

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Emissione di corpo nero e applicazioni astrofisiche

Tesi di laurea

Presentata da:
Paride Bianco

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Appello III
Anno Accademico 2024-2025

*Ai miei fratelli
Jacopo, Angela, Chrystel
che mi hanno insegnato
a vedere questo Mondo a
diverse lunghezze d'onda.*

Indice

1 Teoria generale	3
1.1 Spettro di corpo nero	3
1.1.1 Derivazione di B_ν	4
1.1.2 Alcune proprietà della funzione di Planck	5
1.2 Leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann	6
1.2.1 Legge dello spostamento di Wien	7
1.2.2 Legge di Stefan-Boltzmann	7
1.3 Temperature	8
1.3.1 Temperatura efficace	8
1.3.2 Temperatura di brillanza	8
1.3.3 Temperatura di colore	9
1.4 Termodinamica	10
1.4.1 Emissività all'equilibrio termico	10
1.4.2 Legge di Kirchhoff	10
1.4.3 Termodinamica del corpo nero	10
2 Stelle	12
2.1 Spettri stellari	13
2.1.1 Spettro del Sole	13
2.1.2 Classi spettrali	14
2.2 Temperatura di corpo nero di un pianeta	14
2.3 Stelle in banda radio	15
3 CMB	16

Capitolo 1

Teoria generale

Un corpo a contatto termico con una sorgente più calda tende a scaldarsi. L'esperienza mostra che la temperatura del corpo non cresce a valori arbitrariamente grandi, ma tende a stabilizzarsi ad una *temperatura di equilibrio*. Dato che la sorgente continua a fornire energia, per preservare l'*equilibrio termico* è necessario che il corpo emetta energia. Tale emissione avviene tramite l'agitazione termica degli elettroni presenti nel corpo, che producono così una *radiazione termica*. Questa radiazione dipende soltanto dalla temperatura T e dalla frequenza ν di emissione, se il corpo è un oggetto ideale in grado di assorbire tutta la radiazione incidente. Un oggetto di questo tipo prende il nome di *corpo nero*. Non dipendendo dalle caratteristiche dell'emettitore, come forma o composizione, l'*emissione di corpo nero* risulta una legge fondamentale della Natura. L'interesse principale riguardo questa radiazione sta nel fatto che, all'equilibrio termico, qualsiasi sorgente otticamente spessa può essere approssimata ad un corpo nero ideale. Il confronto dello *spettro di corpo nero* con uno spettro osservato permette quindi di ricavare notevoli caratteristiche dell'oggetto emettitore.

1.1 Spettro di corpo nero

Si consideri un corpo cavo di un materiale opaco e non riflettente mantenuto a temperatura T . Se non si permette alla radiazione di uscire o entrare fino al raggiungimento dell'equilibrio, è possibile ottenere un emettitore che si comporta in maniera simile ad un corpo nero ideale. Aprendo un foro di dimensioni trascurabili rispetto al campione preso in esame, è possibile studiare la radiazione interna alla cavità senza alterarne l'equilibrio. Questa radiazione risulta indipendente dalle proprietà del corpo emettitore e dipende soltanto dalla temperatura. Per giustificare ciò, si considerino due corpi neri alla stessa temperatura T costruiti come sopra indicato e li si metta a contatto termico attraverso un filtro che permette il passaggio di una radiazione monocromatica a frequenza ν . Siano poi I_ν e I'_ν le intensità specifiche del primo e del secondo corpo rispetto alla superficie di contatto tra i due. Se $I_\nu \neq I'_\nu$ si ha un trasferimento netto di energia tra due corpi che hanno la stessa temperatura, e questo risulta in una violazione del secondo principio della termodinamica. L'argomento appena esposto non tiene conto della forma o della composizione dei corpi neri, dunque I_ν è una funzione universale della temperatura T e della frequenza ν . A questa funzione si dà il nome di *funzione di Planck* e la si indica con $B_\nu(T)$.

1.1.1 Derivazione di B_ν

La forma analitica di B_ν è di seguito ricavata seguendo un ragionamento dovuto a Rayleigh e Jeans e utilizzando la nota ipotesi di Planck sulla quantizzazione delle oscillazioni.

Come corpo nero si considera una scatola cubica di lato l formata da un materiale conduttore. Mantenendo il corpo ad una temperatura T si instaura un equilibrio tra la radiazione emessa e le pareti della scatola. La radiazione interna può essere analizzata lungo le tre direzioni identificate dai lati della scatola tra loro perpendicolari. Dato che la radiazione elettromagnetica è un'onda trasversale, con il campo elettrico \vec{E} perpendicolare alla direzione di propagazione, e dato che le direzioni sopra citate sono perpendicolari alle pareti della scatola, il campo elettrico è parallelo alle pareti della scatola. Gli elettroni nelle pareti conduttrici si distribuiscono in modo tale da neutralizzare qualunque campo elettrico parallelo. Si conclude che \vec{E} è nullo sulle pareti della scatola. La radiazione interna risulta quindi costituita da onde stazionarie. Considerando un'onda elettromagnetica con vettore d'onda $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ il numero di nodi lungo la direzione i -esima è $n_i = k_i \frac{l}{\pi}$. Si ottiene allora:

$$\vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2}$$

da cui si ricava

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4l^2 \nu^2}{c^2} = r^2(\nu) \quad (1.1)$$

L'equazione (1.1) è quella di una sfera in \mathbb{Z}^3 di raggio $r(\nu) = \frac{2l\nu}{c}$ ed è la relazione che una terna di numeri naturali (n_1, n_2, n_3) deve soddisfare per rappresentare un'onda stazionaria che si propaga all'interno della cavità in esame. Il numero di onde stazionarie con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ dipende dal numero di punti nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra i raggi $r(\nu)$ e $r(\nu + d\nu)$. Il volume di questa porzione di spazio è dato da :

$$V = \frac{1}{8} 4\pi r^2(\nu) dr = \frac{1}{8} 4\pi \frac{4l^2 \nu^2}{c^2} \frac{2l}{c} d\nu = 4\pi \frac{l^3 \nu^2}{c^3} d\nu$$

il numero di punti $N(\nu)$ in V equivale al prodotto tra la densità di punti in \mathbb{Z}^3 (che è 1 per definizione) e V . Considerando che esistono due direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde elettromagnetiche si può infine ricavare il numero di onde stazionarie per unità di volume con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$:

$$\rho_s(\nu) d\nu = \frac{2N(\nu)}{l^3} = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.2)$$

Dove ρ_s è la *densità di stati*. Ora è necessario descrivere l'energia media di un oscillatore di frequenza ν . Secondo l'ipotesi di Planck la radiazione viene emessa dagli oscillatori delle pareti della scatola attraverso *quanti di energia*. Per una data frequenza ν , ogni quanto trasporta un'energia pari a $h\nu$ dove h è una costante fondamentale (*costante di Planck*). Ogni oscillatore con frequenza di oscillazione ν può allora emettere solo un numero discreto n di quanti, irradiando un'energia pari a $\varepsilon_n = nh\nu$. Se gli elettroni oscillano seguendo una distribuzione di Maxwell, allora

la distribuzione di energia irradiata è proporzionale a $e^{-\beta\varepsilon_n}$, e dipende dalla costante di Boltzmann k attraverso $\beta = (kT)^{-1}$. L'energia media $\bar{\varepsilon}$ emessa da un oscillatore di frequenza ν è data allora da:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} \right)$$

l'argomento del logaritmo è una serie geometrica convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = (1 - e^{-\beta h\nu})^{-1}$$

da cui

$$\bar{\varepsilon} = h\nu e^{-\beta h\nu} (1 - e^{-\beta h\nu})^{-1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.3)$$

La densità di energia per unità di frequenza è data dal prodotto di (1.2) e (1.3) e risulta $u_\nu = 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$. L'intensità specifica B_ν si ricava da u_ν usando la relazione $u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu$. La forma analitica della funzione di Planck è quindi ottenuta

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1.4)$$

La funzione di Planck si può riscrivere nel dominio della grandezza $\vartheta = \vartheta(\nu)$ richiedendo che $B_\vartheta = B_\nu |\frac{d\nu}{d\vartheta}|$. In particolare, nel dominio delle lunghezze d'onda la funzione di Planck si scrive:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (1.5)$$

1.1.2 Alcune proprietà della funzione di Planck

Come si vede dalle (1.4) e (1.5), la radiazione di corpo nero è isotropa, in accordo con le considerazioni iniziali. L'andamento di $B_\nu(T)$ al variare della frequenza e della temperatura è mostrato in Figura 1.1. Come si vede, le curve di corpo nero a diversa temperatura non si intersecano mai: le curve corrispondenti a temperature maggiori stanno al di sopra di quelle corrispondenti a temperature minori. Infatti:

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial T} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2 k T^2} \frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT) - 1]^2} > 0$$

da cui segue che B_ν è strettamente crescente con la temperatura. Dalla (1.4) è possibile ricavare due regimi particolarmente interessanti.

- **Regime di Rayleigh-Jeans.** Questo corrisponde a frequenze basse, tali per cui $h\nu \ll kT$. Espandendo l'esponenziale della (1.4) in serie di Taylor si ottiene il limite

$$B_\nu(T) \rightarrow I_\nu^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad (1.6)$$

Di particolare interesse è l'andamento lineare su scala logaritmica tra Intensità specifica e frequenza $\ln(I_\nu^{RJ}) \propto \ln(\nu)$. Questa tendenza si osserva anche nel grafico di Figura 1.1.

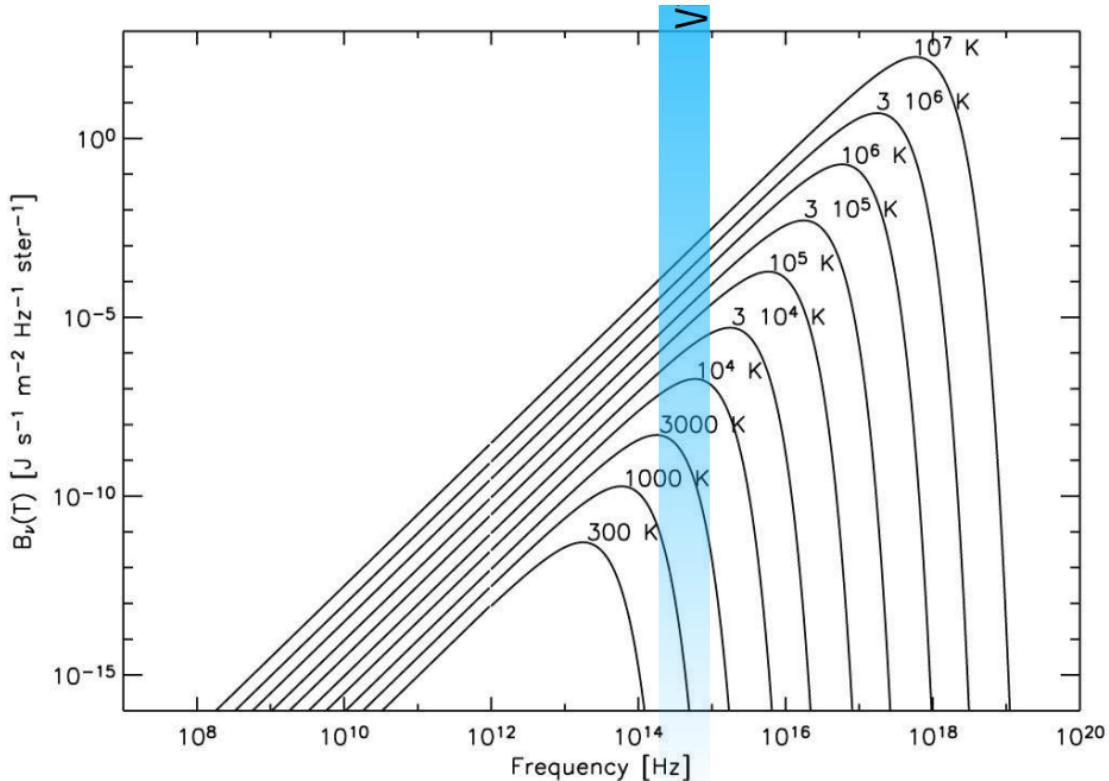


Figura 1.1: Spettro di corpo nero su scala logaritmica e a diverse temperature. In ogni curva si osservano un andamento lineare per emissioni con $\nu < \nu_{max}$, e una rapida diminuzione dell’energia irradiata alle frequenze $\nu > \nu_{max}$. La striscia blu segna la regione del visibile (*Gentile concessione del prof D. Dallacasa*).

- **Regime di Wien.** Corrisponde alla regione di alta frequenza, in cui $h\nu \gg kT$. Dato che in questo limite $\exp(h\nu/kT) \gg 1$ dalla (1.4) si osserva che

$$B_\nu(T) \rightarrow I_\nu^W(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (1.7)$$

Ad alte frequenze l’energia emessa da un corpo nero diminuisce esponenzialmente all’aumentare di ν . Questo perchè la più piccola quantità di energia che può essere emessa è quella di un fotone e, a frequenze sufficientemente alte, l’energia di un solo quanto è superiore a quella a disposizione del corpo.

1.2 Leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann

Si presentano ora due leggi di notevole utilità in astronomia: la legge dello spostamento di Wien e la legge di Stefan-Boltzmann. Queste relazioni furono dapprima osservate empiricamente, tramite l’analisi di spettri di corpi neri. La loro giustificazione teorica seguì il successo di Planck nel derivare la (1.4). Il fatto che le leggi di Wien e Stefan-Boltzmann si possano ricavare dalla (1.4) costituisce una delle prime conferme all’ipotesi della quantizzazione dell’energia.

1.2.1 Legge dello spostamento di Wien

Osservando i grafici in Figura 1.1, si osserva che il picco di massima emissione si sposta verso frequenze più alte all'aumentare della temperatura. La frequenza ν_{max} corrispondente al picco di B_ν si ottiene imponendo

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_{max}} = 0$$

Questo porta all'equazione non algebrica

$$x = 3(1 - e^{-x}) \quad \wedge \quad x = h\nu_{max}/kT$$

da cui si ottiene

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ HzK}^{-1} \quad (1.8)$$

che è la *legge dello spostamento di Wien*: la frequenza di massima emissione è direttamente proporzionale alla temperatura.

La legge di Wien può essere ricavata in maniera analoga dalla (1.5), ottenendo

$$\lambda_{max}T = 0.290 \text{ cmK} \quad (1.9)$$

Dato che B_ν e B_λ sono distribuzioni e dato che la relazione tra ν e λ non è lineare, in generale $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$.

1.2.2 Legge di Stefan-Boltzmann

Le equazioni (1.4) e (1.5) sono definite in modo tale da poter ricavare la stessa intensità bolometrica $B(T)$ integrando su tutto il dominio delle frequenze e delle lunghezze d'onda rispettivamente. Si ottiene allora:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

la sostituzione $x = h\nu/kT$ conduce all'integrale

$$B(T) = \left(\frac{2}{c^2} \frac{k^4}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right) T^4$$

da cui si osserva che $B(T) \propto T^4$. La costante di proporzionalità è ricavata risolvendo l'integrale di cui sopra con metodi non elementari. Il valore dell'integrale è $\pi^4/15$. Dato che la radiazione di corpo nero è isotropa, il flusso F attraverso la superficie del corpo nero è legato all'intensità bolometrica dalla relazione

$$F(T) = \pi B(T) = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \right) T^4 = \sigma T^4 \quad \wedge \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ ergK}^{-4} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \quad (1.10)$$

che è chiamata *legge di Stefan-Boltzmann*. Da questa legge si può ricavare una relazione tra la luminosità L e la temperatura di una stella. In prima approssimazione, le stelle godono di simmetria sferica. Si consideri quindi una stella come un corpo

nero sferico di raggio R . Dato che la radiazione emessa è isotropa, il flusso bolometrico attraverso la superficie è pari al rapporto tra la luminosità e l'area superficiale della stella. Utilizzando la legge di Stefan-Boltzmann si conclude che:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T^4 \implies L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (1.11)$$

fissate le dimensioni e la temperatura della stella, la luminosità è determinata dalla (1.11).

1.3 Temperature

La temperatura definisce il flusso bolometrico, attraverso la (1.10), e il picco di emissione, attraverso la (1.8). Queste leggi permettono di determinare la magnitudine e il colore di una stella. Tuttavia la temperatura di una sorgente può essere a sua volta definita in vari modi, a seconda del criterio usato per confrontare lo spettro della funzione di Planck con i dati osservati.

1.3.1 Temperatura efficace

La temperatura efficace di una sorgente è definita come la temperatura che deve avere un corpo nero per emettere lo stesso flusso bolometrico della sorgente in esame. Come sorgente se ne consideri una di forma sferica, di raggio R e posta ad una distanza d dall'osservatore. Il flusso misurato da terra F' è legato al flusso F attraverso la superficie della sorgente dalla *legge dell'inverso del quadrato*. La temperatura efficace T_{eff} è allora definita dalla relazione:

$$F' = \frac{R^2}{d^2} F = \frac{R^2}{d^2} \sigma T_{eff}^4 = (\delta/2)^2 \sigma T_{eff}^4$$

dove δ è il diametro angolare della sorgente.

1.3.2 Temperatura di brillanza

L'intensità monocromatica di una sorgente può essere caratterizzata dalla temperatura di brillanza T_b . T_b è la temperatura di un corpo nero che, alla frequenza osservata, ha la stessa intensità specifica della sorgente. Questa definizione è utile specialmente per studiare emissioni a bassa frequenza, ed è perciò utilizzata in radioastronomia. In questi casi il regime di Rayleigh e Jeans è valido e la temperatura di brillanza è ricavata dalla (1.6)

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} k T_b$$

dove I_ν è l'intensità specifica della sorgente alla frequenza di osservazione ν . In generale quindi, T_b dipende dalla frequenza ν : solo se la sorgente è un corpo nero T_b è la stessa a tutte le frequenze. Nel regime di Rayleigh-Jeans $I_\nu \propto T$. Questo permette di scrivere un'equazione del trasporto radiativo lineare nella temperatura:

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T$$

dove τ_ν è lo *spessore ottico* (o *profondità ottica*) del materiale emettitore alla frequenza considerata. Si osserva che per corpi otticamente spessi ($\tau_\nu \gg 1$) la temperatura di brillanza tende alla temperatura del materiale: $T_b \rightarrow T$. Come è ben prevedibile infatti, il comportamento di corpo nero ideale è ben approssimato da sorgenti otticamente spesse. Il concetto di temperatura di brillanza non è utilizzato per descrivere emissioni ad alta energia, dato che nel regime di Wien piccole variazioni della frequenza di osservazione corrispondono a grandi cambiamenti dell'intensità (come si vede dalla Figura 1.1). Inoltre, come si vede dalla (1.7), in questo caso non è possibile scrivere un'equazione del trasporto radiativo lineare nella temperatura.

1.3.3 Temperatura di colore

Le due temperature già presentate dipendono dalla magnitudine della sorgente attraverso il flusso, l'intensità e le dimensioni angolari. Non sempre queste quantità sono note: il flusso attraverso la superficie di una stella può essere ricavato da quello misurato da terra se la distanza della stella e il suo raggio sono noti. A volte però, soltato la distribuzione di energia della sorgente è conosciuta. In questi casi la forma dello spettro osservato è confrontata con la funzione di Planck a diverse temperature, entro un certo intervallo di frequenza $[\nu_1, \nu_2]$ e senza considerare la scala di normalizzazione verticale. Si definisce temperatura di colore T_c la temperatura corrispondente alla funzione di Planck che meglio approssima la forma dello spettro osservato nell'intervallo di frequenza considerato. Dato che la sorgente in esame può avere uno spettro che molto si discosta da quello di corpo nero, la temperatura di colore è diversa per diversi intervalli di frequenza. Se si è interessati solo al picco di emissione, la temperatura di colore può essere ottenuta direttamente dalla (1.8).

Si supponga ora di aver misurato il flusso di una sorgente alle frequenze ν_1 e ν_2 , con valori F'_{ν_1} e F'_{ν_2} . Se lo spettro della sorgente è ben approssimato dalla funzione di Planck nell'intervallo $[\nu_1, \nu_2]$, allora:

$$\frac{F'_{\nu_1}}{F'_{\nu_2}} = \frac{B_{\nu_1}}{B_{\nu_2}} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^3 \frac{\exp(h\nu_2/kT) - 1}{\exp(h\nu_1/kT) - 1}$$

e il valore della temperatura che risolve questa equazione è la temperatura di colore dell'intervallo considerato. Per temperature sufficientemente piccole, è possibile utilizzare la (1.7) quando $[\nu_1, \nu_2]$ è nella banda del visibile. In questo caso la differenza tra le magnitudini relative alle frequenze ν_1 e ν_2 è una misura diretta della temperatura di colore. Si ha infatti:

$$m_{\nu_1} - m_{\nu_2} = -2.5 \log \left(\frac{F'_{\nu_1}}{F'_{\nu_2}} \right) + q = -7.5 \log \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right) - 2.5 \frac{h}{kT} (\nu_2 - \nu_1) \log(e) + q$$

dove q è una costante che dipende dalla scala di magnitudini utilizzata. L'equazione di cui sopra può essere riscritta come segue:

$$m_{\nu_1} - m_{\nu_2} = a + \frac{b}{T_c}$$

dove a, b sono costanti che dipendono dalle frequenze osservate. Quando ν_1 e ν_2 sono le frequenze efficaci delle bande B e V , la differenza di magnitudini $m_{\nu_1} - m_{\nu_2}$ è di fatto l'indice di colore $B - V$. La temperatura T_c può quindi essere ricavata dall'indice di colore.

1.4 Termodinamica

Concludo questo capitolo citando dei risultati di termodinamica abbastanza generali.

1.4.1 Emissività all'equilibrio termico

L'emissività $e(\nu)$ di un corpo che emette a temperatura T una radiazione di intensità specifica I_ν si definisce $e(\nu) = I_\nu/B_\nu(T)$. Si immagini che un oggetto emettitore sia posto all'interno di una cavità, circondato da un filtro che lascia passare solo radiazione di frequenza compresa tra ν e $\nu+d\nu$. Sia $a(\nu)$ la probabilità che un fotone di frequenza ν venga assorbito dal corpo in esame. In condizioni di equilibrio termico, a temperatura T , l'energia emessa dal corpo deve essere pari a quella assorbita e perciò:

$$e(\nu) = a(\nu)$$

da cui segue, dato che $a(\nu) \leq 1$:

$$I_\nu = e(\nu) B_\nu(T) = a(\nu) B_\nu(T) \leq B_\nu(T)$$

ovvero, in condizioni di equilibrio termico, non è possibile irradiare più energia di un corpo nero che si trova alla temperatura di equilibrio.

1.4.2 Legge di Kirchhoff

Si consideri un emettitore termico a temperatura T , posto all'interno di una cavità di corpo nero, anch'essa a temperatura T . Sia S_ν la funzione sorgente dell'emettitore. Se $S_\nu \neq B_\nu(T)$, l'energia uscente dalla cavità risulterebbe o maggiore o minore di quella emessa da un corpo nero¹. Tuttavia, la presenza del materiale emettitore non può alterare l'intensità di un corpo nero a temperatura T , dato che la configurazione in esame è un corpo nero a temperatura T . Per questo deve essere

$$S_\nu = B_\nu(T) \implies j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad (1.12)$$

dove j_ν e α_ν sono rispettivamente i coefficienti di *emissione* e *assorbimento* dell'oggetto emettitore. La (1.12) è la *legge di Kirchhoff per l'emissione termica* e vale in condizioni di equilibrio termico o di equilibrio termico locale.

1.4.3 Termodinamica del corpo nero

La pressione p associata alla radiazione di corpo nero è legata alla densità di energia u . Dato che la radiazione è isotropa si ha $p = u/3$. Questa pressione è in grado di esercitare del lavoro sulle pareti della cavità di corpo nero. Si analizza ora una situazione in cui una di queste pareti è un pistone mobile. Dalla (1.10) si può ricavare direttamente l'espressione della densità di energia

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{4}{c} (\pi B(T)) = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 = aT^4$$

¹Ciò può essere verificato dall'equazione del trasporto radiativo.

dove $a = 4\sigma/c$. La *pressione di radiazione* è quindi data da $p = \frac{1}{3}aT^4$. Se la cavità ha volume V , energia totale U e scambia calore Q con l'ambiente, allora dal primo principio della termodinamica si può ricavare l'entropia S della radiazione di corpo nero:

$$dQ = dU + pdV = d(uV) + pdV \implies dS = \left(\frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) dT + \left(\frac{4u}{3T} \right) dV$$

da cui si legge

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4u}{3T}$$

e integrando si ottiene l'entropia per la radiazione di corpo nero:

$$S = \frac{4}{3}aVT^3 + \text{costante.}$$

Ponendo $dS = 0$ e integrando si ottengono infine le leggi dell'espansione adiabatica.

$$TV^{1/3} = \text{costante} \quad ; \quad pV^{4/3} = \text{costante}$$

Concludo derivando due risultati che saranno utili in seguito:

- **Densità di fotoni:** La densità di fotoni n_γ può essere ottenuta dividendo la densità di energia monocromatica u_ν per l'energia di un fotone di frequenza ν e sommando su tutte le frequenze

$$n_\gamma = \int_0^\infty \frac{u_\nu}{h\nu} d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{B_\nu}{h\nu} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu$$

sostituendo $x = h\nu/kT$ si ottiene

$$n_\gamma = \left(\frac{8\pi k^3}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \right) T^3 \implies n_\gamma \propto T^3 \quad (1.13)$$

- **Energia media:** L'energia media di un fotone si ricava dal risultato precedente, ed è proporzionale alla temperatura.

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{u}{n_\gamma} = \frac{aT^4}{n_\gamma} \propto T \quad (1.14)$$

In unità del sistema cgs si ha $\langle E_\gamma \rangle \sim 2.70 \text{ } kT$.

Capitolo 2

Stelle

Il ragionamento che conduce alla (1.11) trova giustificazione nel fatto che lo spettro continuo di una stella è generalmente ben descritto da una curva di corpo nero. Gli spettri stellari si discostano da quello della funzione di Planck per la presenza di righe di assorbimento, che corrispondono a intervalli di frequenza molto stretti entro cui l'atmosfera stellare risulta particolarmente opaca. È questa atmosfera il luogo da cui proviene la radiazione analizzata dai telescopi. L'interno di una stella è invece una struttura notevolmente opaca: un fotone del nucleo impiega un tempo nell'ordine di 10^6 anni per raggiungere la superficie. In generale, all'interno della struttura stellare, un fotone interagisce con la materia circostante venendo assorbito o diffuso. Le stelle non sono però in equilibrio termico. Una stella non è infatti un sistema isolato: la radiazione analizzata costituisce un flusso uscente dalla stella, che compromette l'equilibrio termico degli strati esterni. Inoltre, la temperatura della struttura stellare non è uniforme, ma varia con la profondità aumentando nelle regioni più vicine al nucleo. Per sfruttare le leggi di corpo nero, diventa allora necessario supporre un equilibrio termico locale. Considerando la simmetria sferica delle stelle, si immagina l'atmosfera stellare come costituita da strati concentrici, ognuno con una temperatura che risulta uniforme all'interno di quello strato. Gli strati più interni sono associati a temperature maggiori. Questa descrizione dell'atmosfera risulta particolarmente accurata quando il libero cammino medio di particelle e fotoni è trascurabile rispetto alla distanza entro cui la temperatura della stella varia sensibilmente. Il modello di atmosfera appena descritto può essere usato per spiegare il seguente fenomeno.

- **Oscuramento al bordo:** Per ipotesi, in ogni strato dell'atmosfera stellare valgono le leggi di corpo nero derivate nel capitolo precedente. La temperatura a cui queste leggi fanno riferimento è la temperatura dello strato considerato. La (1.10) mostra che strati atmosferici più interni e caldi irradiano un flusso maggiore rispetto a quello emesso dagli strati più esterni e freddi. Dato che il flusso determina la magnitudine di una sorgente, a strati atmosferici più vicini al nucleo stellare corrispondono magnitudini sempre più piccole. Ora, osservando una stella lungo una linea di vista perpendicolare alla superficie si è in grado di raggiungere profondità maggiori rispetto a quelle raggiunte da linee di vista non perpendicolari alla superficie della stella. Questo perché le stelle sono solo parzialmente trasparenti, e lo spessore ottico aumenta più rapidamente lungo linee di vista che attraversano porzioni maggiori di materia

stellare. La visione lungo linee di vista non radiali rispetto al nucleo stellare viene quindi limitata agli strati più esterni dell'atmosfera. Questi strati, essendo più freddi, risultano meno brillanti degli strati centrali secondo la (1.10). Il disco solare risulta per questo motivo più scuro ai bordi. Questo *oscuramento al bordo* può essere utilizzato per verificare i modelli che descrivono l'atmosfera solare.

2.1 Spettri stellari

Come anticipato, le stelle non sono corpi neri ideali e il loro spettro devia da quello di un corpo nero per via delle righe di assorbimento. La (1.11) relaziona quindi la luminosità e le dimensioni di una stella alla sua *temperatura efficace*. Secondo il modello di corpo nero, questa temperatura è pari alla *temperatura di colore*, ottenuta individuando il picco di emissione della stella ed usando la legge di Wien (1.8) o (1.9).

2.1.1 Spettro del Sole

Quanto detto sopra si applica ora allo spettro del Sole, mostrato in Figura 2.1. Il picco di intensità è situato a $\lambda_{max} \sim 503$ nm = $5.03 \cdot 10^{-5}$ cm. Usando la (1.9) si ricava allora la temperatura di colore $T_c = T_{eff} = T_\odot$:

$$T_\odot = \frac{0.290 \text{ cmK}}{5.03 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = 5770 \text{ K}$$

che è la temperatura della fotosfera solare. La luminosità si ottiene dalla (1.11), considerando il raggio solare $R_\odot \sim 7 \cdot 10^{10}$ cm.

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 = 4 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$$

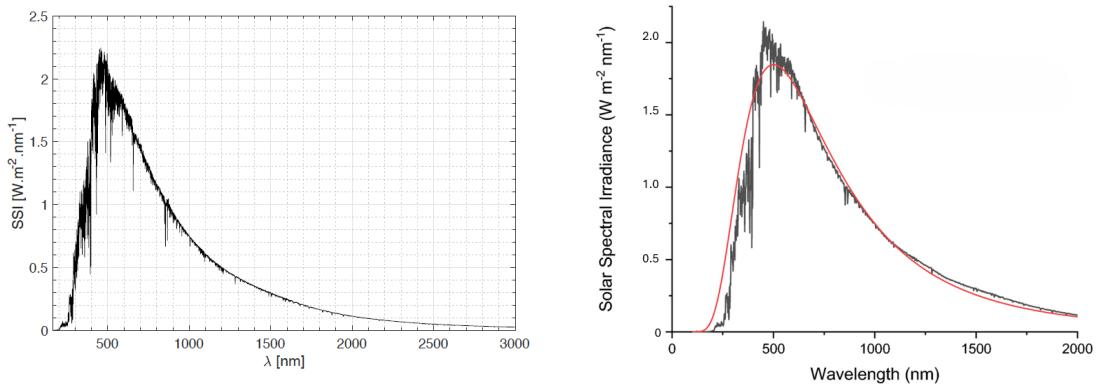


Figura 2.1: Spettro solare in lunghezza d'onda. A destra lo spettro solare è confrontato con uno spettro di corpo nero a $T = 5770$ K (linea rossa). Immagine presa da *esa.int*.

2.1.2 Classi spettrali

La temperatura superficiale di una stella determina il grado di eccitazione o ionizzazione degli elementi che ne costituiscono l'atmosfera, e caratterizza perciò le righe di assorbimento presenti nel suo spettro. In base alla presenza e all'intensità di alcune righe di interesse è possibile classificare gli spettri stellari, e quindi le stelle, in *classi spettrali*. Una classificazione di questo tipo, in vigore ancora oggi, si deve ad un gruppo di ricercatori dell'università di Harvard. Questo sistema fu inizialmente riferito alle righe della serie di Balmer per l'idrogeno. Solo successivamente ci si rese conto che le classi spettrali potevano essere ordinate in base alla temperatura, grazie alla legge dello spostamento di Wien. Ad oggi, ogni classe spettrale è indicata con una lettera maiuscola. In ordine decrescente di temperatura le classi stellari sono: **O–B–A–F–G–K–M**. Approssimativamente, le temperature superficiali vanno dai $3000K$ per le stelle rosse di classe **M** ai $35000K$ per le stelle blu di classe **O**. Ogni classe spettrale è poi suddivisa in sottoclassi, numerate da 0 (*early type*) a 9 (*late type*) in ordine decrescente di temperatura. La Figura 2.2 mostra gli spettri tipici di ciascuna classe spettrale. Ogni spettro è normalizzato rispetto al valore massimo del proprio flusso. Ancora una volta si osserva che per stelle più fredde il picco di emissione si sposta verso lunghezze d'onda maggiori. Data la monotonia di B_ν con la temperatura, le stelle calde emettono più radiazione rispetto alle stelle fredde in ogni parte dello spettro elettromagnetico. Questo fenomeno non è visibile nella Figura 2.2 a causa della normalizzazione di cui sopra.

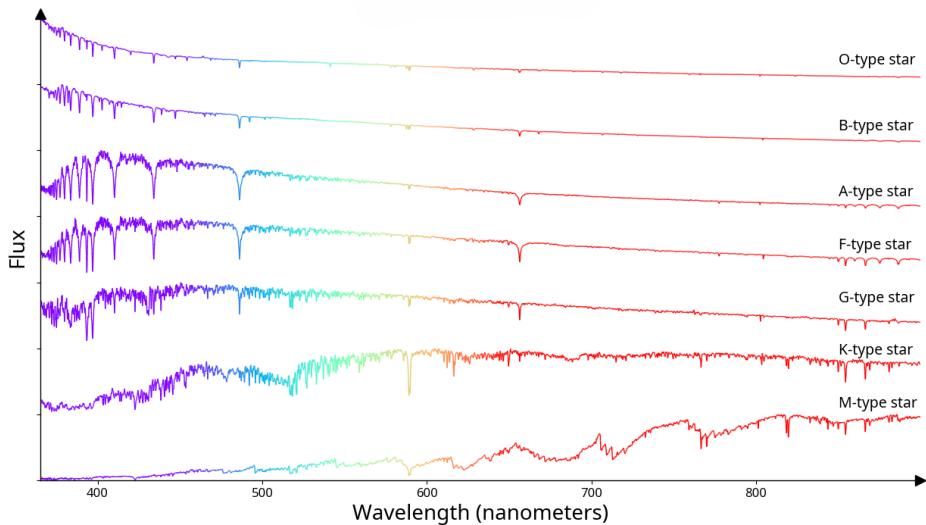


Figura 2.2: Spettri stellari. Immagine presa da *IAU OAE/SDSS/Niall Deacon*.

2.2 Temperatura di corpo nero di un pianeta

Si consideri un pianeta di raggio R_P che orbita attorno al Sole. La luminosità solare L_\odot è distribuita su una superficie sferica che ha come raggio la distanza tra il pianeta e il Sole d_{PS} . Per questo motivo il pianeta intercetta solo una frazione

della radiazione emessa dal Sole, pari a $\pi R_P^2 / (4\pi d_{PS}^2)$. Inoltre una frazione α della radiazione incidente sul pianeta viene generalmente riflessa nello spazio e prende il nome di *albedo*. Supponendo che il pianeta sia in equilibrio termico, l'energia assorbita per unità di tempo deve bilanciare quella emessa. Se si immagina che il pianeta emetta come un corpo nero sferico di raggio R_P , è possibile usare la (1.11) per determinare la sua temperatura efficace. Se L_a e L_e sono ripetutivamente l'energia assorbita ed emessa dal pianeta nell'unità di tempo si ha:

$$L_a = L_e \implies \frac{\pi R_P^2}{4\pi d_{PS}^2} (1 - \alpha) L_\odot = 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4$$

da cui si ricava la temperatura del pianeta $T_P = [(1 - \alpha) L_\odot / (16\pi\sigma d_{PS}^2)]^{1/4}$. Il calcolo appena svolto risulta approssimato e non tiene conto di importanti fattori che determinano la temperatura di un pianeta, come la presenza di un'atmosfera. Tuttavia con il ragionamento di cui sopra è possibile dedurre l'ordine di grandezza della temperatura media del pianeta. Usando i dati di Mercurio, pianeta praticamente privo di atmosfera, $\alpha \sim 0.088$ e $d_{PS} \sim 6 \cdot 10^{12}$ cm si trova una temperatura $T_P \sim 400$ K. L'ordine di grandezza della temperatura appena trovata è tipico delle temperature che si sperimenterebbero su Mercurio. L'assenza di atmosfera determina però una grande escursione termica, che risulta in temperature molto differenti tra le zone illuminate dal Sole e quelle in ombra.

2.3 Stelle in banda radio

Dalle leggi di corpo nero si può dedurre che le stelle più prossime al Sole sarebbero sorgenti radio deboli, di difficile rilevazione anche per i radiotelescopi moderni. Una stella simile al Sole, ad una distanza di 1pc da questo, sottenderebbe un angolo solido $\Omega \sim 10^{-15}$ sr. Dalla (1.6) si ricava allora la brillanza della stella ad una tipica frequenza radio $\nu \sim 1$ GHz ottenendo $B_\nu \sim 10^{-15}$ erg s⁻¹ cm⁻² Hz⁻¹ sr⁻¹. Il flusso osservato da terra è quindi:

$$F'_\nu = B_\nu \Omega \sim 10^{-30} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

un valore piccolo, che corrisponde ad una sorgente fioca anche per i telescopi odierni. Agli inizi del '900 non si immaginava esistessero altre sorgenti radio oltre alle stelle. Le osservazioni venivano effettuate entro la finestra del visibile. Sorgenti termiche abbastanza fredde risultano però invisibili in banda ottica. Un esempio sono le nubi di gas interstellare con temperature $T \sim 100$ K. In questi casi infatti, le frequenze ottiche emesse sono descritte dal regime di Wien (1.7), caratterizzato da una decrescita esponenziale che determina una scarsa emissione di fotoni nel visibile. Solo nel 1938 si osservò che lo spettro radio della Galassia mostra una distinta componente non termica. Il successivo sviluppo della radioastronomia diede inizio all'astronomia multmessaggera. Ad oggi una delle principali scoperte in banda radio è la già citata *radiazione cosmica di fondo (CMB)*, che mostra lo spettro di corpo nero più accurato mai osservato.

Capitolo 3

CMB

Numerose osservazioni hanno constatato che nell'Universo è presente una radiazione di corpo nero che è con ottima approssimazione isotropa e a cui si dà il nome di *Fondo Cosmico a Microonde (CMB)* o *Radiazione Cosmica di Fondo*. Questo segnale ha avuto origine nelle prime fasi dell'evoluzione dell'Universo, a circa 380,000 anni dalla sua nascita. Il modello cosmologico standard descrive l'Universo primordiale come un plasma denso e caldo di particelle elementari (protoni, elettroni, neutroni) in equilibrio termico con la radiazione ivi presente. In queste condizioni i fotoni erano sufficientemente energetici da produrre coppie di *particelle e antiparticelle* e in particolare risultavano in equilibrio con elettroni e positroni. La continua interazione tra radiazione ed elettroni liberi risultava in un cammino libero medio piccolo per i fotoni e rendeva l'Universo sostanzialmente opaco. Ora, secondo le *equazioni di Friedmann*, la densità di energia relativa alla materia e alla radiazione determina l'espansione dell'Universo. L'espansione dell'Universo primordiale ne causò quindi il raffreddamento, dato che permise all'energia di espandersi su volumi fisicamente più grandi. Dopo circa 380,000 anni, la temperatura dell'Universo primordiale diminuì fino a circa 3000 Kelvin permettendo la combinazione di elettroni e protoni liberi a formare i primi atomi di idrogeno. In quest'epoca di *ricombinazione* l'Universo passò da otticamente spesso ad otticamente sottile. Ciò permise ai fotoni della radiazione cosmica di propagarsi nello spazio. Sono questi i fotoni che costituiscono la CMB e che definiscono il limite dell'universo visibile: *la superficie di ultimo scattering*. Dato che proviene da un Universo otticamente spesso e all'equilibrio termico, la CMB mostra uno spettro che segue la curva di corpo nero con estrema precisione (Figura 3.1). La temperatura oggi associata alla CMB è di $T_0 \sim 2.73 \text{ K}$ con un picco di emissione a $\nu_{max} \sim 160 \text{ GHz}$. Quest'ultimo, come si vede in Figura 3.1, equivale ad un numero d'onda $1/\lambda \sim 5.3 \text{ cm}^{-1}$. Come detto, l'evoluzione della temperatura della CMB è legata all'espansione dell'Universo. È possibile descrivere tale espansione in Relatività Generale, attraverso un *parametro di scala* adimensionale e dipendente dal tempo $a = a(t)$. Al tempo di osservazione attuale t_0 si pone $a(t_0) = 1$. Le distanze fisiche misurabili sono proporzionali ad a , secondo la metrica adottata. Si consideri allora una regione cubica nello spazio, in espansione con l'Universo. In un Universo omogeneo e isotropo, la radiazione di fondo uscente dal cubo è bilanciata dalla radiazione di fondo entrante. In questo modo la radiazione interna al cubo rimane in equilibrio termico durante la sua espansione, risultando una radiazione di corpo nero. La densità di fotoni n_γ interni al cubo è proporzionale ad a^{-3} , dato che il numero di fotoni rimane invariato ed il volume fisico del cubo è proporzionale

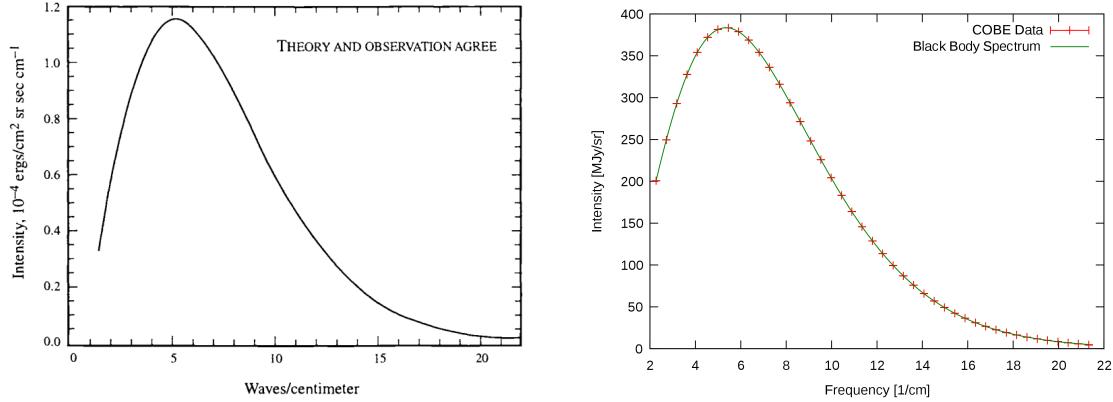


Figura 3.1: Spettro della CMB misurato dal satellite COBE. La curva di corpo nero interpola precisamente i dati raccolti. Questi ultimi hanno incertezze più piccole dello spessore della curva. La CMB risulta con ottima approssimazione una radiazione di corpo nero, con una temperatura $T_0 = (2.725 \pm 0.002)\text{K}$. (Immagine presa da *Modern Cosmology* di S. Dodelson)

ad a^3 . Dalla (1.13) si deduce allora che la temperatura della radiazione è $T \propto a^{-1}$. È possibile ottenere una relazione tra la temperatura della CMB ad un tempo t e quella misurata attualmente al tempo t_0 :

$$T_0 a(t_0) = T a(t) \implies T = a^{-1}(t) T_0 \quad (3.1)$$

Dalla (1.14) e dai risultati ottenuti si vede che $\langle E_\gamma \rangle \propto a^{-1}$ e dunque che la lunghezza d'onda della radiazione è proporzionale ad a . Si consideri ora la definizione di *redshift*

$$z = (\lambda_o - \lambda_e)/\lambda_e$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda della radiazione osservata al tempo t_0 e λ_e è la lunghezza d'onda della radiazione emessa al tempo t . Essa si può riscrivere come:

$$z + 1 = a(t_0)/a(t) = a^{-1}(t)$$

e sostituendo nella (3.1) si ha

$$T = (1 + z) T_0 \quad (3.2)$$

La materia interstellare è riscaldata dalla CMB fino alle temperature date dalla (3.2). La CMB riscalda soprattutto le galassie più lontane, a redshift elevato. L'epoca della ricombinazione corrisponde ad un redshift $z_* \sim 1090$, in cui la temperatura della CMB era $T \sim 3000\text{ K}$.

Lo spettro di corpo nero del fondo cosmico pone però un problema. Infatti l'isotropia della CMB è particolarmente sorprendente, in quanto implica che un tempo tutti i punti dell'Universo erano in equilibrio termico tra loro. Questo equilibrio coinvolgeva zone spaziali che, a causa dell'elevata distanza reciproca, non risultavano in *contatto causale*. Ciò significa che nessun segnale fisico avrebbe potuto essere scambiato tra due zone di questo tipo. In particolare, non sarebbe stato possibile alcuno scambio di energia in grado di portare le due zone alla stessa temperatura. Quanto scritto sopra è ad oggi noto come *problema dell'orizzonte*.

Bibliografia

- Casadio R., 2024, *Elementi di Teoria della Relatività Generale*, Dispense universitarie, Università degli Studi di Bologna
- Condon J. J., Ransom S. M., 2016, *Essential Radio Astronomy*. Princeton University Press
- Dodelson S., 2003, *Modern Cosmology*. Academic Press
- Ferraro F. R., 2024, *Astrofisica Stellare*, Dispense universitarie, Università degli Studi di Bologna
- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. J., 2007, *Fundamental Astronomy*, 6 edn. Springer
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 2004, *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley-VCH
- Samtleben D., Staggs S., Winstein B., 2008, arXiv preprint arXiv:0803.0834