni:

$$du = \frac{1}{\cos^2 U} dU = (1 + u^2) dU, \quad dv = \frac{1}{\cos^2 V} dV = (1 + v^2) dV$$

e

$$v - u = \tan V - \tan U = \frac{\sin(V - U)}{\cos U \cos V}.$$

Da qui è possibile scrivere la metrica nella forma

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} (-dU dV + \sin^2(V - U) d\Omega^2).$$

Questa espressione ci suggerisce di considerare la metrica conforme  $\tilde{\eta} = \Xi^2 \eta$ , con

$$\Xi = 2 \cos U \cos V \quad (2.14)$$

da cui l'espressione

$$d\tilde{s}^2 = -dU dV + \sin^2(V - U) d\Omega^2. \quad (2.15)$$

Notiamo che il fattore conforme si annulla per  $U = \pm \frac{\pi}{2}$  o  $V = \pm \frac{\pi}{2}$ . A questo punto introduciamo l'ultimo cambio di variabile  $T = V + U$ ,  $\psi = V - U$ , con cui esprimiamo la metrica:

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2 \quad (2.16)$$

che corrisponde esattamente alla metrica dell'universo statico di Einstein. Dal teorema di Weyl-Schouten (2.1.1) già sapevamo che questi due spaziotempi sono conformi, ma adesso abbiamo trovato un'espressione esplicita del fattore conforme tra le due metriche e delle coordinate necessarie per descrivere lo spaziotempo di Minkowski come quello di Einstein. Possiamo tornare alle coordinate standard con le seguenti relazioni

$$t = \frac{\sin T}{\cos T + \cos \psi} \quad r = \frac{\sin \psi}{\cos T + \cos \psi}.$$

Notiamo adesso che non solo abbiamo un modo di descrivere lo spaziotempo di Minkowski come sottoinsieme dell'universo statico di Einstein, ma anche il suo bordo (costituito dai suoi infiniti conformi) è contenuto nel cilindro. Identifichiamo il dominio delle nuove coordinate  $(T, \psi)$  ricordando le condizioni espresse finora. Poiché  $V \geq U$ ,  $\psi$  è sempre positivo

$$0 \leq \psi < \pi.$$

Inoltre,

$$T + \psi = 2V < \pi$$

$$T - \psi = 2U > -\pi$$

che, scritta in maniera compatta, corrisponde alla condizione

$$\psi - \pi < T < \pi + \psi.$$

L'aspetto interessante però è il bordo della compattificazione dello spaziotempo di Minkowski nel cilindro di Einstein. Il bordo si divide naturalmente in 5 sezioni:

1. **Infinito futuro e passato di tipo tempo**, identificato dai punti  $i^\pm$  con  $\psi = 0$ ,  $T = \pm\pi$
2. **Infinito di tipo spazio**, identificato dal punto  $i^0$ , con  $\psi = \pi$ ,  $T = 0$
3. **Infinito nullo futuro e passato** identificato dalle regioni  $\mathcal{I}^\pm$ , date dalla condizione  $T = \pm(\pi - \psi)$ .

La varietà metrica che descrive lo spaziotempo di Minkowski  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$  è allora

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{P \in M_{\mathcal{E}} \mid 0 \leq \psi(P) \leq \pi, \psi(P) - \pi \leq T(P) \leq \pi - \psi(P)\}$$

oppure, esprimendo esplicitamente il bordo,

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{P \in M_{\mathcal{E}} \mid 0 \leq \psi(P) < \pi, \psi(P) - \pi < T(P) < \pi - \psi(P)\} \cup i^\pm \cup i^0 \cup \mathcal{I}^\pm. \quad (2.17)$$

A questo punto, come già espresso nel caso generale nel paragrafo 2.2.2, possiamo definire la varietà quoziente  $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{M}}/SO(3)$ , che ha metrica

$$ds_{\mathcal{Q}}^2 = -dT^2 + d\psi^2. \quad (2.18)$$

Come già discusso precedentemente, questo spazio quoziente è bidimensionale e può essere rappresentato graficamente. Il diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski è raffigurato in Fig. 2.2.

Notiamo che questo diagramma non è identico a quello già descritto nel paragrafo 2.2.1: in quel caso, ha anche una componente speculare a quella in figura corrispondente ai valori negativi di  $\psi$ . Questo è il diagramma fisicamente più corretto, mentre quello della figura 2.1 è quello matematicamente più completo, poiché nel primo caso si impone  $r \geq 0$ , mentre nel secondo caso si lascia variare  $r \in \mathbb{R}$ , ottenendo una simmetria utile matematicamente ma ridondante dal punto di vista fisico. Rispetto alla descrizione già fatta precedentemente, aggiungiamo il fatto che abbiamo una caratterizzazione esatta dei punti sul bordo del diagramma (quindi i punti all'infinito dello spaziotempo), che corrispondono precisamente a  $i^\pm, i^0, \mathcal{I}^\pm$ . Inoltre, sapendo che questo grafico è una rappresentazione dello spazio quoziente  $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{M}}/SO(3)$ , possiamo dire che ogni punto interno al diagramma corrisponde, nello spaziotempo originale, a una 2-sfera, mentre  $i^0, i^\pm$  sono punti, e  $\mathcal{I}^\pm$  sono ipersuperfici tridimensionali.

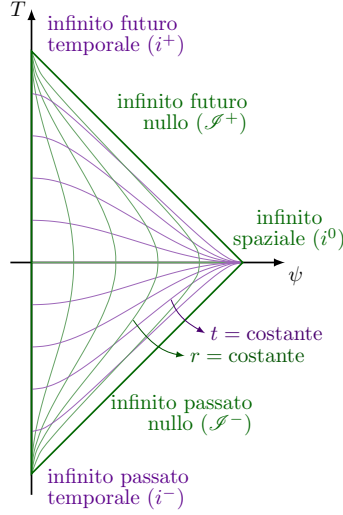


Figura 2.2: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski

### 2.2.5 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di de Sitter

Lo spaziotempo di de Sitter, insieme allo spaziotempo anti-de Sitter e a quello di Minkowski, ha il numero massimo di simmetrie possibili per una varietà 4-dimensionale (4 traslazionali, 3 rotazionali e 3 boost), quindi il suo tensore di Riemann appare nella forma

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{R}{12}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (2.19)$$

Nello specifico, per lo spaziotempo di de Sitter la costante  $R$  è positiva, mentre per lo spaziotempo di Minkowski è chiaramente nulla, e infine nel caso anti de Sitter è negativa. Per un tensore di Riemann di questa forma, è facile verificare che il tensore di Weyl sia nullo. Vediamolo rapidamente: ricordo che il tensore di Weyl è definito da

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(R_{ad}g_{bc} - R_{ac}g_{bd} + R_{bc}g_{ad} - R_{bd}g_{ac}) + \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}).$$

Il tensore di Ricci, invece, si ottiene dalla seguente contrazione:

$$R_{bd} = R^c_{bcd} = R_{abcd}g^{ac} = \frac{R}{12}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})g^{ac}$$

da qui, contraendo le metriche

$$R_{bd} = \frac{R}{12}(\delta^a_a g_{bd} - \delta^a_b g_{ad}) = \frac{3R}{12}(g_{bd}) = \frac{R}{4}g_{bd}.$$

A questo punto possiamo calcolare direttamente il tensore di Weyl

$$C_{abcd} = \frac{R}{12}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) + \frac{R}{8}(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd} - g_{bd}g_{ac} + g_{bc}g_{ad}) + \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$$

dove, ricombinando i vari termini, si ottiene facilmente che

$$C_{abcd} = 0.$$

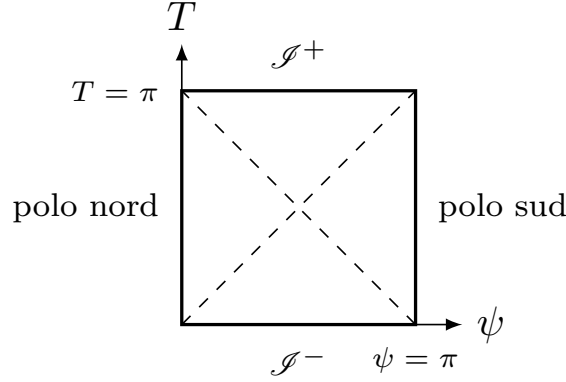


Figura 2.3: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di de Sitter

Possiamo allora dire che lo spaziotempo di de Sitter è conformemente piatto, quindi è conforme allo spaziotempo di Minkowski e all'universo statico di Einstein.

Con curvatura  $k = +1$  [3], la metrica per questo spaziotempo è espressa nella forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)(d\psi^2 + \sin^2\psi d\Omega^2)$$

dove  $a = \frac{1}{H_0}$ . Adesso, effettuando il cambio di coordinate  $\sin T = \operatorname{sech}\left(\frac{t}{a}\right)$ , la metrica assume la forma

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^2 T}(-dT^2 + d\psi^2 + \sin^2\psi d\Omega^2). \quad (2.20)$$

Quindi la metrica dello spaziotempo di de Sitter è conforme a quella dell'universo statico di Einstein tramite un fattore  $\Xi = \frac{\sin T}{a}$ . Notiamo quindi che il bordo dello spaziotempo di de Sitter, che corrisponde ai punti le cui coordinate fanno sì che  $\Xi = 0$ , è dato dalla condizione  $T = 0$  o  $T = \pi$ . Possiamo identificare allora gli infiniti conformi

$$\mathcal{I}^- = \{P \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}} \mid T(P) = 0\} \quad \mathcal{I}^+ = \{P \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}} \mid T(P) = \pi\}. \quad (2.21)$$

A differenza del caso dello spaziotempo di Minkowski, questi infiniti sono infiniti di tipo spazio, poiché la coordinata costante è la coordinata temporale. Il diagramma di Penrose per lo spaziotempo di de Sitter è riportato in Fig. 2.3. Il diagramma assume quindi la forma di un quadrato. Ricordiamo che stiamo esprimendo la compattificazione dello spaziotempo di de Sitter nell'universo statico di Einstein, dove ricordiamo che  $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ , quindi i due lati verticali del quadrato corrispondono all'evoluzione temporale dei poli della 3-sfera. Questo comportamento contrasta con quello dello spaziotempo di Minkowski: in de Sitter non esiste alcun punto (interno o di bordo) il cui cono luce copre l'intero spaziotempo. Ogni osservatore, dunque, è confinato in una regione causale finita: vi è sempre una parte dell'universo che rimane inaccessibile, indipendentemente da quanto tempo passi. In particolare, un osservatore posto al polo sud potrà ricevere segnali solo dalla regione delimitata dalla diagonale che unisce  $(0,0)$  a  $(\pi,\pi)$ , e potrà inviare segnali soltanto nella regione delimitata dalla diagonale opposta. Questa caratteristica riflette la non staticità dello spaziotempo di de Sitter, che è in espansione. Il fattore conforme che abbiamo usato, infatti, codifica l'espansione esponenziale dello spaziotempo. A causa di tale espansione, la distanza conforme tra due punti spaziali tende a un limite finito, mentre la distanza fisica cresce indefinitamente nel tempo cosmologico (ossia quello delle coordinate standard per la metrica di de Sitter).

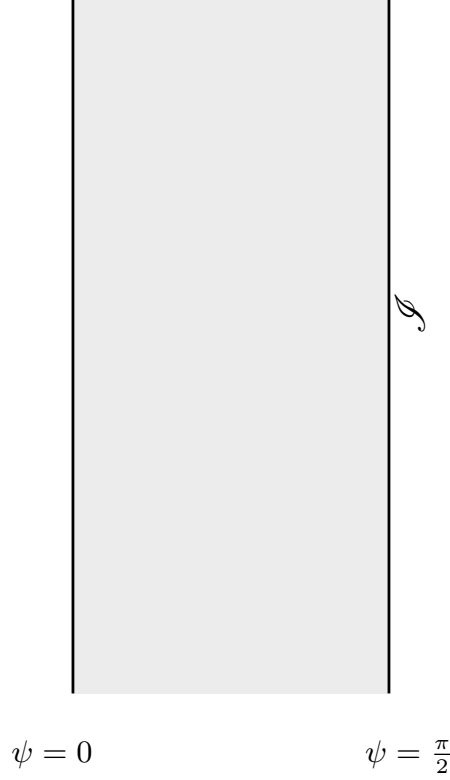


Figura 2.4: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo anti-de Sitter. La coordinata  $T$  aumenta verso l'alto, la coordinata  $\psi$  aumenta verso destra.

### 2.2.6 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo anti-de Sitter

Insieme allo spaziotempo di Minkowski e a quello di de Sitter, il caso anti-de Sitter è l'ultimo con il massimo numero possibile di simmetrie. Questo ultimo esempio descrive un universo con costante cosmologica negativa. Visto che il tensore di Riemann è della forma 2.19, anche questo spaziotempo è conformemente piatto. La metrica assume la seguente forma:

$$ds^2 = -\cosh^2(r)dt^2 + a^2(dr^2 + \sinh^2(r)d\Omega^2).$$

Introducendo adesso [3] i cambi di coordinate  $\tan \psi = \sinh r$  e  $T = \frac{t}{a}$ , la metrica diventa

$$ds^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \psi}(-dT^2 + d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2). \quad (2.22)$$

Abbiamo espresso quindi la metrica dello spaziotempo anti-de Sitter come la metrica dell'universo statico di Einstein tramite un fattore conforme  $\Xi = \frac{\cos \psi}{a}$ . La coordinata  $\psi$  è limitata alla regione  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , quindi il fattore conforme si annulla solo per  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , che corrisponde all'unico infinito conforme. Definiamo allora

$$\mathcal{I} = \left\{ P \in \mathcal{M}_\varepsilon \mid \psi(P) = \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2.23)$$

Il diagramma di Penrose per questo spaziotempo è raffigurato in fig. 2.4. In questo caso, il lato destro della figura è l'unico infinito conforme, che risulta essere di tipo tempo. Questo ha implicazioni importantissime. Consideriamo infatti un osservatore



in un punto generico interno al grafico. Disegnandone il cono luce futuro, si vede che questo osservatore potrebbe raggiungere l'infinito conforme in un tempo finito (non solo  $T$ , ma anche  $t$ , in quanto  $T$  è solo un riscaldamento). Questo vuol dire che per descrivere correttamente il futuro (o, equivalentemente, il passato) di un osservatore non è sufficiente conoscere la geometria dello spaziotempo, ma è anche necessario definire delle condizioni “al contorno” di riflessione sull'infinito conforme. Questa proprietà è detta non iperbolicità globale, ed è una caratteristica fondamentale dell'universo anti-de Sitter e di tutti gli spaziotempi che presentano un infinito conforme di tipo tempo.

In questo capitolo abbiamo esaminato i tre esempi fondamentali di spaziotempi massimamente simmetrici: Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter. Essi sono tutti conformemente piatti e ci hanno permesso di introdurre, in un contesto semplice e controllato, i tre diversi tipi di infinito conforme: nullo, spaziale e temporale. Abbiamo discusso le proprietà principali di ciascun caso, mettendo in evidenza come la struttura conforme racchiuda informazioni geometriche e causali essenziali. Con queste basi concettuali siamo ora pronti ad affrontare spaziotempi più complessi, in cui entrano in gioco sorgenti gravitazionali sfericamente simmetriche. Essi costituiranno i primi esempi non banali in cui la curvatura non è semplicemente cosmologica, ma generata dalla presenza di materia.

## Capitolo 3

# Diagrammi di Penrose per spaziotempi statici a simmetria sferica

### 3.1 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild

Dopo aver analizzato i diagrammi di Penrose per spaziotempi conformemente piatti, possiamo finalmente studiare casi con sorgenti gravitazionali. Consideriamo comunque casi con simmetrie molto forti: imponiamo infatti la simmetria sferica (come definita nel paragrafo 2.2.2) e la staticità, che vuol dire che il sistema deve rimanere costante nel tempo (quindi, equivalentemente, ci deve essere un vettore di Killing di tipo tempo), escludendo quindi spaziotempi che descrivano l'espansione dell'universo (come il caso di de Sitter). L'esempio più rappresentativo di questo gruppo di spaziotempi è sicuramente la soluzione di Schwarzschild, che descrive un universo che comprende una sorgente gravitazionale sferica di massa  $M$  e che, storicamente, fu la prima soluzione che evidenziava la possibile presenza di buchi neri. Vedremo quindi come è possibile rappresentare e descrivere tali oggetti in un diagramma di Penrose, in particolare studiandone la struttura causale.

#### 3.1.1 Massima estensione analitica dello spaziotempo di Schwarzschild

Partiamo innanzitutto dalla metrica standard per lo spaziotempo di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.1)$$

Notiamo che con queste coordinate otteniamo due valori di  $r$  che danno luogo a infiniti:  $r = 0$  e  $r = 2M$ . Solo quella per  $r = 0$  è una vera singolarità “fisica”, mentre  $r = 2M$  è solo un punto non descritto correttamente da queste coordinate. Un nostro obiettivo di partenza sarà allora di passare a coordinate che eliminino questa singolarità.

Consideriamo le geodetiche radiali nulle in questo spaziotempo, che rispettano l'equazione

$$\frac{dr_\gamma}{dt} = 1 - \frac{2M}{r_\gamma}.$$

Integrando, otteniamo l'espressione

$$t = \pm(r + 2M \ln|r - 2M| + cost), \quad (3.2)$$

dove i segni  $-$  e  $+$  sono per traiettorie entranti e uscenti. È utile adesso definire una nuova coordinata temporale  $\bar{t}$  [2], tale per cui le geodetiche radiali nulle entranti risultino rette di  $-45^\circ$  con l'asse  $r$ :

$$\bar{t} = t + 2M \ln(r - 2M). \quad (3.3)$$

È immediato notare che, con questa nuova coordinata, l'equazione 3.2 diventa

$$\bar{t} = -r + cost$$

che è proprio l'equazione di una retta. Con questa nuova coordinata, possiamo riscrivere la metrica come

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r}d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.4)$$

Questa è detta **forma di Eddington-Finkelstein**, che è regolare per  $r = 2M$  (in realtà lo è in tutto il range  $0 < r \leq 2M$ ), e quindi ci permette di estendere il dominio della coordinata radiale a  $0 < r < +\infty$ . Per  $r = 0$  invece la singolarità rimane, poiché non è legata alla scelta di coordinate. Questa è a tutti gli effetti un'estensione analitica della soluzione di Schwarzschild, che permette di descrivere una nuova regione descrivendo però la stessa fisica per  $r > 2M$ . Ci chiediamo allora se sia possibile estendere ulteriormente questa soluzione. Definiamo le **coordinate di Eddington nulle avanzate** e **ritardate**

$$u \equiv t - r - 2M \ln|r - 2M| \quad v \equiv t + r + 2M \ln|r - 2M|$$

con cui riscrivo la metrica come

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dudv + r^2d\Omega^2 \quad (3.5)$$

dove  $r$  è legata alle nuove coordinate tramite

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \ln(r - 2M).$$

Definiamo adesso nuove coordinate

$$U \equiv -4M e^{-\frac{u}{4M}} \quad V \equiv 4M e^{\frac{v}{4M}}$$

tramite le quali scriviamo la metrica nella forma

$$ds^2 = -\frac{2M}{r}e^{-\frac{r}{2M}}dUdV + r^2d\Omega^2 \quad (3.6)$$

dove  $r$  è definita implicitamente dalla relazione

$$UV = -8M(r - 2M)e^{\frac{r}{2M}}.$$

Questa è detta **forma di Kruskal-Székeres** dello spaziotempo di Schwarzschild, e ne è la **massima estensione analitica**. In che modo questa sia un'estensione della soluzione di Eddington-Finkelstein sarà chiaro con il diagramma di Penrose, ma cominciamo a darne un'idea intuitiva [2].

Definiamo le coordinate

$$t' = \frac{1}{2}(V + U) \quad x' = \frac{1}{2}(V - U)$$

con cui è possibile esprimere la metrica nella forma

$$ds^2 = \frac{2M}{r}(-dt'^2 + dx'^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.7)$$

La coordinata radiale  $r$  è definita tramite

$$-t'^2 + x'^2 = (r - 2M)e^{\frac{r}{2M}}. \quad (3.8)$$

Da questa equazione notiamo che  $r$  dipende quadraticamente da  $t'$  e  $x'$ , quindi ad ogni valore di  $r$  sono associate due ipersuperfici distinte. Per esempio, se consideriamo la condizione  $r=0$ , otteniamo due ipersuperfici distinte che definiscono due diverse singolarità (che chiameremo singolarità passata e futura), che non erano descritte dalle coordinate di Eddington-Finkelstein. In ogni caso, come già anticipato, questa estensione sarà evidente nel diagramma di Penrose.

### 3.1.2 Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild

Dalle coordinate di Kruskal-Székeres, che descrivono in maniera completa lo spaziotempo di Schwarzschild, possiamo ricavare coordinate conformi adatte al diagramma di Penrose. Riprendiamo la metrica scritta nella forma (3.6). A questo punto definiamo le nuove coordinate [4]  $\tilde{U} = \arctan(\frac{U}{4M})$  e  $\tilde{V} = \arctan(\frac{V}{4M})$ , dove  $\tilde{U}, \tilde{V} \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ . Possiamo allora scrivere la metrica come

$$ds^2 = \sec^2 \tilde{U} \sec^2 \tilde{V} \left( -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} d\tilde{U} d\tilde{V} + \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V} r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.9)$$

dove è intuitivo considerare la metrica non fisica conforme a questa tramite il fattore  $\Xi = \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}$ . A questo punto consideriamo anche le coordinate  $T \equiv \tilde{U} + \tilde{V}$  e  $\psi \equiv \tilde{V} - \tilde{U}$ , dove sia  $T$  che  $\psi$  hanno dominio  $[-\pi, \pi]$ .

Identifichiamo i seguenti infiniti conformi:

- 4 infiniti nulli

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^+ &= \{\tilde{V} = \frac{1}{2}\pi\} & \mathcal{I}_2^+ &= \{\tilde{U} = \frac{1}{2}\pi\} \\ \mathcal{I}_1^- &= \{\tilde{U} = -\frac{1}{2}\pi\} & \mathcal{I}_2^- &= \{\tilde{V} = -\frac{1}{2}\pi\} \end{aligned}$$

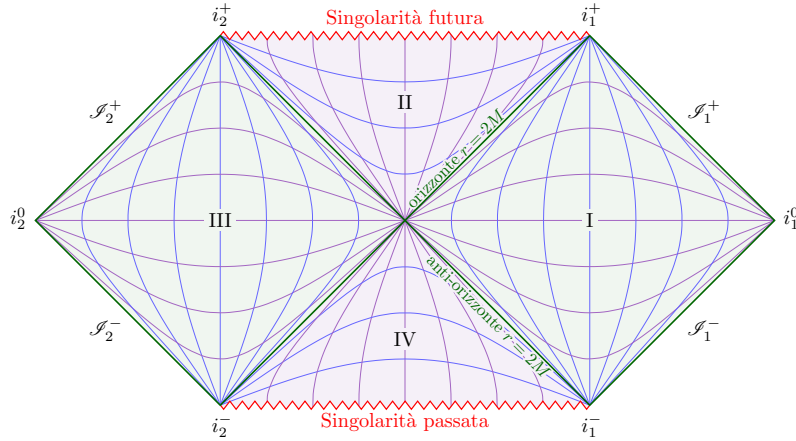


Figura 3.1: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild.

- 2 infiniti spaziali

$$i_1^0 = \{T = 0, \quad \psi = \pi\} \quad i_2^0 = \{T = 0 \quad \psi = -\pi\}$$

- 4 infiniti temporali

$$i_1^\pm = \{T = \pm\pi \quad \psi = \frac{1}{2}\pi\} \quad i_2^\pm = \{T = \pm\pi \quad \psi = -\frac{1}{2}\pi\}$$

A questo punto possiamo disegnare il diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Schwarzschild, rappresentato in figura 3.1. Notiamo immediatamente che il diagramma è diviso in quattro regioni, che convenzionalmente vengono chiamate **Universo**, **Buco Nero**, **Universo Parallelo**, **Buco Bianco** per le regioni I, II, III, IV rispettivamente. Puntualizziamo però che questa è una descrizione della massima estensione analitica della metrica di Schwarzschild, e non rappresenta il vero spaziotempo intorno a un buco nero dato dal collasso stellare (in quel caso, il diagramma sarebbe solo una frazione del grafico complessivo della figura), infatti, non ci sono evidenze sperimentali delle regioni III e IV.

Il diagramma rende chiaro in che modo le coordinate di Kruskal-Székeres estendano quelle standard di Schwarzschild. Sappiamo infatti che queste ultime descrivono efficacemente soltanto la frazione di spaziotempo identificata da  $r > 2M$ . In questo caso quindi descriverebbero soltanto le regioni I e III, separatamente. Le coordinate di Eddington-Finkelstein invece permettono di descrivere anche la regione con  $r < 2M$ , quindi rappresentano correttamente le regioni I e II (o I e IV) simultaneamente. È tramite le coordinate di Kruskal-Székeres che diventa possibile descrivere contemporaneamente tutte e quattro le regioni riportate in figura.

Le regioni I e III sono le uniche che possono essere descritte dalla metrica di Schwarzschild, e sono **asintoticamente piatte**, quindi con  $r \gg 2m$  lo spaziotempo risulta simile a quello di Minkowski. Infatti, i diagrammi di Penrose di queste regioni risultano essere diamanti, del tutto simili a quelli del caso di Minkowski, per cui quindi valgono, in gran parte, le stesse proprietà. I e III non sono collegate causalmente, ma può essere comunque interessante studiare la geometria del loro punto di contatto. Dalla figura 3.1, notiamo innanzitutto che le due regioni si incontrano nel punto  $U=V=0$ , quindi è

possibile passare da I a III (o viceversa) attraverso quel punto tramite una traiettoria di tipo spazio.

Per descriverlo, usiamo la metrica di Schwarzschild. A  $t = 0$ , la geometria spaziale sarà

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Questa metrica descrive separatamente le geometrie delle regioni I e I', che vengono però "incollate" nel punto con  $r = 2M$ , che è chiamato convenzionalmente **Wormhole** o **Ponte di Einstein-Rosen** [5]. Ovviamente questo wormhole non è attraversabile in quanto è di tipo spazio. Cerchiamo ora di scrivere una metrica che descriva contemporaneamente entrambi i lati del wormhole. Introduciamo la nuova coordinata radiale  $r = \rho(1 + \frac{M}{2\rho})^2$ .  $\rho$  ha due valori per ogni  $r > 2M$ , mentre ha un unico valore per  $r = 2M$  (ossia  $\rho = \frac{M}{2}$ ), quindi i due lati del wormhole sono descritti da  $\rho > \frac{M}{2}$  e  $\rho < \frac{M}{2}$ . Con questa coordinata riscriviamo la metrica come

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]. \quad (3.10)$$

Notiamo che, sia per  $\rho \rightarrow 0$  che per  $\rho \rightarrow \infty$  la metrica si riduce a quella di  $\mathbb{R}^3$ . Il ponte di Einstein-Rosen rappresenta quindi una superficie minima nello spaziotempo, un istante di tempo in cui il collo che collega le due regioni asintoticamente piatte raggiunge la sua sezione minima. Tuttavia, tale configurazione non è stabile e non può essere attraversata causalmente.

Consideriamo adesso le regioni II e IV. Esse sono regioni speculari, entrambe in contatto con le regioni I e III, e delimitate da una singolarità di tipo spazio situata a  $r = 0$ .

Nella regione II, un osservatore raggiungerà inevitabilmente la singolarità  $r = 0$  in un tempo proprio finito, qualunque sia la sua traiettoria futura, mentre può provenire da entrambe le regioni I e III. Questo descrive il comportamento tipico di un buco nero: una volta attraversato l'orizzonte degli eventi (la linea che separa le regioni I e III da II), nessuna particella o segnale luminoso può più uscirne, ma tutti sono destinati a terminare sulla singolarità.

La regione IV, invece, rappresenta il buco bianco, ed è temporalmente speculare alla II: in questo caso la singolarità si trova nel passato di ogni osservatore, che sarà poi destinato a emergere nelle regioni I o III, oppure a cadere successivamente nel buco nero. In modo complementare al caso precedente, nessun oggetto può entrare nel buco bianco, ma tutto ciò che si trova al suo interno verrà inevitabilmente espulso. È per questo che si parla di "buco bianco": un oggetto del genere, se potesse esistere fisicamente, apparirebbe luminoso, poiché rilascerebbe tutta la radiazione intrappolata al suo interno.

## 3.2 Diagrammi di Penrose per spaziotempi statici a simmetria sferica

In questa seconda parte del capitolo, vogliamo analizzare nel dettaglio i diagrammi di Penrose degli spaziotempi statici a simmetria sferica, vedendo prima un metodo

generale per costruirli (basandoci sul testo [4]) per poi applicarlo al caso di Reissner-Nordström. Infine, affronteremo brevemente anche casi senza simmetria sferica, in particolare vedremo la soluzione di Kerr. Questi sono tutti spaziotempi che descrivono buchi neri: abbiamo già visto il caso di Schwarzschild di un buco nero con massa  $M$  ma senza carica elettrica e non rotante, quindi le sue estensioni naturali sono quelle di buchi neri carichi elettricamente (Reissner-Nordström) e rotanti (Kerr).

### 3.2.1 Metodo per costruire il diagramma di Penrose di spaziotempi statici a simmetria sferica

In questo paragrafo, vogliamo definire un metodo per costruire diagrammi di Penrose di un generico spaziotempo statico a simmetria sferica che soddisfi la condizione

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.11)$$

dove  $F(r) > 0$  è la norma del vettore di Killing  $\partial_t$  che rappresenta la staticità dello spaziotempo. Non tutti gli spaziotempi statici e sfericamente simmetrici rispettano questa condizione, ma alcuni degli spaziotempi più interessanti (Minkowski, Schwarzschild, Reissner-Nordström) la rispettano, quindi questo caso resta comunque estremamente importante.

Consideriamo uno spaziotempo  $(\mathcal{M}, g)$  che soddisfi le condizioni elencate sopra. Passiamo come al solito alla varietà quoziente  $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/SO(3)$ . La sua metrica  $\gamma$  indotta da  $g$  sarà della forma

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 \quad (3.12)$$

con scalare di Ricci  $R = -F''(r)$ , dove  $F''(r)$  rappresenta la derivata seconda di  $F$  rispetto a  $r$ .

Assumiamo che  $F$  abbia un numero finito di zeri, denotati da  $a_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $F$  tende a un valore costante finito per  $r \rightarrow \infty$ , quindi  $R = -F''(r) \rightarrow 0$ , è possibile ridefinire le coordinate in modo da avere  $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \pm 1$ . In questo caso lo spaziotempo è **asintoticamente piatto** e presenterà un bordo conforme nullo in maniera simile al caso di Minkowski. Se invece, al limite,  $F \rightarrow \pm\infty$ , otteniamo un comportamento asintotico simile a quello degli spaziotempi de Sitter e anti-de Sitter rispettivamente.

Dalla definizione di  $F$ , se questa si annulla, le orbite del vettore di Killing diventano nulle, quindi abbiamo un cosiddetto **orizzonte di Killing**. Questo suggerisce una divisione di  $\mathcal{Q}$  in  $n+1$  blocchi delimitati da due orizzonti di Killing, da un orizzonte di Killing e un infinito conforme, o infine da un orizzonte di Killing e una linea singolare (quindi per un valore specifico di  $r = r_s$ ). A questo punto, per ottenere la massima estensione della varietà  $\mathcal{Q}$  è necessario incollare gli  $n+1$  blocchi elementari identificati dagli zeri di  $F$ , lungo i loro bordi che sono chiamati **superfici di raccordo**. Queste possono essere **non singolari** se  $F = 0$  e  $F''$  è finito, o singolari altrimenti. I blocchi possono essere incollati tra loro solo lungo superfici non singolari lungo le quali  $F''$  è liscio.

Definiamo le regioni

$$\mathcal{Q}_i = \{(t, r) \in \mathcal{Q} \mid t \in \mathbb{R} \quad r \in [a_i, a_{i+1}]\}.$$

Per ogni regione, fissando un valore  $r_i \in [a_i, a_{i+1}]$ , definiamo le coordinate nulle

$$u_i \equiv t - \int_{r_i}^r F^{-1}(\rho) d\rho \quad v_i \equiv t + \int_{r_i}^r F^{-1}(\rho) d\rho$$

Con queste coordinate, la metrica della varietà quoziente prende la forma

$$ds^2 = -F(r) du_i dv_i \quad (3.13)$$

dove le coordinate  $r$  e  $t$  sono descritte implicitamente da

$$\frac{1}{2}(v_i - u_i) = \int_{r_i}^r F^{-1}(\rho) d\rho \quad \frac{1}{2}(v_i + u_i) = t.$$

Questa costruzione vale equivalentemente per blocchi singolari imponendo la condizione  $r_i = r_s$ .

Notiamo che gli integrali usati per definire le coordinate  $u_i$  e  $v_i$  sono divergenti se hanno come estremo di integrazione un  $a_i$ , quindi per  $r \rightarrow a_i$  almeno una delle nuove coordinate deve avere valore infinito.

Definiamo adesso le coordinate compattificate

$$U_i \equiv \arctan u_i \quad V_i \equiv \arctan v_i \quad (3.14)$$

dove  $U_i, V_i \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ . Con queste, riscriviamo la metrica come

$$ds^2 = -F(r) \sec^2 U_i \sec^2 V_i dU_i dV_i, \quad (3.15)$$

dove possiamo esprimere la metrica conforme data dal fattore  $\Xi = \cos U_i \cos V_i$ .

Questa formulazione funziona equivalentemente per  $\mathcal{Q}_i$  in cui la coordinata radiale è definita nel range  $[a_i, \pm\infty)$ , ma la forma del fattore conforme dipende dal comportamento di  $F$  per  $r$  che tende a  $\pm\infty$ :

$$\Xi_i = \begin{cases} \cos U_i \cos V_i, & \text{se } F(r) \rightarrow 1 \text{ per } r \rightarrow \infty, \\ \frac{\cos U_i \cos V_i}{\sqrt{F(r)}}, & \text{se } F(r) \rightarrow \infty \text{ per } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

A questo punto, è possibile disegnare il diagramma di Penrose di uno dei blocchi  $\mathcal{Q}_i$ , come rappresentato in Fig. 3.2. Dalla figura, si evince che, se  $F > 0$ ,  $r$  aumenta da sinistra a destra, mentre se  $F < 0$   $r$  aumenta dal basso verso l'alto. Cambiare il segno di  $F$  quindi, in un certo senso, ruota il blocco: sfrutteremo questa proprietà per incollare i blocchi tra loro. Allo stesso modo, poiché la metrica non dipende esplicitamente da  $t$ , possiamo sfruttare la simmetria  $t \rightarrow -t$  per capovolgere i blocchi (verticalmente se  $F > 0$ , orizzontalmente se  $F < 0$ ). Il diagramma è simile per blocchi che presentano singolarità (indicate da linee a zig-zag orizzontali se di tipo spazio o verticali se di tipo tempo) o infiniti conformi (indicati da linee continue orizzontali se di tipo tempo, verticali se di tipo spazio e ad un angolo di  $45^\circ$  se nulli).

A questo punto, per un dato  $a_i$ , possiamo estendere le geodetiche tali per cui  $r = a_i$  per un valore finito del parametro affine incollando tra loro blocchi elementari le cui superfici di raccordo corrispondono a  $r = a_i$ . Nel pratico, incollare dei blocchi corrisponde a trovare un set di coordinate che descrivano entrambi i blocchi in prossimità



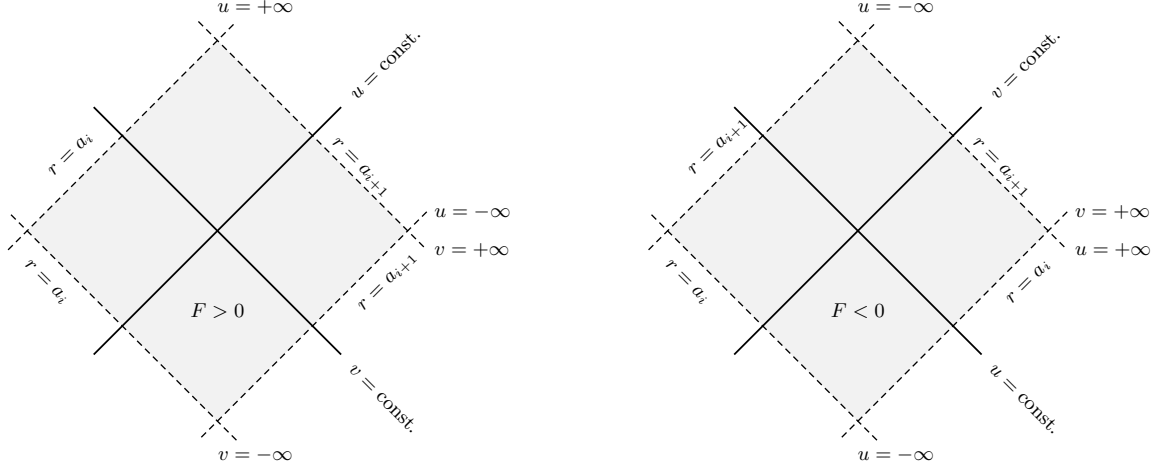


Figura 3.2: Diagramma di Penrose per un blocco elementare  $\mathcal{Q}_i$  con  $F > 0$  a sinistra e  $F < 0$  a destra, entrambi senza infiniti conformi o singolarità

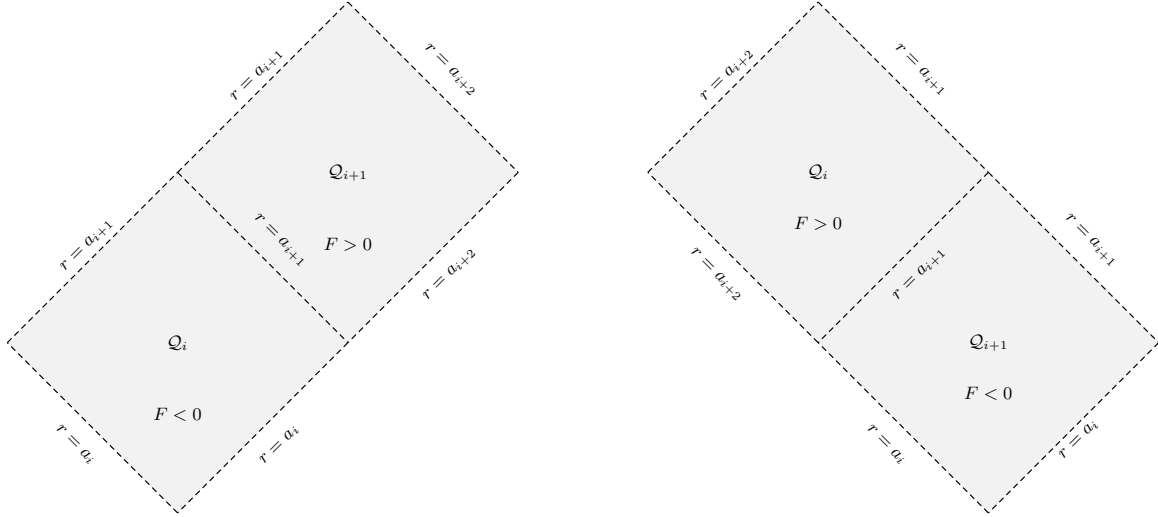


Figura 3.3: Incollamento di due blocchi elementari senza singolarità o infiniti conformi lungo la superficie di raccordo corrispondente a  $r = a_{i+1}$

di  $r = a_i$ , che vengono chiamate **coordinate di tipo Eddington-Finkelstein** (in analogia con le coordinate con lo stesso nome utilizzate per descrivere lo spaziotempo di Schwarzschild). Per convenzione, i blocchi da incollare vengono ruotati o capovolti in modo da fare sì che la coordinata temporale (quindi  $t$  se  $F > 0$  e  $r$  se  $F < 0$ ) aumenti verticalmente. Precisiamo che il metodo funziona equivalentemente per blocchi che presentano infiniti conformi o singolarità, a patto però che le superfici lungo le quali due blocchi vengono incollati siano non singolari.

Per spiegare meglio questo procedimento, descriviamo un esempio. Consideriamo due blocchi senza singolarità o infiniti conformi, associati alle sottovarietà  $\mathcal{Q}_i$  e  $\mathcal{Q}_{i+1}$ . È possibile incollare i due blocchi lungo le rispettive superfici di raccordo con  $r = a_{i+1}$ , come rappresentato in figura 3.3. Questi due modi di incollare i blocchi possono essere impiegati simultaneamente, come mostrato in Fig. 3.4. Da questa costruzione, risulta intuitivo cercare di aggiungere un quarto blocco elementare ricavato dalla riflessione

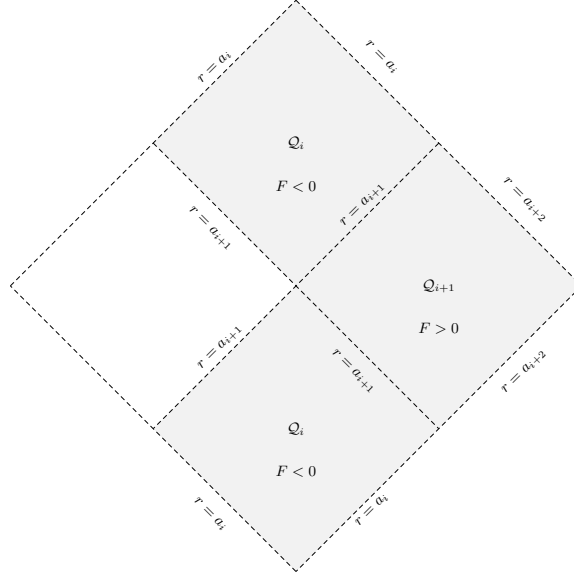


Figura 3.4: Incollamento applicato simultaneamente a tre blocchi elementari

temporale della sottovarietà  $\mathcal{Q}_{i+1}$ . In base alla forma del fattore  $F(r)$ , può essere possibile trovare un set di coordinate che descriva con continuità tutti e quattro i blocchi; questa è una generalizzazione delle coordinate di Kruskal-Székeres usate per descrivere lo spaziotempo di Schwarzschild. La strategia generale per quest'ultimo procedimento consiste nel trovare coordinate  $(U, V)$  tali per cui la metrica appare nella forma

$$ds^2 = -2G(r)dUdV$$

dove  $G$  è limitata e non nulla a  $r = a_{i+1}$ . Devono valere le seguenti condizioni:

$$G\partial_t U \partial_t V = F, \quad \partial_r U \partial_t V + \partial_t U \partial_r V = 0, \quad G\partial_r U \partial_r V = -F^{-1}.$$

Risulta che le soluzioni di queste equazioni sono della forma:

$$U(t, r) = a \exp\left(bt + b \int \frac{dr}{F(r)}\right) \quad V(t, r) = \frac{1}{a} \exp\left(-bt + b \int \frac{dr}{F(r)}\right)$$

$$G(r) = \frac{F(r)}{b^2} \exp\left(-2b \int \frac{dr}{F(r)}\right).$$

Con questo procedimento non è sempre possibile ottenere una funzione  $G(r)$  limitata e non nulla per  $r = a_{i+1}$ . Per esempio, questo metodo funziona correttamente per lo spaziotempo di Schwarzschild, da cui ricaviamo la funzione  $G(r)$  come

$$G(r) = \frac{16M^2}{r} e^{-\frac{r}{2M}}$$

Tramite questo procedimento è allora possibile costruire diagrammi di Penrose per gli spaziotempi statici e con simmetria sferica, dividendone la varietà conforme in blocchi elementari da unire lungo le loro superfici di raccordo non singolari.

### 3.2.2 Diagrammi di Penrose per lo spaziotempo di Reissner-Nordström

La metrica di Reissner-Nordström descrive uno spaziotempo statico e sfericamente simmetrico, che contiene un unico oggetto di massa  $M$  e carica elettrica  $Q$ . È quindi a tutti gli effetti un'estensione della metrica di Schwarzschild, che descrive solo i casi con  $Q = 0$ . La metrica appare nella forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.16)$$

Si nota immediatamente che questa espressione rispetta la condizione 3.11, cosa che quindi ci permette di sfruttare il metodo per costruirne il diagramma di Penrose discusso nello scorso paragrafo.

Notiamo che le coordinate 3.16 presentano due punti singolari; corrispondono a valori della coordinata radiale

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.17)$$

Come già anticipato nel capitolo 1, studieremo solo il caso  $|Q| < M$ .

Avendo identificato due zeri, è conveniente dividere la varietà dello spaziotempo RN in tre regioni:

- I.  $r_+ < r < \infty$ ,
- II.  $r_- < r < r_+$ ,
- III.  $0 < r < r_-$ .

Dove chiaramente la regione II non esiste se  $|Q| = M$ , quindi  $r_+ = r_-$ . Notiamo che, in maniera analoga al caso di Schwarzschild, superando l'orizzonte esterno, quindi  $r = r_+$ , nella metrica il segno di  $t$  e di  $r$  si scambiano. La coordinata  $r$  allora diventa di tipo tempo, mentre la coordinata  $t$  diventa di tipo spazio. Per questo spaziotempo, però, superando l'orizzonte interno, le coordinate  $t$  e  $r$  assumono di nuovo la loro interpretazione originale. Vedremo meglio le implicazioni di questo comportamento disegnando il diagramma di Penrose per questo spaziotempo.

Definiamo la nuova coordinata [2]

$$\bar{t} = t + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-).$$

Con questa coordinata l'elemento di linea della metrica prende la forma

$$ds^2 = -(1 - f)d\bar{t}^2 + 2f d\bar{t}dr + (1 + f)dr^2 + r^2d\Omega^2$$

dove  $f = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$ . In questo modo,  $r$  può essere definita da 0 a  $+\infty$ , estendendo quindi le coordinate standard. È possibile adesso definire le coordinate nulle, che sono della forma  $u = t - r^*$  e  $v = t + r^*$ , dove l'espressione di  $r^*$  è data da  $r^* = \int F(\rho)^{-1}d\rho$ . Nel nostro caso, possiamo scrivere queste coordinate in maniera compatta come

$$v = \bar{t} + r \quad u = 2\bar{t} - v. \quad (3.18)$$

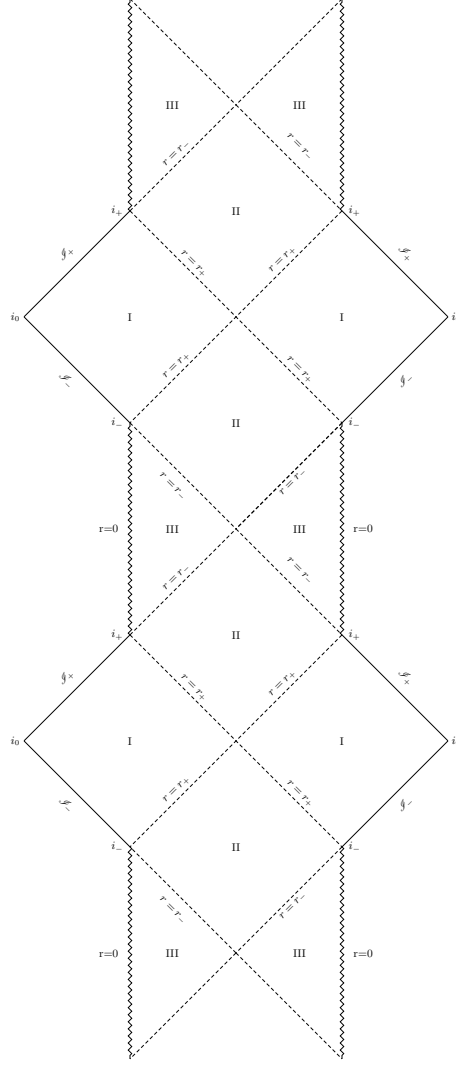


Figura 3.5: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Reissner-Nordström, con  $|Q| < M$ . In linea di principio, il diagramma completo sarebbe una ripetizione infinita di questa struttura.

In questo modo la metrica prende la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

A questo punto possiamo definire le coordinate di tipo Kruskal

$$U = -e^{-\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}u} \quad V = e^{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}v} \quad (3.19)$$

con cui riscriviamo la metrica come

$$ds^2 = -\frac{4r_+^4(r - r_-)^{1 - \frac{r_-^2}{r_+^2}}}{r^2(r_+ - r_-)^2} e^{\frac{r_- - r_+}{r_+^2}r} dV dU + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.20)$$

dove  $r$  è definito implicitamente dalla relazione

$$UV = -e^{\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r} (r - r_+)(r - r_-)^{-\frac{r_-^2}{r_+^2}}. \quad (3.21)$$

A questo punto, definiamo le coordinate compatte  $\tilde{U} = \arctan U$  e  $\tilde{V} = \arctan V$ , entrambe definite nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  con cui possiamo infine a  $T = \tilde{V} + \tilde{U}$  e  $\psi = \tilde{V} - \tilde{U}$ , che sono le coordinate compatte che appaiono nel diagramma. È possibile, a questo punto, disegnare il diagramma di Penrose, come in fig. 3.5. Si nota immediatamente che il diagramma è composto da una struttura fondamentale di 6 blocchi (3 coppie di blocchi che descrivono le regioni I,II,III), che si ripete infinitamente. Come già discusso in precedenza, le regioni di tipo I sono asintoticamente piatte, e presentano un infinito conforme nullo. Queste sono delimitate dall'orizzonte esterno, che corrisponde a  $r = r_+$ . Le regioni di tipo II invece sono intermedie, nel senso che sono delimitate dall'orizzonte esterno e interno, e non presentano né singolarità né infiniti conformi. Le regioni di tipo III invece contengono la singolarità corrispondente a  $r = 0$ , che notiamo però essere di **tipo tempo**; questo vuol dire che, a differenza del caso di Schwarzschild, una particella che entra nella regione non raggiungerà necessariamente la singolarità. È per questo motivo che il diagramma non si interrompe nelle regioni III, non c'è motivo per cui una particella in questa parte dello spaziotempo non possa raggiungere un'ulteriore regione asintoticamente piatta. Questo vuol dire che il modello matematico analizzato non descrive solo un universo che contiene un buco nero con carica elettrica non nulla, ma un'infinità di universi collegati da buchi neri "tunnel", che sono, in linea di principio, attraversabili. La singolarità è di tipo tempo (e non di tipo spazio, come nel caso di Schwarzschild) proprio grazie all'esistenza della regione intermedia II. Infatti, nelle II le coordinate  $r$  e  $t$  diventano rispettivamente temporale e spaziale, mentre passando alla regione III riassumono la loro interpretazione originaria. Precisiamo, come al solito, che questo diagramma è un modello matematico che assume fortissime simmetrie, che non sono realistiche nel caso di un vero buco nero carico elettricamente (che, per altro, non è mai stato osservato in natura).

### 3.2.3 Oltre gli spaziotempi con simmetria sferica

Fino ad adesso, abbiamo analizzato soltanto spaziotempi con simmetria sferica, per i quali la costruzione bidimensionale di Penrose è estremamente efficace. Senza questa proprietà, tale rappresentazione diventa molto più complicata: ricordiamo infatti che fino ad adesso i diagrammi di Penrose erano grafici della varietà quoziente bidimensionale  $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/SO(3)$ ; questo non è più possibile in quanto  $SO(3)$  non è più una simmetria dello spaziotempo. Il diagramma allora perderà la sua globalità, e potrà essere rappresentato solo fissando il valore di una terza coordinata.

In questo paragrafo analizzeremo (omettendo gran parte dei dettagli matematici) lo spaziotempo di Kerr, che descrive uno spaziotempo che contiene solo un oggetto rotante di massa  $m$  e con momento angolare  $J$ .

La metrica più utilizzata per descrivere lo spaziotempo di Kerr è detta di **Boyer-Lindquist** [2], e assume la seguente forma:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (3.22)$$

dove  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$  e  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . Risulta che  $m$  sia la massa del corpo, mentre  $a$  è un parametro legato alla sua velocità angolare (e, di conseguenza,  $ma$  è legato al suo momento angolare). Questa soluzione ha simmetria assiale (rispetto all'asse definito da  $\theta = 0$ ), ed è asintoticamente piatta. Inoltre, nel limite  $a \rightarrow 0$ ,

si ritorna al caso di Schwarzschild. In questa trattazione, analizzeremo solo il caso  $a^2 < m^2$ . Questa soluzione contiene un'unica singolarità intrinseca corrispondente a  $\rho = 0$ , ossia con coordinate  $r = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , o in coordinate di Kerr-Schild (che nella nostra trattazione molto semplificata sarebbero simili a coordinate cartesiane) corrisponde a

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (3.23)$$

che è quindi un anello di raggio  $a$ . Inoltre, per la soluzione di Kerr, le superfici di redshift infinito (ossia in cui l'elemento  $g_{tt}$  della metrica cambia segno) e gli orizzonti degli eventi non corrispondono: le superfici sono date da

$$r_{S\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

mentre gli orizzonti degli eventi corrispondono a

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.$$

La regione compresa tra  $r_+$  e  $r_{S+}$  è detta **Ergosfera**, regione molto importante per le proprietà fisiche di questa soluzione ma che non approfondiremo. In maniera analoga al caso di Reissner-Nordström, possiamo dividere lo spaziotempo in tre regioni:

- I.  $r_+ < r < \infty$ ,
- II.  $r_- < r < r_+$ ,
- III.  $0 < r < r_-$ .

Dopo aver fissato  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , rappresentiamo il diagramma di Penrose per la massima estensione analitica dello spaziotempo di Kerr, per  $a^2 < m^2$  in Fig. 3.6. Questo diagramma di Penrose ha una struttura molto simile a quello del caso di Reissner-Nordström, nel senso che ci sono regioni di tipo I asintoticamente piatte, regioni di tipo II intermedie, delimitate da  $r_+$  e  $r_-$ , e le zone di tipo III che contengono le singolarità. Inoltre, anche per questo spaziotempo la singolarità è di tipo tempo, quindi un osservatore può fuoriuscire dalla regione III per tornare di nuovo in una zona uniformemente piatta. La differenza fondamentale tra i diagrammi di Penrose di questi due spaziotempi è legata alla natura della singolarità di Kerr, che è appunto un anello invece che un punto. L'anello infatti può essere attraversato (visto che la metrica è perfettamente regolare all'interno dell'anello), quindi è possibile estendere questa soluzione a valori negativi della coordinata radiale, in quanto si può raggiungere e superare  $r = 0$  evitando il piano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Abbiamo quindi una nuova regione con coordinata radiale negativa, a volte suggestivamente denominata **Anti Universo**, che presenta vari fenomeni fisici inusuali. Ad esempio, in questo anti universo, è possibile costruire traiettorie dette **CTC** (Closed Timelike Curves) [6], cioè curve di tipo tempo chiuse, che quindi permetterebbero a un osservatore di raggiungere il suo stesso passato in un intervallo di tempo proprio positivo. È chiaro che queste proprietà descrivono un universo non fisico e irrealistico, frutto soltanto della massima estensione matematica di una metrica fisica. Resta comunque molto interessante vedere fino a che punti sia possibile estendere questa teoria, per esplorare le proprietà che questa prevede anche per regioni causalmente irraggiungibili.

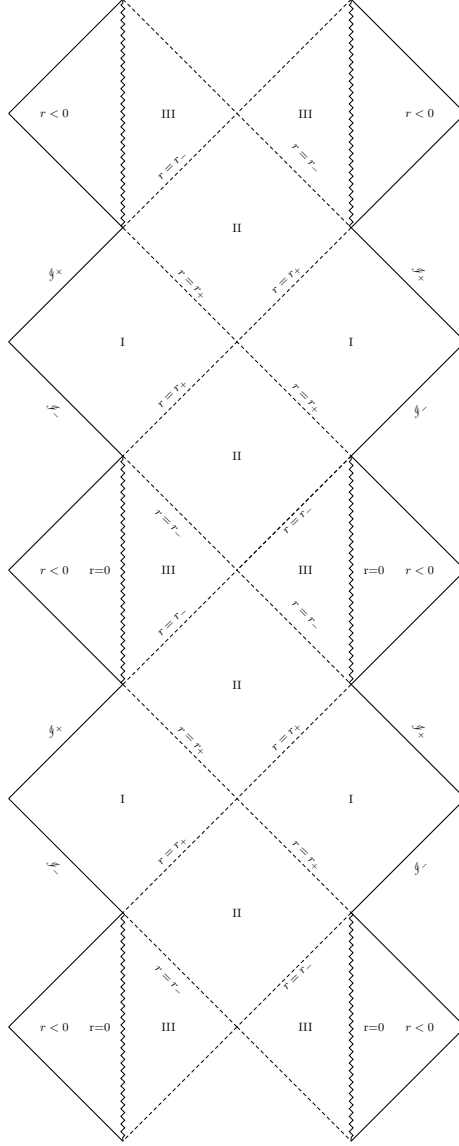


Figura 3.6: Diagramma di Penrose per la sezione con  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dello spaziotempo di Kerr, con  $a^2 < m^2$ .

Con la trattazione dello spaziotempo di Kerr si conclude questo capitolo. Abbiamo analizzato principalmente diagrammi di Penrose relativi a spaziotempi che descrivono diversi tipi di buchi neri: dallo spaziotempo di Schwarzschild, passando per quello di Reissner–Nordström, fino a una breve parentesi dedicata alla soluzione di Kerr. I diagrammi di Penrose si sono rivelati strumenti estremamente efficaci per visualizzare la struttura causale dei diversi domini dello spaziotempo. La loro costruzione ha permesso di mettere in evidenza le caratteristiche fisiche dei buchi neri e di comprendere, almeno dal punto di vista teorico, il comportamento della geometria al di là dell'orizzonte degli eventi, una regione che resta inevitabilmente inaccessibile all'osservazione diretta.

# Conclusioni

Nel corso di questa tesi abbiamo studiato, a partire dai metodi della geometria conforme, un modo di rappresentare la struttura causale di spaziotempi complessi, ossia i *diagrammi di Penrose*.

Dopo un capitolo introduttivo sulle basi della geometria differenziale e della relatività generale, siamo passati allo studio della geometria conforme. Abbiamo visto che con trasformazioni conformi della metrica (che consistono nel moltiplicare la metrica per un fattore *conforme* al quadrato) si può compattificare uno spaziotempo infinito in uno spazio finito, mantenendone però intatta la struttura causale. Con questi strumenti, abbiamo costruito il diagramma di Penrose per la metrica di Minkowski, un punto di partenza e un riferimento per tutte le regioni *asintoticamente piatte* di spaziotempi più complessi. A questo punto siamo passati allo spaziotempo di de Sitter e anti-de Sitter, che ci hanno permesso di introdurre gli infiniti conformi di tipo tempo e di tipo spazio, e il cui diagramma di Penrose ha rivelato molte caratteristiche interessanti (come la non iperbolicità globale per il caso anti-de Sitter).

Nell'ultima parte invece, siamo passati allo studio di spaziotempi statici con simmetria sferica. Il primo caso è stato quello dello spaziotempo di Schwarzschild, di cui abbiamo innanzitutto trovato la massima estensione analitica (tramite le coordinate di Kruskal-Szekeres), che abbiamo sfruttato per disegnare il diagramma di Penrose. Abbiamo trovato varie caratteristiche interessanti: oltre al buco nero (per cui il diagramma rende chiaro che niente possa uscire una volta superato l'orizzonte degli eventi) e a una regione asintoticamente piatta abbiamo trovato anche una loro versione *speculare*, che abbiamo chiamato *universo parallelo* e *buco bianco*. Abbiamo anche analizzato brevemente la struttura del punto di contatto tra le due regioni asintoticamente piatte, che prende il nome di *ponte di Einstein-Rosen*.

Successivamente, seguendo l'esempio del caso di Schwarzschild, abbiamo studiato un metodo per realizzare diagrammi di Penrose per spaziotempi statici con simmetria sferica: abbiamo visto che se la funzione  $F(r)$  che moltiplica il termine temporale della metrica ha  $n$  zeri, è possibile dividere lo spaziotempo in  $n + 1$  blocchi elementari, che se incollati appropriatamente permettono di costruire il diagramma conforme. In seguito, abbiamo sfruttato questo procedimento per realizzare il diagramma dello spaziotempo di Reissner-Nordström, che presenta una struttura che si ripete infinitamente, in cui un osservatore che supera l'orizzonte interno del buco nero non è costretto a finire sulla singolarità, ma può anche emergere in una nuova regione asintoticamente piatta. L'ultimo spaziotempo analizzato è stato quello di Kerr: il suo diagramma di Penrose risulta molto simile a quello del caso di Reissner-Nordström con però una ulteriore regione oltre la singolarità ad anello con proprietà molto inusuali, come la possibilità per un osservatore di tornare nel proprio passato in un tempo proprio positivo.

In conclusione, costruendo i diagrammi conformi per alcune delle più importanti solu-



zioni delle equazioni di Einstein, abbiamo visto quanto questi strumenti siano potenti. Una volta capito il funzionamento di questi grafici, anche senza conoscere i dettagli matematici che descrivono uno specifico spaziotempo, solo dal diagramma di Penrose è possibile avere un'intuizione sulle sue caratteristiche fondamentali, in maniera semplice e immediata. Oltre al valore scientifico, i diagrammi di Penrose hanno quindi anche grande valore comunicativo e didattico.

# Bibliografia

- [1] Roberto Casadio. *Elements of General Relativity*. Dispense del corso di "Elementi di teoria della relatività generale" tenuto dal prof. Casadio, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, 2025.
- [2] Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1992.
- [3] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.
- [4] Juan A. Valiente Kroon. *Conformal Methods in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2022.
- [5] David Tong. General relativity. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr/gr.pdf>, 2019. Lecture notes, University of Cambridge.
- [6] S. W. Hawking and G. F. R Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1973.