



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN
MATEMATICA

**ALLE ORIGINI DELLA PROSPETTIVA
DALL'ARTE INTUITIVA AL FORMALISMO
MATEMATICO: *IL DE PROSPECTIVA PINGENDI* DI
PIERO DELLA FRANCESCA**

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore

Alessia Cattabriga

Presentata da

Valeria Coletta

Correlatore

Maria Giulia Lugaresi

Sessione Ottobre 2025

Anno Accademico 2024/2025



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Al coraggio.

*“Il segreto della felicità è la libertà,
e il segreto della libertà è il coraggio.”*

Tucidide

INDICE

Introduzione	5
1. Arte e tecnica nel Rinascimento	
1.1. Il contesto storico	9
1.2. Agli albori della prospettiva	19
1.3. Tecniche e metodi di proiezione	30
2. La prospettiva alle origini della geometria proiettiva	
2.1. La nascita delle geometrie non euclidee	38
2.2. Alle origini della Geometria Proiettiva	58
2.3. La Geometria Proiettiva e la prospettiva	62
3. Il <i>De prospectiva Pingendi</i>	
3.1. Una biografia di Piero Della Francesca	88
3.2. Descrizione dell'opera	100
3.3. Il Libro I del <i>De Prospectiva Pingendi</i>	110
3.4. Il Teorema fondamentale del <i>De Prospectiva Pingendi</i>	128
3.5. Alcuni esempi dal Libro II e dal Libro III	133
Conclusioni	146
Bibliografia e Sitografia	150
Ringraziamenti	152

Introduzione

“A volte è sufficiente un cambiamento di prospettiva per vedere la luce”

Dan Brown

La rappresentazione dello spazio tridimensionale su una superficie bidimensionale è stata, sin dall'antichità, una delle sfide più affascinanti affrontate dall'arte, dall'architettura e non solo. A partire dal Rinascimento, infatti, il concetto di prospettiva ha trasformato profondamente il modo di concepire e rappresentare la realtà visiva. Fu proprio a partire da quel momento che studi sempre più approfonditi in ambito scientifico hanno creato, mattoncino dopo mattoncino, le basi di una grande eredità, tramandandoci tutto ciò che sappiamo sulla prospettiva, lo strumento fondamentale grazie al quale abbiamo potuto tradurre l'intuizione spaziale in regole geometriche rigorose. Ha avuto così origine questo linguaggio di codifica razionale, definito da regole ben precise, in grado di trasmettere profondità e proporzione sulla tela.

Attraverso un percorso interdisciplinare che tocca la storia, l'arte e la matematica, in questa trattazione si cercherà di mettere in luce come l'intuizione artistica e la formalizzazione matematica abbiano seguito percorsi all'apparenza incompatibili, ma in realtà convergenti.

Quando una teoria nuova sfida le convinzioni accettate e consolidate da secoli, mettendo in discussione il paradigma dominante, l'istinto umano e accademico è quello di resistere.

Il conservatorismo dettato da religione, istituzioni e convenzioni sociali, ha spesso portato a preferire spiegazioni legate alle esperienze personali, alle convinzioni popolari, alle tradizioni o alle superstizioni piuttosto che accogliere con apertura teorie nuove e rivoluzionarie. Gli scienziati stessi, seppur ispirati da sete di conoscenza e desiderosi di nuove scoperte, hanno spesso accettato mal volentieri nuove teorie che rivoluzionassero basi consolidate da tempo e impiegato secoli o addirittura millenni per giungere a dimostrarle e

reputarle corrette; oltretutto nella società il primo impatto alle nuove teorie è stato spesso negativo o addirittura demonizzato.

Qualcosa di simile è avvenuta anche nel campo della geometria: per secoli, molti matematici tentarono di dimostrare il quinto postulato di Euclide a partire dagli altri quattro, ma senza successo. Questo postulato (detto anche postulato delle parallele) afferma che per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola retta parallela ad essa.

Dopo circa due millenni dalla pubblicazione degli *Elementi* (300 a.C.) di Euclide, in modo sostanzialmente non voluto e del tutto fortuito, il quinto postulato è stato addirittura confutato, dimostrando che esistono sistemi geometrici logicamente validi, diversi da quello euclideo e aprendo così la strada alle geometrie non euclidee, quali la geometria iperbolica (per un punto esterno a una retta data passano infinite parallele), la geometria ellittica (nessuna parallela può essere tracciata da un punto esterno ad una retta data) o la geometria proiettiva (in uno spazio proiettivo non esistono rette parallele).

Fu proprio la geometria proiettiva a formalizzare in modo scientifico quello che sembrava non avere nulla a che fare con il mondo della scienza: la prospettiva artistica. Molto spesso, infatti, è proprio un cambio di prospettiva che riesce a mettere in discussione le nostre convinzioni e smontare teorie consolidate da tempo e che sembravano inscalfibili.

Attraverso questo elaborato affronteremo gli sviluppi più significativi che hanno fatto sì che, a partire dall'arte intuitiva, si sia giunti al formalismo matematico odierno, iniziando da una breve analisi del contesto storico nel quale è stato piantato il primo seme della prospettiva, giungendo sino ai frutti di un grande, immenso lavoro, che ci hanno regalato decine e decine di studiosi e sapienti di diverse epoche. Scopriremo quindi, come anticipato, come l'evoluzione della prospettiva abbia stimolato la nascita delle nuove visioni matematiche, culminate nella formulazione della geometria proiettiva moderna.

L'obiettivo di questo lavoro è duplice: da un lato, chiarire come i concetti introdotti dalla geometria proiettiva formalizzino e generalizzino le intuizioni proprie della rappresentazione prospettica; dall'altro, mostrare come la prospettiva possa essere interpretata come un caso particolare di proiezione in uno spazio proiettivo, fornendo così una solida base matematica a una pratica artistica e architettonica secolare.

Nella prima parte verranno messi in luce gli aspetti socioculturali ed il contesto storico nel quale si sono sviluppate e trasformate le nuove intuizioni in vere e proprie teorie, facendo

particolare attenzione ai contributi regalatici dagli artisti e matematici protagonisti di quei secoli di profondo cambiamento.

In seguito, si affronteranno più in dettaglio le diverse fasi che hanno caratterizzato il passaggio dall'intuizione al rigore ed il formalismo matematico e le basi teoriche della geometria proiettiva, attraverso definizioni e proposizioni.

Nella seconda parte tratteremo un aspetto particolarmente interessante della storia della prospettiva, che renderà protagonista di questa trattazione un artista che per primo sottolineò e affrontò il profondo legame tra l'arte e la scienza. Analizzeremo infatti nel dettaglio l'opera più importante di Piero Della Francesca (Borgo San Sepolcro, 1412-1492 circa): il *De Prospectiva Pingendi* (1470/75). Questo può essere considerato a tutti gli effetti il primo trattato scientifico sulla prospettiva, dove vengono descritti in modo formale e rigoroso, come mai prima di allora, attraverso la retorica ed il formalismo della matematica, i passaggi fondamentali che traducevano la prospettiva artistica in regole e algoritmi ben precisi. Attraverso l'analisi di proposizioni, applicazioni e rappresentazioni grafiche dettagliate entreremo in un mondo lontano, ma mai più avanguardista di allora, in questo campo.

Volgeremo lo sguardo su diversi aspetti e affronteremo un viaggio lungo ed interessante con un duplice fine: da un lato mostrare come la prospettiva, nata come tecnica artistica, abbia anticipato concetti fondamentali della geometria moderna; dall'altro evidenziare come la formalizzazione matematica dell'arte apra nuove prospettive (in senso non solo geometrico) sulla comprensione dello spazio e della rappresentazione della realtà.

Capitolo 1.

Arte e tecnica nel Rinascimento

1.1 Il contesto storico

*«Il Rinascimento ha questo di particolare: che in esso la vita nuova porta essenzialmente
con sé la critica dell'antico. Qui stanno la sua salute e la sua forza»*

Harald Høffding

Il Rinascimento rappresenta un periodo storico, culturale ed artistico che si sviluppò in Italia e poi in Europa in un arco temporale che va dalla metà del quindicesimo secolo, fino alla fine del sedicesimo secolo. La periodizzazione è in realtà dibattuta: i suoi limiti cronologici sono naturalmente soggetti ad ampie differenzazioni dovute alle situazioni delle diverse aree geografiche e delle particolari discipline, umanistiche e scientifiche.

Possiamo comunque definire il Rinascimento come un periodo che abbraccia gli anni tra la seconda metà del 1400 e i primi del 1600. L'epoca rinascimentale è stata complessa e di grande rilevanza poiché ha segnato una transizione fondamentale dal periodo del Medioevo a quello dell'epoca moderna. Approfondirne i dettagli ci aiuterà a comprendere come sia avvenuta l'evoluzione del pensiero e della società.

Il termine Rinascimento viene direttamente dalla storiografia dell'Ottocento, dal francese *renaissance*, ovvero *rinascita*. In effetti anche gli stessi protagonisti di quel periodo erano assolutamente consapevoli di essere al centro di un'importante trasformazione storica. Essi tendevano a distaccarsi dal passato loro prossimo e a vivere quella proprio come un'età di cambiamento. Il termine indica appunto il momento in cui iniziarono a venire alla luce l'umanità e la coscienza moderne, dopo l'epoca medievale ritenuta un'età di barbarie e di oscurantismo.

I grandi sapienti dell'epoca (possiamo citarne alcuni tra i principali: Pico della Mirandola, Filippo Brunelleschi, Leonardo da Vinci, Michelangelo Buonarroti, Raffaello

Sanzio, Niccolò Copernico, Galileo Galilei, Giovanni Keplero, Tycho Brahe, Niccolò Machiavelli, Erasmo da Rotterdam, Cristoforo Colombo) maturarono un nuovo modo di concepire il mondo e se stessi, sviluppando ciò che l'Umanesimo letterario aveva cominciato e portandolo alla sua massima espressione e al suo massimo splendore in ogni scibile del sapere e dell'arte. L'Umanesimo, come movimento culturale, si era irradiato dall'Italia, ispirato da autori trecenteschi quali Francesco Petrarca e in parte Giovanni Boccaccio. Era volto alla riscoperta dei classici latini e greci ed orientato ad avviare una "rinascita" della cultura europea dopo i cosiddetti "secoli bui" del Medioevo. Ciò che rinasceva era dunque lo spirito degli antichi.

Il rifiorito interesse per gli studi classici ed i grandi testi antichi fu favorito altresì dalla loro sempre maggiore diffusione. Nel 1453 vi fu, infatti, l'invenzione che rivoluzionò in modo radicale la circolazione delle opere letterarie e scientifiche in Europa: la stampa a caratteri mobili, ad opera del tedesco Johannes Gutenberg. Fu proprio questa innovazione ad alimentare ulteriormente il clima di rinascita e riscoperta. Secondo una stima, alla fine del XV secolo vi erano almeno mille torchi da stampa disseminati in duecento città europee e nei primi cinquanta anni dopo l'innovativa invenzione furono stampati otto milioni di libri nelle diverse lingue europee. Dai torchi uscivano volumi di differenti tipologie: testi antichi di diritto, libri di medicina, messali e libri liturgici finemente decorati, classici della letteratura latina e greca, testi universitari, opuscoli e testi sui più svariati argomenti, e naturalmente opere scientifiche e trattati di matematica. In particolare furono stampate anche una moltitudine di quelle opere che ci sono state tramandate grazie al grande lavoro di copia manuale e traduzione realizzato dagli Arabi. Essi infatti vissero un periodo di grande prosperità a partire indicativamente dal 622 (sino al 1258 d.C.) quando Maometto iniziò a predicare in pubblico ed avviò il suo apostolato fondando l'Islam. Dopo la morte del profeta i suoi seguaci continuarono l'opera di profetizzazione, eleggendo come successore un califfo ed avviando così l'epoca dei Califfati durante la quale continuarono a diffondere la cultura Islamica e attivarono una politica espansionistica allargando i loro territori e valorizzando magnifiche città come Baghdad, che divenne capitale della cultura islamica. Il benessere, infatti, permise di dedicare tempo

allo studio e alla ricerca degli antichi testi greci, e furono proprio gli Arabi a compiere un prezioso lavoro di copia e raccolta di questi ultimi. Proprio a Baghdad sorgeva una grandiosa biblioteca che custodiva innumerevoli manoscritti tra i quali anche i fondamenti cardine della matematica antica: *Elementi* di Euclide (che ricordiamo essere il primo trattato assiomatico, logico-deduttivo della storia mai realizzato, tramandato e studiato per millenni), o i trattati di Tolomeo e Archimede e di tutti i primi filosofi e sapienti greci, copiati e tradotti sia in latino che in volgare. Senza questo importante impegno secolare da parte degli Arabi la gran parte delle opere antiche di matematica sarebbe presumibilmente andata perduta, non avrebbe mai visto la stampa e non sarebbe mai stata tramandata sino ai nostri giorni.

Sintetizzando, alla fine del XV secolo, l'uso della stampa era già diffuso in tutta l'Europa occidentale. Grazie al recupero di tantissimi libri creduti perduti o mai conosciuti, tutte le biblioteche si arricchirono di innumerevoli copie e anche l'Italia si arricchì del patrimonio greco perduto: Omero, Platone, Plotino, i testi ermetici di Epicuro, Lucrezio, Aristotele, Euclide, Archimede, Apollonio e Pappo.

Il numero sempre maggiore di copie disponibili facilitò largamente l'accesso al repertorio bibliografico, e permise di coinvolgere nel mondo della cultura un pubblico sempre più ampio. Circolando con molta più facilità, i libri, favorivano la conoscenza e conseguentemente apertura e confronto delle opinioni. Sostanzialmente la diffusione e l'accessibilità al sapere, avevano aperto alla possibilità di sviluppare un pensiero sempre più critico, segnando un vero e proprio cambiamento di mentalità.

In questo quadro, dove le *élites* culturali europee erano scosse dall'Umanesimo, il XV secolo fu pieno di grandi novità sotto ogni aspetto: economico, politico, religioso e sociale. Nello stesso anno dell'invenzione della stampa, Costantinopoli fu conquistata dall'Impero Ottomano, sancendo così la fine dell'Impero Romano d'Oriente. Nacquero gli stati moderni con le monarchie di Francia, Inghilterra e Spagna. Nel 1492 Cristoforo Colombo sbarcò su nuove terre credendole erroneamente l'estremo oriente e nel 1501 Amerigo Vespucci, che realizzò per la prima volta che si trattasse in verità di un nuovo continente, diede loro il nome di America. Le nuove scoperte geografiche diedero un forte impulso

all'economia mercantile su vasta scala e soprattutto rivoluzionarono la comprensione della grandezza del mondo e l'immagine dell'uomo al suo interno. In questo nuovo contesto, dunque, viene rivalutato l'uomo in quanto protagonista e promotore della sua vita terrena. Egli solo è libero, a differenza degli altri animali, e pertanto può autodeterminarsi, è artefice del proprio destino e comprende e governa ciò che lo circonda, dunque egli soltanto può dominare la natura intorno a sé per modificarla.

È chiaro che, in questa nuova visione, Dio e la sua Provvidenza iniziavano gradualmente a perdere il loro ruolo predominante. Non vi era più Dio al centro di ogni cosa e del creato, bensì l'uomo! Questo naturalmente incrinava la devozione incondizionata nei confronti della Religione Cristiana del Medioevo e del passato in generale, ma certamente mai quanto le nuove teorie avanguardiste riguardanti il sistema sole-terra. Nel 1543 infatti Niccolò Copernico (1473-1543) pubblicava il *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, dove proponeva un modello alternativo a quello tolemaico che aveva sempre descritto il sole in moto attorno alla terra. Egli descriveva una nuova teoria che proponeva al centro il sole ed in rotazione attorno ad esso la terra e gli altri pianeti: il sistema eliocentrico. Una idea così rivoluzionaria non poteva certamente essere accolta e digerita facilmente. L'accortezza di dedicare una nota al Papa Paolo III, nella quale rivendicava la libertà di riflessione fantasiosa di filosofi e matematici, gli fece così evitare di inimicarsi la Chiesa, almeno inizialmente.

Questo trattato astronomico ispirò le osservazioni della volta celeste di Tycho Brahe (1546-1601) il più grande astronomo ad occhio nudo del mondo moderno ed antico, il quale raccolse 20 anni di dati che furono ereditati da Giovanni Keplero (1571-1630). I risultati delle osservazioni di Brahe, completati e arricchiti da quest'ultimo, furono pubblicati nelle *Tabulae Rudolphinae* (Ulm, 1627). In precedenza Keplero aveva pubblicato l'*Astronomia nova* (Praga, 1609), contenente la formulazione delle prime due leggi relative alle orbite planetarie e l'*Harmonices mundi* (Linz, 1619), in cui enunciava la terza legge, sulla relazione intercorrente fra i semidiametri delle orbite dei pianeti e i loro periodi di rivoluzione.

Uno dei più grandi geni dell'umanità visse e incarnò in pieno lo spirito dell'epoca rinascimentale, portandolo alle maggiori forme di espressione nei più disparati campi dell'arte e della conoscenza: Leonardo Da Vinci (1452-1519). Egli fu scienziato, filosofo, inventore e artista, un convinto sostenitore dell'importanza di osservare la natura per imparare da essa ed un pioniere di quella che oggi consideriamo l'ingegneria. Quest'ultima si sviluppò non solo grazie alle novità introdotte nel campo dell'architettura, ma anche a causa di molti progetti urbanistici e bellici. Con l'introduzione della polvere da sparo si potenziarono le artiglierie leggere e pesanti e si dovettero proteggere le città con nuovi tipi di fortificazioni.

Qualche anno più tardi, ad influire in modo cruciale sul progresso e sulla ricerca scientifica del Seicento, fu il metodo sperimentale galileiano, il quale proponeva una descrizione razionale dei fenomeni osservati. Galileo Galilei (1564-1642) fu la figura chiave della futura rivoluzione scientifica, il padre della scienza moderna. Visse nel tardo Rinascimento e ne raccolse i frutti.

La sua opera più importante fu *Dialogo sopra i due massimi sistemi dell'universo*, nella quale argomentava, attraverso un dialogo tra tre interlocutori, il confronto tra il sistema tolemaico e quello copernicano, senza mai però pronunciarsi esplicitamente a favore dell'uno o dell'altro, ma lasciando solo intuire quanto chiaramente il secondo fosse concreto e dimostrabile rispetto al primo, corroborato solo dal volere divino. Nonostante la sua accortezza Galilei fu ugualmente processato dal Tribunale dell'Inquisizione che nel 1616 aveva, alla fine, condannato all'Indice dei libri proibiti l'opera rivoluzionaria di Copernico, censurandola. Galilei fu costretto ad abiurare pur di evitare la condanna massima dopo essere stato ritenuto colpevole di eresia.

L'Inquisizione (dal latino *inquisitio*, "indagine, ricerca") era l'istituzione ecclesiastica fondata dalla Chiesa Cattolica per indagare, mediante un apposito tribunale, i sostenitori di teorie considerate contrarie all'ortodossia cattolica (per l'appunto le cosiddette eresie). Storicamente l'Inquisizione si può considerare stabilita già nel Concilio presieduto a Verona, nel 1184. E' sostanzialmente un grande neo figlio del periodo buio delle crociate, le guerre religiose promosse dalla Chiesa Romana, combattute tra l' XI e il XIII

secolo, volte a riconquistare la Terra Santa, liberandola dal dominio islamico (principalmente sul terreno dell'Anatolia e del Levante nel Mediterraneo orientale, ma anche in Egitto e in Tunisia). Naturalmente oltre alle campagne di soppressione dei movimenti eretici e riconversione al cattolicesimo, tra gli obiettivi vi erano quelli sottintesi di ottenere vantaggi economici, politici e territoriali. Tra i momenti più segnanti ricordiamo il 1252, quando Innocenzo IV con la bolla *Ad extirpanda*, autorizzò l'uso della tortura, come strumento di indagine, atto ad ottenere la confessione degli eretici ed affinché ne indicassero altri, e il 1326 quando con la bolla *Super illius specula* Giovanni XXII, estese il concetto di eresia anche alle pratiche di stregoneria e alla magia, affidandone la repressione agli inquisitori.

Si può dedurre come, reduci da questo passato e immersi in un nuovo clima di rinascita e riscoperta, in cui all'uomo viene riconosciuto un ruolo centrale e Dio non investe più ogni aspetto della vita quotidiana come protagonista, durante il Rinascimento iniziò un graduale allontanamento dalla religione dogmatica. Di fatto questo periodo costituisce uno dei più oscuri per i vertici della gerarchia della Chiesa cattolica. In quel contesto infatti si iniziava ad avvertire l'esigenza di un rinnovamento profondo della vita cristiana, fondato sulla reale e profonda adesione al Vangelo. Nasceva così gradualmente un movimento protestante, distaccato dalla Chiesa, che rivendicava la libertà interiore del cristiano, il cui principio fondante era il rapporto personale con Gesù Cristo, che prescindeva da ogni autorità e istituzione umana. La Riforma protestante, o Scisma protestante, il cui inizio simbolico si fa riferire alla pubblicazione nel 1517 a Wittemberg delle 95 Tesi del frate agostiniano Martin Lutero, poneva una sfida, sia sul piano teologico che politico, alla Chiesa Cattolica ed in particolare all'autorità papale. Essa contestava esplicitamente il ruolo della gerarchia ecclesiastica e della tradizione, accusandoli di soffocare l'autentica vita interiore del cristiano, e condannava il lusso e lo sfarzo della curia romana, la mancanza di un autentico spirito religioso, la lontananza dai profondi valori cristiani, l'evidente nepotismo e la diffusa pratica, poco ortodossa, della vendita delle indulgenze. Pertanto allo scopo di contrastare e combattere efficacemente questo nuovo movimento che rischiava di sfuggire dal controllo, il 21 luglio 1542 (un anno prima della morte di

Copernico) Paolo III emanò la bolla *Licet ab initio*, con la quale si costituiva l'Inquisizione Romana, ossia la Congregazione della Sacra, Romana ed Universale Inquisizione del santo Offizio, che avviò alla censura e alla condanna religiosa e scientifica.

È evidente che una effettiva rinascita sia costantemente stata inibita, nel corso dei secoli ed anche durante il Rinascimento stesso, dal conservatorismo ecclesiastico il quale, per motivi di svariata natura oltre quelli della fede, ha giocato un ruolo preponderante ed ha avuto come conseguenza un obbligato rallentamento verso la modernità, impedendo la libertà di pensiero e di espressione, allontanando dal cambiamento, il rinnovamento ed il miglioramento e soprattutto dalla verità.

Eppure, nonostante tutto, l'uomo ha avviato in punta di piedi una sua rinascita, ha cominciato a dedicare a se stesso maggiore attenzione, decentrandola sempre più, sebbene in minima parte, dalla religione, dalle superstizioni e le credenze oscurantiste che lo avevano fatto vivere nel timore di Dio e delle sue punizioni divine, nei secoli precedenti. Si sentivano ancora gli strascichi della pandemia di peste, generatasi in Asia centrale e settentrionale durante gli anni trenta del XIV secolo e diffusasi in Europa a partire dal 1346, dando origine alla cosiddetta seconda pandemia di peste nera. Quasi tutti i contemporanei ritennero che la peste fosse un volere di Dio e cercarono conforto e giustificazione nella Religione. I mussulmani furono portati ad accettare la malattia con rassegnazione e a considerarla addirittura un dono che avrebbe consentito alle vittime di entrare immediatamente nel paradiso musulmano, come se si fosse morti in una guerra Santa. I cristiani invece la vissero in modo più personale ritenendola un castigo per i propri peccati. È evidente quanto il momento storico precedente il Rinascimento fosse stato pesantemente vissuto con arrendevolezza e sottomissione e nel timore del castigo e della condanna divina. Finalmente i rimasugli emotivi del Medioevo iniziavano faticosamente a stemperare, liberando le coscienze da questo dogmatismo assoluto e totalizzante.

Se l'uomo comincia ad avere fiducia in se stesso e a prendere coscienza del proprio libero arbitrio è anche grazie ai frutti raccolti dopo le espansioni territoriali degli ultimi secoli, la creazione di colonie e stabilimenti commerciali in oriente che hanno contribuito a

trasformare le città portuali italiane, come Amalfi, Genova, Venezia, in vere e proprie potenze commerciali, rendendole degli importantissimi punti di riferimento strategici. L'esodo di Mussulmani in occidente e la fusione di Cristiani ed Islamici, dovuti alle missioni Sacre di riconquista delle terre sante, permise inoltre la diffusione della cultura Araba in Italia ed in Europa. Gli Arabi avevano ereditato il sistema di numerazione additivo indiano aggiungendo lo zero alle nove cifre che essi utilizzavano e conservato e tramandato secoli di cultura scientifica antica, sviluppandola e ottenendo risultati significativi sulle equazioni di secondo e terzo grado, le frazioni, la trigonometria, l'estrazione di radici e l'approssimazione di pi greco. L'arricchimento ed il benessere nella nostra penisola hanno favorito il fiorire e lo sviluppo di un numero sempre maggiore di Scuole dell'Abaco prima e la nascita delle università poi, tra Emilia Romagna e Toscana. Quest'ultima divenne il centro nevralgico della cultura italiana e città come Firenze ci regalarono, durante il periodo rinascimentale, una miriade di intellettuali, letterati ed artisti straordinari.

Questa rifioritura socio-culturale, questo protagonismo del terreno rispetto al divino, furono accompagnati da un modo tutto nuovo di affrontare gli studi letterari degli antichi testi greci e romani, ovvero nella loro storicità e non più nella loro interpretazione allegorica, che attribuiva agli scritti significati simbolici e diversi da quelli letterali. Inizia una ricerca sempre più accurata del reale. Così l'uomo conquista un ruolo centrale anche nell'arte, con tutto un nuovo spessore. Si cerca di rappresentare in modo sempre più credibile la realtà all'interno di un dipinto, rendendo il più naturalisticamente possibile lo spazio tridimensionale sulla tela bidimensionale.

Di questa tematica si occupò uno dei grandi protagonisti e iniziatori del Rinascimento artistico ed architettonico italiano: Filippo Brunelleschi (1377-1446). Egli fu artista, ingegnere e matematico; si dedicò principalmente alla pittura e all'architettura: ridisegnò la città di Firenze regalándole uno stile identificativo inconfondibile, costruendo edifici sia laici che religiosi che fecero scuola, tra i quali la magnifica cupola di *Santa Maria Del Fiore*. Insieme a lui altri protagonisti del Rinascimento fiorentino furono Donatello e Masaccio. Poco più tardi si distinsero Michelangelo Buonarroti (1475-1564) e Raffaello

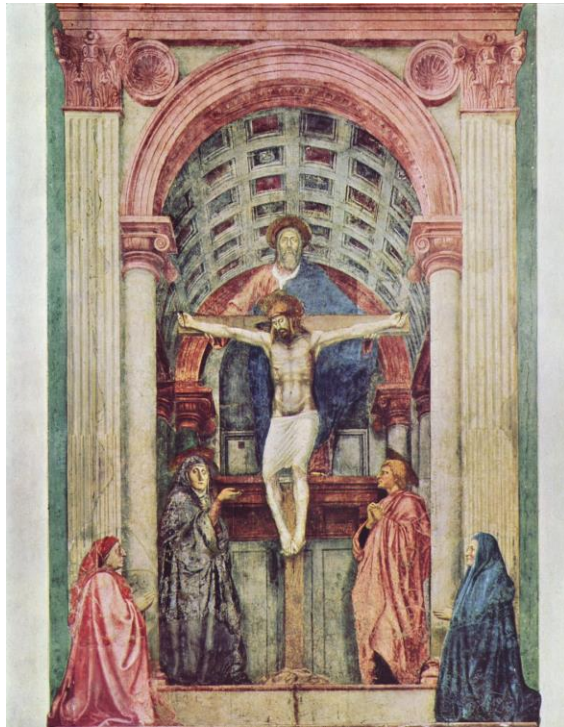
Sanzio (1483-1520) i quali immortalarono e ridefinirono lo skyline di intere città attraverso dipinti, sculture, e progetti architettonici. Essi regalarono un tale lustro alla Roma papale da renderla il centro culturale per eccellenza. Quando gli artisti giungevano a Roma per imparare dai modelli antichi vedevano strutture essenzialmente semplici. Questa sobrietà, ritenuta dai rinascimentali propria dell'antico, fu ripresa. Anche l'architettura quindi, come tutto ciò che concerne il periodo rinascimentale, si rifà a canoni antichi, ed ha grande attenzione per le proporzioni matematiche, la simmetria, la divisione equilibrata tra spazi pieni e spazi vuoti, con un ripudio dell'eccesso di decorazioni. Tutti questi artisti contribuirono a rendere la penisola italiana il centro di irraggiamento del Rinascimento.

Brunelleschi fra tutti rivestì un ruolo cruciale nel campo della pittura, egli è infatti ritenuto il padre innovatore dal quale tutti gli altri ereditarono le nuove idee e tecniche di rappresentazione della realtà. Grazie alla sua attenta ricerca che cambiò radicalmente l'approccio nel mondo dell'arte, nei suoi dipinti si poteva avere la percezione della profondità e dello spazio e finalmente la sensazione di essere di fronte ad una immagine sempre più affine alla realtà. L'idea rivoluzionaria della quale stiamo parlando è la *prospettiva*, una tecnica innovativa, grazie alla quale si poterono realizzare delle vere e proprie riproduzioni su tela della realtà percepita dall'occhio umano.

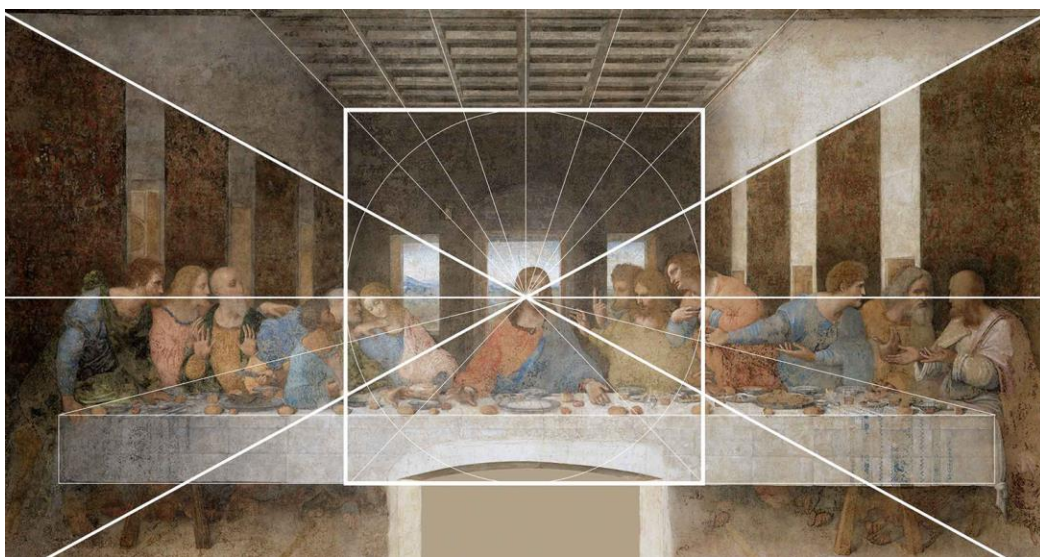
Questi principi vennero presto applicati anche da altri artisti come Masaccio (1401-1428). Il suo affresco *La Santissima Trinità* (Firenze, 1425-1428) è una delle prime testimonianze di questo nuovo approccio, che crea un senso di profondità spaziale rivoluzionario per l'epoca.

Altri esempi li ritroviamo nelle opere di Piero della Francesca (1412-1492) o di Leonardo Da Vinci (1452-1519), basti pensare alla sua celeberrima *Ultima Cena* (Milano, 1494-1498).

Questo fu un momento estremamente importante nel mondo artistico che segnò una svolta profondissima verso la modernità. La prospettiva divenne così il principio che ordinava unitariamente lo spazio compositivo dei dipinti.



La Santissima Trinità (Firenze, 1425-1428), Masaccio.



Ultima Cena (Milano, 1494-1498), Leonardo Da Vinci.

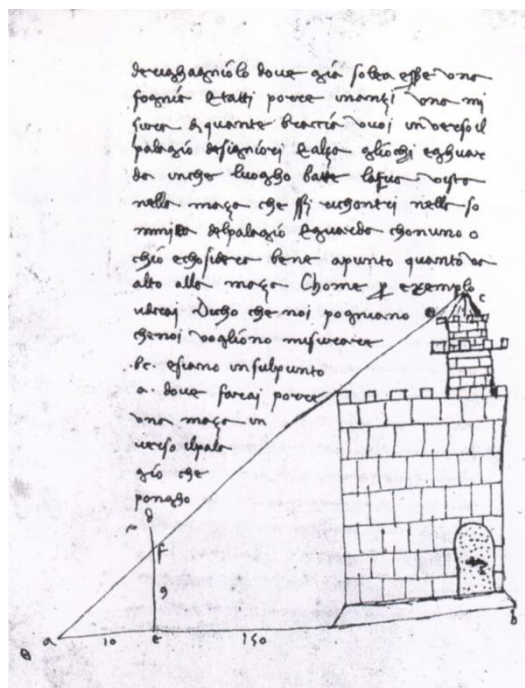
1.2 Agli albori della prospettiva

L'innovativo elemento attraverso il quale si cerca di ottenere una rappresentazione grafica dello spazio sempre più vicina a quella percepita dall'occhio umano è dunque la *prospettiva lineare centrale*. Attraverso studi ed esperienze condotte con l'aiuto di strumenti ottici, Brunelleschi pervenne ad un procedimento metodologico per rappresentare gli edifici in prospettiva, e li illustrò graficamente in due tavolette, andate purtroppo perdute, raffiguranti rispettivamente il Battistero di San Giovanni visto dalla porta di Santa Maria del Fiore, la piazza della Signoria e Palazzo Vecchio.

Furono lo studio e l'attenta ricerca dei dettagli di Brunelleschi che gli permisero di scoprire ed utilizzare per la prima volta questa innovativa tecnica che consentiva come mai prima d'ora di creare l'illusione della profondità, della distanza e del volume su una superficie piatta come la tela. Sostanzialmente egli riuscì a rappresentare in modo realistico la tridimensionalità su una superficie. Egli ebbe un ruolo cruciale nella scoperta del concetto cardine del punto di fuga e delle leggi matematiche che successivamente formalizzano la prospettiva.

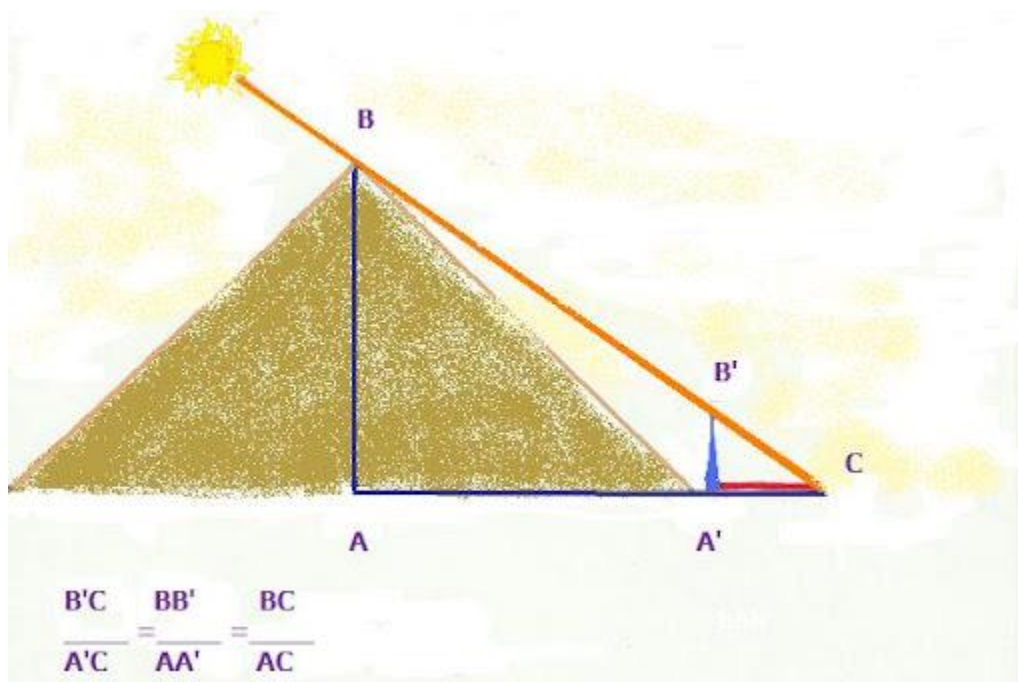
La prospettiva è definibile come un insieme di proiezioni e di procedimenti di carattere geometrico-matematico che consentono di rendere l'immagine di una figura dello spazio su un piano, proiettando la stessa da un centro di proiezione posto a distanza finita, detto punto di vista o di fuga. Così cambiando il punto di vista cambia anche la prospettiva e viceversa. Dal punto di vista linguistico, il vocabolo "prospettiva" è la forma femminile sostantivata di "prospettivo", derivante a sua volta dal latino tardo "prospectivus", ovvero "che assicura la vista". Durante il periodo medievale la *perspectiva* indicava l'ottica stessa (*perspectiva naturalis*), intesa come percezione visiva. In particolare indicava la pratica utilizzata per misurare le distanze e le lunghezze inaccessibili tramite un rilevamento

diretto. Nell'immagine seguente, tratta da un libro d'abaco del XV secolo ne vediamo un esempio.



In verità questo metodo fu formalizzato per la prima volta, almeno per quanto ne sappiamo, nel 600 a.C. da Talete di Mileto. Egli ritenuto, per tradizione, il primo filosofo della storia, fu tra i primi pensatori che passarono dal pensiero pratico all'astrazione, e a lui il mito attribuisce la prima, vera formalizzazione di alcune proprietà universali. Gli storici della matematica concordano nell'attribuirgli la conoscenza di quattro teoremi e due proprietà, senza però dargliene la reale paternità (è infatti plausibile che le proprietà di proporzionalità, espresse nel suo teorema, fossero già note fin dai tempi degli antichi Babilonesi). Talete spiegava come poter scoprire l'altezza di una piramide senza dover ricorrere ad una misurazione diretta, cosa per altro impossibile, ma sfruttandone l'ombra. E' evidente come la proiezione di un oggetto tridimensionale sul piano sia stata sfruttata sin dall'antichità e come la matematica ne abbia ben presto iniziato a dare una descrizione formale, sfruttandone le proprietà geometriche. Vediamo come.

Vuole la leggenda, come racconta Plutarco, che Talete viaggiando per l'Egitto in cerca di sacerdoti della valle del Nilo da cui apprendere le conoscenze astronomiche, mentre risaliva il fiume avrebbe sostato nei pressi della Piana di Giza, dove fu naturalmente attirato dalla Piramide di Cheope. Fu così che il faraone Amasis, giunto a conoscenza della fama del sapiente, lo sfidò a dargli la misura corretta dell'altezza. Talete per compiere l'apparentemente ardua impresa non avrebbe fatto altro che dimostrare le sue doti e le proprie conoscenze, sbalordendo così il faraone. Egli attese il levar del sole e piantò un'asta perpendicolarmente al terreno, dinnanzi alla piramide, cosicché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide, e proiettandone l'ombra a terra, formavano due triangoli rettangoli. Sfruttando questi ultimi e la conoscenza delle proporzioni egli ha potuto calcolare l'ignota altezza della piramide, avendo nota l'altezza dell'asta e misurando le lunghezze delle proiezioni delle ombre.



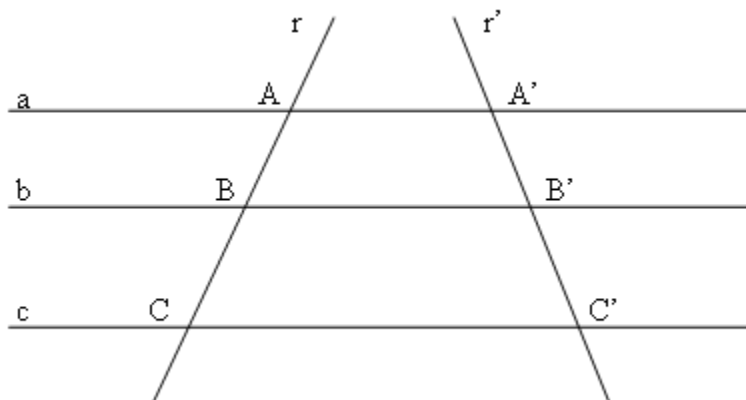
Dunque si ha $AB : A'B' = AC : A'C$, dalla quale si ricava AB .

Le proprietà ed i risultati ottenuti da Talete a partire dalla proiezione dell'ombra sono il preludio di quella branca della Matematica che qualche millennio più tardi formalizzerà la geometria della prospettiva. L'enunciato del teorema di Talete che sfrutta sostanzialmente i legami tra i segmenti omologhi creati sulle trasversali di due rette parallele, quelle prolunganti le due altezze, è il seguente:

Un fascio di rette parallele intersecante due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali.

Vediamo subito di seguito un esempio: siano date tre rette parallele a, b, c e due rette r, r' intersecanti le suddette, trasversalmente. Allora si avrà che

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'.$$

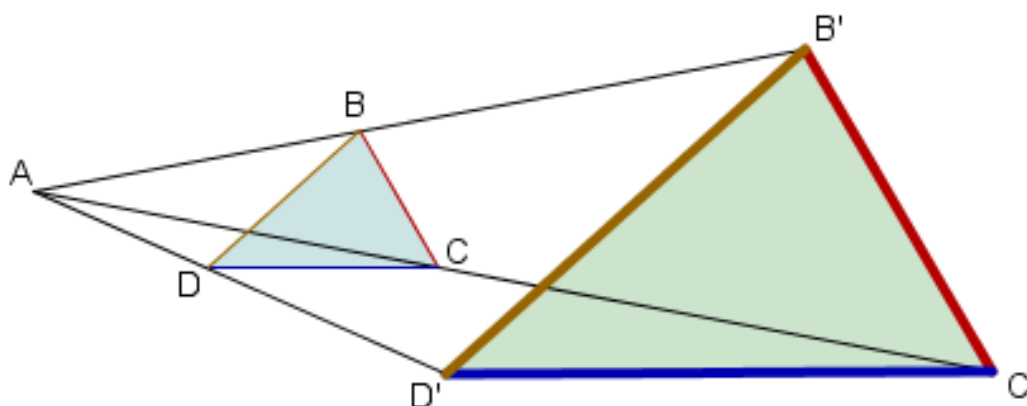


Colui che però enunciò e dimostrò questo teorema, lasciandocelo in eredità per iscritto, fu Euclide, qualche secolo più tardi, nel 300 a.C. .

Se una linea retta è disegnata parallela ad uno dei lati di un triangolo, allora taglia proporzionalmente i lati del triangolo.

(Elementi, VI 2)

Dunque dati AB e AC prolungabili infinitamente, tagliati da un fascio di rette parallele poste tutte alla stessa distanza l'una dall'altra, si otterranno triangoli ABC , $AB'C'$ e via dicendo, simili tra loro, ed i segmenti BC , $B'C'$ ecc sono tutti proporzionali. Estendendo le proprietà del teorema di Talete nello spazio, vediamo che esso è in grado di spiegare anche trasformazioni del piano e dello spazio, come ad esempio l'omotetia. Quest'ultima è una trasformazione geometrica che mantiene invariati gli angoli ma non le lunghezze, o meglio le distanze, nel piano o nello spazio; intuitivamente essa dilata o contrae le figure o gli oggetti, senza mutarne la forma, ovvero mantenendo invariate le proporzioni.



Le figure BCD e $B'C'D'$ sono simili: possiamo considerare la piramide a base triangolare $B'C'D'$ e notare che sui suoi tre lati sono verificate le proprietà del Teorema di Talete e della similitudine fra triangoli (ad esempio il triangolo ABD è simile al triangolo $AB'D'$ ecc).

La teoria delle superfici è estendibile ai volumi: possiamo osservare che nello spazio tridimensionale le proprietà suddette sussistono e soprattutto che evidenziano immediatamente come la proiezione e conseguentemente la prospettiva siano descrivibili in modo abbastanza spontaneo tramite il formalismo matematico e come dunque i sapienti dell'antichità, che erano di fatto tuttologi, abbiano accostato i due mondi apparentemente

così lontani dell'arte e della scienza. Il vertice A rappresenta propriamente il punto di fuga, dal quale avviene la proiezione e dal quale in prospettiva vediamo il triangolo ABD crescere all'aumentare della distanza. A tal riguardo entreremo più specificatamente nel dettaglio più avanti.

La prospettiva fu quindi il primo, tra i metodi di rappresentazione utilizzati, a essere codificato e formalizzato. Come già anticipato, non riusciamo a datare con esattezza quando questo avvenne. Il primo trattato assiomatico della storia, realizzato da Euclide nel 300 a.C. è anche il primo riferimento teorico scritto pervenuto sino a noi, nel quale queste proprietà geometriche vengono enunciate e dimostrate. Naturalmente però, essendo esclusivamente un trattato scientifico logico-deduttivo, non fa alcun riferimento all'arte o alle applicazioni pratiche. Inoltre la perdita totale della grande pittura parietale greca non ci permette di sapere con sicurezza se quei pittori adoperassero o meno procedimenti tecnici utili a una corretta rappresentazione prospettica del reale o si avvicinassero ad essa in qualche modo. I resti di pittura romana pervenutici sono invece cospicui, in gran parte derivati da soggetti ellenistici, ed ivi si può notare una matura capacità di ottenere scorci. La rappresentazione delle linee che definiscono gli ambienti architettonici però è molto approssimativa e lascia intendere che, almeno nell'ambiente romano, i metodi operativi per ottenere gli effetti prospettici nelle immagini fossero del tutto intuitivi.

Nel periodo bizantino e durante l'alto Medioevo, i problemi connessi con la mimesi nella rappresentazione furono quasi completamente trascurati, in quanto il fine delle arti figurative in quel momento storico, era esclusivamente quello di evocare il trascendente. La ricerca di un oggettivo realismo nelle immagini fu quindi completamente trascurata. Solo a partire dalla fine del 1200, soprattutto grazie all'opera pittorica di Giotto (1267-1337), il tema della restituzione illusionistica della realtà e la corposità delle figure tornò ad avere maggiore rilevanza e la rappresentazione realistica cominciò ad essere una tematica di interesse primario e un obiettivo da raggiungere dagli artisti. Fu quindi inevitabile lo sviluppo e la ricerca di espedienti e procedimenti sempre più specifici che avessero come obiettivo quello di ottenere, all'interno di un'opera artistica, il tipo di

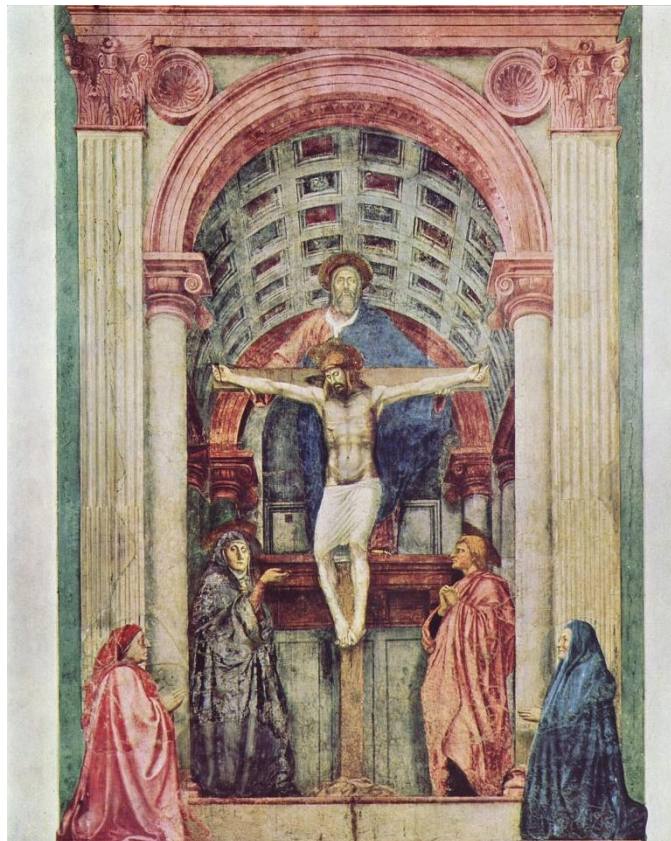
percezione dato dalla vista dell'essere umano. Vediamo qui di seguito *La Pentecoste* di Giotto, realizzata nel 1303.



Già verso metà del XIV secolo si era giunti a risultati tutt'altro che trascurabili, come dimostra la pavimentazione de l'*Annunciazione*, dipinta su tavola da Ambrogio Lorenzetti nel 1344.



Un secolo più tardi, all'inizio del Quattrocento, immersi nel primo Rinascimento, con Filippo Brunelleschi si ebbe il primo, vero salto di qualità, che potremmo definire di ordine scientifico. Gli studi e la ricerca che egli fece per ottenere gli importantissimi risultati sulla prospettiva, ci sono sostanzialmente stati tramandati grazie alla prima trattazione scritta dell'argomento. Come abbiamo già anticipato, seppure il formalismo matematico abbia consentito sin dall'antichità di sfruttare le proiezioni per ottenere dei risultati di natura pratica e concreta, non abbiamo testimonianza diretta dell'approccio scientifico nell'arte. Per la prima volta questo legame viene esplicitamente trattato nello scritto dell'umanista e architetto Leon Battista Alberti (1404-1472), intitolato *De Pictura* (1434-1436). Le origini dei procedimenti utili a ottenere una corretta rappresentazione prospettica vanno quindi ricercati nell'attività e nella volontà degli artisti. Un risultato ammirevole, di certo fortemente influenzato dalle scoperte del Brunelleschi, e precedente agli scritti dell'Alberti, possiamo vederlo nella famosa Trinità (1425-1427) di Masaccio in Santa Maria Novella a Firenze.



par di emendarla", rassicurandoci anche sull'autenticità e la correttezza di quanto vi è scritto.

Dopo Alberti, altri grandissimi artisti del Rinascimento lasciarono scritti sul tema. Leonardo da Vinci ad esempio, lasciò notazioni e dimostrazioni sparse nei suoi manoscritti (in particolare nel *Manoscritto A*, datato al 1492 e conservato all'Institut de France di Parigi).

Piero della Francesca (1412-1492), pittore e matematico tra le personalità più emblematiche del Rinascimento italiano, ci ha lasciato in eredità un altro tra i primi trattati che hanno fatto da collante tra l'arte e la matematica: la sua importantissima opera *De prospectiva pingendi* (*Della prospettiva del dipingere*), un trattato in lingua volgare composto nell'ottavo decennio del XV secolo. Sebbene questo sia meno noto del più famoso trattato *De divina proportione*, pubblicato nel 1509 dal noto matematico Luca Pacioli (1445-1517), fu però una sua importante fonte di ispirazione. Infatti quest'ultimo ne riprese una buona parte riguardante l'arte e l'architettura e la completò arricchendola di dettagli e illustrazioni, come le 54 tavole sui poliedri disegnati da Leonardo Da Vinci. Il trattato di Pacioli diviso in tre parti, ha riscosso maggiore successo, in quanto fu una raccolta completa ispirata oltre che dall'opera di Piero Della Francesca anche da altre opere precedenti, tra le quali il *Liber abaci* di Leonardo Pisano conosciuto come Fibonacci. La prima delle tre parti del trattato infatti, divisa in 71 capitoli, tratta la sezione aurea e le sue applicazioni nelle varie arti.

Nonostante ciò, focalizzeremo presto la nostra attenzione proprio sul *De prospectiva pingendi* di Piero Della Francesca, sottolineandone l'importanza, in quanto opera ispiratrice e prima, vera precorritrice della nuova visione d'insieme tra due mondi oggi così apparentemente privi di affinità, come l'arte e la matematica.

1.3 Tecniche e metodi di proiezione

Daremo ora un'infarinatura riguardante le nozioni necessarie per la costruzione di una proiezione e di un disegno in prospettiva, senza esaminare in maniera approfondita i dettagli del disegno tecnico né tantomeno entrando nel merito dell'ambito architettonico, bensì soffermandoci esclusivamente sugli elementi necessari per comprenderne i principi fondamentali scoperti ed utilizzati nella maggior parte delle opere pittoriche rinascimentali.

Come abbiamo più volte sottolineato, alla base di un'immagine prospettica vi è il concetto di verosimiglianza; pertanto, oltre ad essere in grado di soddisfare esigenze di gradevolezza estetica, essa deve cercare di corrispondere, per quanto possibile, al tipo di visione percepito dall'essere umano. Il modo in cui vediamo le cose è il risultato di un processo complesso: ancora prima di poter vedere qualcosa, una serie di distinti passaggi ha luogo nell'occhio e nel cervello. Si tratta del percorso retino-corticale, che inizia dall'occhio e si sviluppa fino al nostro cervello. La luce è la base di tutto ciò che vediamo. Nella più totale oscurità, siamo virtualmente ciechi. In parole semplici per poter vedere un oggetto, questo deve essere necessariamente esposto a una qualche forma di luce. I nostri occhi assorbono la luce riflessa dall'oggetto e conseguentemente i raggi penetrano la cornea. Successivamente, attraversano la pupilla. Infine, la luce colpisce il cristallino, dove viene raccolta e trasferita alla retina fotosensibile. Qui l'informazione visiva viene acquisita, elaborata e viene trasferita al nervo ottico, che la trasmette direttamente al cervello, che consentirà di formare l'immagine che infine vediamo. Una perfetta corrispondenza fra immagini rappresentate su una superficie piana e quelle proiettate sul fondo dell'occhio non è però possibile in quanto, essendo l'occhio umano di forma sferica, le immagini vengono ovviamente distribuite su una superficie curva. Basti pensare ad esempio al planisfero che rappresenta tutta la superficie terrestre: le proiezioni

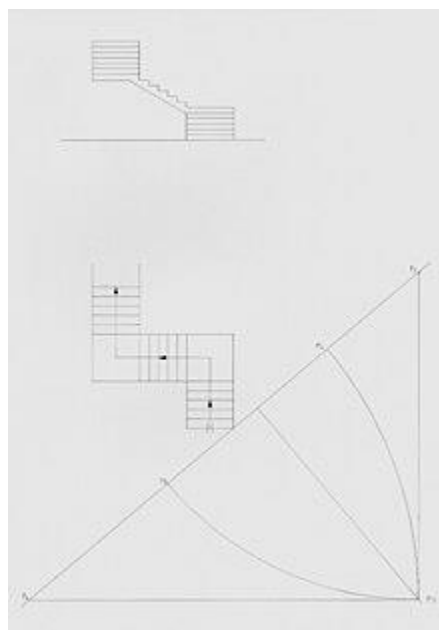
cartografiche, infatti, possono essere costruite in modo da mantenere proporzionate rispetto alla realtà solo alcune proprietà e sono classificate in base al diverso tipo di proiezione utilizzato per rappresentare la superficie sferica del nostro pianeta (che più precisamente è un geoide). I metodi utilizzati sono definiti *equivalente*, *equidistante* o *conforme*, a seconda che si mantengano rispettivamente inalterati i rapporti tra le superfici, le distanze o gli angoli. Per ottenere un'accettabile limitazione delle difformità derivanti dalla proiezione di una superficie tridimensionale su una bidimensionale, si assegna al cosiddetto "cono visivo" un angolo di apertura opportuno. Detto cono, già introdotto nella disquisizione riguardo le coniche, ha vertice nel punto di vista e contiene tutti gli infiniti raggi passanti per gli infiniti punti dell'oggetto o della figura che vogliamo proiettare, detta *figura obiettiva*. Come abbiamo già argomentato, l'intersezione del cono col piano di proiezione, detto *quadro prospettico*, può essere un cerchio, un'ellisse o un'iperbole, proprio per questo motivo se vogliamo proiettare tutti i punti senza perderne una parte, l'angolo di apertura del cono deve essere opportunamente scelto in modo da ottenere una conica chiusa (cerchio o ellisse) che circonda il limite all'interno del quale la rappresentazione conservi i requisiti accettabili, evitando così macroscopiche aberrazioni nelle immagini e facendole apparire identificabili a quelle definite nel campo visivo umano.

Vediamo dunque quali sono gli elementi fondamentali per la rappresentazione in prospettiva di una figura obiettiva, che si suppone data nello spazio. Si considerino naturalmente il piano sul quale fare la proiezione, detto *quadro prospettico* QP e il centro di proiezione, chiamato normalmente *punto o centro di vista* PV . Si fissino inoltre i seguenti elementi di riferimento: un piano orizzontale, detto *piano di terra* o *geometrico* PG ; la *linea di terra*, data dall'intersezione del piano di terra e del quadro prospettico; la proiezione ortogonale del punto di vista sul piano geometrico che individua il cosiddetto *punto di stazionamento* PS ; la proiezione ortogonale dello stesso punto di vista sul quadro prospettico che determina il *punto principale* PP ; l'intersezione del quadro con un *piano orizzontale* PO passante per il punto di vista che è una retta denominata *linea d'orizzonte*, parallela alla linea di terra; in fine in alcuni casi può essere utile tracciare il *cerchio di distanza* C , che ha il centro nel punto principale, raggio uguale alla distanza del punto di

vista dal quadro, ed è il luogo geometrico delle fughe di tutte le rette inclinate di 45° rispetto al quadro.

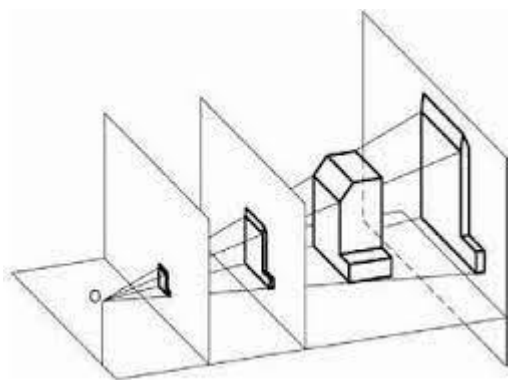


È inoltre necessario disporre delle proiezioni ortogonali della figura obbiettiva, la cui vista dall'alto, definita *pianta*, viene di solito riportata sul piano di terra. Per costruire l'immagine in prospettiva, infatti, si comincia normalmente col disegnare la pianta secondo il metodo delle proiezioni ortogonali o di Monge, a partire dall'immagine frontale della figura obbiettiva. Vediamo nel seguente esempio la visione frontale e la pianta di una scala a tre rampe.



Completata questa prima fase, occorre determinare l'immagine dei punti principali della figura nella loro effettiva configurazione spaziale. A tale scopo è necessario conoscerne le reali quote (cioè le loro altezze sul piano geometrico), rilevabili da prospetti e sezioni anch'esse date mediante il metodo del Monge.

Nei confronti della figura obiettiva, il quadro può assumere infinite posizioni, definite dalla scelta di una tra tutte le infinite inclinazioni (le direzioni) rispetto al piano geometrico. Se ad esempio, fissato il centro di vista, il quadro si sposta rispetto alla figura obiettiva conservando la medesima giacitura¹, si otterranno, in corrispondenza delle diverse posizioni, delle immagini simili fra loro che sono casi di *omotetia*.



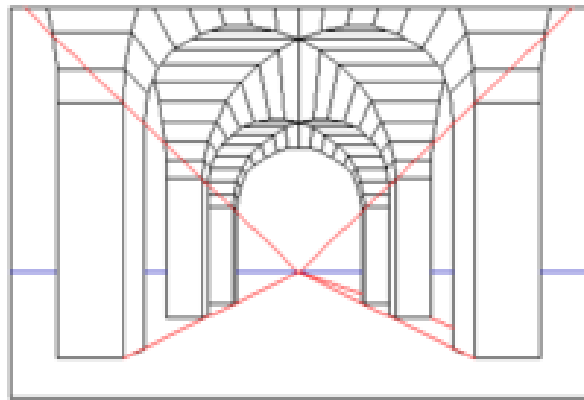
Considerando le variazioni di giacitura del quadro prospettico (ovvero le sue possibili e diverse direzioni) si perviene alla determinazione dei seguenti tipi di prospettiva classificati come *prospettiva frontale* o centrale e la *prospettiva accidentale* e la *prospettiva razionale*.

Per definire le caratteristiche fondamentali dei tre tipi di prospettiva sopra elencati, è opportuno riferire la figura obiettiva a una terna di assi cartesiani coordinati. Per

¹ *Giacitura di un piano*: la sua inclinazione rispetto a una terna di assi cartesiani di riferimento.

semplicità si pensi ad un oggetto di forma parallelepipedale con tre spigoli rispettivamente giacenti su ciascuno dei tre assi cartesiani, concorrenti in uno stesso vertice coincidente con l'origine degli assi. Si distinguono dunque i seguenti diversi casi:

1. Disponendo il quadro prospettico parallelo a due degli assi cartesiani con il terzo, di conseguenza, normale a esso, viene individuato soltanto un punto di fuga (appartenente al piano normale al quadro che contiene il punto principale). Si ha in questo caso la prospettiva centrale, la posizione più frequentemente assegnata al punto principale nelle opere degli artisti rinascimentali.



Un esempio esplicito di prospettiva centrale si ha in uno dei quadri più emblematici del primo rinascimento, il cui autore è anonimo, seppure tra i ricercatori vi è chi ipotizza possa essere attribuito a Piero Della Francesca, Melozzo da Forlì o Leon Battista Alberti.

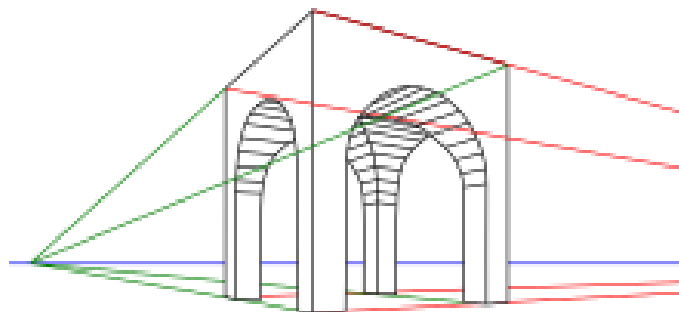
La *Città ideale* rappresenta il modello di assoluta perfezione della città rinascimentale i cui edifici, proprio come i pezzi di una scacchiera, sono ordinati e collocati a intervalli di spazio regolari, disposti in maniera simmetrica secondo canoni di assoluta perfezione. Il centro della rappresentazione, quindi il punto di fuga, coincide con un edificio classico a base circolare, proprio perché il cerchio è la figura da sempre ritenuta perfetta ed ideale.

Possiamo ammirare il suddetto quadro nell'immagine successiva, dove in rosso vi sono tracciate le rette che definiscono la prospettiva a partire dal punto di vista centrale.

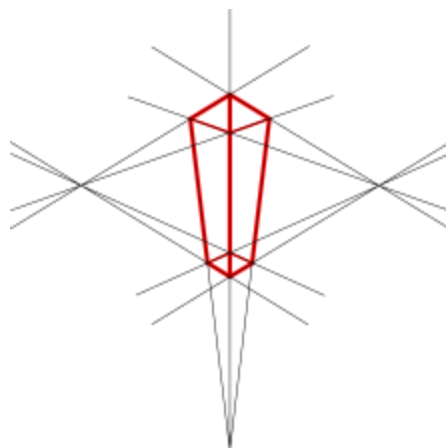


Città ideale, Autore e data sconosciuti

2. Se il quadro è invece parallelo ad un solo degli assi cartesiani ed è di conseguenza obliquo rispetto agli altri due, si individuano due punti di fuga e si configura in questo secondo caso la prospettiva accidentale.



3. Se infine il quadro è obliquo rispetto a tutti tre gli assi cartesiani, si hanno tre punti di fuga e si configura in questo modo il caso più generale della prospettiva razionale (o a quadro inclinato).



Questi sono i casi base che esauriscono una trattazione esaustiva ma non approfondita sulle tecniche di proiezione e una sintesi teorica e pratica del metodo più utilizzato nel periodo rinascimentale per rappresentare la realtà in prospettiva va senza dubbio ricercata nel metodo della proiezione centrale o di Poncelet.

Capitolo 2.

La prospettiva alle origini della geometria proiettiva

2.1 La nascita delle geometrie non euclidee

Durante il Rinascimento per la prima volta affiorarono il desiderio e l'esigenza di descrivere in modo formale il mondo dell'arte e ciò che la fusione tra estro e rigore potevano realizzare all'interno di un dipinto. Questo perché gli artisti aspiravano a realizzare delle opere d'arte sempre più realistiche ricercando la tridimensionalità sulla tela e pertanto, per poterla rappresentare al meglio, necessitavano di un metodo da poter acquisire, perfezionare e tramandare. Nacque così l'esigenza di raccogliere tutte le informazioni dettagliate riguardanti la tematica della prospettiva, per poterle studiare, applicare ed approfondire. In questo contesto di rinascita e maturazione anche lo studio della matematica inizia ad evolvere: i filosofi e gli artisti erano convinti che la matematica fosse la vera essenza del mondo fisico e che l'intero universo (quindi anche l'arte) potesse essere spiegato in termini geometrici. Abbiamo già anticipato che il *De prospectiva pingendi* è uno dei primi trattati a voler combinare qualcosa di profondamente soggettivo, come l'arte, e qualcosa che, almeno all'apparenza, non sembrerebbe avere nulla a che fare con essa: la matematica. L'arte nel suo significato più ampio comprende ogni attività che comporta forme di creatività e di espressione estetica, avvalendosi di abilità innate o acquisite e di accorgimenti tecnici derivanti dallo studio e dall'esperienza. Essa è una forma di espressione che ha la capacità di trasmettere emozioni e messaggi impliciti o espliciti, pertanto può essere descritta anche come una tipologia di linguaggio, in quanto capace di comunicare qualcosa. Tuttavia non può essere definita come tale, in quanto non esiste un codice unico ed inequivocabile di espressione ed interpretazione artistica. Al contrario la matematica è per eccellenza la disciplina che esprime qualunque concetto, idea e proprietà attraverso un linguaggio rigorosamente formale, fondandosi su un sistema di assiomi non ambiguo e non contraddittorio, utilizzando un simbolismo universale e dimostrando minuziosamente tutto ciò che ipotizza prima di teorizzarlo. Sostanzialmente segue delle regole precise ed imprescindibili che non sono soggette a libera

interpretazione ed utilizzo. Quantunque tutto ciò sembrerebbe rendere arte e matematica due mondi inconciliabili, è importante osservare che, in primis, la maggior parte dei simboli riconosciuti in tutto il mondo, costituenti il linguaggio matematico moderno, è stata introdotta solo dopo il XVI secolo. Prima di allora il linguaggio attraverso il quale si esprimeva la matematica era esclusivamente retorico, dunque ogni definizione o dimostrazione veniva realizzata solo attraverso le parole (un processo faticoso che ne appesantiva e rallentava lo studio e gli sviluppi). Le prime origini della notazione moderna e della scrittura compatta odierna, le quali rendono molto più semplice e veloce il lavoro degli scienziati, risalgono ai matematici Rafael Bombelli (1526-1572) e François Viète (1540-1603), intorno alla seconda metà del 1500. Pertanto durante il primo Rinascimento e soprattutto durante i primi approcci con le tecniche pratiche per ottenere una visione in prospettiva all'interno di un dipinto, non si era ancora avvezzi all'uso del simbolismo e della sintesi che regala oggi una scrittura rigorosamente compatta e dalla decodificazione immediata. Inoltre i sapienti erano esperti in molteplici campi e non vi era ancora una settorializzazione rigorosa delle diverse discipline, pertanto in modo del tutto naturale chi si occupava di scienza si occupava anche di arte; fu per questo altrettanto naturale sviluppare l'esigenza di descrivere in modo formale le tecniche da utilizzare all'interno dei dipinti, grazie alle quali poter ottenere determinati risultati pratici che garantivano illusioni ottico percettive sempre più realistiche. Questo ha consentito, come anticipavamo, di tramandare le tecniche scoperte e le conoscenze acquisite ai posteri e quindi di approfondirle e perfezionarle sempre di più.

Il trattato di Piero della Francesca è particolarmente importante proprio perché è uno tra i primi a creare questo affascinante connubio: esso descrive in particolare come dipingere e disporre nello spazio le singole figure, esamina la proiezione delle superfici e dei volumi, e si focalizza sugli aspetti matematico-geometrici dell'arte, facendo altresì specifiche applicazioni pratiche. Questa opera è tanto rilevante in quanto rappresenta il preludio alla teoria che inizierà a svilupparsi in maniera sempre più approfondita nei secoli successivi e che rivoluzionerà completamente le certezze della Geometria Euclidea. Per la prima volta, anche se in modo ancora del tutto inconsapevole, si ponevano le basi teoriche di una nuova

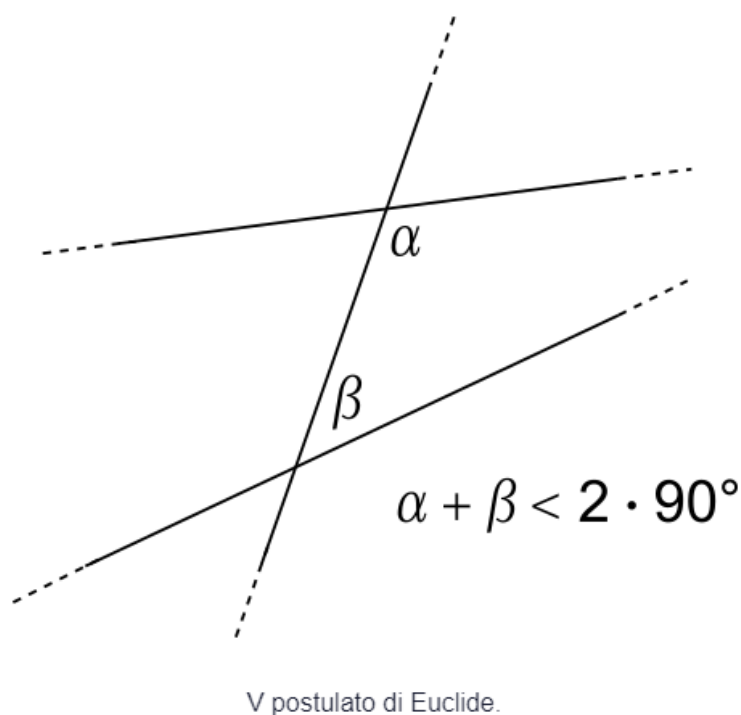
Geometria che presupponeva la negazione del tanto dibattuto quinto postulato di Euclide. Per secoli i matematici hanno ritenuto che il quinto postulato dovesse essere una conseguenza dei primi quattro e si sono adoperati, inutilmente, per dimostrare la sua dipendenza da essi (ovvero che potesse essere derivato a partire dagli altri quattro). Tanta ostinazione da parte degli studiosi di geometria nel cercare di dimostrare il postulato delle parallele, a cominciare da Proclo (V secolo d.C.), portò nei secoli successivi a notevoli sviluppi, fino alla rivoluzionaria scoperta delle *Geometrie non Euclidee*, tra il XVIII ed il XIX secolo. Il concetto cruciale alla base della geometria che descrive la prospettiva è infatti proprio il fatto che non esistano rette parallele, ovvero che rette parallele di uno spazio Euclideo vadano, sul piano di proiezione, ad intersecarsi in un punto della linea di orizzonte, più specificatamente all'infinito. E' proprio questo il principio alla base della prospettiva grazie al quale riusciamo a rappresentare la realtà tridimensionale su un piano bidimensionale: il nostro occhio percepisce linee parallele come convergenti all'orizzonte; cosa che peraltro risulta evidente semplicemente riflettendo su esempi di vita quotidiana: basti pensare a quando guardiamo una strada rettilinea molto lunga dinnanzi a noi, focalizzandoci in particolare sulle banchine destra e sinistra che, ovviamente parallele tra loro, a grande distanza, vediamo invece incontrarsi come se effettivamente non fossero tali.



Ecco dunque che, a livello intuitivo, basta la semplice percezione dell'occhio umano a negare uno dei postulati più dibattuti della storia, il *V Postulato di Euclide*:

Se una retta taglia altre due rette determinando dalla stessa parte di piano angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Ivi è implicitamente inteso che se gli angoli formati sono invece di 90 gradi, allora le rette non si incontreranno mai, in quanto parallele, definite tali dalla *Definizione 23* in *Elementi* di Euclide.



Naturalmente la negazione di un postulato non può in alcun modo essere affidata alla percezione, né tantomeno essere confermata esclusivamente per via intuitiva: occorre una dimostrazione rigorosa ed in primis una consapevolezza completa della questione. La difficoltà pratica riguardante questo postulato risiede nel fatto che per essere dimostrato

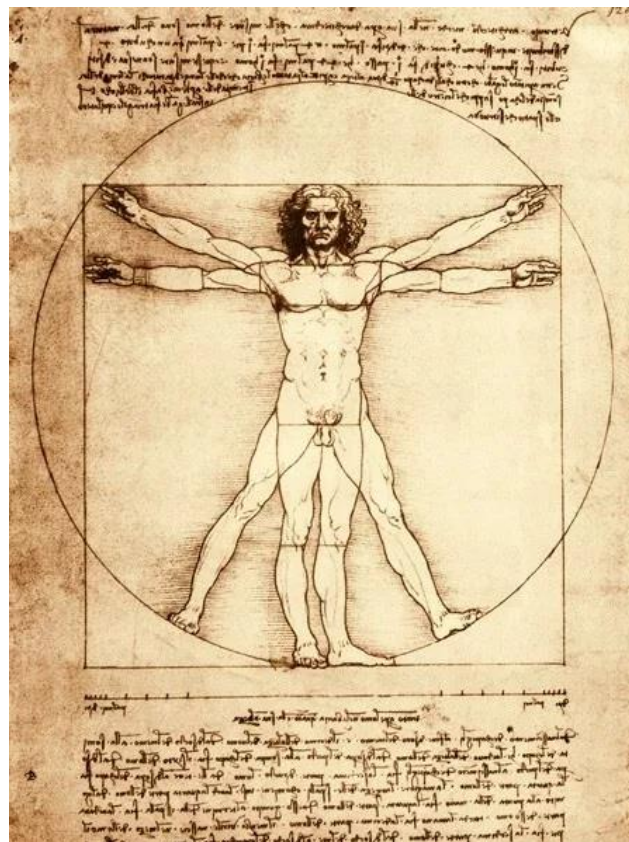
o confutato occorre spingersi oltre il conoscibile ed arrivare ad una distanza infinita. Occorrerà più di un millennio e mezzo prima di formalizzare una teoria che si occuperà rigorosamente di questa problematica e di tutte quelle derivanti dalle proiezioni effettuate a partire da particolari punti di proiezione, e sarà la cosiddetta *Geometria Proiettiva*.

Tra i primi ad effettuare studi e ricerche più rigorose nel campo della geometria e della prospettiva ci fu l'artista e matematico Albrecht Dürer (1471-1528), massimo esponente della pittura tedesca rinascimentale. I suoi scritti furono particolarmente rilevanti in quanto contribuirono alla formazione del linguaggio scientifico tedesco e favorirono la diffusione delle teorie sulla prospettiva nell'Europa centro-settentrionale. In particolare Dürer aveva come obiettivo quello di venire a conoscenza delle regole riguardanti la costruzione prospettica che rispettassero i canoni delle "perfette" proporzioni del corpo umano, ma queste erano protette come "segreto di bottega" dai grandi artisti come Michelangelo.

L'unico suo punto di riferimento erano le scarse indicazioni dell'antico teorico dell'architettura Marco Vitruvio Pollione (80-15 a.C.), il cui trattato, intitolato *De architectura*, è stato il fondamento dell'architettura occidentale fino al XIX secolo. Egli descriveva l'architettura come imitazione della natura ed in quanto tale gli edifici e le costruzioni da erigere dovevano inserirsi armoniosamente nell'ambiente naturale. Considerando questi presupposti l'artista (in particolare l'architetto) doveva possedere una vasta cultura generale in quanto necessitava di nozioni di geometria, matematica, ottica e acustica per poter lavorare con le forme, fare calcoli adeguati, realizzare strutture che garantissero la migliore propagazione dei suoni e la luce ottimale (basti pensare ai teatri) e ancora possedere nozioni di anatomia e medicina poiché, in quanto costruttore di luoghi dediti alla vita quotidiana dell'uomo, doveva conoscere le proporzioni del corpo umano per poter dare vita ad un equilibrio tra uomo e spazio artificiale.

Proprio dalle indicazioni dei suoi scritti trasse ispirazione il sommo Leonardo Da Vinci il quale, intorno al 1490, in un disegno a penna e inchiostro su carta, realizzò la celeberrima rappresentazione delle proporzioni ideali del corpo umano, uno dei simboli iconici dell'arte rinascimentale: *L'uomo Vitruviano*, il cui nome è esplicitamente ispirato a Vitruvio.

Diversamente da uno scienziato, che in un corpo vede la correttezza anatomica, l'artista vede linee e volumi, e una perfetta combinazione di proporzioni. L'obiettivo di Leonardo era quello di stabilire le perfette proporzioni di un corpo rispettando i principi dell'armonia enunciati da Vitruvio; pertanto, cercò di dimostrare come la figura umana, nelle sue ideali proporzioni, potesse essere armoniosamente inscritta nelle due figure geometriche, anch'esse perfette, del cerchio (che simboleggia il cielo, la perfezione divina) e del quadrato (che simboleggia la terra).



Leonardo fu il primo artista a seguire le idee di Leon Battista Alberti, che nel suo trattato *De Pictura* spiegava come i movimenti corporei siano dovuti all'azione coordinata di muscoli, tendini, nervi e ossa, e invitava gli artisti ad ampliare le loro conoscenze nel campo anatomico, proprio al fine di realizzare opere sempre più dettagliate e realistiche.

Approfondendo la stessa tematica Vincenzo Danti (1530-1576) progettò di realizzare una raccolta completa di scritti dal titolo *Il trattato delle perfette proporzioni*, opera della quale però pubblicò solo il primo libro introduttivo dei 15 che aveva in programma, dove avrebbe dovuto sviluppare approfonditamente le teorie alle quali era giunto Michelangelo dopo il suo lungo e faticoso lavoro svolto nell'arco di dodici anni, riguardo lo studio dell'anatomia del corpo umano. Danti ci riferisce come gli artisti durante il Rinascimento, nella loro continua ricerca del reale, sentirono il bisogno di avvicinarsi allo studio dell'anatomia, proprio poiché desideravano rappresentare in modo sempre più dettagliato tutte le peculiarità e le minuzie del corpo umano ed in particolare i muscoli, i tendini, i vasi sanguigni e tutto ciò che c'è di visibile ma anche di invisibile del corpo di un uomo o di una donna. La maggior parte di essi, come il già citato Dürer, per ritrarre corpi, ricorreva all'imitazione di parti anatomiche realizzate da altri maestri prima di loro e di conseguenza, spesso, il risultato che ne veniva fuori era una confusa fusione poco armoniosa dei diversi modelli presi in considerazione (si pensi infatti ai diversi punti di vista che è necessario studiare per poter ottenere una scultura a tutto tondo). L'unica soluzione possibile per sopperire a tali inconvenienti era lo studio approfondito dell'anatomia umana, la qual cosa però era concretamente realizzabile solo attraverso l'analisi della dissezione dei cadaveri, che consentiva effettivamente di venire a conoscenza dei più nascosti segreti di un corpo umano; ciò naturalmente era assolutamente illecito in quel periodo, soprattutto per via della Chiesa che lo vietava categoricamente. Pertanto, inizialmente i sapienti dell'epoca iniziarono la pratica della dissezione in modo occulto e segreto, e gli artisti cercarono di avvicinarsi ed informarsi direttamente, assistendo per esempio a dissezioni dal vivo, cosa che permise loro di conoscere e ritrarre anche l'anatomia interna del corpo umano. Gli stessi Leonardo da Vinci e Michelangelo eseguirono in prima persona le dissezioni e questo permise loro di realizzare le prime dettagliate illustrazioni dei libri di anatomia. Danti pur essendo definito discepolo di Michelangelo, data la sua devozione per il maestro, presumibilmente non lo conobbe o comunque non lo frequentò mai (non vi sono documenti a testimoniarlo) a tal punto da poter scrivere una dissertazione dettagliata sulle scoperte e le conoscenze del grande maestro; in effetti a suo stesso dire si sentiva alquanto scoraggiato dalla poca

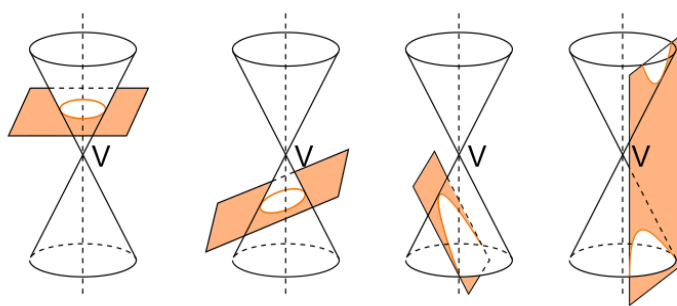
dimestichezza con la materia che intendeva trattare. Il suo primo libro riguarda infatti solo le proporzioni delle figure animate e non, mentre il seguito degli altri 14 volumi, che non fu mai pubblicato, avrebbe invece dovuto trattare proprio gli argomenti più delicati ed ignoti come l'anatomia generale, quella delle interiora, dei muscoli del capo, degli arti, del busto e così via.

Dürer viaggiò dalla Germania in Italia verso Venezia, poi Bologna, cercando invano un maestro che potesse rivelargli i misteriosi dettagli anatomici, l'arte complessa della prospettiva e le segrete perfette proporzioni di un corpo armonioso; come abbiamo già spiegato, agli albori dello sviluppo di queste pratiche era decisamente complicato venire a conoscenza dei segreti che possedevano solo pochi grandi sapienti. Egli dunque applicò le informazioni carpite dagli scritti di Vitruvio per la realizzazione del corpo femminile all'interno dei suoi dipinti e per l'appunto, in una delle sue opere più note, i risultati che ottenne furono le particolari forme poco armoniose della dea del destino *Nemesi* nell'incisione omonima, una fusione tra la romana dea della fortuna e la greca dea della vendetta, una figura femminile possente, nuda e alata che, posta su un globo, si muove sospesa tra le nubi, sovrastando un ampio paesaggio vallivo.



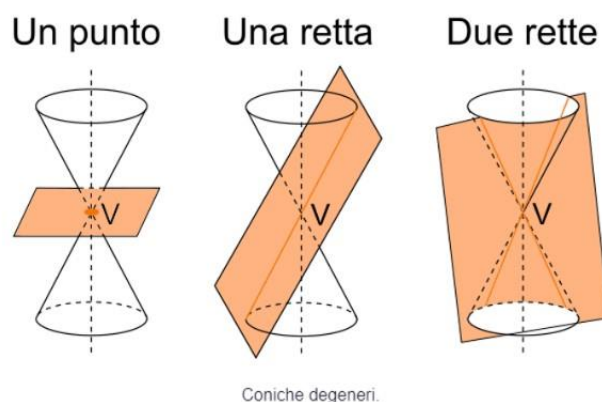
Dürer oltre che occuparsi dei dettagli anatomici del corpo umano e delle sue rappresentazioni in prospettiva, fu inoltre autore di un importante lavoro sulla geometria, suddiviso in quattro libri, intitolato *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit* (*I quattro libri sulla misurazione con compasso e righello*). Nell'opera egli focalizzò l'attenzione su costruzioni geometriche quali eliche, spirali e coniche e descrisse in particolare alcuni procedimenti grafici riguardanti le coniche definite come sezioni piane di un cono quadrico. Egli trasse ispirazione da uno dei matematici della Grecia antica, Apollonio di Perga, il quale intorno al 200 a.C. , studiò accuratamente le sezioni coniche all'interno della sua opera principale *Le coniche*, un testo molto influente considerato il suo capolavoro. Fu oltretutto proprio Apollonio a dare alla ellisse, la parabola e l'iperbole i nomi con i quali queste curve sono oggi identificate. Il primo degli otto libri dei quali si compone la sua opera, contiene 60 proposizioni e tratta l'argomento delle sezioni coniche di cerchio, ellisse, parabola e iperbole, teorizzando di poterle generare tutte attraverso l'intersezione tra un unico cono e un unico piano del quale modificare semplicemente l'inclinazione. Possiamo così farci appena un'idea di quanto siano antiche le origini e le fondamenta di una teoria complessa e recente quale la geometria proiettiva che tratta le proiezioni e la prospettiva. Infatti in matematica, e in particolare in geometria analitica e geometria proiettiva, si definisce *sezione conica* o semplicemente *conica*, una curva piana tale che sia luogo dei punti ottenibili intersecando un cono circolare con un piano. Consideriamo dunque un cono a due falde ed un piano non passante per il vertice V del primo; a seconda dell'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono si possono ottenere quattro coniche definite nello specifico *non degeneri*, come mostrato nella seguente figura:

Circonferenza Ellisse Parabola Iperbole

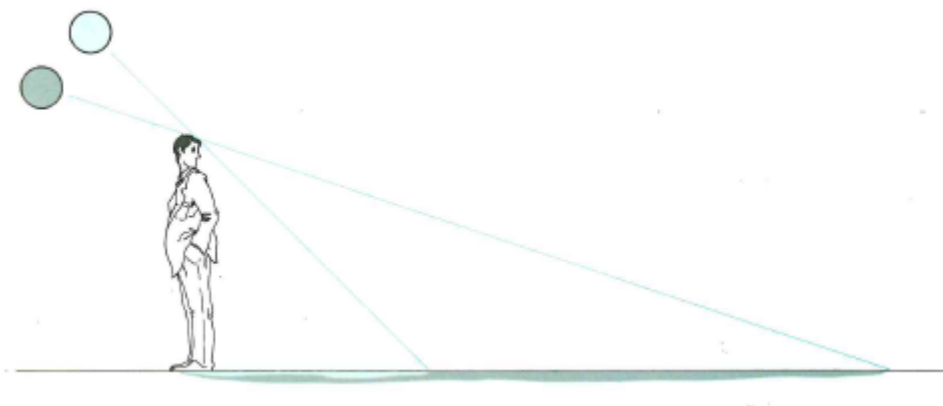


Coniche non degeneri.

A differenza delle coniche non degeneri, quelle *degeneri*, ovvero che degenerano in rette o punti, si ottengono quando il piano secante il cono passa per il vertice V dello stesso; ne vediamo i tre casi possibili nella seguente figura:

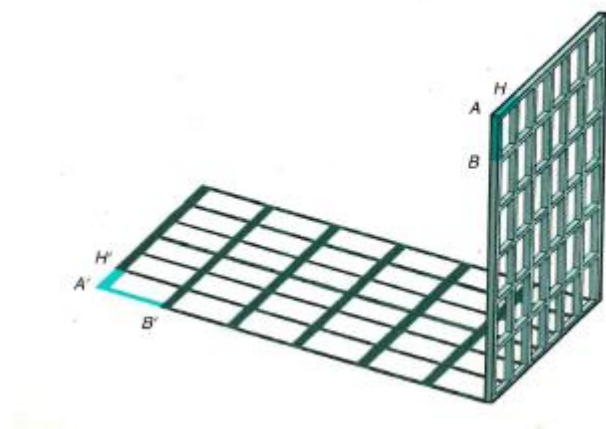


Ci domandiamo ora in quale modo la definizione delle coniche come sezioni piane di un cono possa avere a che fare con la teoria delle proiezioni della quale stiamo disquisendo. Andiamo dunque ad analizzare la questione più nel dettaglio. Occorre fare alcune osservazioni sostanziali riguardo la teoria delle proiezioni. Come abbiamo già ricordato, sin dall'antichità l'ombra veniva sfruttata per ottenere informazioni pratiche che non potevano essere ottenute in modo più semplice e veloce. Data la grandezza trascurabile del nostro pianeta rispetto al sole, i raggi solari per noi possono essere considerati approssimativamente paralleli.



In effetti le proiezioni d'ombra che genera la luce solare lasciano sempre invariate le proporzioni della figura o dell'oggetto proiettati, e questo avviene nonostante l'ombra, man mano che il sole si abbassa all'orizzonte e tramonta, tenda ad allungarsi sempre di più.

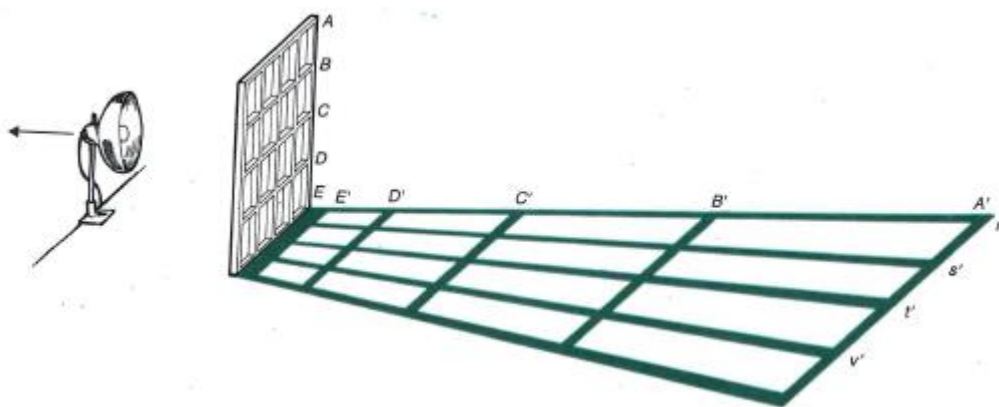
Consideriamo ad esempio un quadrato suddiviso in 36 quadratini identici, tramite cinque segmenti orizzontali paralleli tra loro e cinque verticali perpendicolari ai primi. Posta, questa figura, perpendicolarmente ad una superficie piana ed in contatto con essa tramite uno dei quattro lati, si può osservare empiricamente che vengono mantenute le proporzioni. Si verifica che alle sue linee parallele corrispondono ombre rettilinee parallele, e che ai quadrati di ugual area corrispondono ombre di parallelogrammi congruenti fra loro, ovvero misurando il segmento AB $1/6$ del lato del quadrato, si avrà che la proiezione $A'B'$ di quest'ultimo misurerà anch'essa $1/6$ dell'intero lato proiettato. Naturalmente perché il rapporto sia mantenuto occorre confrontare segmenti appartenenti alla stessa retta o a rette parallele, infatti non è vero in generale che i segmenti $A'B'$ e $A'H'$, proiezione dei segmenti AB e AH , siano tra loro congruenti.



Dunque è costante il rapporto tra segmenti appartenenti all'oggetto e i corrispondenti appartenenti all'ombra, naturalmente della stessa retta o di rette parallele; analogamente è costante il rapporto tra aree di parallelogrammi e quadratini corrispondenti. Queste

proprietà si estendono anche alle altre figure, infatti è costante il rapporto tra le aree di figure e ombre corrispondenti. Tutto ciò definisce gli invarianti per una trasformazione affine² prodotta dai raggi del sole: il parallelismo, il rapporto di segmenti corrispondenti su rette parallele ed il rapporto tra aree di figure corrispondenti.

L'ombra presenta però differenze sostanziali a seconda che una figura o un oggetto vengano illuminati dai raggi del sole o da una fonte di luce artificiale, quale ad esempio quella di una lampada. In particolare l'ombra presenta caratteristiche diverse a seconda del punto di applicazione della luce o analogamente del punto di fuga scelto per proiettarne e riprodurne l'immagine su un foglio o una tela. Nel caso in cui la fonte di luce sia artificiale noteremo che a linee parallele non corrispondono ombre rettilinee parallele fra loro e le invarianti che sono state definite nel caso precedente non valgono più. L'ombra di un quadrato suddiviso in n quadrati congruenti più piccoli, con un lato che poggia sul piano di proiezione, ed illuminato da una fonte di luce artificiale, che possiamo approssimare come puntiforme rispetto alle dimensioni del sole, posta ad esempio frontalmente ad esso, genera dei trapezi; ovvero le rette parallele una volta proiettate vanno a divergere.



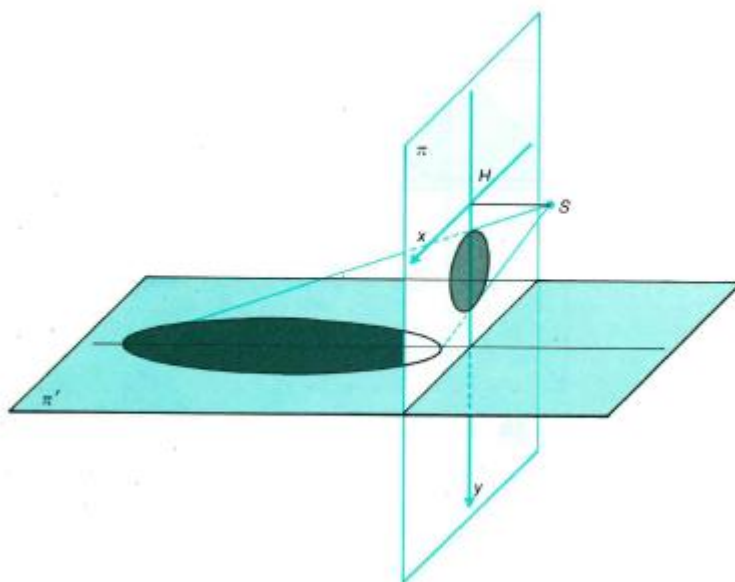
² Si definisce trasformazione Affine dello spazio euclideo qualunque composizione di una trasformazione lineare con una traslazione; esempi ne sono rotazioni, rototraslazioni, omotetie. Non è necessariamente una isometria: preserva il parallelismo ma non angoli e distanze.

Tale divergenza diminuisce all'allontanarsi della fonte di luce sino al raggiungimento del caso limite di una distanza infinita che genera linee parallele anche nella proiezione (come può essere definita la distanza del sole relativamente alle dimensioni dell'oggetto proiettato).

Consideriamo ora un sistema di assi cartesiani x e y ed un cerchio appartenente al piano π generato da essi e proiettiamone l'immagine (l'ombra) su un piano π' perpendicolare al primo, a partire da un determinato punto S di applicazione della fonte di luce e vediamo cosa accade. Sia il centro del cerchio appartenente all'asse y . Sia H l'origine del sistema di riferimento e sia il punto S appartenente ad un piano passante per l'asse x e parallelo a π' .

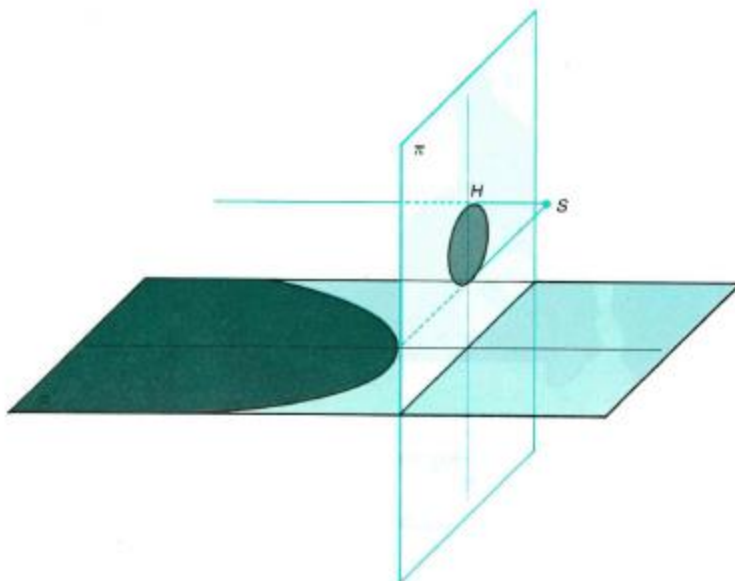
Distinguiamo tre casi possibili che analizziamo subito di seguito:

1. Sia il cerchio sottostante il punto H . Allora la sua proiezione sul piano π' data dai raggi uscenti dal punto S risulterà essere un'ellisse.

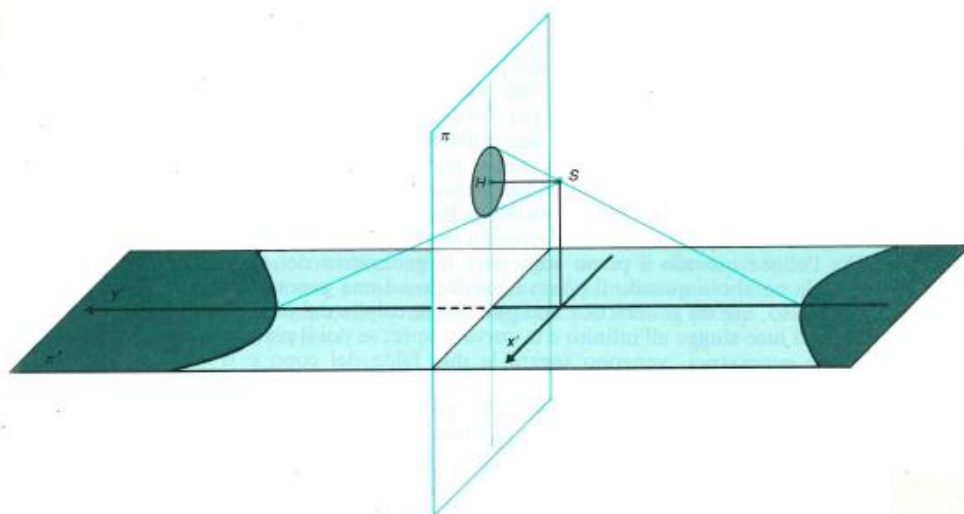


2. Sia il cerchio passante per il punto H . Allora la proiezione di questo specifico punto, data dal raggio uscente dal punto S , avente stessa ordinata, non avrà il suo corrispettivo sul piano π' , in quanto la retta SH è parallela al piano. Pertanto

la proiezione del cerchio mancherà di quel punto e la curva ottenuta risulterà essere una parabola.



3. Sia il punto H interno al cerchio e per semplicità sia coincidente con il suo centro. Allora in questo caso la proiezione di una metà dei suoi punti cadrà da una parte del piano π' e la proiezione dell'altra metà cadrà dall'altra parte del piano π' . Si otterranno dunque i due rami simmetrici di un'iperbole.



Possiamo dunque concludere che la proiezione di un cerchio da un punto S è un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda della posizione del punto di proiezione rispetto al cerchio. Ciò che di fatto si genera, considerando tutti gli infiniti raggi di proiezione che coprono tutti i punti del cerchio, è il cosiddetto cono proiettivo di vertice S , che nel terzo caso è in particolare un cono a due falde. L'ombra proiettata sul piano π' può essere dunque considerata una sezione piana del cono proiettivo. E' pertanto evidente che le sezioni piane di un cono coincidono con le ombre di un cerchio proiettate da un dato vertice scelto, ed è quindi chiaro come la definizione delle coniche derivi sostanzialmente dalla Teoria della prospettiva. Naturalmente tutto quello che abbiamo poc'anzi asserito è stato formalmente teorizzato e dimostrato nel XIX secolo nella teoria della geometria proiettiva, ma era ed è facilmente verificabile per via empirica: basti pensare ad esempio all'ombra prodotta su una parete da una lampada con forma cilindrica, al variare della direzione di proiezione della luce.

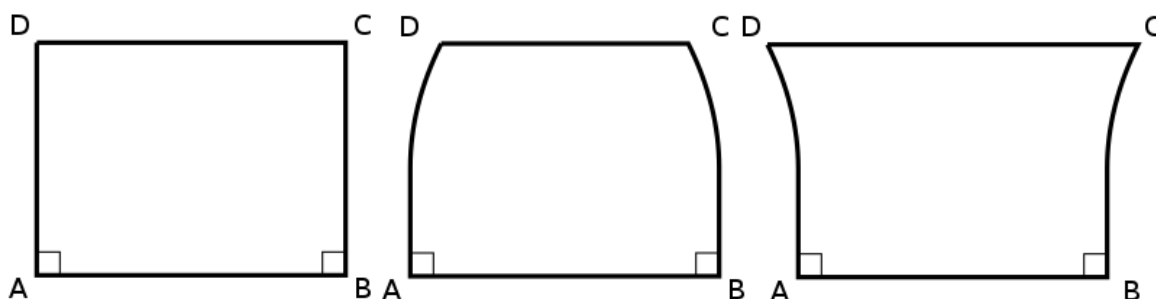


A partire dal Cinquecento la teoria della prospettiva venne insegnata nelle scuole di pittura, tuttavia i trattati sulla prospettiva di allora erano ancora, nel complesso, un insieme di regole e di procedimenti da seguire ai quali però mancava una solida base matematica. Solo successivamente gli artisti e poi i matematici diedero a questa teoria una base deduttiva soddisfacente e contribuirono a trasformarla da arte semi-empirica in scienza vera e propria. Agli inizi del Seicento, si avviò un processo di scissione tra creazione artistica e teoria della prospettiva, divenuta ormai effettivo oggetto di indagine

matematica, e nel corso dei secoli, prima di giungere ad una definitiva teorizzazione, furono molti i precursori inconsapevoli della nuova geometria non euclidea.

Colui che per eccellenza diede un contributo sostanziale, senza però averne alcuna consapevolezza, fu il matematico gesuita Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733). Nel 1733, l'anno della sua morte, fu pubblicata l'opera di maggiore importanza per la storia dei fondamenti della geometria e per la quale la sua figura è oggi ampiamente ricordata: *Euclides ab omni nœvo vindicatus* (*Euclide riscattato da ogni difetto*). Con la sua disquisizione egli stava tentando di dimostrare per assurdo il V postulato di Euclide. La sua dimostrazione non era però corretta e le conseguenze da lui tratte dalla negazione del postulato delle rette parallele hanno costituito, contro le sue intenzioni, un'importante raccolta di teoremi che hanno aperto in modo reale la strada alla geometria non euclidea. Saccheri infatti per provare il *V postulato* prese in considerazione il quadrilatero birettangolo isoscele, ovvero una figura costituita da quattro lati, due opposti paralleli e gli altri due opposti congruenti entrambi perpendicolari ad uno solo degli altri e introdusse tre ipotesi sugli angoli D e C del quadrilatero, opposti a quelli A e B costruiti retti:

- *Gli angoli sono entrambi retti*; ciò equivale ad accettare il *V postulato*.
- *Gli angoli interni sono entrambi ottusi*; in questo modo viene negato il *V postulato*.
- *Gli angoli interni sono entrambi acuti*; anche in questo modo si nega il *V postulato*.



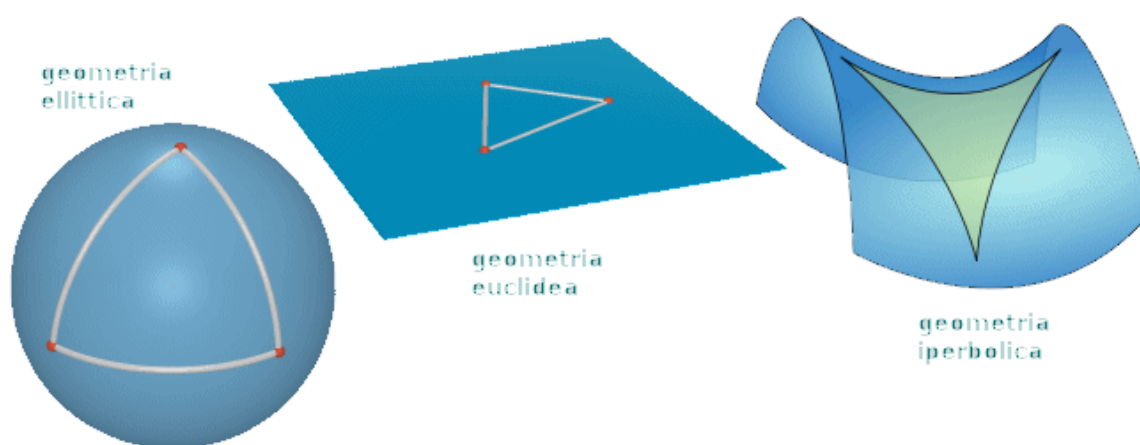
L'idea di Saccheri era quella di confutare le due ipotesi dell'angolo ottuso e di quello acuto, asserendo che esse si autodistruggevano, ripugnando la natura stessa di linea retta. Egli costruì la sua dissertazione in modo che solo l'ipotesi dell'angolo retto fosse plausibile. Infatti, in quanto euclideo convinto, non riuscì a rendersi conto dei risultati raggiunti e della rilevanza che questi ultimi avrebbero ben presto avuto nel mondo della matematica, ma di fatto fu il primo vero precursore della geometria ellittica e iperbolica e della geometria proiettiva.

Dunque, nonostante gli studi, le ricerche realizzate e le notevoli abilità pratiche sempre più sviluppate in campo artistico e nell'ambito della rappresentazione in prospettiva, un reale e consapevole formalismo teorico al riguardo si ebbe soltanto nella seconda metà del XVIII secolo, accompagnato dal grande salto di ordine scientifico e tecnologico che visse l'intera Europa. Il processo di sviluppo delle conoscenze relative ai tipi di rappresentazione in prospettiva, riconducibili alla geometria, fu senz'altro favorito dalle esigenze che via via si presentavano nel campo della progettazione di beni materiali in quanto, per la produzione di questi ultimi, il sistema industriale stava iniziando quel lungo processo di sostituzione del lavoro artigianale. L'intento di aiutare gli ingegneri, i pittori e gli architetti nel loro lavoro fece sì che i matematici settecenteschi approfondirono in modo sempre più completo e dettagliato lo studio della prospettiva, elaborando una teoria assiomatica nuova ed integrale e pubblicando finalmente opere complete e sostanzialmente definitive sulla prospettiva.

Uno dei primi veri pionieri di quel periodo fu Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matematico francese che tra i primi parlò, con cognizione di causa, di spazi non euclidei, trattò le sezioni coniche e le funzioni iperboliche e studiò l'area dei triangoli iperbolicici (particolari triangoli giacenti su una superficie concava) e la somma degli angoli interni di questi ultimi, evidenziando che risulta essere minore di 180 gradi. Aprì così la strada alla geometria iperbolica.

Possiamo evidenziare le caratteristiche sostanziali che differenziano e definiscono le geometrie euclidee rispetto a quelle non euclidee. La geometria euclidea rispetta i cinque postulati di Euclide ed in particolare il quinto che riguarda l'esistenza di un'unica retta

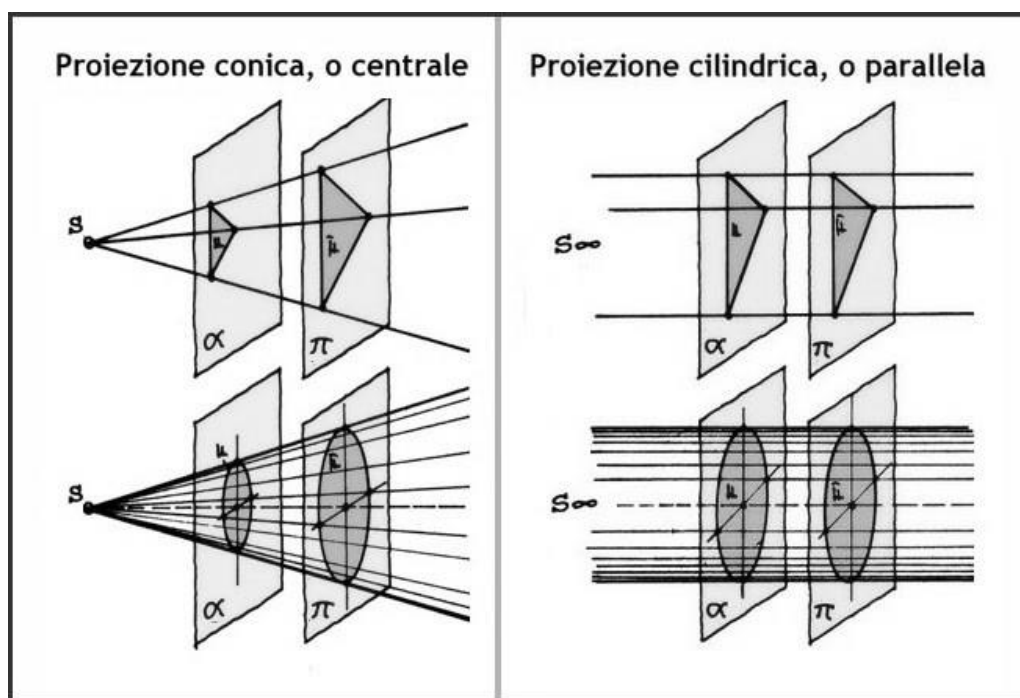
parallela passante per un punto non appartenente ad una retta data. Come abbiamo appurato poc'anzi le geometrie non euclidee nascono dalla negazione di questo quinto postulato. In particolare, nella geometria iperbolica esistono infinite rette parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180 gradi. Nella geometria ellittica non esistono rette parallele e la somma interna di un triangolo è maggiore di 180 gradi. Vediamo nell'immagine che segue quanto appena riferito.



Dopo di lui Gaspard Monge (1746-1818), matematico e disegnatore francese, fu il primo a stabilire in modo meticoloso i requisiti che un procedimento deve soddisfare per essere considerato un "metodo di rappresentazione" e a sviluppare una teoria matematica rigorosa al riguardo. Egli è infatti considerato il padre della *geometria descrittiva*, la scienza che permette di definire, con metodi grafici, attraverso determinate costruzioni geometriche, l'esatta forma di un oggetto bidimensionale e tridimensionale, la cui rappresentazione può essere finalizzata alla progettazione di manufatti tridimensionali. Tutti i procedimenti della geometria descrittiva si basano principalmente su due operazioni fondamentali, dette operazioni di proiezione e sezione. Monge fu di fatto il primo ideatore della proiezione ortogonale, una tecnica di rappresentazione mediante la

quale vengono disegnate diverse immagini bidimensionali che rappresentano un oggetto tridimensionale, da diverse prospettive. Nonostante le sue umili origini, grazie alle sue grandi capacità nel campo della geometria, fu nominato professore nella Scuola militare di Mézières, a condizione che i risultati della sua teoria rimanessero un segreto militare e nel 1780 fu nominato per ricoprire una cattedra di matematica all'università di Parigi. La sua raccolta di lezioni si diffuse rapidamente fuori dai confini francesi contribuendo a promuovere le ricerche e gli sviluppi nel campo del disegno tecnico.

Monge suddivise i metodi di rappresentazione secondo una specifica classificazione fatta, in generale, in base alla scelta del punto di vista, ovvero del centro di proiezione. Quando esso è un punto posto ad una distanza finita, si parla di *proiezioni centrali* dette anche *proiezioni coniche*; ne sono esempi le proiezioni del cerchio discusse in precedenza, effettuate a partire da una fonte di luce artificiale. Nel caso in cui invece il punto di proiezione sia posto a distanza infinita si definiscono le *proiezioni parallele*, anche dette *proiezioni cilindriche*; è il caso già discusso in cui la fonte di luce sia ad esempio quella solare.



A partire dalla sua classificazione si distinguono i diversi metodi: tra le proiezioni centrali (coniche) vi sono il *metodo della prospettiva* e la *teoria delle ombre con sorgente propria* (proiezione a partire da un punto a distanza finita); tra le proiezioni parallele (cilindriche) si distinguono le *proiezioni ortogonali*, il metodo dell'assonometria (*isometrica, dimetrica e trimetrica*) e il *metodo delle proiezioni quotate*; in seguito la classificazione fu arricchita inserendovi anche le *proiezioni oblique* tra le quali si annoverano il *metodo dell'assonometria (cavaliera e monometrica)* e la *teoria delle ombre con sorgente impropria* (proiezione a partire da un punto a distanza infinita).

Attualmente una buona fetta della geometria descrittiva teorica è divenuta parte integrante di una teoria molto più completa e rigorosa, che definisce finalmente i fondamenti della matematica della prospettiva: la geometria proiettiva, che abbiamo già più volte annoverato, i cui studi più significativi e definitivi si devono a Jean Victor Poncelet (1788-1867), discepolo di Monge.

L'opera di Monge in effetti non contiene riferimenti matematici specifici per costituire una teoria vera e propria sulla prospettiva. Jean Victor Poncelet elaborò un metodo e ne precisò ogni aspetto teorico, quello della proiezione centrale, lavorando al corpo totale della nuova scienza. La fama e l'importanza di questo allievo di Monge è anche e soprattutto dovuta alla sua opera intitolata *Traité des propriétés projectives des figures* (Parigi, 1822, I edizione), dedicato allo studio delle proprietà delle figure che si conservano inalterate nonostante le trasformazioni che possono subire attraverso operazioni di proiezione e sezione. Definì le proprietà proiettive e distinguendole dalle altre proprietà geometriche che non lo sono, egli fondò la vera e definitiva geometria proiettiva, come corpo separato dagli altri assetti della geometria. Nasceva definitivamente una nuova geometria non euclidea.

2.2 Alle origini della Geometria Proiettiva

Le origini della moderna geometria proiettiva sono legate all'impegno di un artista e matematico francese: Girard Desargues (1591-1661). Egli cercò di intraprendere uno studio approfondito e completo del disegno in prospettiva, concentrando la sua attenzione in particolare sull'uso dei punti di fuga, tentando di includere e generalizzare il caso in cui questi siano infinitamente lontani.

Uno sviluppo più ampio e significativo al riguardo si ebbe nella prima metà del XIX secolo. Storicamente questa evoluzione che, come anzidetto nei capitoli precedenti, fu accompagnata da progressi tecnologici sempre più rilevanti, segna il passaggio intermedio tra la geometria analitica (introdotta da Cartesio nel XVII secolo) e la geometria algebrica (che occupa un ruolo cruciale nel XX secolo).

Gli studi più significativi dai quali nacque definitivamente la nuova geometria non euclidea si devono però a Jean Victor Poncelet (1788-1867), il quale aveva ereditato, come abbiamo visto, anni di studi e ricerche più o meno consapevoli di altri artisti e scienziati.

Jean Victor Poncelet elaborò una teoria vera e propria sulla prospettiva, oggi conosciuta per l'appunto con il nome di geometria proiettiva.

Questa teoria matematica descrive dettagliatamente ciò che accade quando un artista rappresenta lo spazio tridimensionale sul piano bidimensionale della sua tela o di una parete. L'interesse di studiosi ed intellettuali fu quello di comprendere e tradurre in linguaggio matematico quello che gli artisti avevano realizzato in modo affascinante ma pratico nelle loro meravigliose opere d'arte.

L'esigenza che venne alla luce nel momento in cui ci si avvicinò all'analisi formale delle immagini così come vengono percepite dall'occhio umano, ovvero come deviazioni e adattamento percettivo della realtà, fu quella di arricchire la geometria di nuovi fondamentali requisiti necessari per descrivere nuove e più ampie caratteristiche

sostanziali. Vennero dunque trovate e formalizzate delle proprietà comuni per enti che, sul piano o nello spazio euclideo, non ne hanno affatto: rette parallele che non hanno punti in comune sul piano reale vanno invece, sul piano proiettivo, ad incidersi all'infinito in un punto comune. Invero in un piano proiettivo (e più in generale in uno spazio proiettivo n -dimensionale) non esistono rette parallele, in quanto esse si intersecano sempre in un cosiddetto punto improprio, che altro non è che la direzione comune che le rette stesse hanno sul piano reale.

Di fatto la proprietà basilare della geometria proiettiva è quella dell'incidenza tra due rette qualsiasi del piano: due rette distinte r e s nel piano proiettivo si intersecano sempre in esattamente un punto P . Dunque contrariamente alla geometria euclidea o analitica, in quella proiettiva non esistono rette parallele. Questo caso "eccezionale" viene infatti eliminato aggiungendo al piano i "punti all'infinito", i cosiddetti punti impropri.

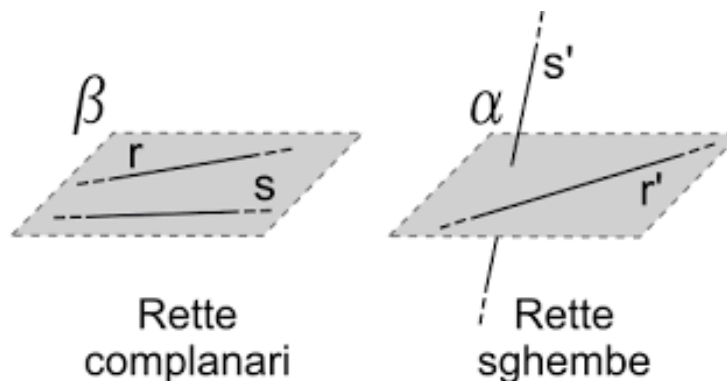
Entriamo un po' più nel dettaglio di questa teoria per comprendere completamente quanto appena anticipato.

Il passaggio formale dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane relative al piano cartesiano, con delle nuove coordinate, dette coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni "punti all'infinito", i già citati punti impropri, che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti "finiti" (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, nel quale tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

Pertanto, su un piano proiettivo, due rette parallele hanno sempre in comune un punto all'infinito che, come abbiamo anticipato, è la loro direzione e che di fatto possiamo pensare come quel punto nel quale vediamo incontrarsi, sulla linea di orizzonte, le due banchine di una lunga strada rettilinea davanti a noi. L'insieme dei punti impropri sul piano forma esso stesso una retta, che immaginiamo come una retta all'infinito, definita retta impropria, che rappresenta la già citata linea di orizzonte. La teoria della geometria proiettiva considera quindi la "retta all'infinito" come una retta qualsiasi, indistinta dalle altre. Lo stesso accade in dimensione più alta: lo spazio proiettivo tridimensionale è ottenuto

aggiungendo il "piano all'infinito", il piano improprio, in modo che due piani nello spazio tridimensionale non siano mai paralleli, ma si intersechino sempre in una retta.

Nel caso dimensionale $n > 2$ le rette, pur potendo non intersecarsi, non risulteranno in ogni caso mai parallele, ma al più sghembe, in quanto non complanari, ovvero appartenenti a piani diversi; così come in dimensione $n > 3$ due piani possono non intersecarsi ma risultare esclusivamente sghembi, mai paralleli; e così via per dimensioni successivamente maggiori.



I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto “omogeneo”, grazie all'aggiunta dei punti all'infinito, e all'eliminazione della proprietà di parallelismo, molti teoremi classici risultavano più semplici ed eleganti: ciò era dovuto all'esclusione di molti "casi eccezionali", generati da configurazioni particolari proprie della geometria euclidea.

In particolare anche lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: infatti la geometria proiettiva fornisce, ad esempio, una descrizione breve ed elegante delle sezioni coniche. Iperbole, parabola ed ellisse altro non sono che la "stessa conica" nel piano proiettivo, e le differenze fra questi tre enti dipendono soltanto da come avviene l'intersezione con la retta impropria, ovvero da come il cono a doppia falda interseca il piano affine: l'iperbole la interseca in due punti, la parabola in uno solo, l'ellisse in nessuno. Tramite l'utilizzo dell'algebra lineare fu così fatta una classificazione proiettiva delle coniche, sulla base del numero di punti impropri appartenenti alla conica e poi specificando altresì alcune proprietà come l'essere o meno degenerare, ovvero se la conica degenera in due rette distinte, in una retta doppia o in un punto (abbiamo analizzato questi casi nel paragrafo precedente).

I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la geometria analitica. Lo spazio proiettivo era stato introdotto in modo assiomatico (con i primi assiomi coincidenti con quelli della geometria euclidea) e le tecniche dimostrative erano inizialmente molto sintetiche e prive dell'ausilio dell'algebra (cioè simili a quelle di Euclide). Per questo motivo una riformulazione rigorosa dei lavori di questi matematici in chiave odierna è spesso difficile, così come per esempio lo fu la rielaborazione stessa di Elementi di Euclide, da parte di innumerevoli matematici, da ultimo Hilbert che fu colui che tentò una rielaborazione e riscrittura completa del trattato in quanto manchevole di minuzioso rigore formale e a volte di consequenzialità logica, senza giungere ad una conclusione effettiva e soprattutto completa nel significato matematico del termine.

Fortunatamente, a differenza di quanto auspicato da Hilbert, la formalizzazione della geometria proiettiva fu realizzabile a tutti gli effetti in modo completo ed esaustivo. Inoltre verso la fine del secolo scorso, la scuola italiana presenziata tra gli altri da Castelnuovo, Enriques e Severi, uscì dal solco della tradizionale circoscrizione della scienza esatta, per trovarsi ad affrontare nuovi problemi indirizzati ad uno sguardo sempre più avanguardista, che richiedevano tecniche algebriche sempre più complesse. Fu così che si sviluppò la geometria algebrica grazie alla quale poter descrivere e dimostrare formalmente tutte le proprietà della nuova branca della geometria che stiamo discutendo in questa trattazione.

2.3 La geometria proiettiva e la prospettiva

Entriamo ora più nel dettaglio dando le nozioni sostanziali che definiscono l'essenza della geometria non euclidea che traduce e formalizza in modo rigoroso il concetto artistico di prospettiva: la geometria proiettiva. Leon Battista Alberti, nella sua opera “*De Pictura*” del 1435, ne anticipava il principio fondamentale illustrandolo in questo modo: semplifichiamo il problema simulando di vedere con un unico occhio, denotato da un punto O ; egli chiamò “proiezione” l'insieme dei raggi di luce che congiungono l'occhio ad ognuno dei punti P dell'oggetto tridimensionale da dipingere su una tela piatta, posta verticalmente davanti ad O . È così che ogni raggio OP incontra la tela in un punto P' ; l'insieme di questi punti P' è stata definita dall'Alberti una “sezione”. La cosa interessante è che osservare la sezione da O crea l'illusione di guardare l'oggetto stesso perché all'occhio provengono dalla sezione gli stessi raggi luminosi che provengono dall'intero oggetto. Cambiando l'inclinazione della tela si ottiene una sezione differente dalla precedente, pur provenendo dallo stesso oggetto. Consideriamo allora due inclinazioni arbitrarie della tela, identificate da due piani proiettivi H e H' , ai quali appartengono le rispettive sezioni A e A' dell'oggetto proiettato, interposto tra di esse ed il punto O ; allora si avrà che $A = f(A')$, dove f è una *proiettività* tra due piani proiettivi, ovvero una trasformazione di punti dello spazio proiettivo definita dall'applicazione

$$\begin{aligned} f : H &\rightarrow H' \\ A &\mapsto f(A) = A' \end{aligned}$$

Così come ogni raggio luminoso r passante per O non parallelo ad H incontra H in un punto “vero”, si può pensare che ogni raggio luminoso r passante per O parallelo ad H incontra H “all'infinito”, cioè nel cosiddetto punto improprio P_∞ di H , rappresentato dalla direzione delle sue rette parallele. H e H' sono detti piani completati, proprio perché andiamo a “completarli” con ulteriori punti. Completare un piano, infatti, significa

considerare come punti dello stesso, non solo i punti ordinari (quelli che pocanzi abbiamo definito “punti veri”), ma anche i cosiddetti “punti impropri”, ovvero i punti “all’infinito”, i quali rappresentano le direzioni delle rette affini; quindi rette affini parallele, avendo stessa direzione, identificano lo stesso punto nel piano proiettivo. Ciò implica, come anticipato, che due rette parallele in un piano proiettivo si incontrino sempre nel loro punto in comune all’infinito, ovvero che qualunque coppia di rette si interseca sempre in almeno un punto; parafrasando: non esistono rette parallele nello spazio proiettivo, ma l’unica possibilità è che esse siano incidenti o sghembe.

2.3.1 Spazi proiettivi

I due modi più comuni di immaginare e definire un piano proiettivo sono i seguenti: come completamento del piano affine reale o come l'insieme delle rette dello spazio passanti per l'origine O degli assi cartesiani.

Si considerino un sistema affine $A^3(R)$ di assi cartesiani x, y, z ed il piano $H : \{z = 1\}$; si pensi l'origine O del sistema come la fonte di luce (coincidente con il punto di vista di un eventuale osservatore); allora si avrà che:

Definizione 1

È definito piano proiettivo $P^2(R)$ l'insieme di tutte le rette di $A^3(R)$ passanti per l'origine.

Sia dato il piano $H : \{z = 1\} \in A^3(R)$. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle suddette rette e l'insieme dei punti del piano di equazione $\{z = 1\}$.

$$P^2(R) = \{r \in A^3(R) \text{ passanti per } O\} \Leftrightarrow \{z = 1\} \cup \{\text{direzione di ogni } r \in H : z = 1\}.$$

Essendo il piano $H : \{z = 1\}$ in corrispondenza biunivoca con il piano affine reale $A^2(R)$, possiamo dire che l'insieme dei punti di $P^2(R)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti di $A^2(R)$ e delle direzioni delle rette di $A^2(R)$. In questo modo abbiamo “allargato” il piano $A^2(R)$ per poter evitare alcune eccezioni (ad esempio il fatto che due rette in un piano affine si incontrano in un punto o sono parallele), chiamando “punti” tutti i punti di $A^2(R)$ ed in più anche tutte le direzioni delle rette di $A^2(R)$.

Definizione 2

Di seguito K denoterà sempre un campo fissato e V denoterà un K – spazio vettoriale di dimensione $n + 1$.

L'insieme $P(V)$ definisce lo spazio proiettivo su campo K associato allo spazio vettoriale V ; esso è anche chiamato proiettivizzazione o proiettizzato di V . Gli elementi dell'insieme $P(V)$ sono chiamati punti di $P(V)$ e sono i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V , ovvero le rette vettoriali di V .

Osservazione 1

Ogni $v \in P(V)$ genera il sottospazio di V di dimensione 1, ovvero ogni vettore genera una retta definita come segue:

$$\langle v \rangle = \{ \lambda v : \lambda \in K \}.$$

Quando considerato come punto di $P(V)$, questo sottospazio viene denotato con il simbolo $[v]$.

Si ha che due elementi di $P(V)$ denotano lo stesso punto se sono generati da vettori proporzionali, ovvero se sono definiti da rette parallele affini:

$$[v] = [w] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 \text{ tale che } w = \lambda v.$$

Osservazione 2

Esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra $P(V)$ e l'insieme quoziente $V \setminus \{0\} / \sim$ dove

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 \text{ tale che } v = \lambda w.$$

Possiamo allora identificare $P(V)$ con $V \setminus \{0\} / \sim$.

Notazione 1

I punti di $P(V)$ sono indicati solitamente racchiudendo un elemento generico di $V \setminus \{0\}$ (indicato da un puntino) tra parentesi quadre: $[\cdot]$. Tale scrittura indica una classe di equivalenza dello spazio quoziente $V \setminus \{0\} / \sim$, dove il puntino è un suo rappresentante.

Proposizione 1

La relazione $\sim$ definita in $V \setminus \{0\}$ è una relazione di equivalenza.

Dim.

Vale l'uguaglianza $v = 1 \cdot v$ quindi $\sim$ rispetta la proprietà riflessiva.

Se $v = \lambda w$ allora $w = \left(\frac{1}{\lambda}\right) v$ quindi $\sim$ rispetta la proprietà simmetrica.

Se $v = \lambda w$ e $w = \mu z$, allora vale $v = \lambda \mu z$ quindi $\sim$ rispetta la proprietà transitiva.

Definizione 3

Generalizziamo la definizione di piano proiettivo in più dimensioni. Definisco lo spazio proiettivo di dimensione n come l'insieme di tutte le rette affini dello spazio A^{n+1} passanti per l'origine O , quindi si avrà:

$$P^n = P^n(K) = P(K^{n+1}).$$

Ad ogni punto $[x_0, x_1, \dots, x_n] \in P^n$ corrisponde la retta $r \in A^{n+1}$ costituita dai punti $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ al variare di $\lambda \in K$ e viceversa, ad ogni retta $r \in A^{n+1}$ passante per O corrisponde un punto del piano proiettivo P^n , ad eccezione delle rette parallele all'iperpiano affine, le quali corrispondono ad i punti impropri nello spazio proiettivo.

Definizione 4

La dimensione di $P(V)$ è definita come $\dim V - 1$; dunque si avrà che

$$\dim P(V) = n + 1 - 1 = n.$$

Tale definizione è piuttosto naturale poiché, essendo $P(V)$ un insieme di rette di V , deve avere dimensione minore di uno rispetto a V .

Esempio 1

- *Se $\dim V = 0$, ovvero $V = \{0\}$, allora si ha $P(V) = \emptyset$ e pertanto $\dim P(V) = -1$, poiché V non possiede sottospazi di dimensione uno. Si può quindi considerare l'insieme vuoto come sottospazio di dimensione -1 su un qualunque campo K .*
- *Se $\dim V = 1$, allora si ha $\dim P(V) = 0$ e uno spazio proiettivo di dimensione zero possiede un solo punto.*
- *E così via...*

2.3.2 Riferimenti proiettivi

Notazione 2

Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di V e $\lambda = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, scriviamo $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$. Nel caso di K^n ed $\mathcal{E}$ (base canonica di K^n) si scrive solo $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La base canonica di K^{n+1} d'ora in poi sarà denotata con $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n)$.

Definizione 5

Vogliamo dare le coordinate ai punti di uno spazio proiettivo. Data $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ base di V , possiamo associare ad un punto $[v] \in P(V)$ una $(n+1)$ -pla di coordinate in questo modo: se $v = (x_0, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ allora diciamo che $x_0, \dots, x_n$ sono le coordinate omogenee del punto $[v]$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Tali coordinate sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Infatti, dato $\lambda \in K^*$ vale

$$[v] = [\lambda v] \text{ e } [\lambda v] = \lambda x_0 v_0, \lambda x_1 v_1, \dots, \lambda x_n v_n.$$

Quindi se $x_0, \dots, x_n$ sono coordinate omogenee di $[v]$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, lo sono anche $\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n$ per ogni $\lambda \neq 0$.

Proposizione 2

Due basi proporzionali di V danno le stesse coordinate nello spazio proiettivo $P(V)$.

Definizione 6

Sia $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ una base di V ; diciamo che la famiglia di basi $\{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in K^*}$ definisce in $P(V)$ un sistema di coordinate omogenee P (o riferimento proiettivo P), cioè $P = \{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in K^*}$.

Proposizione 3

In un K – spazio vettoriale V i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti (li indicheremo in modo abbreviato con l.i.), rispettivamente linearmente dipendenti (abbreviato con l.d.) se e solo se lo sono i vettori

$$u_1 = \lambda_1 v_1; u_2 = \lambda_2 v_2; \dots u_n = \lambda_n v_n$$

Ottenuti moltiplicando i v_i per scalari $\lambda_i, i \in K^*, i = 1, \dots, n$.

Dim.

I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esistono n scalari non tutti nulli $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ tali che $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$.

Questo vale se e solo se $\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i} \lambda_i v_i = 0$ con $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ scalari non tutti nulli, ovvero se e solo se $\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \dots \lambda_n v_n$ sono linearmente dipendenti.

Definizione 7

Dato lo spazio proiettivo $P(V)$ diciamo che n punti $P_1 = [v_1]; \dots P_n = [v_n] \in P(V)$ sono l.d. (oppure l.i.) se lo sono i vettori $v_1, \dots, v_n$ in V .

In virtù della Prop. 3, tale definizione è ben posta in quanto la dipendenza lineare non dipende dai rappresentanti delle classi v_i .

Osservazione 3

Se $m > n + 1$, m punti di $P(V)$, sono sempre linearmente dipendenti.

Ricordiamo che $\dim V = n + 1$ e $\dim P(V) = n$.

Proposizione 4

Siano date due basi $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ e $\mathcal{B}' = (w_0, \dots, w_n)$ di V . Allora

$$[v_0] = [w_0]; \dots; [v_n] = [w_n];$$

$$[v_0 + \dots + v_n] = [w_0 + \dots + w_n];$$

se e solo se esiste $\lambda \in K^$ tale che $v_i = \lambda w_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$ (ovvero se e solo se $\exists \lambda \in K^*$ tale che $\mathcal{B} = \lambda \mathcal{B}'$).*

Osservazione 4

Si può osservare che un sistema di coordinate richiede n punti (una base) per uno spazio vettoriale n -dimensionale e $n + 1$ punti per uno spazio affine n -dimensionale, ma per uno spazio proiettivo ne richiede addirittura $n + 2$. Infatti $n + 1$ punti $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ l.i. in $P(V)$ non sono sufficienti per determinare le coordinate omogenee di un punto poiché gli $Q_i = [v_i]$ potrebbero essere rappresentati da $\lambda_i x_i$ per arbitrari $\lambda_i \in K^$ non necessariamente uguali per ogni i . L'ambiguità viene quindi risolta solo aggiungendo un $(n + 2)$ -esimo punto.*

Definizione 8

Dato un riferimento proiettivo $P = \{\mu \mathcal{B}\}_{\mu \in K^}$ dove $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ è una base di V , i punti $[v_0], \dots, [v_n]$ sono detti punti fondamentali di P ed il punto $U = [v_0 + \dots + v_n]$ è detto punto unità di P .*

Osservazione 5

Una $(n + 2)$ -pla di punti $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, U$ tale che esiste una base $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ di V tale che $Q_i = [v_i]$ per $i = 0, \dots, n$ e $U = [v_0 + \dots + v_n]$, è sufficiente per associare coordinate omogenee ad ogni punto $P \in P(V)$ nel modo seguente: i vettori $v_0, \dots, v_n$ determinano, come visto nella Prop. 4, una base per V ben definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, quindi determinano un riferimento proiettivo. Al punto assegneremo le coordinate secondo questo riferimento.

Esempio 2

In $P^n(K)$ i punti fondamentali del riferimento proiettivo standard sono

$$[1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1]$$

ed il punto unità è

$$[1, 1, \dots, 1] .$$

Definizione 9

I punti $P_1, \dots, P_t \in P(V)$ sono detti in *posizione generale* se sono linearmente indipendenti (ed in questo caso $t \leq n + 1$), oppure se $t > n + 1$ e si ha che $n + 1$ tra questi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti.

Proposizione 5

Siano $P_0 = [v_0], \dots, P_{n+1} = [v_{n+1}]$ punti di $P(V)$, dove $\dim V = n + 1$. Allora questi $n + 2$ punti sono in *posizione generale* se e solo se esistono tra questi $n + 1$ punti linearmente indipendenti (ad esempio $P_0, \dots, P_n$) e l'ultimo punto è tale che $P_{n+1} = [\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i]$ con $\lambda_i \neq 0 \forall i = 0, \dots, n$.

Osservazione 6

Per generare uno spazio proiettivo di dimensione n occorrono $n + 1$ punti linearmente indipendenti. Ma per individuare un riferimento proiettivo occorrono $n + 2$ punti in posizione generale. Infatti, vale la seguente proposizione:

Proposizione 6

Sia P un riferimento proiettivo su $P(V)$, allora i suoi punti fondamentali e il punto unità sono $n + 2$ punti in posizione generale.

Viceversa, dati $n + 2$ punti in posizione generale, allora comunque fissato un ordine tra questi e detti $P_0, \dots, P_n$ i primi $n + 1$ e P_{n+1} l'altro, esiste un unico riferimento proiettivo tale che $P_0, \dots, P_n$ sono i punti fondamentali e P_{n+1} è il punto unità.

2.3.3 Sottospazi proiettivi

Definizione 10

Sia V uno spazio vettoriale. Un sottospazio vettoriale W di V ha anch'esso una struttura di spazio vettoriale, quindi, ha senso considerare il suo proiettivizzato $P(W)$. Tale spazio proiettivo, contenuto in P , è detto sottospazio proiettivo di $P(V)$. In particolare, $P(V)$ è sottospazio proiettivo di sé stesso (ricordiamo che ogni insieme è un sottoinsieme improprio di sé stesso perché la definizione di sottoinsieme improprio include un insieme che è uguale all'insieme di partenza, ovvero tutti i suoi elementi sono contenuti nell'insieme e viceversa. Gli insiemi impropri sono solo due: l'insieme stesso e l'insieme vuoto).

Dunque, si ha che i sottospazi proiettivi sono tutti e soli i proiettivizzati dei sottospazi vettoriali.

Osservazione 7

Definiamo la dimensione di un sottospazio proiettivo come la usuale definizione di dimensione di spazio proiettivo qualsiasi:

$$\dim P(W) = \dim W - 1$$

Definizione 11

Definiamo la codimensione di un sottospazio $P(W)$ in $P(V)$ il numero seguente:

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_{P(V)} P(W) &= \dim P(V) - \dim P(W) = \\ &= \dim V - 1 - (\dim W - 1) = \\ &= \dim V - \dim W = \operatorname{codim}_V W. \end{aligned}$$

Definizione 12

Daremo ora alcune definizioni di sottospazi:

- I sottospazi proiettivi di dimensione 0 sono definiti punti.
- I sottospazi proiettivi di dimensione 1 sono definiti rette.
- I sottospazi proiettivi di dimensione 2 sono definiti piani.
- I sottospazi proiettivi di dimensione 3 sono detti iperpiani.
- E così via...

Inoltre, se consideriamo il sottospazio vettoriale banale $\{0\}$, il suo proiettivizzato è $P\{0\} = \emptyset$.

Esempio 3

Per determinare i sottospazi di $P^1(K) = P(K^2)$ occorre vedere come sono fatti i sottospazi vettoriali di K^2 che possiamo classificare secondo la dimensione.

Sia dunque $W \subseteq K^2$ un sottospazio vettoriale, allora si avrà che $\dim W = 0, 1, 2$. Entriamo nel dettaglio:

- Se $\dim W = 0$ allora $W = \{0\}$. In questo caso il sottospazio proiettivo associato è $P\{0\} = \emptyset \subset P^1(K)$.
- Se $\dim W = 1$ allora sicuramente sarà $P\{W\} = W \subset P^1(K)$. $P\{W\}$ è dunque l'insieme costituito dal solo punto W . Quindi gli elementi di $P^1(K)$ sono identificabili con i sottospazi proiettivi di dimensione 0 (questo vale in generale: i punti di $P(V)$ sono i soli sottospazi proiettivi di dimensione 0).
- Se $\dim W = 2$ allora sicuramente sarà $W = K^2$ cioè $P\{W\} = P^1(K)$. Quindi $P^1(K)$ è l'unico sottospazio proiettivo di dimensione 1 di $P^1(K)$.

In definitiva si ha che:

$P^1(K)$ contiene tre tipi di sottospazi proiettivi:

- $\emptyset$ che ha dimensione -1 ;
- I punti che hanno dimensione 0 ;
- $P^1(K)$ stesso, che ha dimensione 1 .

Ragionando in modo analogo possiamo dedurre che $P^2(K)$ contiene quattro tipi di sottospazi proiettivi:

- $\emptyset$ che ha dimensione -1 ;
- I punti che hanno dimensione 0 ;
- Le rette che hanno dimensione 1 .
- $P^2(K)$ stesso, che ha dimensione 2 .

E così via.

Osservazione 8

Abbiamo una corrispondenza biunivoca fra sottospazi vettoriali di V e sottospazi proiettivi di $P(V)$ e precisamente si ha che esiste un'applicazione iniettiva e suriettiva f tale che

$$f: W = \{\text{sottospazi vettoriali di } V\} \leftrightarrow P(V) = \{\text{sottospazi proiettivi di } P(V)\}.$$

Osserviamo che tale applicazione conserva le inclusioni, cioè dati due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di V , allora

$$W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow P(W_1) \subseteq P(W_2).$$

Proposizione 6

Sia $\{P(W_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi proiettivi di $P(V)$, con I insieme di indici che definiscono i sottospazi possibili (come da Esempio 3). Allora vale la seguente:

$$\bigcap_{i \in I} P(W_i) = P\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right);$$

Dunque, si ha che intersecare sottospazi proiettivi è analogo a proiettivizzare l'intersezione di sottospazi vettoriali ed essendo $\bigcap_{i \in I} W_i$ un sottospazio vettoriale si ha che $\bigcap_{i \in I} P(W_i)$ è ancora un sottospazio proiettivo.

Definizione 13

Siano $T, S \subseteq P(V)$ due sottospazi proiettivi tali che $S = P(W), T = P(U)$ (dove naturalmente W, U sono sottospazi vettoriali di V); allora il sottospazio $P(W + U)$ è detto sottospazio somma di S e T e viene denotato con il simbolo $L(S; T)$ o semplicemente con $S + T$.

Osservazione 9

Se $S = P(W), T = P(U)$ sono due sottospazi proiettivi di $P(V)$ si ha che

$$P(W + U) = L(S \cup T).$$

Definizione 14

Due sottospazi proiettivi $S = P(W), T = P(U)$ di uno spazio proiettivo $P(V)$ si dicono:

- *incidenti se $S \cap T \neq \emptyset$ (e questo vale se e solo se $0 \subset U \cap W$ strettamente);*

- sghembi se $S \cap T = \emptyset$ (e questo vale se e solo se $0 = U \cap W$).

Esempio 4

Un punto P ed un sottospazio proiettivo S sono incidenti se $P \in S$, mentre sono sghembi se $P \notin S$.

Teorema 1 (Formula di Grassmann Proiettiva)

Per ogni coppia di sottospazi proiettivi $S = P(W), T = P(U)$ di $P(V)$, vale la seguente identità:

$$\dim L(S; T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T.$$

La suddetta è la Formula Di Grassmann proiettiva, uno strumento molto utile per studiare le proprietà di incidenza dei sottospazi proiettivi.

Dim.

La dimostrazione è immediata in quanto deriva direttamente dall'utilizzo della seguente Formula di Grassmann Vettoriale:

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Dalla suddetta infatti segue:

$$\begin{aligned} (\dim U - 1) + (\dim W - 1) &= (\dim(U \cap W) - 1) + (\dim(U + W) - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim T + \dim S &= \dim(S \cap T) + \dim L(S; T). \end{aligned}$$

Esempio 5

Si considerino una retta r ed un punto P appartenenti ad uno spazio proiettivo $P(V)$, con $\dim P(V) \geq 2$; allora si ha che:

$$L(r; P) = \begin{cases} \text{un piano} & \text{se } P \notin r \\ \text{la retta } r & \text{se } P \in r \end{cases}.$$

Infatti, dalla Formula di Grassmann Proiettiva si ha che:

- se $P \notin r \Rightarrow \dim L(r; P) = \dim r + \dim P - \dim(r \cap P) = 1 + 0 - (-1) = 2$;
- se $P \in r \Rightarrow \dim L(r; P) = \dim r + \dim P - \dim(r \cap P) = 1 + 0 - (0) = 1$;

Naturalmente $r \subset L(r; P)$ il quale è un sottospazio di dimensione uno; quindi, nel secondo caso, il sottospazio $L(r; P)$ è proprio la retta r stessa.

Esempio 6

Si considerino due rette r ed s appartenenti ad uno spazio proiettivo $P(V)$, con $\dim P(V) \geq 3$; allora si ha che:

$$\dim(r + s) = \dim L(r; s) = \begin{cases} 3 \\ 2 \\ 1 \end{cases}.$$

Infatti, a seconda della posizione reciproca delle due rette esse genereranno come spazio somma un iperpiano, un piano o una retta. Vediamo nel dettaglio che se r ed s sono rispettivamente:

- Sghembe $\Rightarrow \dim L(r; s) = \dim r + \dim s - \dim(r \cap s) = 1 + 1 - (-1) = 3$;
- Incidenti e distinte $\Rightarrow \dim L(r; s) = 1 + 1 - (0) = 2$;
- Coincidenti $\Rightarrow \dim L(r; s) = 1 + 1 - (-1) = 1$.

Nell'ultimo caso naturalmente si ha $L(r; s) = r \cap s = r = s$.

Corollario 1

Siano S, T sottospazi proiettivi di $P(V)$; allora vale sempre la seguente:

$$\dim(S \cap T) \geq \dim S + \dim T - \dim P(V).$$

Dim.

Poiché $L(S; T) \subseteq P(V)$ allora vale naturalmente che

$$L(S; T) \leq \dim P(V);$$

sostituendo la suddetta nella Formula di Grassmann si ottiene la disuguaglianza desiderata.

Osservazione 10

Se $\dim S + \dim T \geq \dim P(V) \Rightarrow$ i sottospazi S, T sono incidenti.

Infatti, dal Corollario 1 segue immediatamente che $\dim(S \cap T) \geq 0$ e questo vale se e solo se $S \cap T \neq \emptyset$.

Possiamo trarre alcune conclusioni:

- Due sottospazi proiettivi S, T sghembi hanno dimensioni la cui somma non supera $\dim P(V) - 1$;
- In generale, se $\dim P(V) = n$ allora condizione necessaria e sufficiente affinché S, T siano sghembi è che $\dim S + \dim T \leq n - 1$;
- In particolare: una retta ed un iperpiano di uno spazio proiettivo hanno sempre almeno un punto in comune.

Esempio 6

6.1)

In un piano proiettivo ($\dim P(V) = 2$) si considerino due rette distinte r, s (quindi $\dim L(s; r) > 1$, il che implica necessariamente $\dim L(r; s) = 2$); allora r, s si incontrano sempre esattamente in un punto. Infatti, si ha che:

$$\dim(s \cap r) = \dim s + \dim r - \dim(L(s; r)) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

6.2)

Analizziamo tre possibili situazioni verificabili considerando uno spazio proiettivo $P(V)$ di dimensione tre.

In primo caso può accadere che due rette r, s siano sghembe in quanto

$$\dim r + \dim s \leq \dim P(V) - 1 = 2.$$

Infatti, questo accade se consideriamo per esempio due piani vettoriali in $\mathbb{R}^4$, i quali si incontrano nel solo punto $(0,0,0,0)$ allora i loro proiettivizzati in $P^3(\mathbb{R})$ sono due rette sghembe.

Una retta r ed un piano π però si incontrano sempre; infatti, per il Corollario 1 si ha che:

$$\dim(r \cap \pi) \geq \dim r + \dim \pi - \dim P(V) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Questo può avvenire in due modi:

- *se $r \subset \pi$ (e questo vale se e solo se $\dim(r \cap \pi) = 1$);*
- *se $r \cap \pi = P$ (dove P è un unico punto e questo vale se e solo se $\dim(r \cap \pi) = 0$).*

Infine, due piani distinti π, τ (quindi $\dim L(\pi \cap \tau) \geq 3$, ed essendo in uno spazio proiettivo di dimensione tre il sottospazio considerato deve necessariamente avere dimensione tre) hanno sempre in comune una retta, infatti:

$$\dim(\pi \cap \tau) = \dim\pi + \dim\tau - \dim L(\pi; \tau) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

6.3)

Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione quattro.

In questo caso può accadere che due rette r, s siano sghembe, così come una retta r ed un piano π , infatti valgono rispettivamente le seguenti:

$$\dim r + \dim s = 2 \leq \dim P(V) - 1 = 3;$$

$$\dim r + \dim \pi = 3 \leq 3.$$

Questo accade effettivamente considerando rispettivamente i proiettivizzati di due piani vettoriali o di un piano ed un sottospazio tridimensionale, i quali in $\mathbb{R}^5$ si incontrano solo nel punto $(0,0,0,0,0)$.

Due piani π, τ invece sono sempre incidenti, in quanto:

$$\dim\pi + \dim\tau \geq \dim P(V) = 4.$$

Sfruttando la Formula di Grassmann vediamo in che modo possono incidersi π, τ :

$$\dim L(\pi; \tau) + \dim(\pi \cap \tau) = \dim\pi + \dim\tau = 2 + 2 = 4;$$

dunque, possiamo ottenere quattro in uno dei seguenti modi:

$$- \quad 4 = 4 + 0 = \dim L(\pi; \tau) + \dim(\pi \cap \tau) \Rightarrow L(\pi; \tau) = \pi + \tau = P(V), \pi \cap \tau = P.$$

In questo caso abbiamo il proiettivizzato di due sottospazi vettoriali $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^5$ di dimensione tre, tali che $P(\alpha) = \pi, P(\beta) = \tau$, la cui somma è $\mathbb{R}^5$ stesso e la cui intersezione è una retta. Questa è la condizione per la quale i piani π, τ sono detti in posizione generale, secondo la definizione 15 che seguirà immediatamente a questo esempio.

$$- \quad 4 = 3 + 1 = \dim L(\pi; \tau) + \dim(\pi \cap \tau) \Rightarrow \pi + \tau = \text{iperpiano}, \pi \cap \tau = \text{retta}.$$

Questo è il caso dei proiettivizzati di due sottospazi vettoriali di dimensione tre la cui somma in $\mathbb{R}^5$ è un iperpiano vettoriale e la cui intersezione è un piano.

$$- \quad 4 = 2 + 2 = \dim L(\pi; \tau) + \dim(\pi \cap \tau) \Rightarrow \pi + \tau = \pi = \tau = \pi \cap \tau.$$

Questo è il caso dei proiettivizzati di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ di dimensione tre e uguali.

Definizione 15

Siano S, T due sottospazi proiettivi di $P(V)$; allora S, T sono detti in posizione generale se e solo se $\dim(S \cap T)$ è la più piccola possibile, ovvero, per la Formula di Grassmann, se e solo se $\dim L(S; T)$ è la più grande possibile.

Ricordiamo, come già visto, che $L(S; T) \subseteq P(V)$ quindi $\dim L(S; T) \leq \dim P(V)$.

Esempio 7

Sia $\dim P(V) = 2$. Due rette r, s in un piano proiettivo sono in posizione generale se e solo se si incontrano in un punto, ovvero come visto nell'Esempio 6.1, se e solo se sono distinte in quanto valendo

$$\dim L(S; T) \leq \dim P(V) = 2 \text{ e } \dim L(S; T) \geq 2$$

necessariamente si ha $\dim L(S; T) = 2$, pertanto dalla Formula di Grassmann si ha che:

$$\dim r + \dim s = 2 + \dim(r \cap s) \Rightarrow 1 + 1 - 2 = \dim(r \cap s) = 0.$$

2.3.4 Cono proiettante di un sottoinsieme

Definizione 16

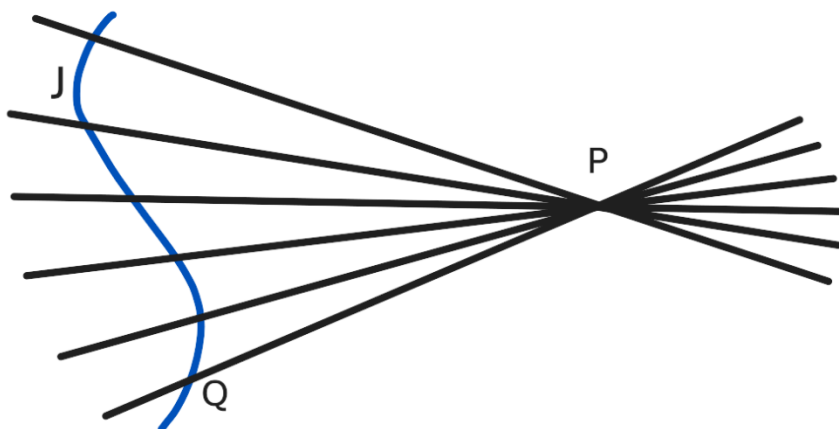
Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo. Sia $J \neq \emptyset$ un sottoinsieme di $P(V)$ e sia $P \in P(V)$ un punto qualsiasi. Definiamo cono proiettante J dal punto P il seguente:

$$C_p(J) = \bigcup_{Q \in J} L(P; Q).$$

Dunque, il cono proiettante un sottoinsieme J di uno spazio proiettivo, a partire da un punto scelto P , non è altro che l'unione di tutte le rette che contengono P stesso ed almeno un punto di J .

Il suddetto punto P viene definito come il vertice del cono.

Si noti che in generale $C_p(J)$ non è un sottospazio proiettivo.



Proposizione 7

Se S è un sottospazio proiettivo di $P(V)$ allora $C_p(J) = L(S; P) \quad \forall P \in P(V)$. In particolare se S è un punto e $P \neq S$ allora $C_p(S)$ è la retta che contiene S e P .

Proposizione 8

Siano S, T due sottospazi proiettivi di $P(V)$, allora vale la seguente:

$$L(S; T) = \bigcup_{P \in T} C_P(S) = \bigcup_{Q \in S} C_Q(T).$$

Dim.

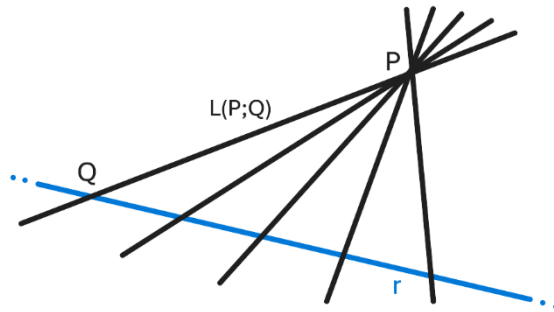
Il sottospazio somma di S e T , ovvero $L(S; T)$, non è altro che $\bigcup_{Q \in S} L(Q; T)$ e quest'ultimo, per la Prop. 7, è uguale a:

$$\bigcup_{Q \in S} C_Q(T) = \bigcup_{Q \in S} \bigcup_{P \in T} L(Q; P) = \bigcup_{P \in T} C_P(S).$$

Esempio 8

Sia r una retta proiettiva in $P^2(\mathbb{R})$ e sia $P \notin r$; allora $C_p(r) = L(P; r) = P^2(\mathbb{R})$. Infatti, dalla Formula di Grassmann, si ha che:

$$\dim L(P; r) = \dim P + \dim r - \dim(P \cap r) = 0 + 1 - (-1) = 2.$$



Definizione 16

Si considerino un iperpiano H ed un punto $Q \notin H$ in uno spazio proiettivo $P(V)$. La proiezione di $P(V)$ su H di centro Q è l'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_{Q,H} : P(V) \setminus \{Q\} &\rightarrow H \\ T &\mapsto L(T; Q) \cap H = T' \end{aligned}$$

Si noti che tale funzione ha senso, perché $Q \notin H$ quindi $L(T; Q) \not\subset H$, pertanto $L(T; Q) \cap H$ è un punto. L'applicazione $\pi_{Q,H}$ è quindi tale che associa ad un punto $T \neq Q$ il punto di intersezione di H con la retta congiungente T e Q .

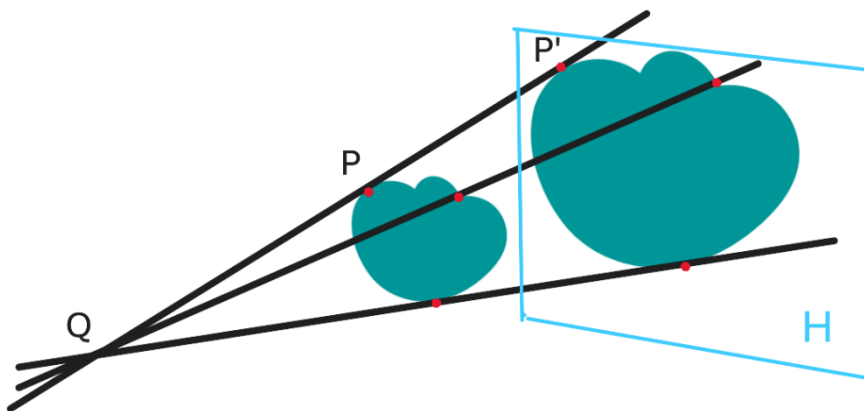
Osservazione 11

Se $J \subset P(V)$ è un sottoinsieme non vuoto tale che $Q \notin J$ allora si ha:

$$\pi_{Q,H}(J) = \bigcup_{P \in J} (L(P; Q) \cap H) = \left(\bigcup_{P \in J} L(P; Q) \right) \cap H = C_Q(J) \cap H.$$

Ciò significa che $\pi_{Q,H}(J)$ è l'intersezione del cono proiettante J dal punto Q con l'iperpiano H .

L'insieme $\pi_{Q,H}(J)$ viene chiamato proiezione di J da Q su H .



Tutto ciò che abbiamo analizzato in questo capitolo, attraverso definizioni e proposizioni di geometria proiettiva e quindi attraverso il linguaggio matematico, non è altro che la traduzione formale e rigorosa di quanto accade nel mondo della prospettiva.

L'operazione di proiettare un sottoinsieme di $P(V)$ su un iperpiano è esattamente quella che traduce geometricamente l'operazione grafica di rappresentare un oggetto tridimensionale su un piano bidimensionale, ovvero quello che compie un artista nel raffigurare sulla tela il mondo che ci circonda, esattamente come esso appare da un punto di osservazione da lui scelto.

È così che la matematica, frutto della mente umana, si dimostra sorprendentemente efficace nel descrivere e spiegare il mondo che ci circonda ed è così che scorgiamo un po' di matematica ovunque intorno a noi, persino nell'arte.

Capitolo 3.

Il De Prospectiva Pingendi

3.1 Una biografia di Piero Della Francesca

3.1.1 Introduzione

Piero Di Benedetto De' Franceschi, comunemente noto come Piero Della Francesca, nacque a Borgo Sansepolcro (l'odierna Sansepolcro) in Toscana, intorno al 1412. Fu un artista-umanista a tuttotondo, in quanto nella sua vita integrò l'arte con gli studi scientifici, in particolare nel campo della matematica: il suo interesse per quest'ultima disciplina era profondamente intrecciato con la sua pratica artistica; infatti, concentrandosi sull'uso della geometria e della proporzione egli creava opere realistiche e scientificamente corrette, non è noto per le sue opere mirabilmente sospese tra arte e studi di geometria, incastonate in un complesso sistema di lettura a più livelli, dove confluiscono anche questioni teologiche e filosofiche. Le sue opere sono particolarmente rilevanti proprio poiché in esse si rilevano una grande maestria nell'uso della prospettiva, che conferiva solidità e veridicità alle figure che rappresentava, anche per una rigorosa costruzione formale teorica.

Possiamo di fatto parlare di lui definendolo come una delle figure più emblematiche e centrali del Rinascimento italiano, in quanto pittore e matematico protagonista di una fase di passaggio importantissima tra l'arte pura, frutto di una propensione personale e soggettiva, e l'arte formale, risultato di studi approfonditi e rigorosi con regole ben precise da rispettare.

Piero Della Francesca fu un esponente della seconda generazione di pittori-umanisti ed ebbe una formazione a Firenze accanto a Domenico Veneziano (1410,Venezia-1461,Firenze), pittore italiano noto per il suo utilizzo di colori chiarissimi, impregnati di luce; inoltre fu influenzato da artisti e pensatori eminenti come Masaccio (1401, San Giovanni Valdarno-1428, Roma) e Leon Battista Alberti (1404, Genova– Roma,1472), Filippo Brunelleschi (Firenze, 1377 – Firenze, 1446). La sua attività si svolse tra Firenze, Arezzo, Rimini, Roma

e Urbino, e ci lasciò in eredità lavori che spaziano da dipinti su tela ed affreschi, a importanti trattati di matematica e di prospettiva.

L'importante influenza che ebbero gli artisti ai quali si ispirò o che gli fecero da maestri si evince in maniera evidente nella collezione delle sue opere, infatti Piero Della Francesca, condensando molteplici influssi, fece da collante tra la prospettiva geometrica brunelleschiana, la plasticità di Masaccio, l'intenso utilizzo di colori chiari per rappresentare la luce e schiarire le ombre dei dipinti di Domenico Veneziano e la precisione attenta della realtà dei fiamminghi. Egli inoltre riuscì ad armonizzare, nella vita quanto nelle opere, i valori intellettuali e spirituali del suo tempo, riuscendo a mediare tra tradizione e modernità, tra religiosità e nuove visioni dell'Umanesimo, tra razionalità ed estetica.

Altre caratteristiche fondamentali della sua espressione poetica sono la semplificazione geometrica sia delle composizioni che dei volumi, l'immobilità cerimoniale dei gesti, l'attenzione alla verità umana.

La sua attività può senz'altro essere caratterizzata come un processo evolutivo che va dalla pratica pittorica alla concretezza teorica della matematica, fino all'astrazione. La sua produzione artistica influenzò nel profondo la pittura rinascimentale dell'Italia settentrionale e, in particolare, la scuola ferrarese e veneta.

3.1.2 Biografia

Piero Della Francesca venne alla luce da Romana di Pierino da Monterchi, nobildonna di famiglia umbra, e da Benedetto de' Franceschi, ricco commerciante di tessuti; nacque nell'allora cittadina di Borgo Sansepolcro, in un anno imprecisato tra il 1406 e il 1416. La data di nascita esatta è sconosciuta e controversa, poiché un incendio negli archivi comunali di Sansepolcro distrusse gli atti di nascita dell'antica anagrafe.

Del resto l'intera ricostruzione biografica della vita di Piero Della Francesca è alquanto ardua: a questa impresa si sono dedicate intere generazioni di studiosi, affidandosi ai più sottili indizi ai quali si è pervenuti nella generale scarsità di documenti ufficiali attendibili che si sono conservati sino ai nostri giorni. Il frutto delle sue stesse opere ci è pervenuto solo in maniera frammentaria a causa di innumerevoli perdite susseguitesì nel corso dei secoli: per menzionarne una di importanza estremamente rilevante citiamo ad esempio i suoi affreschi realizzati nel *Palazzo Apostolico* (il palazzo Papale nella Città del Vaticano) che nel XVI secolo vennero sostituiti dalle *Stanze di Raffaello*.

In un primo documento nel quale viene nominato, l'artista viene descritto come testimone alla stesura di un testamento datato all'8 ottobre 1436, e da ciò si deduce che, in quella data, egli avesse almeno vent'anni (l'età minima necessaria richiesta per un documento ufficiale). Aldilà di questa documentazione, abbiamo ottenuto diverse informazioni, che purtroppo però risultano a tratti non attendibili, riguardo alcuni avvenimenti della vita di Della Francesca anche tramite testimonianze riportate in uno scritto redatto da Giorgio Vasari. Ad esempio, il Vasari scrisse che l'artista morì nel 1492 all'età di 86 anni, il che implicherebbe come anno della sua nascita il 1406 (cosa decisamente improbabile in quanto i suoi genitori si sposarono solo nel 1413). Vasari proseguiva narrando che, essendo il padre morto prima che il figlio nascesse, chiamarono l'infante col matronimico invece che col patronimico (sua madre era conosciuta come "la Francesca" in quanto maritata nei Franceschi, rispettando le usanze del tempo, così come fu, volendo citare un esempio celeberrimo, per Lisa Gherardini del Giocondo conosciuta in tutto il mondo come "la Gioconda").

Probabilmente la sua prima formazione avvenne nella stessa Borgo Sansepolcro, cittadina di frontiera culturale, tra le influenze fiorentine, senesi e umbre: infatti già nel XIII secolo nel

monastero camaldolese di Sansepolcro era attiva una scuola, della quale si ha testimonianza fin dal 1226; inoltre nel corso del XIV secolo i frati Minori e i frati Eremiti di sant'Agostino attivarono scuole all'interno dei loro conventi, disponendo oltretutto di proprie biblioteche interne. Nel corso di un paio di secoli l'interesse e la sensibilità per gli studi rimasero preponderanti nel monastero camaldolese, dove nel 1474 l'abate si dichiarò disponibile ad accogliere degli studenti di grammatica. Inoltre, tra il 1478 e il 1480, la biblioteca del monastero disponeva di ben 121 volumi, prevalentemente a carattere liturgico, teologico e giuridico. La presenza costante di una scuola comunale di grammatica fin dalla fine del XIV secolo e l'alto numero di professionisti intellettuali (specialmente medici e notai) rese il contesto culturale locale piuttosto articolato e complesso, caratterizzato da una cultura diffusa che, pur in assenza di centri accademici di livello universitario, contribuì a vivacizzare l'ambiente di Sansepolcro e dell'intera Alta Valle del Tevere. Inoltre, la notevole e non trascurabile dimensione demografica della Sansepolcro del tempo offriva un centro dinamico e vitale, nel quale il giovane Piero Della Francesca poté trovare un ambiente particolarmente stimolante per la sua sensibilità artistica ed intellettuale. A partire dai primi decenni del XV secolo, quando il giovane portò a compimento la propria formazione scolastica e avviò la carriera artistica, incentivò lo sviluppo di una significativa presenza culturale anche presso il convento dei Servi di Maria, dove vivevano e operavano numerosi maestri di teologia.

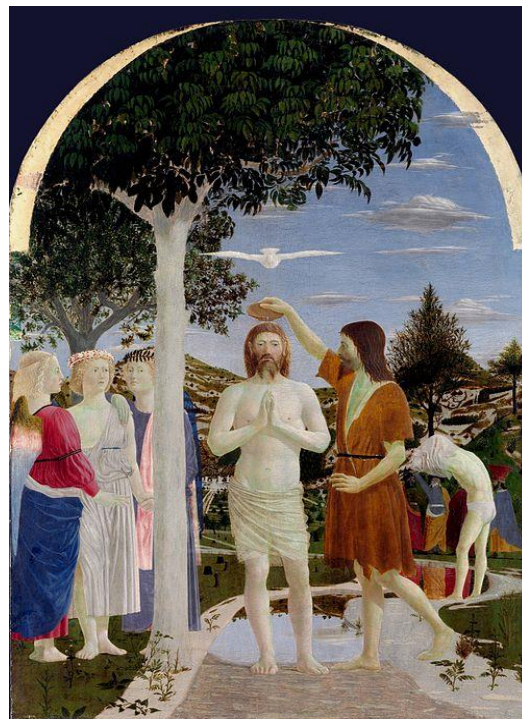
Uno dei primi artisti con i quali collaborò fu Antonio di Anghiari (attivo a Sansepolcro e ivi abitante), come attesta un documento di pagamento del 27 maggio 1430 per la pittura di stendardi e bandiere con le insegne del Comune e del governo papale, posti sopra una porta delle mura. Sul finire del 1437 lavorò nella principale chiesa di Sansepolcro, l'abbazia camaldolese di San Giovanni Evangelista (l'odierna Basilica Cattedrale). Nel 1438 realizzò diverse pitture nella cappella di San Lorenzo dell'abbazia, l'Annunciazione di Sant'Agostino a Sansepolcro e la tavola di Sant'Angelo a Citerna. Nel 1439 è documentato per la prima volta a Firenze (dove presumibilmente avvenne parte della sua formazione, già dal 1435), citato tra gli aiutanti di Domenico Veneziano nella realizzazione degli affreschi, oggi perduti, delle Storie della Vergine nel coro della chiesa di Sant'Egidio, dei quali vediamo alcune tracce nella immagine che seguirà nella pagina successiva.



La pittura luminosa, dalla tavolozza chiarissima e sontuosa, di Domenico Veneziano e quella, moderna e vigorosa, di Masaccio furono determinanti negli sviluppi del suo percorso artistico, ispirandogli alcune caratteristiche fondamentali che utilizzò per tutta la vita. Secondo il Vasari, Piero Della Francesca e Domenico Veneziano lavorarono e collaborarono insieme, oltre che a Perugia tra il 1437 ed il 1438, anche a Loreto, nella chiesa di Santa Maria, dove iniziarono ad affrescare la volta della sagrestia ma, a causa di una minaccia di peste, la lasciarono imperfetta ed essa fu in seguito terminata da Luca da Cortona, discepolo di Piero.

Durante il periodo nel quale collaborò con Domenico Veneziano realizzò un dipinto che risulta essere la prima opera che si è conservata intatta pervenendo sino ai nostri giorni: una tavola sulla quale è dipinta la *Madonna col Bambino* (da cui il titolo dell'opera). Questa si fa risalire agli anni 1435-1440 ed oggi fa parte di una collezione privata. Il verso della tavola (lato posteriore della tavola lignea su cui è applicata l'opera d'arte) mostra un rinfrescatoio dipinto in prospettiva, un possibile esercizio del giovane Piero sulla prospettiva e le sue leggi geometriche, per le quali anche qui notiamo esplicitamente il suo interesse. Alcuni studiosi ritengono che la prima opera pervenutaci di Piero della Francesca sia in realtà il *Battesimo di Cristo*, ad oggi conservato nella National Gallery di Londra. Alcuni elementi iconografici, come la presenza dei dignitari bizantini sullo sfondo, farebbero risalire l'opera al 1439 circa, altri però datano la pala molto più avanti negli anni, addirittura al 1460. Come molte altre questioni anche la datazione di quest'opera è piuttosto controversa.

Di seguito possiamo ammirare entrambe le opere succitate, insieme al *Polittico della Misericordia*, di cui tratteremo nell'immediato.



Negli anni Quaranta Piero soggiornò in varie corti italiane quali Urbino, Ferrara e probabilmente Bologna, realizzando affreschi che sono purtroppo andati completamente perduti.

Prima di questi spostamenti però, nel 1442 Piero risultava essere nuovamente abitante a Borgo Sansepolcro in qualità di uno dei "consiglieri popolari comunali". L'11 gennaio 1445 ricevette dalla locale Confraternita della Misericordia la commissione di un polittico per l'altare della loro chiesa, opera che divenne poi una delle più note ed importanti. Egli avrebbe dovuto realizzarla esclusivamente di proprio pugno e portarla a compimento nel giro di al massimo tre anni, ma invece la stesura del polittico si protrasse per circa 15 anni, uno per ognuna delle quindici tavole dalle quali è strutturato e per di più si avvale della collaborazione di un allievo ad oggi ignoto. Nel XVII secolo il polittico fu scomposto e questo comportò la perdita della sua cornice originale. Dal 1901 è conservato presso la Pinacoteca comunale di San Sepolcro.

A questo periodo vengono generalmente fatto risalire anche la *Resurrezione* del Museo Civico di Sansepolcro, la *Flagellazione*, conservato nella Galleria Nazionale delle Marche a Urbino, e la *Madonna del Parto*, conservato in un museo appositamente predisposto a Monterchi.

Sempre il Vasari affermava che Piero avesse avuto un'attività pittorica molto intensa ad Urbino, commissionata da Guidantonio da Montefeltro (1378-1443, Urbino), che però già nel 1550 andò in gran parte perduta a causa delle guerre da cui lo Stato urbinato era travagliato.

Una volta a Ferrara, nel 1449, lavorò al Castello Estense e nella chiesa di Sant'Andrea, ma oggi non ne resta traccia. Lì probabilmente ebbe un primo contatto con l'arte fiamminga, particolarmente evidente se si pensa al suo precoce uso della pittura a olio.

In un testamento datato 18 marzo 1450 egli è documentato in qualità di testimone, cittadino ed abitante di Ancona, per cui Piero fu probabilmente ospite per un certo periodo di tempo dell'importante famiglia anconetana del conte Giovanni di messer Francesco Ferretti e per loro dipinse la tavoletta del San Girolamo penitente ed altre opere minori, nelle quali si evidenzia un interesse per il paesaggio e per la fine resa dei dettagli, nelle variazioni di materiale e di "lustro" (ovvero di riflessi di luce), che possono essere spiegati, per l'appunto, solo attraverso una conoscenza diretta della pittura fiamminga.

Nel 1451 fu a Rimini, chiamato da Sigismondo Pandolfo Malatesta a lavorare al Tempio Malatestiano dove lasciò l'affresco votivo monumentale con San Sigismondo e Sigismondo Pandolfo Malatesta. Qui probabilmente poté conoscere Leon Battista Alberti.

Nel 1452 fu chiamato a sostituire Bicci di Lorenzo (Firenze, 1373 circa – 1452), che era venuto a mancare, per portare a termine la decorazione murale della Cappella Maggiore di San Francesco ad Arezzo, dove affrescò le celebri Storie della Vera Croce. I documenti ricordano l'ultimo pagamento per il ciclo di affreschi nel 1466 (che poteva anche essere già stato ultimato prima). Il ciclo è caratterizzato da scene costruite prospetticamente e con una colorazione delicata e ricca di luce, ripresa dallo stile di Domenico Veneziano. Il disegno è rigoroso, di impronta fiorentina, ma la sua rigidità va attenuandosi via via nel corso dell'impresa.

Nel 1458-1459 Piero fu attivo a Roma, chiamato da papa Pio II. Prima di partire nominò il fratello Marco come suo procuratore a Borgo San Sepolcro, verosimilmente in previsione di una lunga assenza. A Roma realizzò affreschi ben documentati ma anch'essi oggi perduti, all'interno del Palazzo Apostolico: questi, come anticipato, nel XVI secolo vennero totalmente cancellati per far posto ad altri affreschi senza dubbio di grandissima importanza: le famose *Stanze Vaticane* di Raffaello. Nella Basilica di Santa Maria Maggiore si trova invece un affresco di San Luca dipinto probabilmente dalla bottega di Piero, mentre nessuna opera si è ivi conservata interamente autografa.

Nella città di Roma Piero conobbe sicuramente artisti fiamminghi e spagnoli, acquisendo una nuova consapevolezza per la rappresentazione realistica dei fenomeni atmosferici, che saranno alla base degli affreschi più sperimentali della seconda fase del ciclo di Arezzo, come la scena notturna del *Sogno di Costantino*. Nel 1460 si trovava a Sansepolcro, dove firmò e datò l'affresco di *San Ludovico di Tolosa*.

Nel tardo 1466 la confraternita aretina della Nunziata gli commissionò uno stendardo con l'*Annunciazione*, citando nel contratto la riuscita degli affreschi di San Francesco come motivo della scelta: a quella data il ciclo doveva quindi essere già stato terminato. Quello stesso anno Piero dipinse l'affresco di una *Maddalena nel Duomo di Arezzo*.

Nel 1467 a Perugia eseguì un polittico per conto delle suore terziarie del convento di Sant'Antonio.

Nel 1468 è documentato a Bastia Umbra, dove si era rifugiato per sfuggire la peste. Qui realizzò almeno un altro gonfalone andato perduto.

Non sono chiari gli spostamenti di Piero alla corte di Urbino di Federico da Montefeltro (Gubbio, 1422 – Ferrara, 1482), dove soggiornò sicuramente tra il 1469 e il 1472. Nonostante ciò, Piero è considerato a buon diritto uno dei protagonisti e promotori della cultura urbinata, e proprio a Urbino il suo stile raggiunse un insuperato equilibrio tra l'uso di rigorose regole geometriche e il respiro serenamente monumentale. Al 1465-1472 circa è datato il *Doppio ritratto dei duchi di Urbino*, una delle sue opere più celebri, dove Federico da Montefeltro e la moglie Battista Sforza sono ritratti di profilo in primo piano, e sul retro in trionfo su carri allegorici e con scritte d'omaggio dipinte. Possiamo ammirarli di seguito. All'ultima fase di Piero è attribuita la *Natività*, dove fanno evidentemente capolino l'impianto prospettico e l'amorevole cura dei dettagli. Alcuni critici ipotizzano che il volto della Madonna sia stato realizzato da altra mano "fiamminga".





Ciò che rende Piero della Francesca un personaggio così rilevante è però il fatto che egli si dedicò, oltre che alla pittura e all'arte, anche alla scienza. A partire dai suoi attenti studi e approfondimenti sulla geometria e sulla prospettiva, pubblicò alcuni trattati matematici estremamente importanti. Fu infatti autore del *Trattato d'abaco*, un manuale di calcolo e algebra, la cui datazione è incerta ma in ogni caso legata alla maturità dell'autore.

Documentato di nuovo a Rimini nel 1482, dove prese in affitto un'abitazione, si dedicò alla scrittura del *Libellus de quinque corporibus regularibus*, trattato di geometria euclidea, il cui argomento principe è la geometria dei solidi, in particolare i poliedri regolari, terminato nel 1485 e dedicato a Guidobaldo da Montefeltro.

Ed in ultimo, sicuramente non per importanza né tantomeno per data di pubblicazione, in quanto anch'essa decisamente incerta, scrisse il *De prospectiva pingendi*, l'opera fondamentale sulla prospettiva che codificò le regole della scienza prospettica moderna, alla quale dedicheremo particolare attenzione dedicandole un buon approfondimento nel capitolo successivo.

In queste tre opere matematiche è presente una sintesi tra geometria euclidea, appartenente alla scuola dei dotti, e la matematica abachistica, riservata ai tecnici.

La prima opera citata è un trattato sulla matematica applicata: fu scritto forse già nel 1450, circa una trentina di anni prima del *De prospectiva pingendi*. Il titolo fu aggiunto solo in epoca moderna in quanto assente nell'originale. La parte geometrica e quella algebrica sono risultate molto vaste rispetto alle consuetudini del tempo, così come la parte sperimentale in cui l'autore ha esplorato elementi non convenzionali.

Nel *De prospectiva pingendi* ha proseguito la sua linea di studio teorico codificando, per primo, le regole della moderna scienza prospettica e apportando notevoli novità al punto da poterlo definire uno dei padri della nuova scienza e del moderno disegno tecnico. Tra i problemi pratici affrontati emergono il computo del volume della volta e l'elaborazione architettonica della costruzione delle cupole.

Nel terzo trattato *Libellus de quinque corporibus regularibus*, un trattato dedicato alla geometria, che ha ripreso temi antichi di tradizione platonico-pitagorica, si è ispirato alla lezione euclidea per l'ordine logico delle espressioni, per i riferimenti e per l'uso coordinato e complesso dei teoremi, mentre è stato vicino alle esigenze dei tecnici nella determinazione delle figure trattate, solide e poliedriche, e per l'assenza di dimostrazioni classiche e per l'uso di regole aritmetiche e algebriche applicate ai calcoli. Nel testo erano rappresentati i poliedri regolari e non, e vi erano studiate le relazioni che intercorrono tra di essi. L'opera tratta, in particolare, dei cinque solidi geometrici regolari iscrivibili in una sfera e non ulteriormente semplificabili (solidi platonici): il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro; si ispira alla trattazione che fece Platone due millenni prima, ma l'autore è interessato al carattere puramente matematico-geometrico delle figure, tralasciando le combinazioni filosofiche con gli elementi e l'interpretazione del loro carattere simbolico che contraddistingueva l'opera del filosofo greco.

Piero della Francesca era essenzialmente interessato quindi alle finalità pratiche degli studi geometrici, soprattutto rapportati al disegno ed alle arti figurative.

Nel 2005, lo storico dell'arte James R. Banker individuò, nella biblioteca Riccardiana di Firenze, un suo autografo (un testo scritto a mano dallo stesso Piero Della Francesca) contenente una copia della traduzione in latino di gran parte del corpus archimedeo

(comprende le opere matematiche e scientifiche di Archimede, tra le quali trattati come *La misura del cerchio*, *Sulla sfera e sul cilindro*, *Sulle spirali*, *Sui corpi galleggianti*, e *Il metodo*, molte delle quali ci sono giunte grazie a manoscritti realizzata da Iacopo da San Cassiano nella prima metà del Quattrocento). Il testo corredato di figure geometriche, appositamente redatte per l'occasione, testimonia il suo percorso di studio e il suo interesse per la matematica e la geometria greca.

Negli ultimi anni, secondo Vasari, venne colpito da una grave malattia agli occhi che gli impedì di lavorare ed in fine morì a Sansepolcro nel 1492, anno della scoperta dell'America, e fu sepolto nella Badia di Sansepolcro, anche se altre testimonianze, quali ad esempio quella di Luca Pacioli, lo dichiarano ancora vivente nel 1494 in quanto sovrintendente alla stampa del suo trattato *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, pubblicato il 10 novembre 1494.

3.2 Descrizione dell'opera

Il *De prospectiva pingendi*, trattato di Piero della Francesca il cui titolo tradotto è "*Sulla prospettiva del dipingere*", è il primo manuale di disegno dedicato alla nuova scienza dei pittori interamente illustrato, nonché il primo trattato sistematico della storia riguardante la prospettiva nel quale ci si preoccupi di giustificare matematicamente, dunque scientificamente, i procedimenti descritti. Proprio per questo è una delle opere fondamentali del Rinascimento. La trattazione, scevra di orpelli filosofici e teologici, ha uno stile sobrio e chiaro, si focalizza sugli aspetti matematico-geometrici della prospettiva ed è caratterizzata da un tono teorico molto specifico che viene completato da dettagliate applicazioni pratiche e immagini. Per quanto detto finora Piero della Francesca può essere definito a buon diritto uno dei padri fondatori del disegno tecnico. Dal suo testo fondativo inizia la grande esperienza divulgativa della prospettiva rinascimentale i cui principi basilari erano stati definiti da Leon Battista Alberti pochi decenni prima: il trattato è infatti ispirato anche ad un'opera di quest'ultimo, il *De pictura* (1435).

La datazione dell'opera è alquanto incerta ma in ogni caso risalente alla tarda maturità dell'autore: si concorda sul fatto che il trattato sia stato composto attorno al 1474-75, anche se le continue limature e riscritture testimoniate dai codici superstiti ne suggeriscono una gestazione che potrebbe risalire alla metà degli anni Sessanta.

Piero della Francesca scrisse il *De Prospectiva Pingendi* in volgare, cercando così di assicurare alla propria opera un pubblico il più ampio possibile e con l'obiettivo di farla figurare tra i volumi della biblioteca urbinata, ovvero la Biblioteca del duca di Urbino Federico da Montefeltro¹ (1422-1482), la quale custodisce una delle più importanti collezioni manoscritte del Quattrocento, conservatasi e giunta praticamente intatta sino a noi e attualmente conservata presso la Biblioteca Apostolica Vaticana, dove costituisce la parte principale dei Fondi Urbinati (Latini, Greci ed Ebraici). In più Piero affidò la traduzione in latino del suo trattato a Matteo di ser Paolo d'Anghiari, maestro di grammatica e figura particolarmente influente a Sansepolcro, che fece una traduzione "de verbo ad verbum"

¹ La fama di questa biblioteca è legata alla eccezionale bellezza dei suoi manoscritti; essa è stata creata in stretta correlazione con la storia personale e politica di Federico da Montefeltro, che l'ha concepita e commissionata al pari di una complessa opera d'arte.

(parola per parola) dell'opera, come citò Fra' Luca Bartolomeo de Pacioli nella sua opera *Summa de arithmetica* del 1494. Il contenuto del libro, tra l'altro, fu proprio fonte di ispirazione per quest'ultimo, religioso, matematico ed economista italiano, anche detto Paciolo, da tutti noto come Luca Pacioli (Borgo Sansepolcro, 1445 circa – ivi, 19 giugno 1517); infatti, il *De prospectiva pingendi* fu in buona parte assorbito nel suo trattato *De Divina Proportione*, pubblicato nel 1509. Fu inoltre fonte di ispirazione anche per il maestro Leonardo da Vinci, accompagnandolo nella sua raccolta di appunti, annotazioni, scritti e schizzi che furono accorpati e rielaborati in seguito da Francesco Melzi sino alla stesura di un trattato sulla pittura, il *De pictura* (1540- opera della quale non esistono versioni complete ed autografe dello stesso Leonardo).

La diffusione dell'opera di Della Francesca nelle botteghe degli artisti fu affidata a una serie di codici manoscritti dei quali oggi restano solo sette testimoni, splendidamente illustrati. Il trattato è infatti sopravvissuto sino ai giorni nostri proprio grazie a questi sette manoscritti, tre volgari (Parma, Biblioteca Palatina; Reggio Emilia, Biblioteca Comunale "A. Panizzi"; Milano, Biblioteca Ambrosiana) e quattro latini (Milano, Biblioteca Ambrosiana; Bordeaux, Bibliothèque Municipale; London, British Library; Paris, Bibliothèque Nationale de France). Il codice volgare di Reggio Emilia e i latini di Bordeaux e Milano sono probabilmente coevi (vi compare, infatti, la mano dello stesso copista). Tra le suddette, le stesure volgari più prossime all'archetipo, ovvero più simili alla copia originale, sono quelle del reggiano (considerato senza le aggiunte) e dell'esemplare (che è purtroppo andato perduto) da cui fu copiato l'ambrosiano. Di seguito possiamo ammirare, nel loro splendore, le prime pagine di ognuna delle sette copie manoscritte suddette, rispettivamente nell'ordine succitato e che qui rielencheremo per maggiore chiarezza e semplicità e completezza.

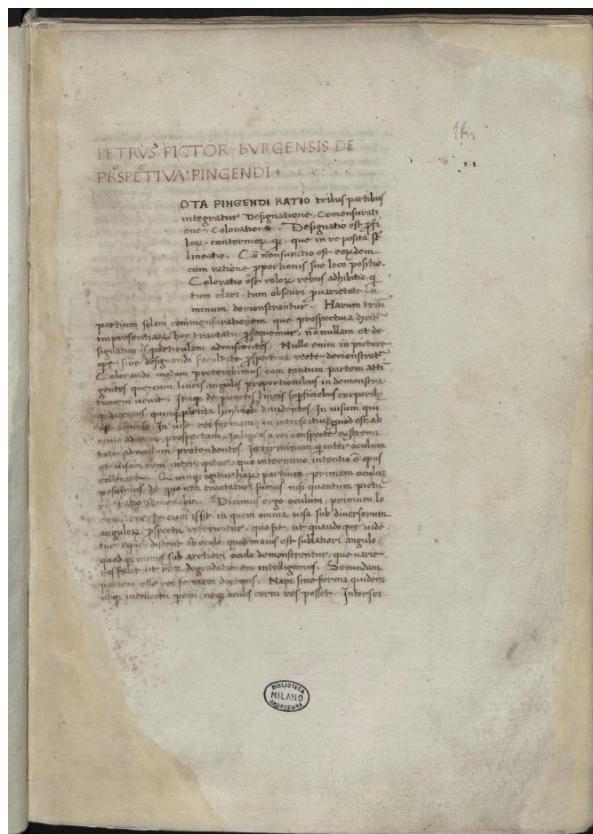
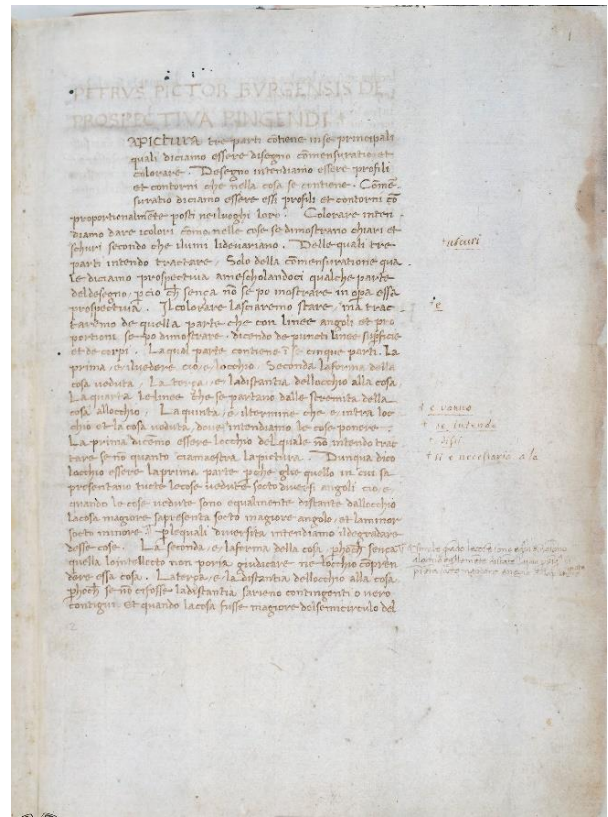
Manoscritti volgari:

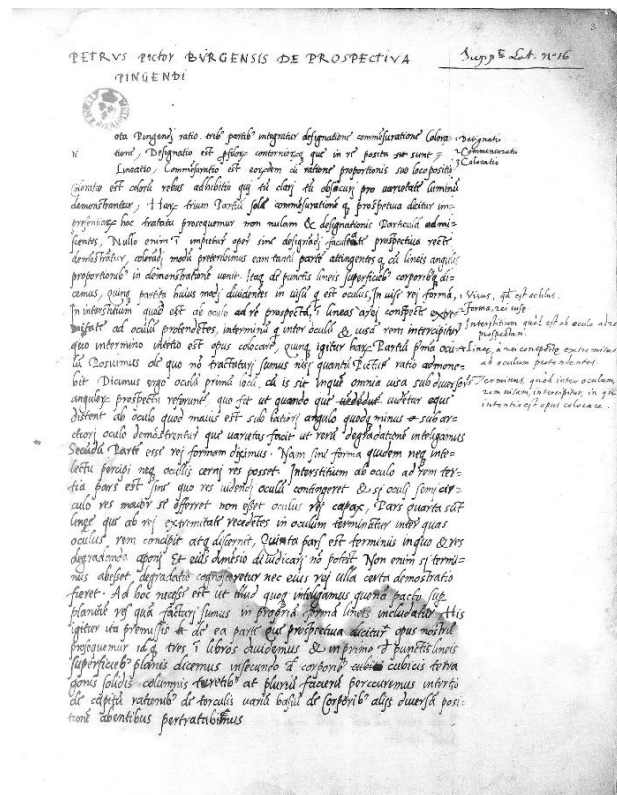
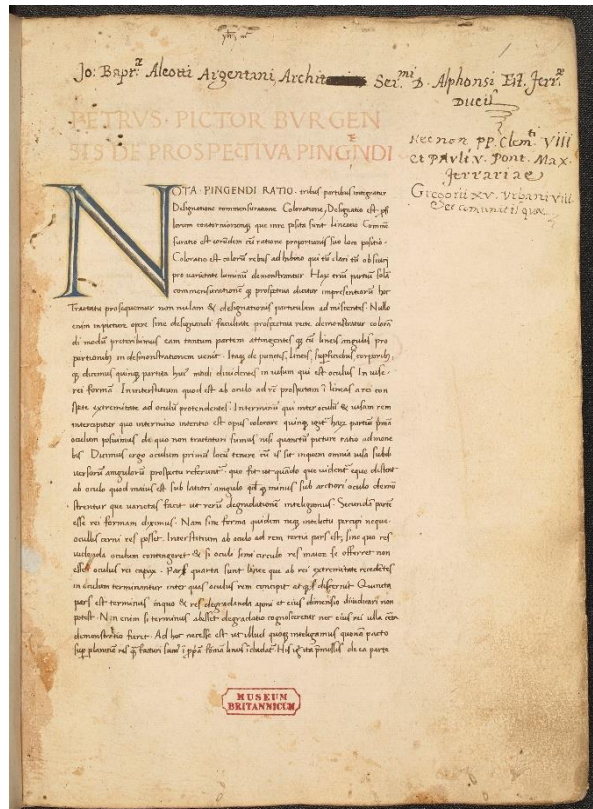
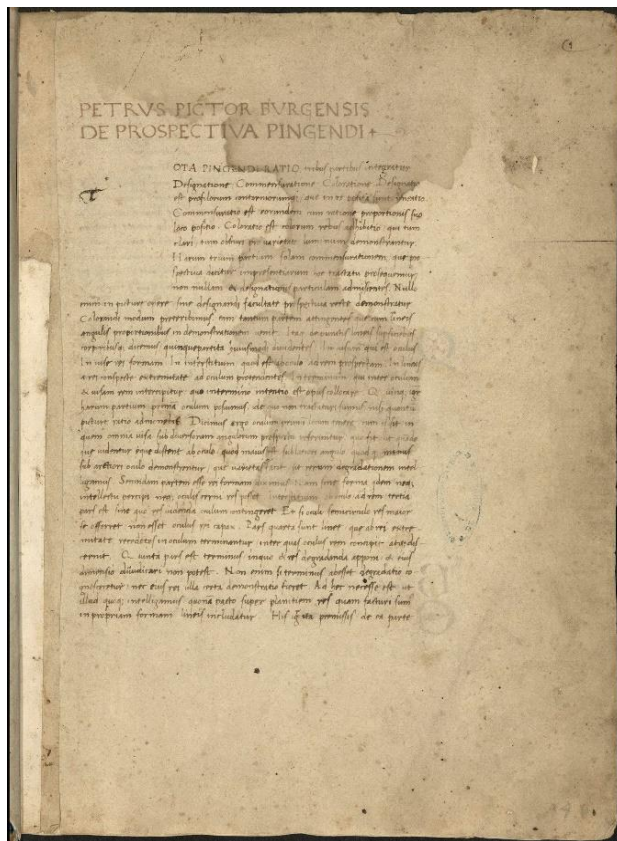
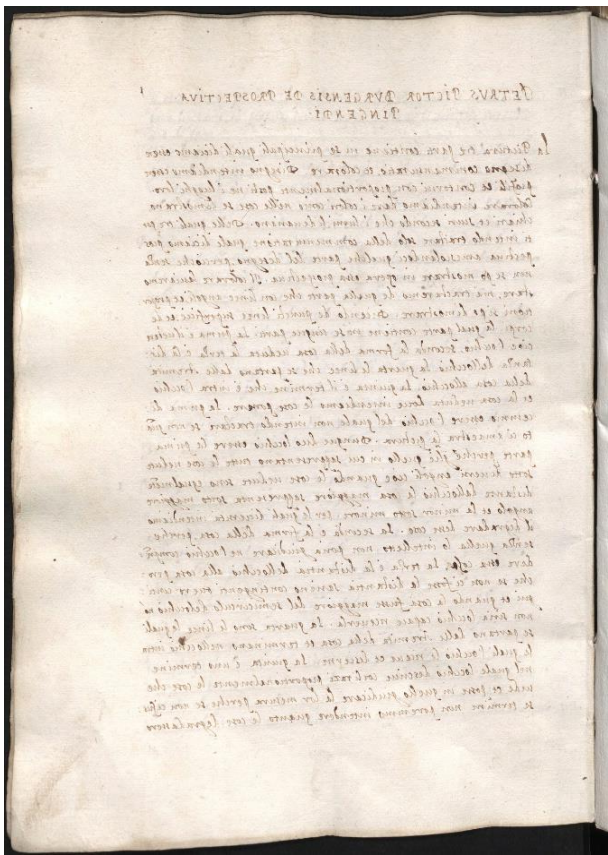
- Petrus Pictor Burgensis, *De prospectiva pingendi*, 1576 (Parma, Biblioteca Palatina);
- Di Gianbattista Venturi (Reggio Emilia, Biblioteca Comunale "A. Panizzi");
- Di Pietro Del Borgo; (Milano, Biblioteca Ambrosiana).

Manoscritti latini:

- Di Vincenzo Pinelli, 1609; restaurato nel 1972 dalla Fondazione Ercole Varzi (Milano, Biblioteca Ambrosiana);
- (Bordeaux, Bibliothèque Municipale);

- [illegible]





L'opera è strutturata in tre libri e nell'esordio del *De prospectiva pingendi*, Piero circoscrive l'argomento di ognuno di essi con nettezza: il "disegno", cioè come dipingere le singole figure, la "commensuratio", ossia come disporle nello spazio, e il "colore", cioè come riempirle attraverso il colore realizzando giochi di chiaro-scuro per rappresentare in modo verosimile oggetti e volumi. In particolare, nel primo vengono trattate le superfici piane, nel secondo i corpi solidi e nel terzo alcune figure tridimensionali più complesse. Nei primi due libri si illustrano in dettaglio le tecniche prospettiche necessarie per poter rappresentare figure piane e solidi geometrici; nel terzo, dovendo trattare di figure più complesse, Piero pose in atto un metodo «più facile nel dimostrare et nello intendere», anche se «nello effecto sirà una cosa medesima», volendo anticipare il fatto che attraverso le dimostrazioni pratiche sarebbe stato estremamente più semplice comprendere la pura teoria. Infatti, nell'opera si evince che il testo grafico ha la stessa importanza di quello scritto poiché lo completa e consente al lettore di comprendere agevolmente la parte teorica. In particolare, il saggio si concentra sulla seconda parte, esaminando e descrivendo come effettuare la proiezione sulle superfici, di figure, dei corpi geometrici e dei volumi più elaborati. Tra i problemi affrontati ne citiamo alcuni più rappresentativi quali il computo di una colonna, di un capitello, del volume della volta e l'elaborazione architettonica della costruzione delle cupole o ancora problemi più articolati e spinosi come la rappresentazione e proiezione delle parti del corpo umano, tutte indagate cercando sempre un fondamento scientifico per la loro rappresentazione. È evidente che, procedendo nella lettura dei tre volumi, le difficoltà dei problemi prospettici sono progressive.

Delle tre parti delle quali è composto il trattato e che definiscono le tre componenti fondamentali della pittura (come detto: disegno, commensuratio e colorare), l'autore intende approfondire più dettagliatamente soltanto quella della commensuratione, «quale diciamo prospectiva», servendosi del disegno nella misura in cui esso è necessario a «dimostrare in opera essa prospectiva».

Egli esplicita chiaramente il significato del termine commensuratio, definendola testualmente: «Commensuratio diciamo essere essi profili et contorni proportionalmente posti nei luoghi loro» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro I, proemio, pag 81*), ovvero figure poste opportunamente secondo le regole della prospettiva, mantenendo le giuste proporzioni.

Inoltre, definisce i cinque elementi essenziali della commensuratio nei seguenti: l'occhio, la forma della cosa vista, la necessaria distanza tra la cosa e l'occhio, le linee che uniscono

l'occhio e gli estremi della cosa vista e, infine, il termine, ovvero il piano pittorico inteso come distanza di osservazione da cui dipende la riduzione prospettica. È stato notato, dallo storico dell'arte Carlo Bertelli, come Piero impieghi il termine prospettiva dopo *commensuratio* «che si riferisce alla proiezione geometrica sul piano ed è la latinizzazione del greco *symmetria* usato da Vitruvio» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Introduzione, pag 21*), per sottolineare la preminenza della rappresentazione geometrica sull'ottica. L'autore infatti non è interessato a discutere, nella sua opera, delle teorie dell'ottica e non entra nel merito della teoria fisica, asserendo tal parole: «de l'ochio, del quale non intendo tractare se non quanto fie necessario a la pictura». Egli evita di addentrarsi nella discussione riguardante la luce o i raggi visivi, non abbracciando alcuna delle due teorie che asseriscono rispettivamente che i raggi siano emanati dall'occhio stesso (secondo la teoria della recensione dell'Ottica euclidea di Teone di Alessandria) o se viceversa siano i corpi a mandare l'informazione visiva all'occhio. Naturalmente come sappiamo grazie alle moderne scoperte dovute agli studi di elettromagnetismo, siamo in grado di vedere gli oggetti perché la luce che li illumina viene riflessa dalla loro superficie, arriva ai nostri occhi e viene poi trasmessa al cervello come impulso elettrico, che la interpreta come immagine. Il processo coinvolge la riflessione della luce dagli oggetti, il suo attraversamento delle lenti dell'occhio (cornea e cristallino), la sua focalizzazione sulla retina che contiene le cellule fotorecetrici (coni e bastoncelli) e infine l'invio di segnali al cervello, che ricostruisce l'immagine finale. Piero Della Francesca però si concentrò sulla definizione dell'occhio che più gli interessava, quella che lo considerava semplicemente come “vertice” di ciò che modernamente chiamiamo “cono visuale”.

Ancora, nel servirsi di termini e nozioni proprie della geometria, egli le riformula adattandole ai propri scopi dimostrativi: «Puncto è la cui parte non è, secondo i geumetri dicono essere inmaginativo; la linea dicono avere lungheçça sença latitudine. Et perché questi non sono aparenti se none a l'intellecto et io dico tractare de prospectiva con demonstrationi, le quali voglio sieno comprese da l'ochio, perhò è necessario dare altra difinitione. Dirò adunqua puncto essere una cosa tanto picholina quanto è posibile ad ochio comprendere. Le line dico essere extensione da uno puncto ad un altro, la cui largheçça è de simile natura che è il puncto. Superficie dico essere largheçça et longheçça compresa da le linee» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro I, proemio, pag 83*). Dunque, nell'opera si rifiuta sia la rappresentazione puramente intellettuale propria della geometria sia l'approssimazione tecnica della pratica di bottega: le definizioni vengono date in modo tale da poter essere

comprese e sfruttate a livello pratico e le dimostrazioni, rigorosamente fondate su principi geometrici, in modo da poter essere «comprese da l'occhio».

Chiariti ormai i fondamenti geometrici della prospettiva, viene finalmente data una definizione di quest'ultima, ma solo nel libro III: «Dico che la prospectiva sona nel nome suo commo dire 'cose vedute da lungi, rapresentate socto certi dati termini con proportione, secondo la quantità de le distantie loro, sença de la quale non se pò alcuna cosa degradare giustamente'» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro III, proemio, pag 190*), spiegando dunque che non si può rappresentare correttamente un oggetto o una figura senza considerare la prospettiva, che tiene conto delle distanze e delle proporzioni e che rende possibile raffigurare correttamente gli oggetti che appaiono "degradati" (cioè rimpiccioliti, in quanto osservati da lontano).

Entrando più nel dettaglio illustriamo brevemente il contenuto del primo libro. Piero ivi fornisce un elenco di trenta proposizioni sostanziali per poter argomentare la teoria della prospettiva.

Nelle prime undici proposizioni si ispira ai teoremi fondamentali dell'ottica, li riprende e ne trae materiale di analisi per la propria disquisizione, inoltre illustra i concetti di similitudine e proporzione geometrica. Dopodichè nella proposizione 12 troviamo il fulcro di tutto il suo lavoro teorico: la "proportione degradata". Sebbene sia l'unica priva di illustrazioni, risulta essere il caposaldo sul quale si costruisce tutta la teoria e si poggiano tutte le successive deduzioni e dimostrazioni, nonché gli enunciati che si susseguono. Questa proposizione viene definita a buon diritto il Teorema Fondamentale del *De Prospectiva Pingendi*. In essa si introduce la nozione di "degradazione prospettica" per la quale è necessario ricorrere a un particolare tipo di proporzione: «Per insine a qui ò decto de la proportione de le linee et de le superficie non degradate, et commo le diagonali devidano le superficie quadrilatera in do parti equali, et tucte le divisioni facte inn esse superficie da linee equidistanti sono in proportione. Et hora, perché voglo dire de le linee et superficie degradate, è necesario essa proportione dimostrare, perché, quando dico proportionalmente, che 'proportione' intendo». La formulazione latina di quest'ultima frase può risultare più chiara: «Nunc vero, cum de lineis ac superficiebus degradatis dicendum sit, opus est ipsam demonstrare proportionem, ut intelligatur quid velim cum proportionaliter dicam» e si traduce come: «Ora però, dovendo parlare di linee e superfici degradate, è necessario dimostrare la proporzione stessa, affinché si comprenda cosa intendo dicendo 'proporzionalmente'». La "proportione degradata" non è definita da un rapporto numerico fisso: «ma dico essere proportione degradata, non commo

4, 8, 12, 15, né commo 6, 9, 11, 12, ma è secondo la distantia da l'occhio al termine dove se mette le cose degradate et la distantia dal termine a la cosa veduta. [...]. Dunqua, mutando termine, se muta proportione» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro I, Prop. 11, pag 96*).

A partire dalla suddetta proposizione se ne susseguono diciotto di carattere prettamente pratico: Piero espone una serie di esercizi prospettici sulle superfici piane in ordine di difficoltà crescente, dalla griglia pavimentale ad alcuni poligoni regolari (triangolo, ottagono, esadecagono, esagono, pentagono), dalla sottrazione o aggiunta di superfici da un quadrato, fino alla definizione del perimetro di un edificio a base quadrata e di uno a base ottagonale, che saranno ripresi nel secondo libro.

Infine, l'ultima proposizione del libro I si rivolge a coloro che giudicano «per ingnorança» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro I, Prop. 30, pag 135*) la prospettiva, affermando che essa non sia una vera scienza. Infatti, a suo avviso, costoro non hanno compreso la complessità della tecnica di proiezione, né tantomeno quale sia la corretta rappresentazione al variare della distanza tra l'occhio e il termine e dunque al variare dell'angolo visuale («questo adiviene per non intendere la distantia che vole essere da l'occhio al termine dove se pongono le cose, né quanto l'occhio può in sé ampliare l'angolo con li suoi raggi» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro I, Prop. 30, pag 135*)). Egli esibisce una dimostrazione che affronta il problema delle aberrazioni marginali, stabilendo che l'occhio deve rimanere fisso nel termine e che il rapporto ideale tra l'occhio e il termine è di due terzi di angolo retto, ovvero sottolineando l'importanza del calcolo esatto che consente di ottenere la corretta rappresentazione.

Il secondo libro si apre con un breve proemio in cui Piero definisce i corpi (gli oggetti) come 'i solidi', specificando che «Corpo ha in sé tre demensioni: longitudine, latitudine et altitudine» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro II, Proemio, pag 139*) per poi presentare alcuni esercizi nei quali, utilizzando come basi figure costruite nel primo libro, insegna a porre le altezze e le profondità sul piano prospettico servendosi di una retta che unisce l'altezza non degradata dei corpi con il 'punto A', «perché ho posto A essere l'occhio nel termine suo» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro II, Es.2, pag 142-143*).

Come già nel primo libro, si procede dai corpi più semplici alle figure più complesse, dal cubo della prima proposizione ad un edificio a base quadrata, al tempio con base ottagonale, alla volta a crociera. L'ultima dimostrazione affronta il problema dell'aberrazione prospettica marginale di un colonnato: egli conclude che, se le colonne marginali nel disegno prospettico

appaiono più grandi delle centrali, con un'evidente contraddizione rispetto alla realtà visiva nella quale ovviamente tutte le colonne hanno la stessa dimensione, non si deve correggerle, perché la dimostrazione matematica assicura della correttezza di tale risultato.

Nel terzo libro Piero, dopo aver riaffermato il valore della prospettiva come vera scienza, e anzi proponendone la definizione che si è già riportata, cambia il procedimento di costruzione: «Ma perché hora in questo terço intendo tractare de le degradationi de' corpi compresi da diverse superficie et diversamente posti, però avendo a tractare de corpi più deficali, piglarò altra via et altro modo nelle loro degradationi, che nonn ò facto nelle demonstrationi passate; ma nello effecto sirà una cosa medesima e quello che fa l'uno fa l'altro. Ma per due cagioni mutarò l'ordine passato: l'uno è perché sirà più facile nel dimostrare et nello intendere; l'altro sì è per la gran multitudine de linee, che in essi corpi bisognaria de fare seguendo il modo primo, sì che l'occhio et l'intellecto abaglaria in esse linee, sença le quali tali corpi non se possono in perfetione degradare, né sença gran deficultà. Però piglarò questo altro modo, col quale porrò parte per parte dimostrare le degradationi, nel qual modo, commo dissi nel principio del primo, è necesario intendere quello che l'omo vuol fare et quello sapere ponere in propria forma sopra del piano» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro III, pag 191*). Dunque, ribadendo che la capacità di delineare le figure è condizione necessaria per poter operare la loro riduzione prospettica, Piero espone il metodo per pianta e alzato² di cui offre la prima codificazione scritta. Nella prima proposizione del libro III, egli dimostra come la figura del quadrato in scorcio ottenuta sia la medesima del primo libro. Procedendo ancora per gradi, si arriva ai complessi esercizi sul mazzocchio³, sul basamento della colonna, sul capitello, sulla testa posta perpendicolarmente al piano e inclinata, sul catino a lacunari che occupano nella metodica e necessariamente ripetitiva scansione del procedimento oltre la metà del trattato. Il metodo indicato consiste, dopo aver disegnato la figura in pianta («largheçça») e in alzato («alteçça»), nel fissare il punto di vista (O), in cui viene posto un ago con filo sottile (Piero suggerisce un pelo di coda di cavallo); poi si traccia una linea parallela al piano che costituisce il termine, dove verranno poste le righe (una di legno per la larghezza e due di carta per l'altezza). Posizionata la riga sul termine, si tira il filo sino al punto da riportare sulla riga stessa e dove il filo tocca (bacte) la riga si segna il

² In architettura, il metodo consiste nel disegnare le viste di un oggetto o, meglio, un edificio, dall'alto (pianta) e ortogonali su un piano verticale (alzato o prospetto), usando un piano di sezione immaginario che taglia l'edificio per la pianta e usando proiezioni ortogonali per l'alzato.

³ Si tratta di un solido geometrico, un anello poligonale, spesso a sezione esagonale o ottagonale, costituito da una serie di prismi uniti tra loro.

punto. Piero stesso con puntigliosa attenzione terminologica, precisa: «Sempre, quando dico poni o mecti o tira o mena, se intende su la linea, et quando dico ba[cte], se intende su la riga» (*De Prospectiva Pingendi a cura di Chiara Gizzi, Libro III, pag 237*). L'operazione viene ripetuta per ciascuna sezione in cui l'oggetto è scomposto, cui sono sempre associate una riga per la larghezza e due per l'altezza. Riportati tutti i punti (o almeno quelli considerati necessari) sulle righe, si mette in opera la costruzione prospettica, tracciando di nuovo la linea posta come termine, su cui vengono tirate tre ortogonali, due all'estremità e una al centro. Agli estremi della linea si pongono le righe di carta, mentre la riga di legno viene fatta scorrere sui corrispondenti segni delle righe di carta, dove «combascia» si segnano ordinatamente i punti che, uniti tra loro, ricostruiranno la figura. Se il procedimento è agevole per le prime semplici figure, diventa notevolmente più difficile da seguire per il capitello o le teste.

Le ultime tre proposizioni del trattato riguardano problemi di «prospettiva illusoria di tipo anamorfico». Si mostra così come scorciare una sfera posta su un piano, una coppa per tenere in fresco le bevande (un renfrescatoio) posizionato sopra una tavola dipinta e un anello appeso al soffitto.

Terminata la costruzione dell'anello, il testo si interrompe. L'opera non ha alcuna parte conclusiva, così come del resto non vi è una parte introduttiva. Termina così come comincia, analizzando la questione della prospettiva in modo analitico, formale e disadorno.

Focalizzandoci sui punti essenziali possiamo riassumere il contenuto dell'opera in questo modo: in essa vengono fornite discorsivamente tutta una serie di definizioni, proposizioni ed in fine istruzioni da eseguire per poter ottenere le proiezioni di oggetti di varia natura in prospettiva, in modo corretto e coerente con il mantenimento delle giuste proporzioni degli oggetti stessi.

Presenti solamente nel manoscritto autografo e nei codici latini, compaiono in chiusura due componimenti encomiastici in latino a mo' di epilogo. In essi il nome e la gloria di Piero sono legati a Sansepolcro nel segno della lunga fedeltà alla città natale del pictor Burgensis.

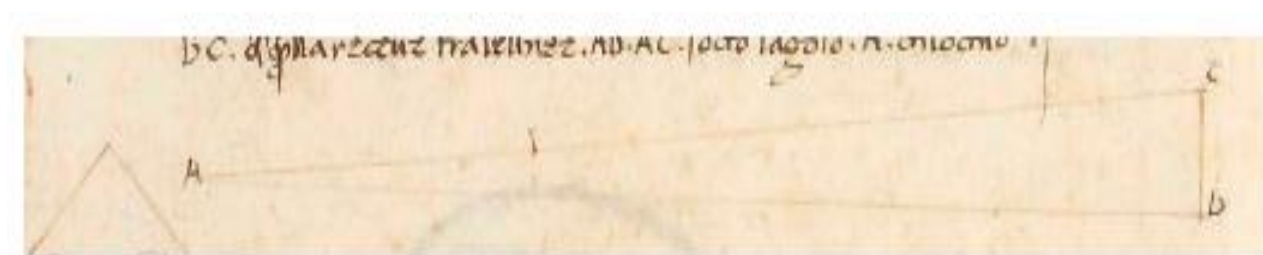
3.3 Il Libro I del De Prospectiva Pingendi

Andremo ora ad analizzare con maggiore dettaglio le parti più interessanti del *De Prospectiva pingendi*. Come già esplicitato, il Libro I raccoglie trenta proposizioni, delle quali le prime dodici sono sostanziali per illustrare, chiarire e comprendere i metodi utilizzati per eseguire le proiezioni dalle più semplici alle più complesse. Ivi di seguito le esporremo in un elenco al quale verranno annesse delle brevi spiegazioni ed altresì le rappresentazioni grafiche originali dell'opera di Piero della Francesca. Le immagini che allegheremo appartengono al manoscritto di Parma, 1576 (Biblioteca Palatina, Parma); esse sono riprodotte su concessione del Ministero dei Beni e delle Attività Culturali e del Turismo (prot. 1642 del 09.06.2015).

Proposizioni

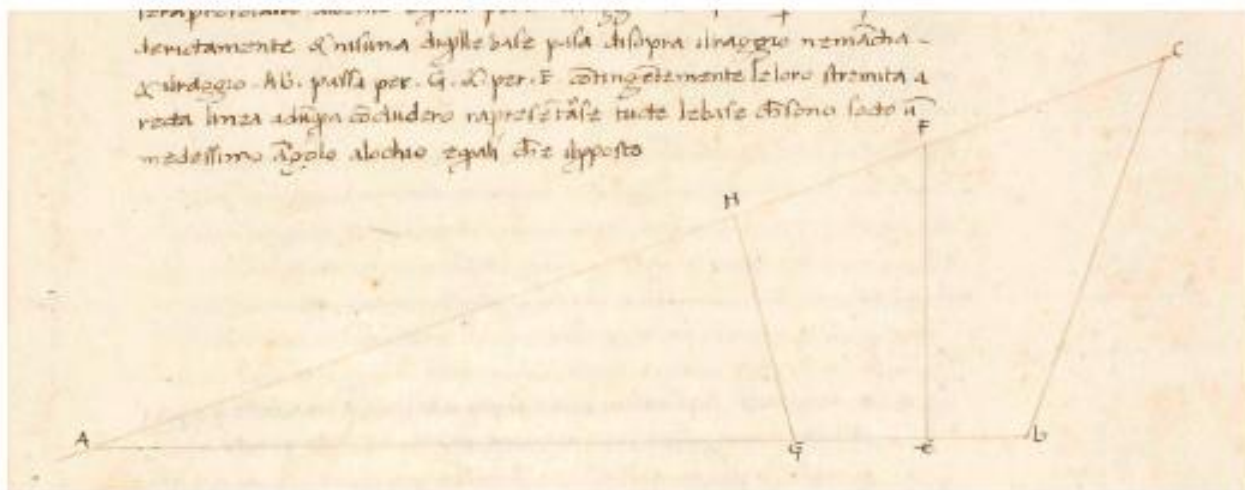
[I] *Omne quantà se rapresenta socto angolo nell'ochio.*

Tutto ciò che possiamo osservare attraverso la vista è contenuto all'interno di un cono visivo generato da un angolo visuale al quale designiamo la lettera A.



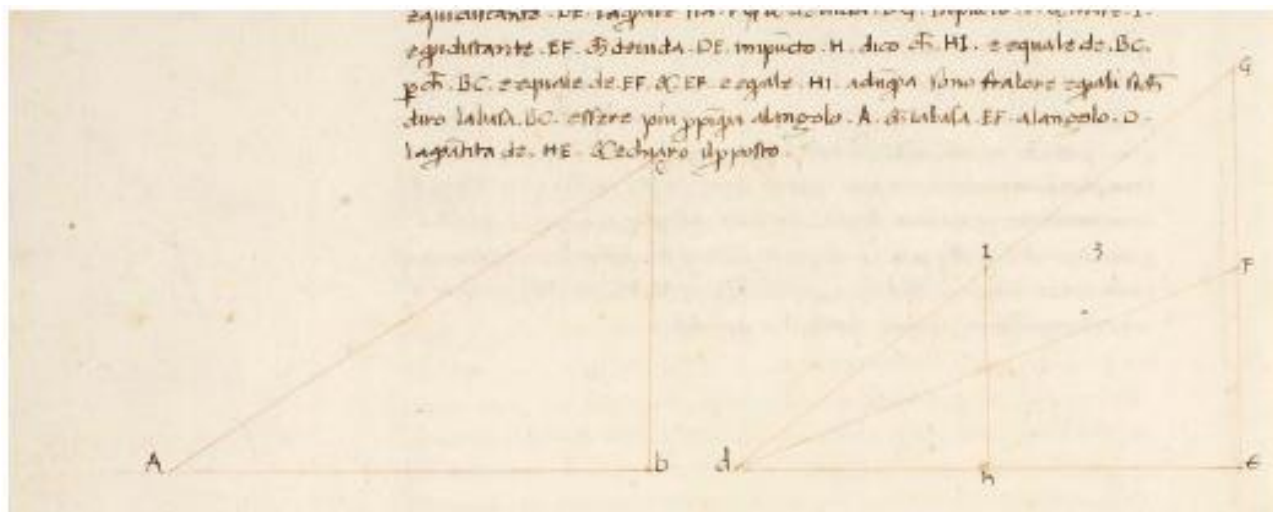
[II] *Tucte le base vedute socto uno medesimo angolo, ben che le sieno diversamente poste, s'apresentano a l'ochio equali.*

Rette qualsiasi che tagliano il cono visuale definiscono segmenti, interni al cono stesso, di diversa lunghezza e non paralleli tra loro che, in prospettiva, vengono percepiti tutti uguali dal nostro occhio.



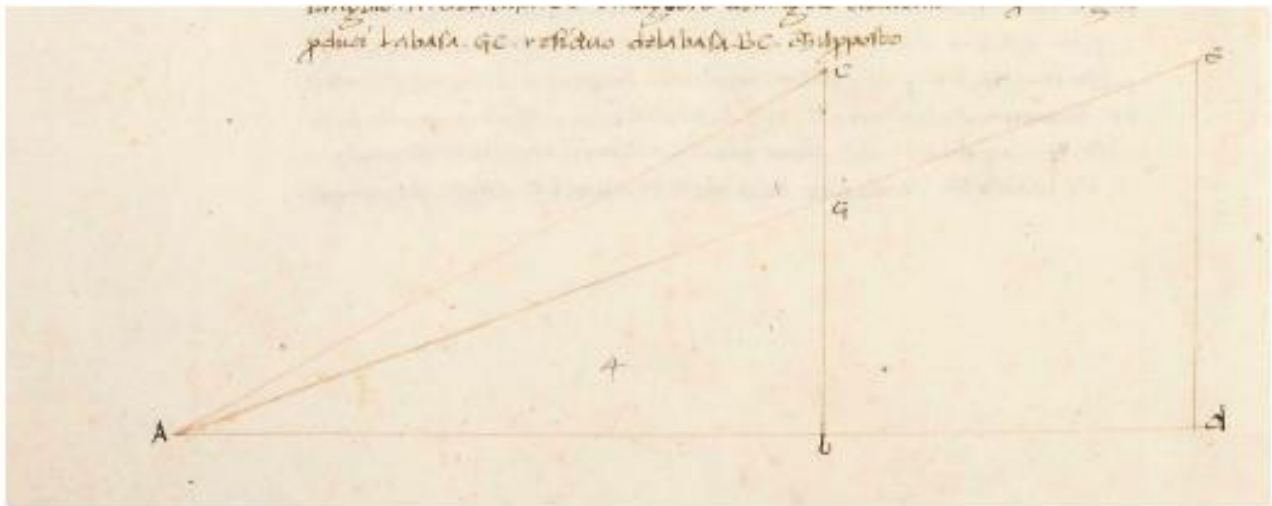
[III] *Se più base fossero a l'angolo loro oposte orthogonalmente, quella che s'apresenta sotto maggiore angolo o ella è maggiore o ella è a l'angolo più propinqua.*

Tra tutti i possibili segmenti interni al cono visivo, che chiamiamo 'basi', la maggiore è quella sottesa dall'angolo maggiore.



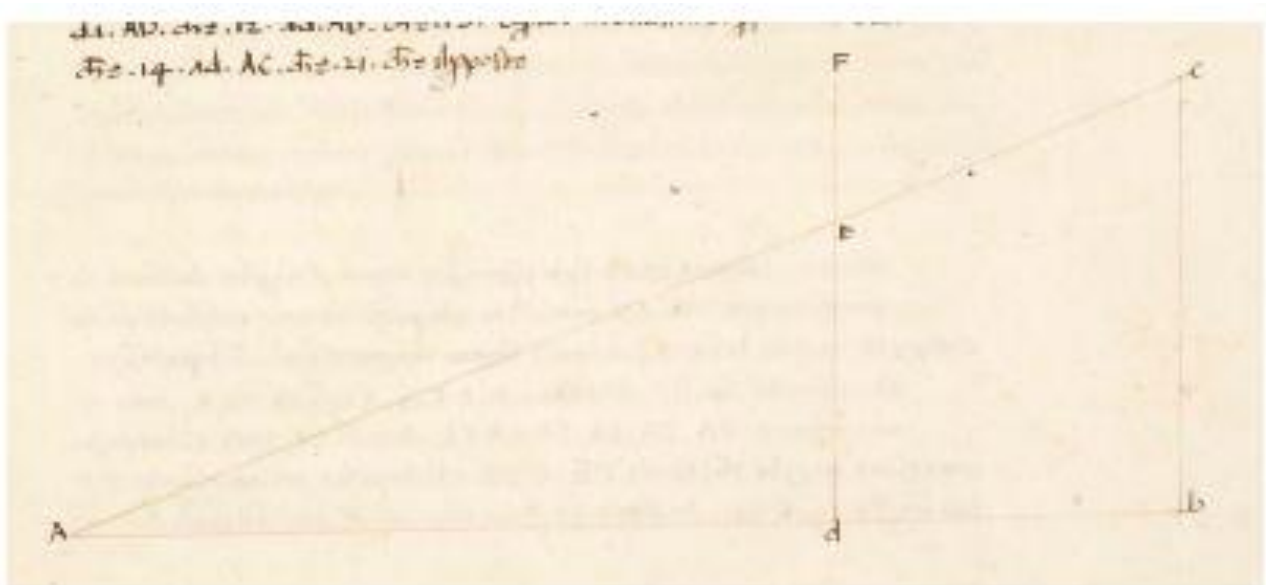
[IV] *Se da un puncto se partissero linee sopra a do base equali et una fusse più propinqua che l'altra, la più propinqua farà maggiore angolo nel dicto puncto.*

Siano dati due segmenti paralleli e congruenti BC e DE, perpendicolari ad una retta per AD. Congiunti gli estremi dei segmenti al punto A si otterrà un angolo in A maggiore a partire dal segmento più vicino ad esso.



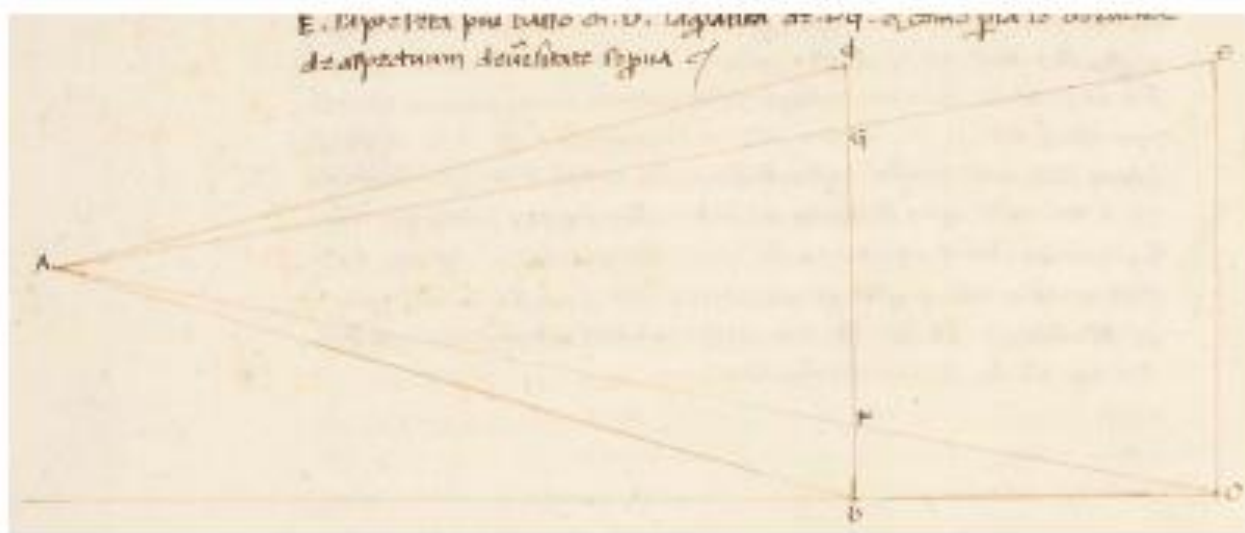
[V] *Se da un punto se partisero do linee recte sopra ad una basa et sopra di quelle venisse un'altra linea equidistante a la basa e fusse a quella equale, deviderà sè e quelle due in una medesima proportion, et quella parte de la line sopra venuta che infra le duo linee è interchiusa sirà colla basa in quella proportion che le linee intere colle loro parti terminate al puncto.*

Siano dati due segmenti paralleli e congruenti BC e DF, perpendicolari ad una retta per AB. Si tracci AC ottenendo il punto E di intersezione con DF. Si otterranno due triangoli rettangoli ADE e CEF simili, i cui lati sono naturalmente in proporzione.



[VI] *Se fussero do linee equali perpendiculare sopra ad una linea et fussero equidistante, et da un punto se partissaro do linee et audassaro a l'exstremità de la più propinqua et due altre a l'estremità de la più remota, dico che, se l'estremità de socto sono soctoposte al puncto, che l'estremità de socto de la più remota se representarà al puncto più levata che la stremità de socto de la più propinqua et, se la stremità de sopra soprastanno al puncto, quella de la più remota s'apresentarà più basso.*

Siano dati due segmenti paralleli e congruenti BD e CE, perpendicolari ad una retta per AB e si congiungano i loro estremi ad un punto dato A. Si otterranno i punti G ed F di intersezione del segmento BD con le rette AE ed AC. Si avrà che F ha altezza maggiore di B e dunque anche di C. Analogamente si avrà che G ha altezza minore di D ovvero di E.



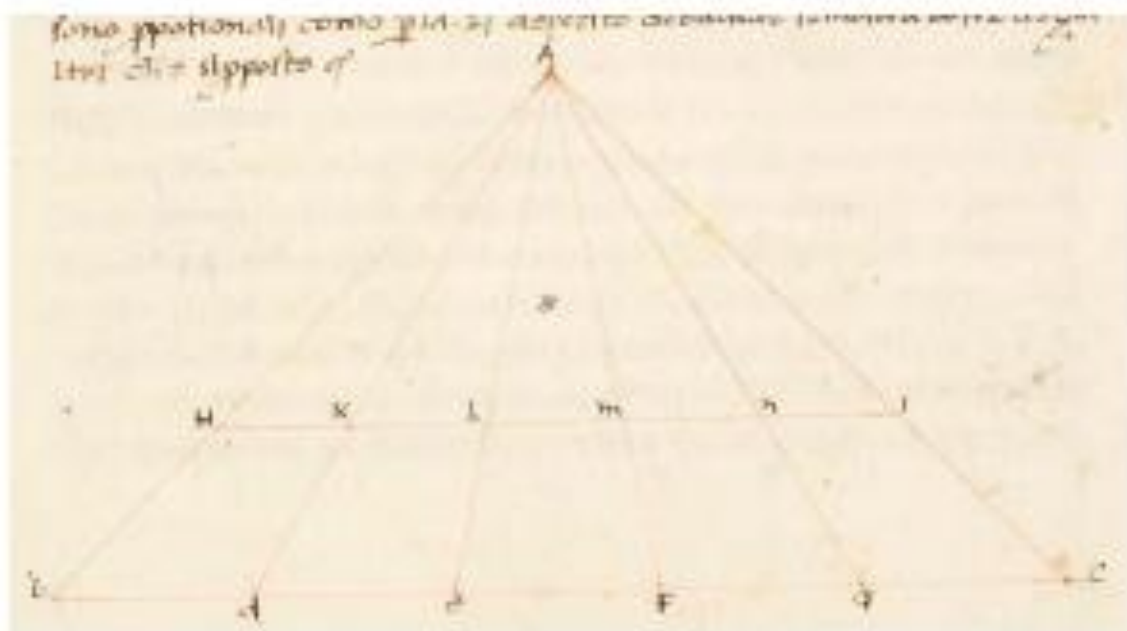
[VII] *Se fusse la linea recta in più parti equale devisa, et da quelle divisioni se partissero più line el terminassaro ad un puncto, farano nel dicto puncto deseguali angoli, le linee più brievi farano maggiore angolo che le più lunghe.*

Sia data una retta per BC divisa in parti uguali dai punti D, E, F, G. Si congiungano tali punti ad un punto dato A non appartenente alla retta. Si avrà che gli angoli di ampiezza maggiore saranno quelli definiti dai segmenti congiungenti di lunghezza minore, ovvero dai triangoli aventi per base il segmento su AB più vicino al punto A. L'immagine a pagina successiva.



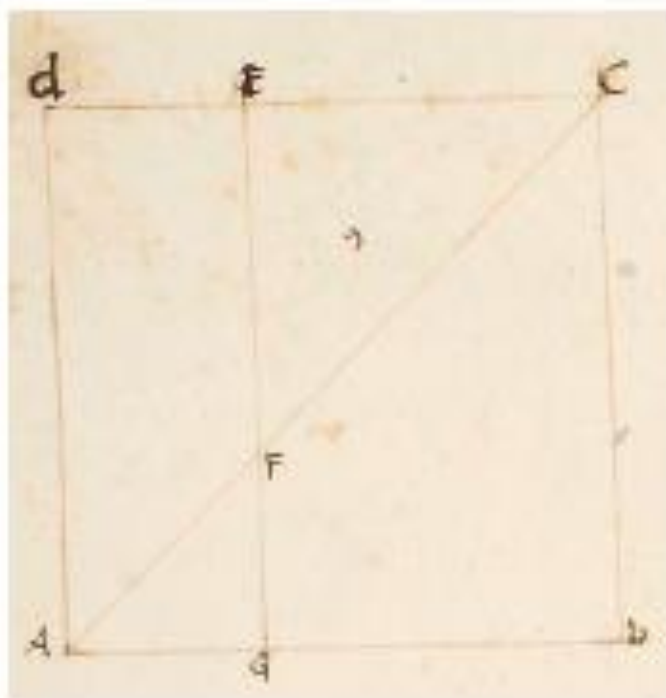
[VIII] *Sopra a la recta linea data in più parti devisa, se un'altra linea equidistante a quella se mena et da le divisioni de la prima se tira linee che terminino ad un puncto, devideranno la equidistante in una proportionione che è la linea data.*

Sia data la figura precedente. Si tracci una parallela HI a BC. Si otterranno i punti di intersezione H, K, L, M, N, I e segmenti corrispondenti proporzionali: HK proporzionale a BD ecc.



[IX] *Se nella superficie quadrilatera la diagonale se tira, quella deviderà la superficie in do parti equali, et se equidistante dai lati altre linee si mena, deviderà la diagona con doi lati et sè in una proportione.*

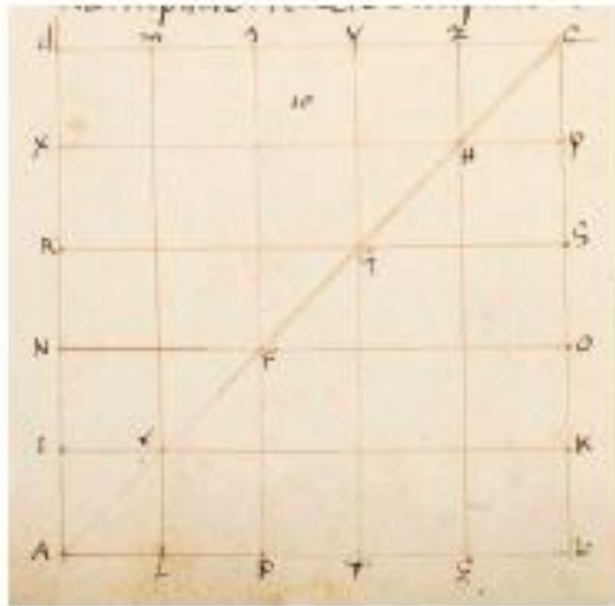
La diagonale di un quadrato lo divide in due parti congruenti. Tracciando la parallela ad uno dei lati, questa intersecherà la diagonale in un punto F e definirà due triangoli rettangoli simili con i lati proporzionali.



[X] *Se nella superficie quadrata de equali lati et angoli equali la linea diagonale se mena, la quale se devida in più parti equali, et da quelle parti se meni linee equidistante ai quatro lati de la superficie, deviderà quella in superficie simili.*

Si divida il quadrato in parti uguali tramite quattro parallele e quattro perpendicolari rispettivamente equidistanti tra loro. Tracciando la diagonale del quadrato essa lo dividerà in triangoli simili.

L'immagine della suddetta è nella pagina successiva.



[XI] Quando fusse uno quadrilatero che fusse in più parti diviso non equali, et da quelle parti se menassero linee equidistante ai lati et dagli angoli se menasse la diagonale, deviderà quelle in proportion; et se da quelle divisioni se menassero linee per lo traverso che fussero equidistante, produrieno superficie proportionali fra loro.

Seppure il quadrato fosse diviso in parti non uguali, la sua diagonale lo dividerebbe in parti proporzionali.



[XII] *Da l'ochio dato, nel termine posto, il piano asignato degradare.*

Considerato un punto di vista A assegnato, riprodurre il piano dato in dimensione ridotta seguendo le regole della proiezione in prospettiva.

Sebbene sia l'unica proposizione senza figura allegata (nei svariati manoscritti a noi pervenuti), ne riportiamo l'immagine appartenente al manoscritto di Parma, 1576 (Biblioteca Palatina, Parma). Attraverso questa proposizione inizia il primo vero lavoro di prospettiva. Ivi viene descritto e spiegato il metodo attraverso il quale poter ottenere i risultati desiderati e poter quindi rappresentare in prospettiva dapprima qualunque superficie ed in seguito, in modo più complesso, anche qualsiasi solido. A partire dalla suddetta proposizione, infatti, Piero Della Francesca esibirà una serie di applicazioni in tutte le successive. Questo viene considerato pertanto il Teorema Fondamentale del *De Prospectiva Pingendi*, e lo approfondiremo nella prossima sezione dedicandogli la meritata attenzione.

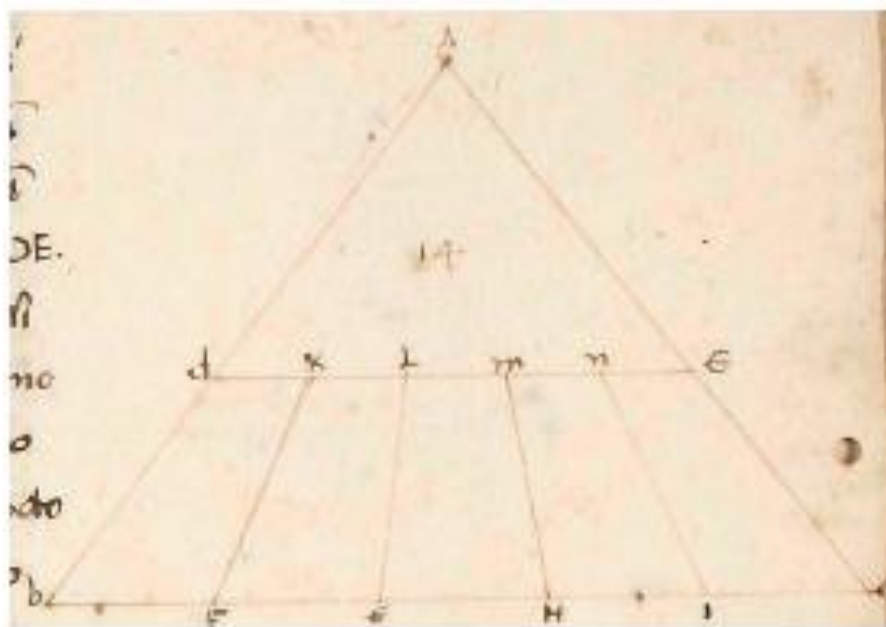


Di seguito seguiamo con l'elencazione delle successive proposizioni sino all'ultima.

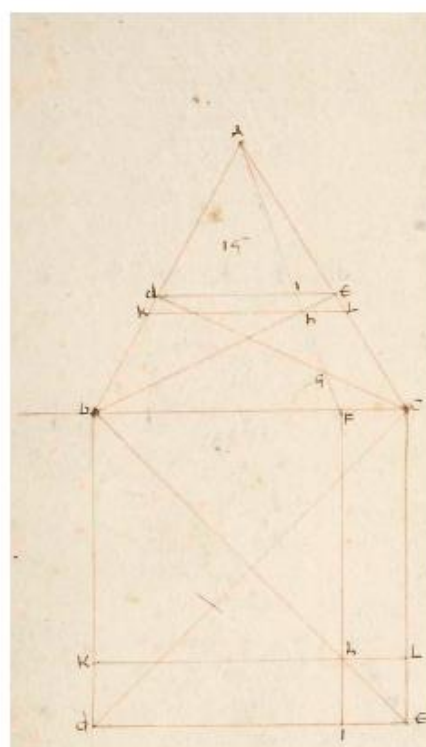
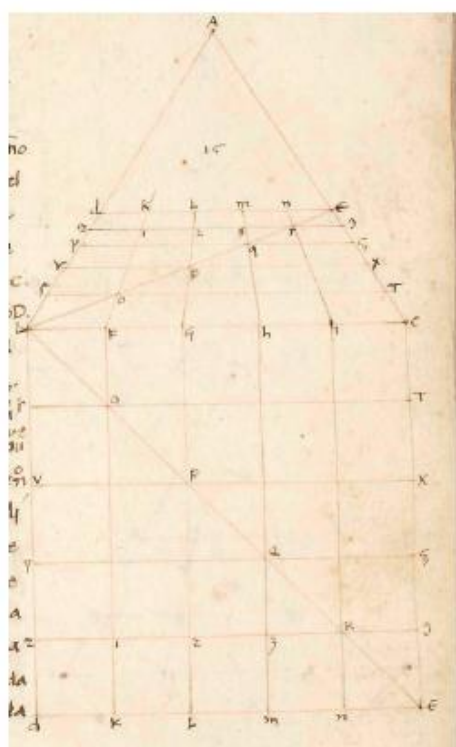
[XIII] *Il piano degradato in quadro ridurre.*



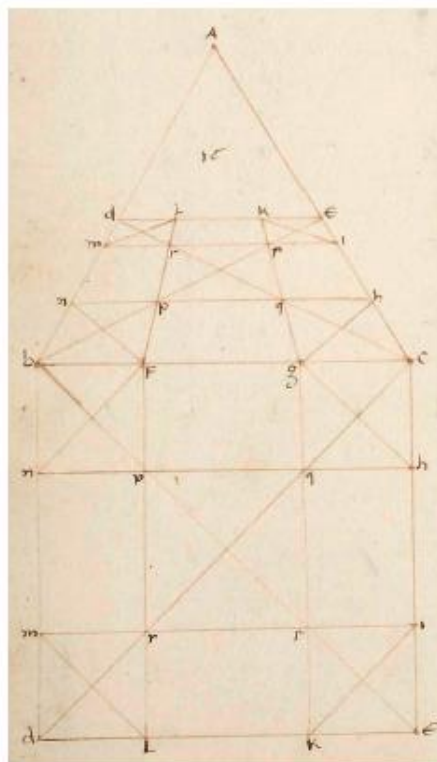
[XIV] *La figura quadrata degradata in più parti equali devidere.*



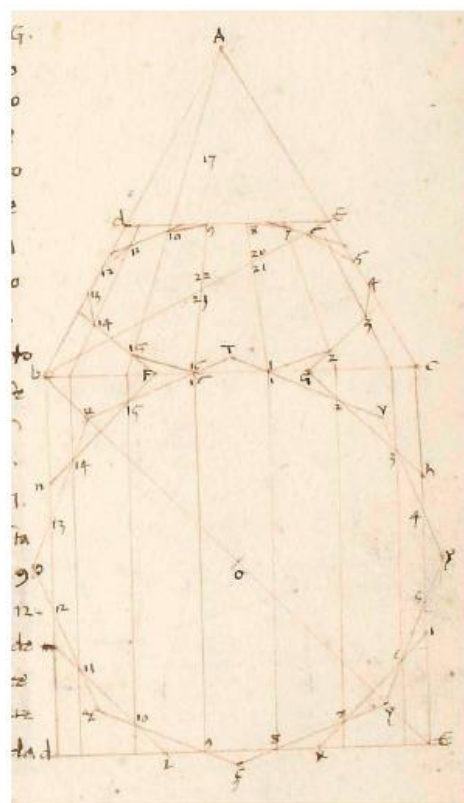
[XV] *La superficie quadrata deminuita, in più parti equali devisa, quelle devisionsi in quadrati produrre.*



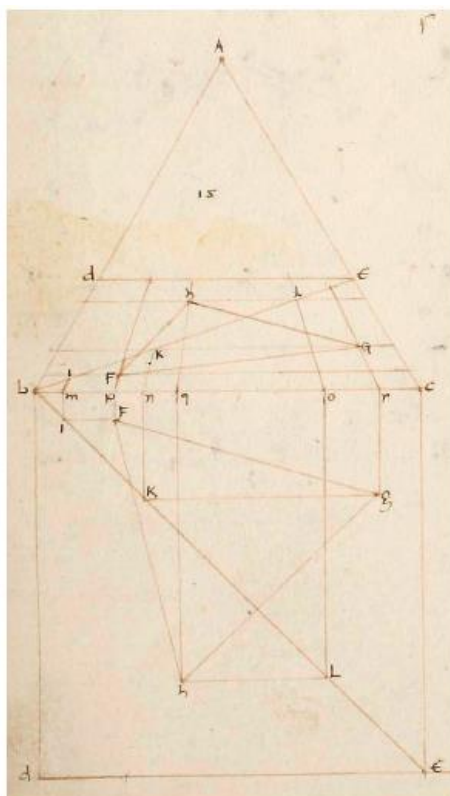
[XVI] *La superficie quadrata degradata octangola reducirere.*



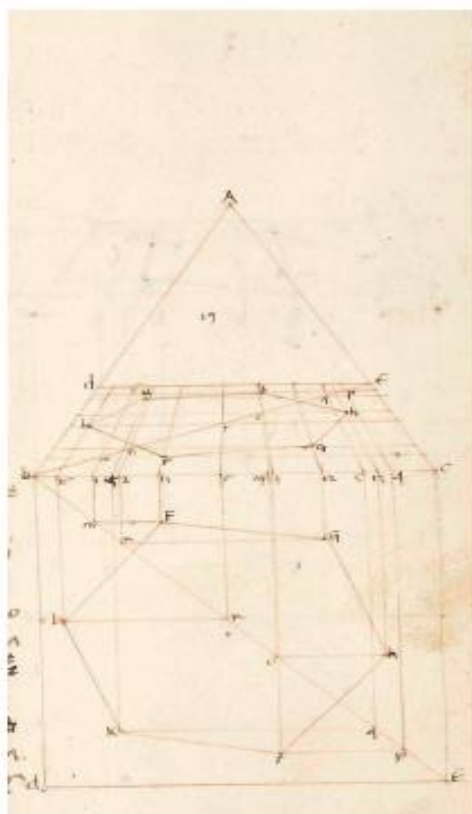
[XVII] *La figura de octo facce degradata in sedici reducirere.*



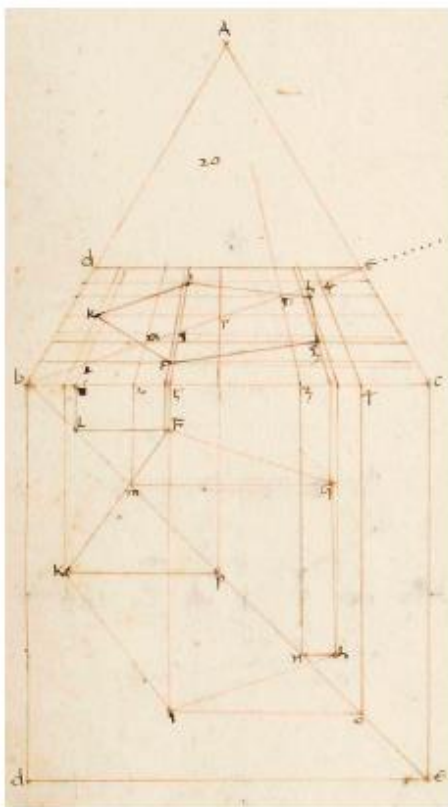
[XVIII] *Sopra del piano quadrato degrada[to] triangolo equilatero dato conlocare.*



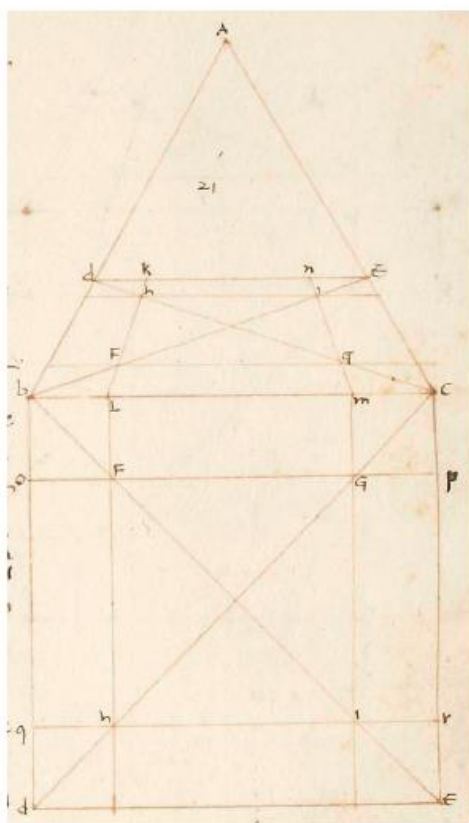
[XIX] *Nel piano quadrilatero degradato lo exagono equilatero lineare.*



[XX] *Nel piano degradato la superficie del pentagono equilatero descrivere.*

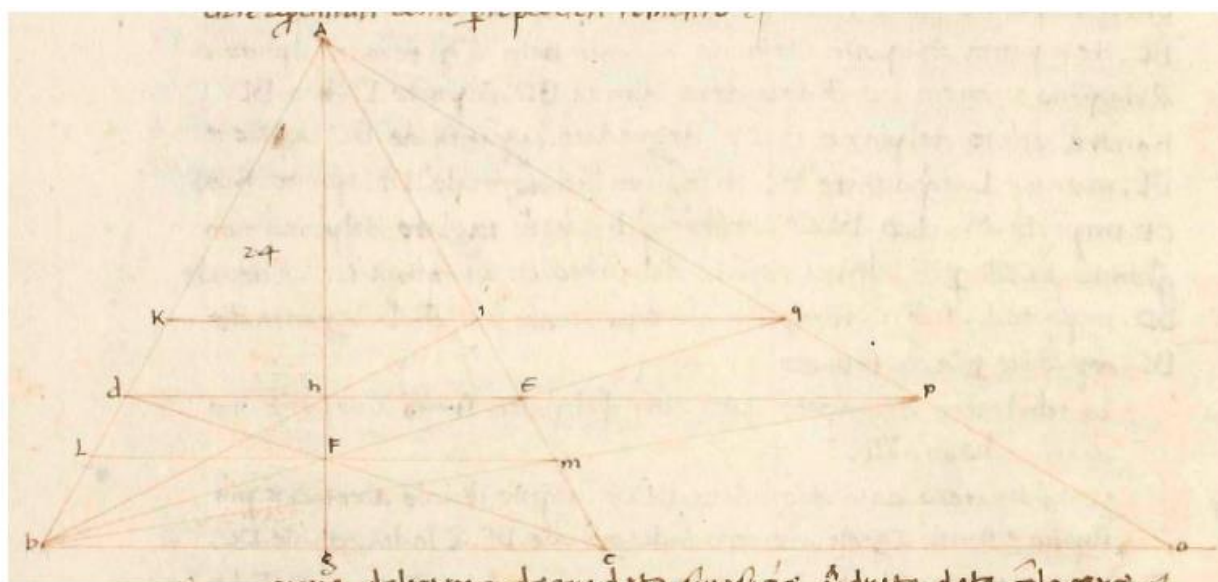


[XXI] *Della superficie quadrata degradata la quantità data attorno deminuire.*

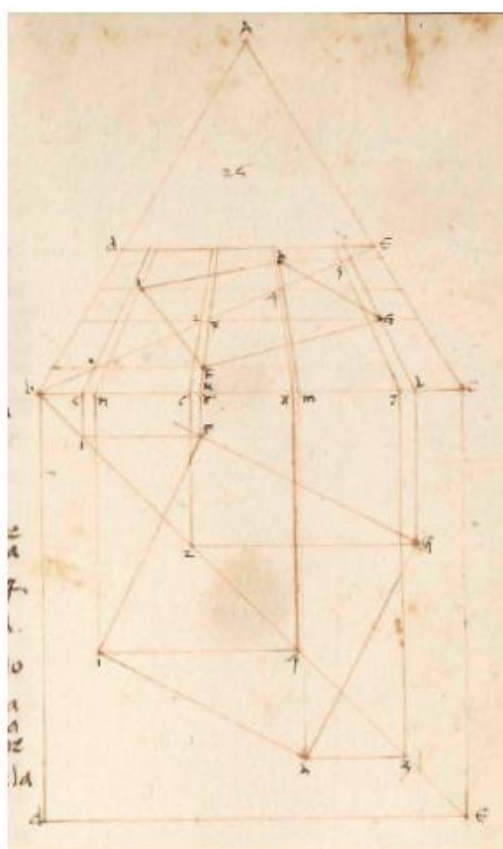


[illegible]

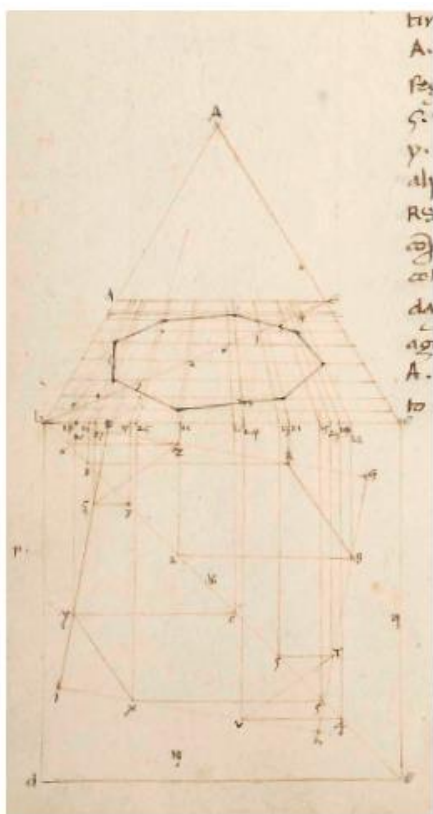
[XXIV] *Al quadrilatero degradato dato altri quadrilateri simili acrescere mediante le diagonali.*



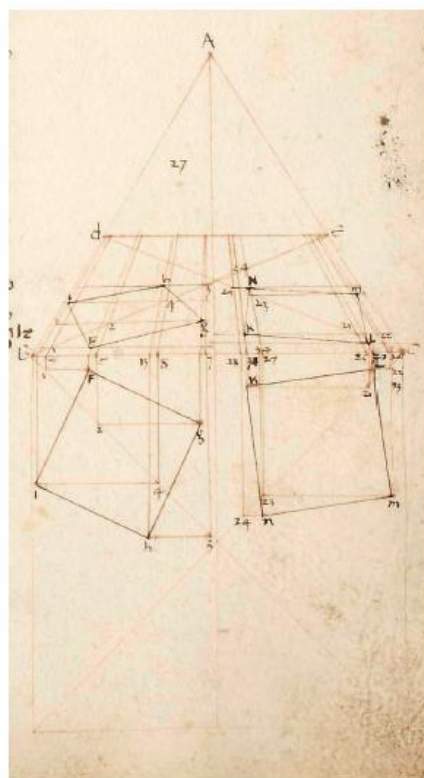
[XXV] *Sopra del piano degradato, superficie quadrata data conlocare.*



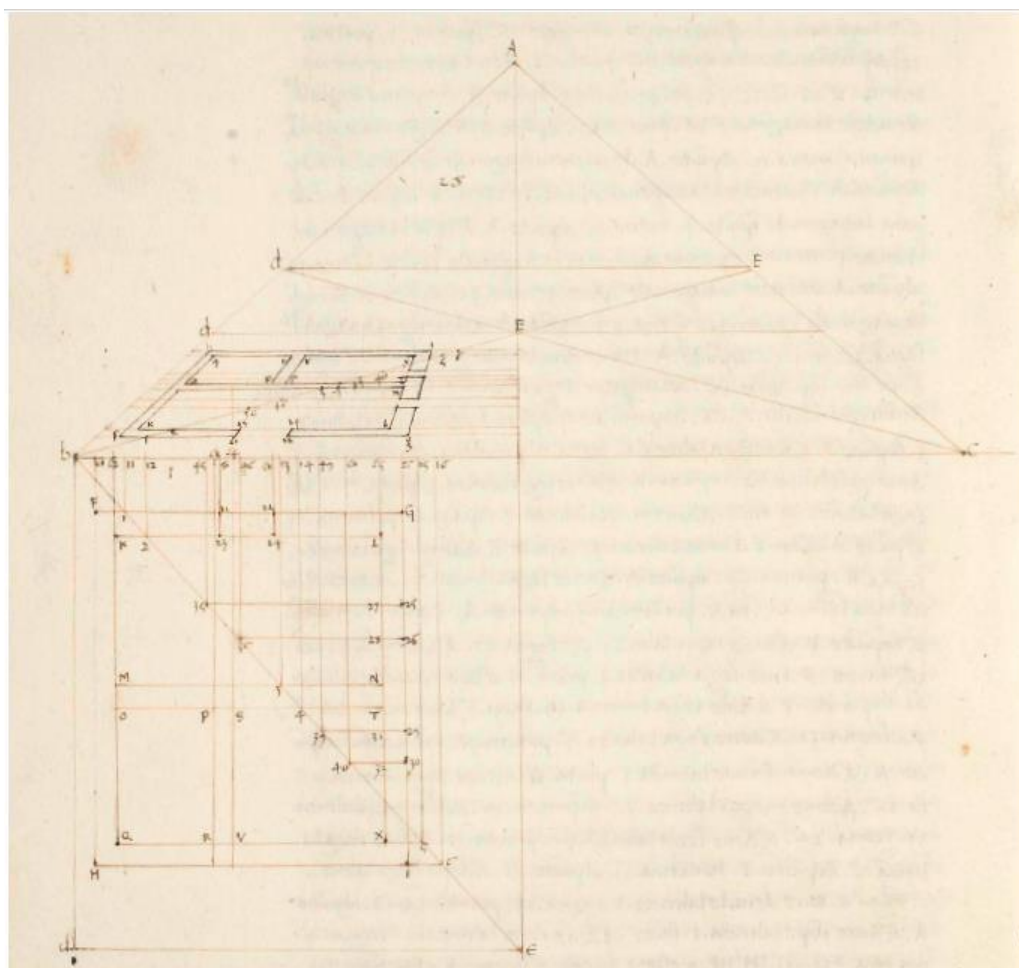
[XXVI] *Nel piano degradato lo octangolo dato designare.*



[XXVII] *Nel piano degradato più superficie quadrate date ponare.*

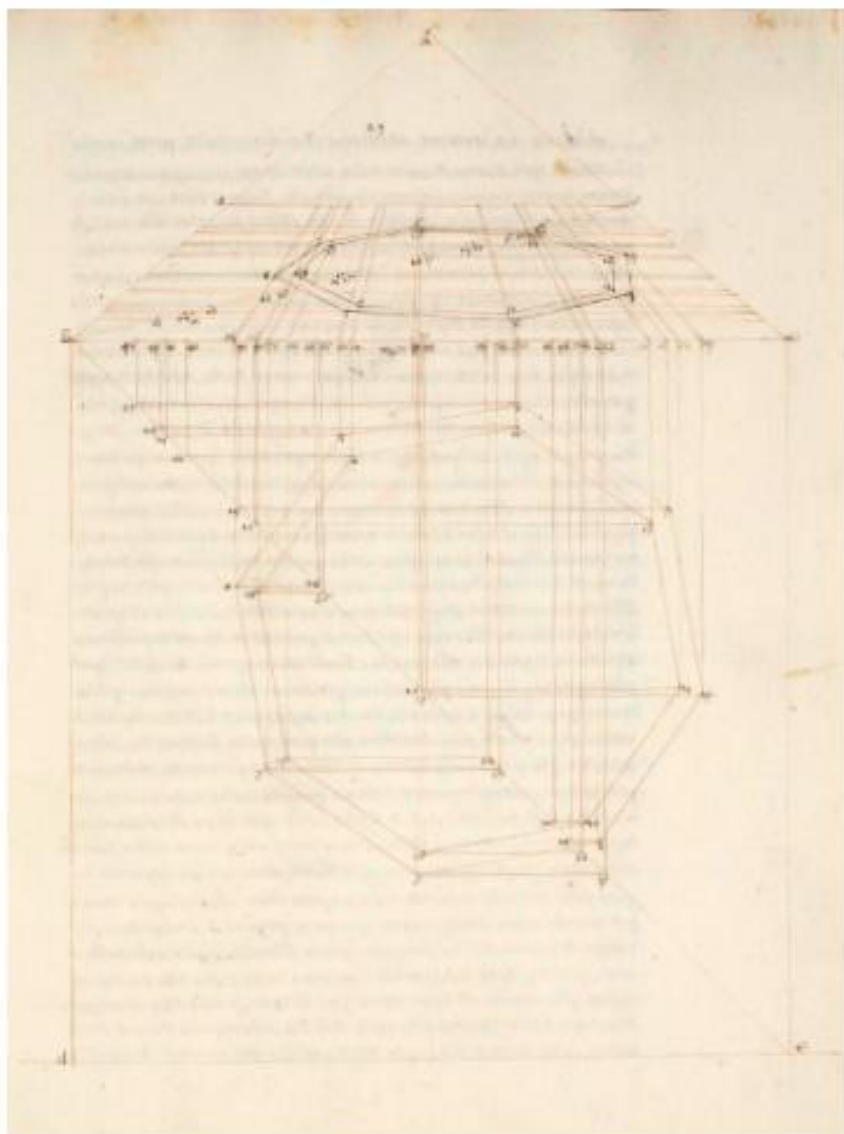


[XXVIII] *Sopra del piano degradato il circuito fondamentale de uno edefitio quadrato dato conlocare.*



[XXIX] *Nel piano degradato la superficie de fondamente de uno edefitio de octo face dato degradare.*

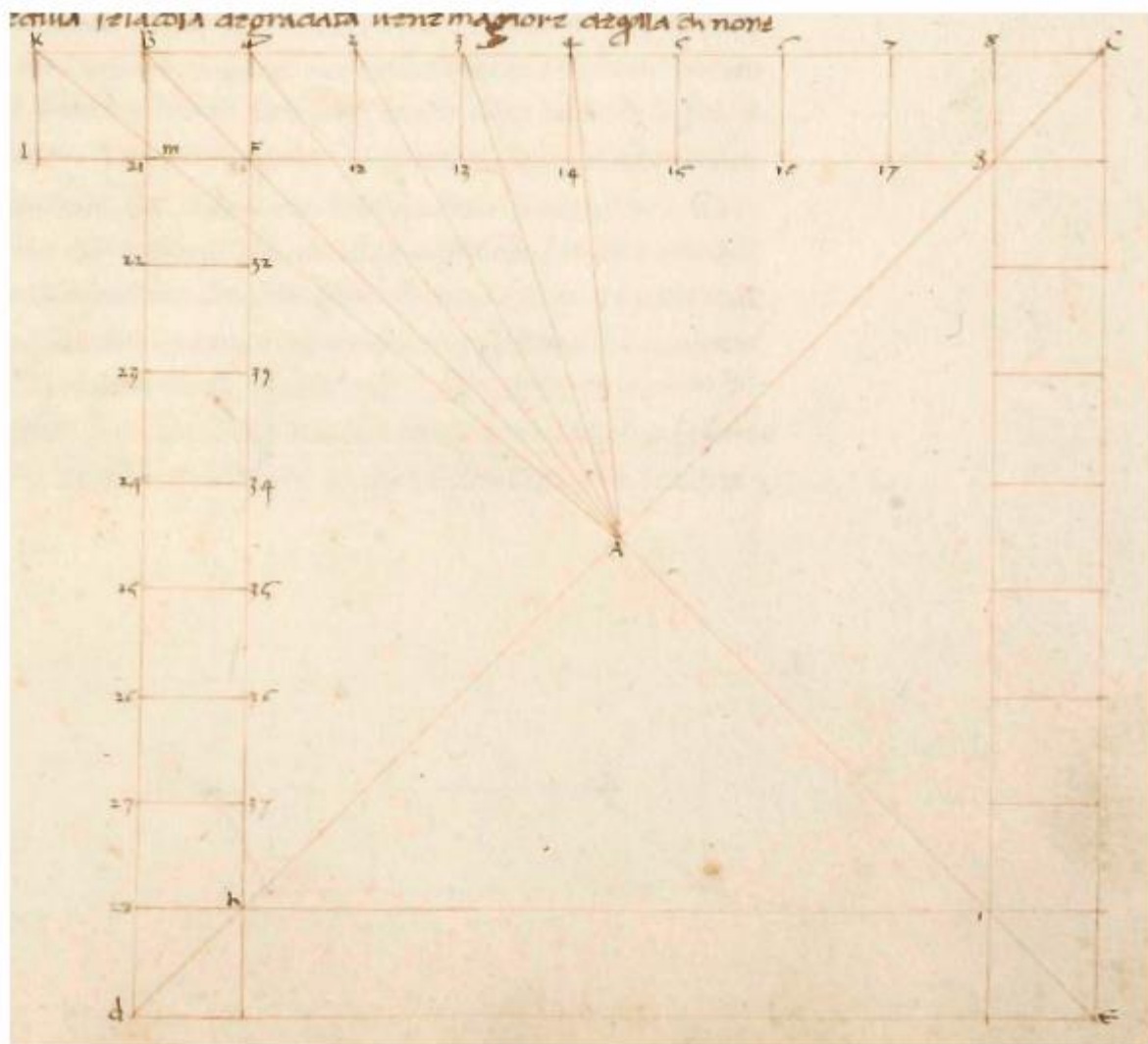
La figura corrispondente alla seguente proposizione viene riportata nella pagina successiva per preservarne la possibilità di mantenere una buona leggibilità



[XXX] *Per levare via l'errore ad alchuni, che non sono molti periti in questa scienza, quali dicono che molte volte nel devidere loro il piano degradato a bracci, li vene maggiore lo scurto⁴ che non fa quello che non è scurto; et questo adiviene per non intendere la distantia che vole essere da l'occhio al termine dove se pongono le cose, nè quanto l'occhio può in sè ampliare l'angolo con li suoi raggi; si che stanno in dubitatione la prospectiva non essere vera scientia, giudicando il falso per ingnoranza. Perhò è necessaria de fare una demonstratione della vera distantia et quanto se può l'angolo ampliare nell'occhio, acciò che s'anulli la loro dubitanza.*

⁴ Scorcio o scurzo, termini che indicano un punto di vista obliquo o una veduta ravvicinata e ridotta, spesso in pittura, per rappresentare un oggetto.

In questa ultima proposizione del Libro I Piero Della Francesca intende dissuadere coloro che non reputino la prospettiva una vera scienza: per correggere gli inesperti che asseriscono, per ignoranza, che dividendo un piano rappresentato in prospettiva (senza seguire alcuna regola teorica), ottengono uno scorcio errato, egli intende dimostrare come applicare la tecnica di proiezione correttamente, utilizzando un angolo adeguato e le giuste distanze, arrivando così a convincerli che la prospettiva è una vera scienza.



8.4 Teorema Fondamentale del *De Prospectiva Pingendi*

Per essere apprezzato davvero il *De Prospectiva Pingendi* dovrebbe essere letto e studiato padroneggiando molte e diverse competenze, che interessano discipline oggi distinte da un grado elevato di specializzazione. Questo trattato, infatti, non è solo un trattato teorico e pratico di prospettiva: è un vero e proprio documento per la storia della lingua volgare e dei suoi rapporti con quella latina; utilizza con piena consapevolezza, tre secoli prima di Gaspard Monge, le proiezioni ortogonali associate; descrive la forma di un capitello composito nel momento in cui gli architetti stavano elaborando la teoria degli ordini architettonici; è una preziosa raccolta di disegni (gli unici che ci siano pervenuti di mano di Piero Della Francesca). Per tutte queste ragioni può essere considerato una vera e propria opera d'arte.

Abbiamo appurato che la “prospectiva” per Piero Della Francesca era essenzialmente “commensurazione”, ossia rappresentazione misurata dei corpi sulla superficie del dipinto. Il quadro per lui era il “termine” dei raggi visivi, ovvero il luogo geometrico in cui l'occhio “descrive con li razzi proportionalmente le cose et posse in quello giudicare la loro misura” [proemio]. Sul quadro, le grandezze osservate subiscono una diminuzione apparente proporzionale alla distanza di osservazione, tanto che “se mutaremo la distantia dall'ochio al termine, se mutarà proportione” [I.XI]. Su questo principio proporzionale si fonda il pensiero scientifico della pittura moderna e solo chi non riesce a “intendere la distantia che vuole essere dall'occhio al termine” resta “in dubitatione la prospectiva non esser vera scientia, giudicando il falso per ignorantia” [I.XXX]. Secondo una nota opinione di Luca Pacioli, la prospettiva non sarebbe nulla se non avesse a fondamento le discipline matematiche. Del resto, gli schemi geometrici che governano la rappresentazione delle cose rimandano costantemente alle proposizioni euclidee. Il rigore e la prolissità di Piero derivavano dal suo essere al tempo stesso artista e matematico e, di fatto, le discipline matematiche dovevano essergli particolarmente congeniali: abbiamo visto come Piero faccia uso diretto della matematica, sfruttandone i concetti cardine ritradotti in un linguaggio accessibile agli artisti. Piero fu il primo a scrivere di arte e scienza veramente per gli artisti, mentre, ad esempio, Leon Battista Alberti si era preoccupato di gettare i fondamenti teorici della nuova disciplina pittorica e compose un testo privo di illustrazioni, nella convinzione

umanistica di poter spiegare tutto attraverso la retorica. Piero si concentrò decisamente sulle regole teoriche e pratiche del disegno e, come abbiamo avuto modo di osservare nel paragrafo precedente, corredò ampiamente il trattato di numerosi disegni, estremamente precisi, puliti e di straordinaria finezza.

Dal trattato di Piero emergono due regole fondamentali: una più immediata, consistente nell'uso della diagonale per trasformare la figura considerata in un'immagine "degradata", l'altra più laboriosa ma metodologicamente più coerente, fondata sull'intersezione della piramide visiva in pianta e in alzato, utilizzata per i volumi.

Piero utilizzò sia metodi che procedimenti, più precisamente: un metodo di rappresentazione del quale diede per scontata la padronanza da parte dei suoi lettori (ovvero le proiezioni ortogonali); un altro metodo (il primo modo) che serve per costruire modelli in prospettiva e, da ultimo, un procedimento grafico che si avvale delle proiezioni ortogonali (il secondo modo) attraverso il quale poter rappresentare le prospettive.

Bisogna inquadrare questi metodi nel contesto culturale del tempo, nel quale si stava iniziando a cercare di raccontare, attraverso l'arte, il mondo e le sue due facce: il mondo come appare, e il mondo come è.

Per conoscere il mondo come è, già da secoli si sfruttavano le sofisticate teorie descritte negli *Elementi* di Euclide, dal corpus delle opere di Archimede ecc. Queste teorie permettevano di misurare e descrivere le forme tridimensionali e di rappresentarle bidimensionalmente con il disegno, imprimendo impronte sulla sabbia o simili (icnografia) o proiettando ombre grazie alla luce artificiale o del sole (ortografia).

Per descrivere il mondo come appare si sfruttavano, invece, le teorie dell'ottica esplicate dagli scienziati dell'epoca, a partire da Euclide, giustificando l'aspetto delle cose (*perspectiva naturalis*), ma che non permettevano di riprodurlo scientificamente sino a quel momento. Fu da lì che Piero riprese il ragionamento sull'apparenza e sull'essenza del mondo, dal punto in cui gli antichi l'avevano lasciato e lo sviluppò autonomamente, consacrando alla stesura del *De Prospectiva Pingendi*.

Egli dedicò le prime undici proposizioni del suo trattato alla "*perspectiva naturalis*" e alla "*propia forma delle figure*", descrivendo attraverso il formalismo matematico, il mondo come è. Esiste però un passo della sua opera nel quale viene incarnata tutta l'essenza del suddetto ragionamento, un passo che riveste il ruolo di principio cardine di tutta la teoria della

prospettiva di Piero Della Francesca, si tratta del cuore pulsante di tutta l'opera, nel quale si fonda la *perspectiva artificialis*, e si crea una connessione tra l'essenza e l'apparenza delle cose. Nonostante sia l'unico, in tutto il trattato, che non sia corredato da una illustrazione, viene definito come il Teorema Fondamentale del trattato. Come abbiamo già anticipato, la proposizione che assolve a tutto questo è la proposizione [XII] del Libro I: essa viene considerata la protagonista di tutta la trattazione, il fulcro della Teoria sulla Prospettiva di Piero Della Francesca. Nel passo in questione si cela il più importante contributo di Piero alla storia della rappresentazione e si costruisce un ponte tra il mondo antico e quello moderno, tra il mondo euclideo delle certezze e il mondo proiettivo delle apparenze e, proprio per questo, è considerato il Teorema fondamentale del *De Prospectiva Pingendi*. In una disciplina come la matematica, il teorema fondamentale è la proposizione sulla quale si basano gran parte delle deduzioni, degli enunciati e delle dimostrazioni successive, e di fatto a seguire dalla dodicesima proposizione, Piero, abbandona il ragionamento squisitamente teorico e matematico, e impone al suo discorso, attraverso i suoi disegni, un carattere pratico, rivolgendosi ai pittori, come ai migliori interpreti della apparenza delle cose.

Non è di fatto l'enunciato della proposizione in sé ad essere sostanziale, quanto naturalmente il contenuto della descrizione che ne segue, il quale fornisce un'accurata illustrazione del metodo da utilizzare e si fonda sul tema fondamentale dell'apparenza delle cose, in particolare, ispirandosi alle proposizioni dell'ottica di Euclide che riguardano la riduzione delle grandezze per effetto della distanza da chi osserva.

Di seguito analizziamo l'enunciato ed il contenuto di questa concisa, laconica ma elegante proposizione.

Proposizione [XII]

Da l'ochio dato, nel termine posto, il piano asignato degradare.

Considerato un punto di vista A assegnato, riprodurre il piano dato in dimensione ridotta seguendo le regole della proiezione in prospettiva.

Eccho che sia dato l'ochio A soprastante a la linea DC, perpendiculare sopra D, et DC sia deviso in puncto B, il quale sia il termine posto, et sopra B linearò FB perpendiculare, et BC sirà il piano

asignato, il quale se vole degradare. Tirarò dal punto A una linea al puncto C, il quale è fine del piano asignato, la quale dividerà BF in puncto E: dico che BE è il piano degradato, cioè BC, perché BE se rapresenta nell'ochio eguale ad BC nel termine posto.

Provase: tirise AB, farasse uno triangolo, il quale serà ABC, et le base sono BC, BE, oposte ad un medesimo angolo, sì che se rapresentano a l'ochio equali, commo per la seconda de questo fu provato; dico BE essere il piano asignato degradato. Altramente, perché questa è la prima degradatione, se vole bene intendere a ciò che l'altre più facilmente se intendino; perché ho dicto dato l'ochio, se intende esserse posto col vedere in quello luogho dove tu vòì stare a vedere il piano asignato; il piano asignato se intende de quella quantità de lungheçça che te piaci fare il piano.

Il termine posto è quello luogo dove se debbe degradare il dicto piano, cioè la distantia da l'ochio al muro o taula o altra cosa dove se vole mectere le cose degradate, ponendo l'ochio alto o basso, o presso o lungi, secondo che rechiede il lavoro. Metiamo che il piano asignato BC sia 20 braccia, et DB che è termine per infine a l'ochio sia 10 braccia, et l'ochio sia levato sopra D 3 braccia, il quale posi essere A; tirise AC, la quale dividerà BF in puncto E, commo è dicto di sopra: dico che C è più levato che B nel termine la quantità de BE, perché A soprasta BC (per la 10a de Eclide De aspetuum diversitate se prova).

Dunqua dirò BE sia 2, che è doi terçi de l'alteçça, ché misi l'ochio essere levato sopra il piano tre braccia, doi terçi sono doi braccia; perché la linea che se parte dal puncto A divide le equidistante in proportione, sì che quella proportione è da BC ad DC che è da BE ad DA; et DA è 3 et BE è 2, et DC è 30, et BC 20; tal proportione [è] da 20 ad 30 quale è da 2 ad 3, sì co' dirò BE essere BC degradato, che dissi degradare.

Si consideri una retta per i punti D e C. Sia B un punto qualsiasi di DC, che definisce il piano BC da degradare. Sia A il punto di vista scelto, appartenente ad una parte di piano definita da DC. Dalla stessa parte si tracci la perpendicolare FB a DC. Si tracci AC che intersecherà il segmento FB nel punto E.

Allora BE sarà il piano BC degradato.

Dimostrazione: Tracciare, a partire dalla figura data, la retta AB. Dal punto di vista A, le basi BC e BE, dei rispettivi triangoli ABC e ABE, sono percepite uguali. Pertanto, BE risulta essere il piano degradato. La prima degradazione è fondamentale per capire come gli altri

oggetti meno complessi appaiono e sono percepiti dall'osservatore. Il punto di vista assegnato è il punto A dal quale si vuole osservare il piano di lunghezza stabilita.

Il termine è quel luogo dove si deve degradare il piano, ovvero il piano dove si voglia rappresentare l'immagine degradata la quale dipende da altezza e distanza alle quali venga posto il punto di vista A.

Sia il piano assegnato lungo 20 braccia; sia la distanza tra A ed il piano di 10 braccia e tra A ed il termine di 3 braccia. Tracciata AC, sia E il punto di intersezione di questa con BF.

Sia BE due terzi dell'altezza (distanza tra A e DC), ovvero 2 bracci. Allora si avrà che vale la seguente proporzione:

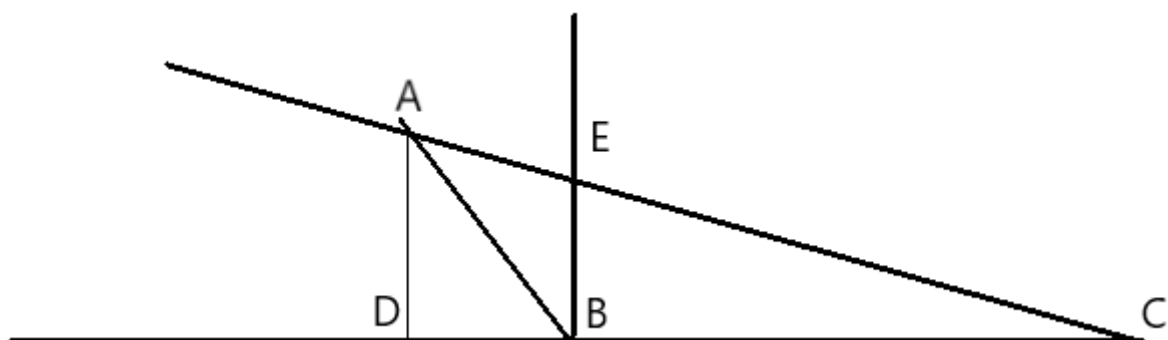
$$BC : DC = BE : DA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 : DC = BE : DA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC = 30$$

Pertanto, BE risulta essere il piano BC degradato.

Come specificato più volte, la suddetta proposizione non fu corredata di alcuna immagine, ma per completezza ne forniamo una che possa aiutare il lettore a velocizzare il passaggio dalla retorica alla pratica.



8.5 Alcuni esempi dal LIBRO II e III

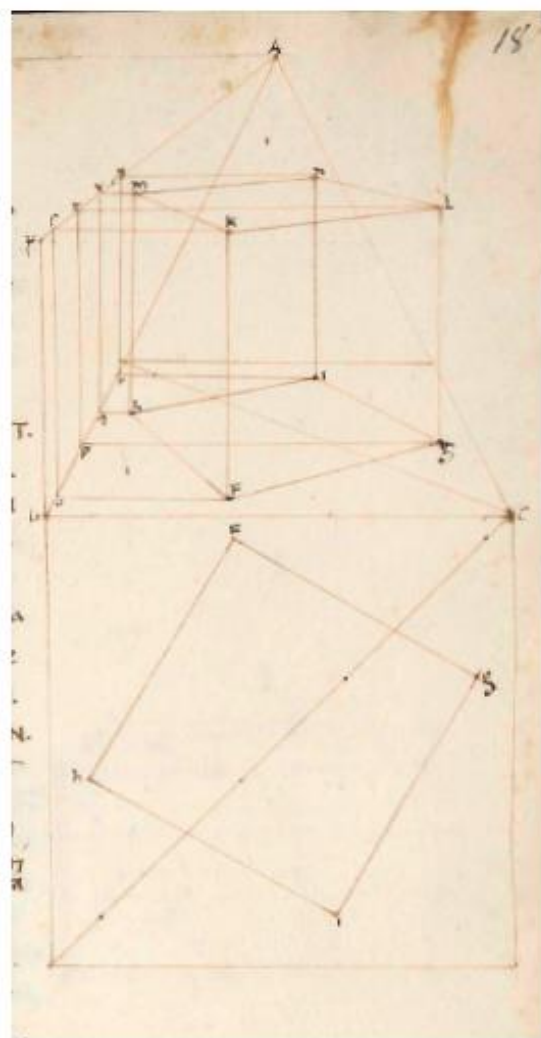
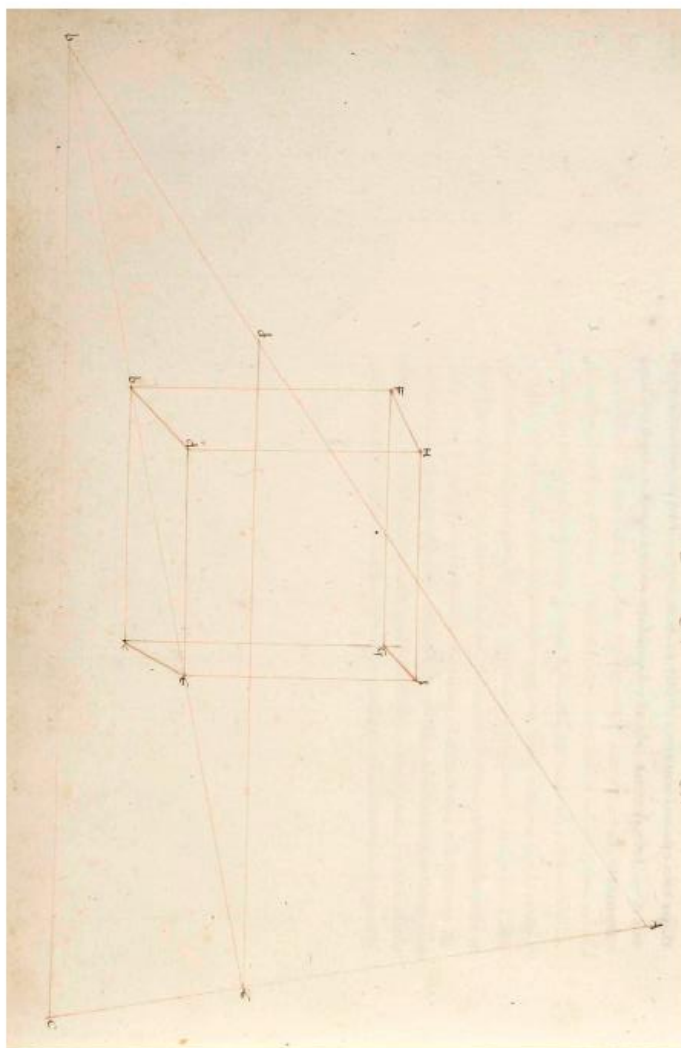
Allegghiamo per completezza alcuni degli esercizi espliciti e svolti da Piero Della Francesca nel Libro II e Nel Libro III. Questo ci consentirà di appurare concretamente l'accrescere della difficoltà nei suoi studi di prospettiva, ma anche di apprezzare al meglio gli importanti risultati della sua ricerca e del suo lavoro. Le immagini che allegheremo appartengono, anch'esse, come le precedenti, al manoscritto di Parma del 1576 (Biblioteca Palatina, Parma); esse sono riprodotte su concessione del Ministero dei Beni e delle Attività Culturali e del Turismo (prot. 1642 del 09.06.2015). Indicheremo gli esercizi scelti con i numeri corrispondenti agli originali del *De Prospectiva Pingendi*, anticipati dai numeri II o III, in base all'appartenenza al secondo o al terzo libro rispettivamente.

[II.Proemio] *Corpo ha in sé tre demensioni: longitudine, latitudine et altitudine; li termini suoi sono le superficie. I quali corpi sono de diverse forme: quale è corpo chubo, quale tetragono che non sono de equali lati, quale è tondo, quale laterato, quali piramide laterate, et quale di molti et diversi lati, sì commo ne le cose naturali et accidentali se vede. De li quali in questo secondo intendo tractare de le loro degradationi, nelli termini posti, da l'occhio socto angoli compresi, facendo de alcune superficie degradate nel primo lor base.*

Un oggetto solido possiede tre dimensioni: lunghezza, larghezza ed altezza; i suoi termini (ricordiamo che “termine” sta ad indicare, per Piero Della Francesca, il piano pittorico, ovvero la distanza di osservazione dalla designata superficie dell’oggetto in questione e dalla quale dipende la riduzione prospettica o degradazione o rappresentazione in prospettiva) sono le superfici che lo costituiscono. I detti corpi possono avere diverse forme, dunque si possono considerare: cubi, tetraedri regolari o meno, a base quadrata (piramide) o circolare (cono), o con poligono di base con più lati. In questo secondo libro intendo trattare proprio dei suddetti oggetti tridimensionali e delle loro degradazioni e rappresentazioni in prospettiva, scegliendo di volta in volta un diverso punto di vista per averne una visione il più completa possibile.

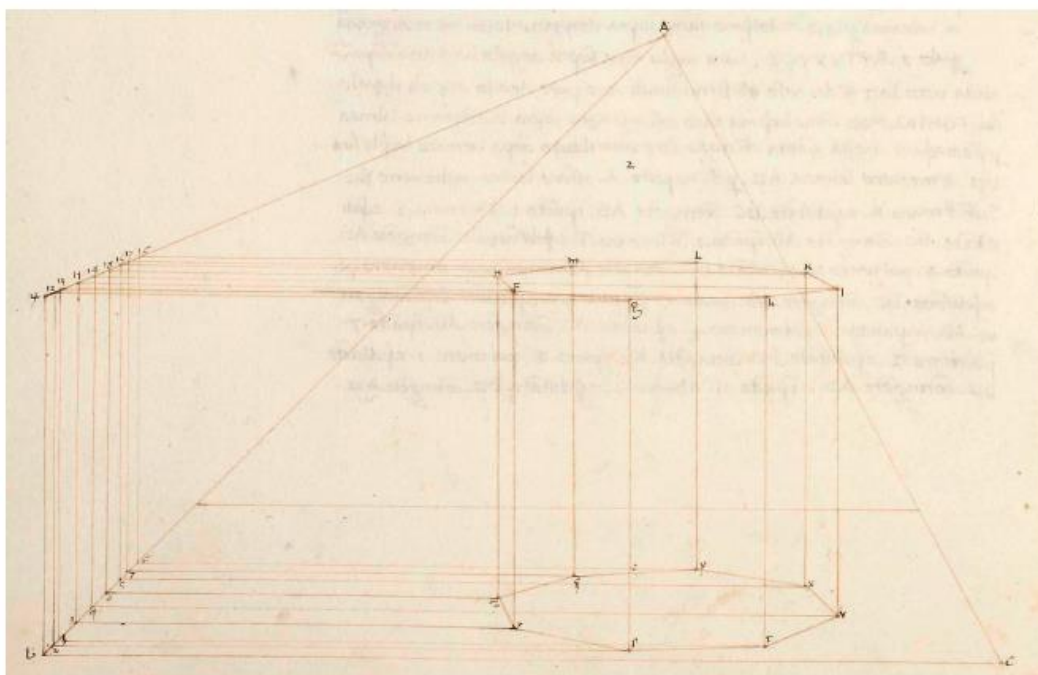
[II.I] *Sopra la superficie quadrata degradata corpo chubico degradato ponere, quelli termini et distantia la superficie decta degradata.*

Eccho la superficie degradata, quale è BCDE, dove intendo ponere uno corpo chubo, la quale superficie sia sua basa, cioè una de le sue facce de esso chubo. Sulla superficie quadrata degradata (della quale è stato trattato nel libro I), indicata con BCDE, poniamo un cubo la cui base coincida con la superficie detta e lo rappresentiamo in prospettiva.



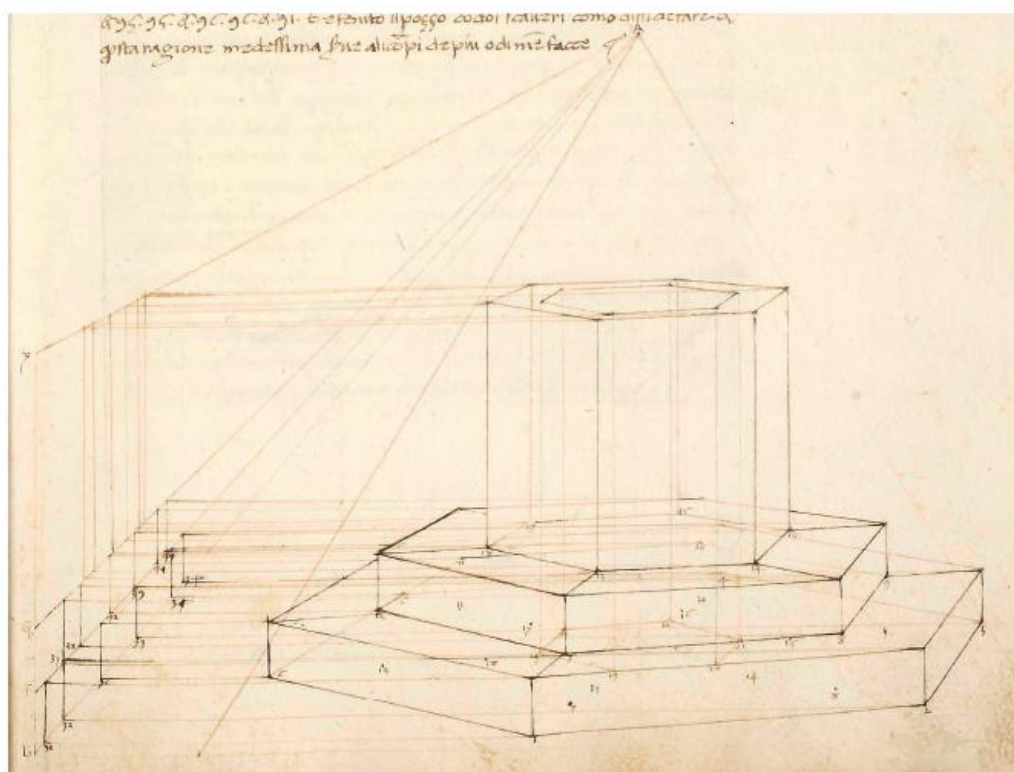
[II.II] *Sopra del piano degradato et la basa de l'octo facce degradata corpo simile ponere, il quale abia octo lati sença le base.*

Sul piano degradato già considerato, andremo a rappresentare in prospettiva un prisma regolare, a base ottagonale.



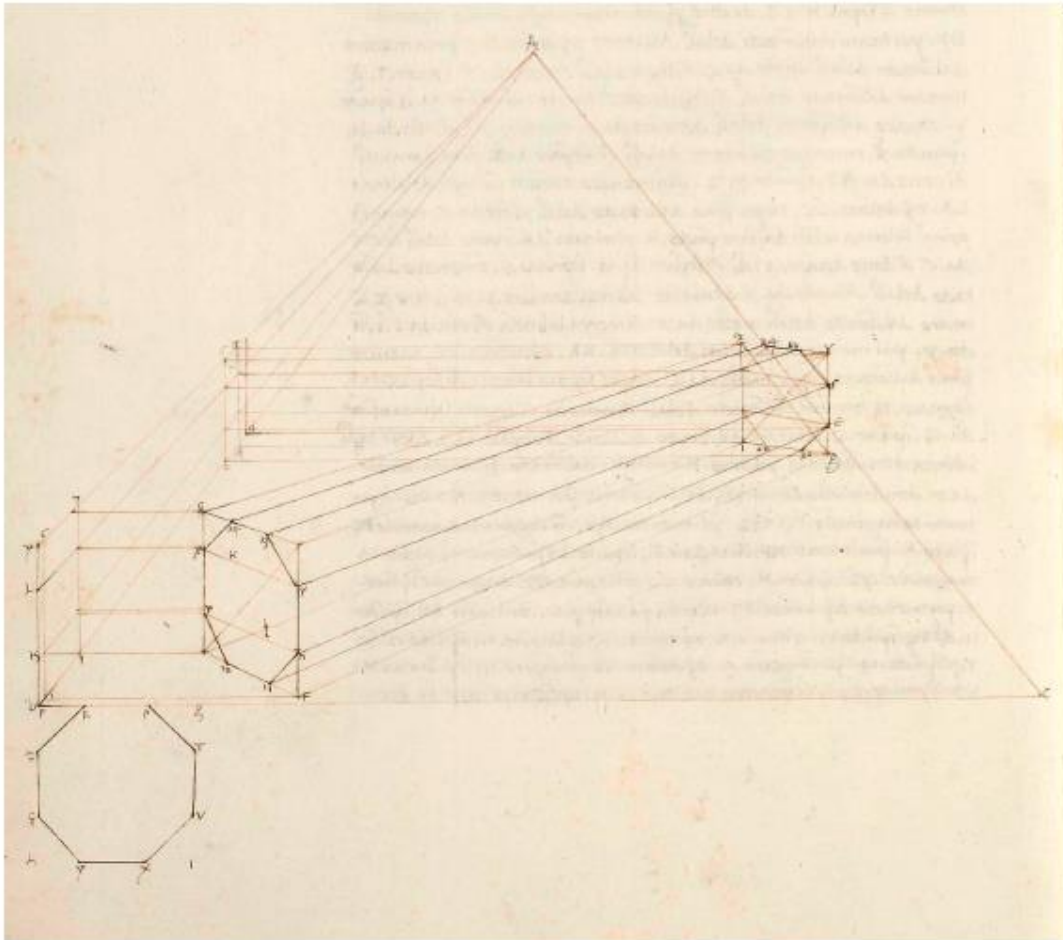
[II.VI] *Nel piano degradato un pozzo de sei faccie equali degradare et conn eschalini atorno, sequitando i lati, circondare.*

Sul piano degradato rappresentare in prospettiva un pozzo avente la forma di un prisma regolare, a base esagonale, cavo, posto su degli scalini della stessa forma ma, naturalmente, altezza minore.



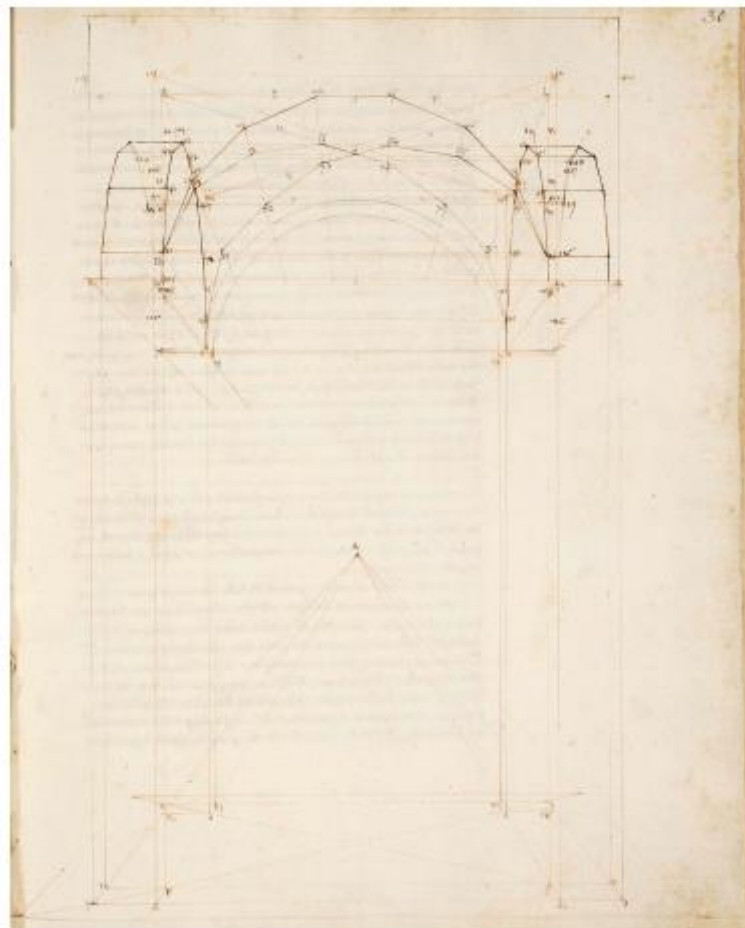
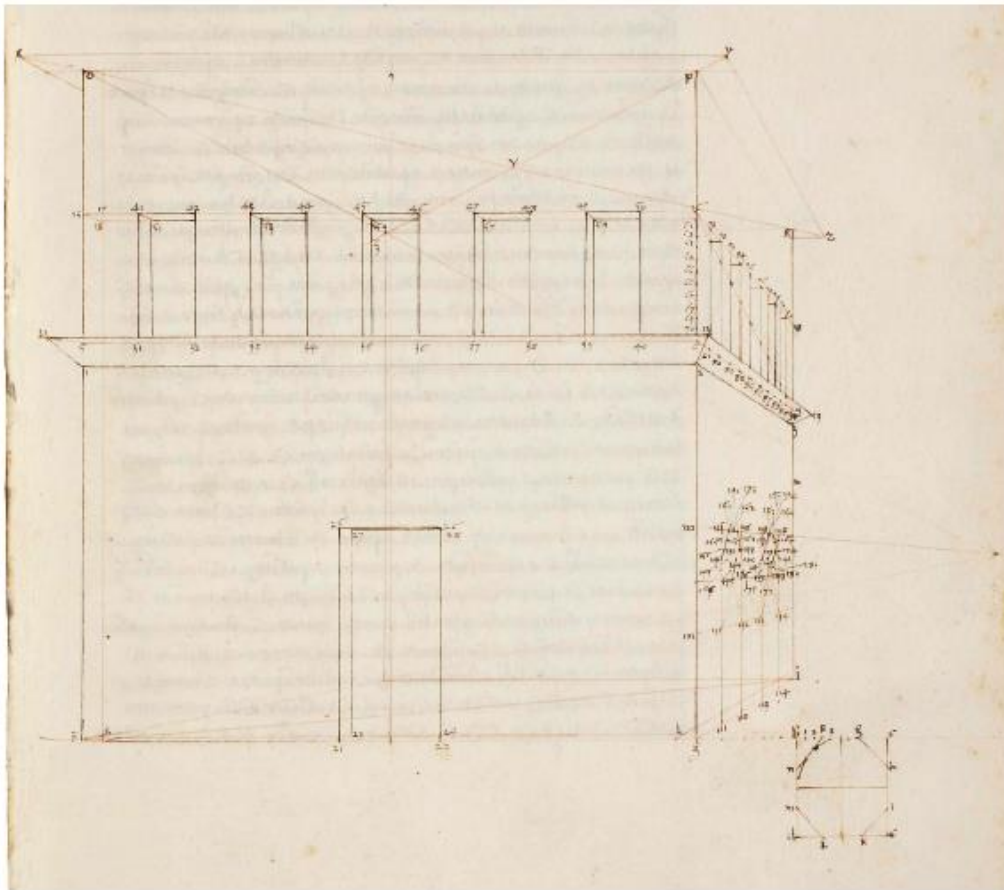
[II.VIII] *Nel piano degradato una colonna de octo facce a giacere ponere che non sia equidistante a la linea recta del degradato piano.*

Sul piano degradato rappresentare una colonna a base ottagonale (un prisma regolare, a base ottagonale) stesa su una delle sue facce laterali (la cui base sul piano sia una delle sue superfici laterali).



[II.IX] *Sopra del piano degradato cassamento quadro proportionalmente conlocare. Noi abbiamo il piano degradato BCDE sopra del quale intendo conlocare uno cassamento quadro. (...) Hora piglarò l'altezza dove voglio ponere il davançale de le finestre, il quale sirà F et 5; poi linearò 5 equidistante FG, che deviderà GP in pu[n]cto 6; poi segnarò socto 5 la groseçça del davançale.*

Sul piano degradato BCDE, rappresentare in prospettiva un casamento (un edificio per abitazioni popolari o comunque non lussuoso, costituito da molti appartamenti) di forma cubica. (...) Scelta l'altezza alla quale porre un davançale, rappresenterò cinque finestre equidistanti l'una dall'altra. A seguire, le figure di [II.IX] e di [II.XI] descritta subito dopo.



[II.XI] *Sopra del piano degradato una volta in crociera sopra a muraglia quadrata ponere.*

Consideriamo il solito piano degradato BCDE e su di quest'ultimo vogliamo rappresentare una volta a crociera su una base definita da pareti di una struttura dalla forma cubica.

[III.Proemio] *Molti dipintori biasimano la prospectiva perché non intendano la forza de le linee et degl'angoli che da essa se producano: con li quali commensuratamente onni contorno e lineamento se describe. Perhò me pare de dovere mostrare quanto questa scientia sia necessaria alla pictura. Dico che la prospectiva sona nel nome suo commo dire 'cose vedute da lungi, rapresentate socto certi dati termini con proportionione, secondo la quantità de le distantie loro', sença de la quale non se pò alcuna cosa degradare giustamente. Et perché la pictura non è, se non demonstrationi de superficie et de corpi degradati o acresciuti nel termine, posti secondo che le cose vere vedute da l'occhio socto diversi angoli s'apresentano nel dicto termine, et però che d'onni quantità una parte è sempre a l'ochio più propinqua che l'altra, et la più propinqua s'apresenta sempre socto maggiore angolo che la più remota nei termini assegnati, et non posendo giudicare da sé lo intellecto la loro misura, cioè quanto sia la più propinqua et quanto sia la più remota, però dico essere necessaria la prospectiva, la quale discerne tucte le quantità proportionalmente commo vera scientia, dimostrando il degradare et acrescere de onni quantità per forza de linee. La quale seguitando molti antichi dipintori aquistaro perpetua laude; commo Aristomenes Thasius, Polides, Apello, Andramides, Nitheo, Çeusis, et molti altri. Et benché a molti sença prospectiva sia dato laude, è data da quelli che non àno notitia de la virtù de l'arte con falso giuditio. Et imperò commo çelante de la gloria de l'arte et di questa età, commo prosuntuoso ho preso ardire scrivere questa particella de prospectiva apartinente alla pictura, facendone, commo dissi nel primo, tre libri. Nel primo dimostrai le degradationi de le superficie piane im più modi. Nel secondo ho dimostrato le degradationi de' corpi quadri et de più facce posti perpendicularmente sopra de li piani. Ma perché hora in questo terço intendo tractare de le degradationi de' corpi compresi da diverse superficie et diversamente posti, però avendo a tractare de corpi più defìcili, piglarò altra via et altro modo nelle loro degradationi, che nonn ò facto nelle demonstrationi passate; ma nello effecto sirà una cosa medesima e quello che fa l'uno fa l'altro. Ma per due cagioni mutarò l'ordine passato: l'uno è perché sirà più facile nel dimostrare et nello intendere; l'altro sì è per la gran multitudi de linee, che in essi corpi bisognaria de fare seguendo il modo primo, sì che l'occhio et l'intellecto abaglaria in esse linee, sença le quali tali corpi non se possono in perfetione degradare, né sença gran defìcultà. Però piglarò questo altro modo, col quale porrò parte per parte dimostrare le degradationi, nel qual modo,*

commo dissi nel principio del primo, è necesario intendere quello che l'omo vuol fare et quello sapere ponere in propria forma sopra del piano, perché commo siranno poste in propria forma, la forza de le linee seguendo, l'arte le produranno degradate, sì commo se rapresentano nel termine dalle linee visuali. Perhò è de bisogno sapere fare tucti li contorni mensuratamente de quello che l'omo vuol fare, et quello ponere sopra il piano nelli luoghi loro in propria forma, del qual modo darò notitia nelle demonstrationi che seguitaranno.

Molti pittori biasimano la prospettiva perché non ne comprendono i risultati, come la forza delle linee e degli angoli che da essa derivano, con i quali, in modo proporzionato, si descrive ogni contorno e lineamento. Perciò mi pare doveroso mostrare quanto questa scienza sia necessaria alla pittura. Dico che la prospettiva significa, nel suo nome, “cose viste da lontano, rappresentate da dati punti di vista, proporzionalmente, in base alle loro distanze” e senza la quale non si può rappresentare correttamente alcuna cosa in profondità. E poiché la pittura non è altro che la rappresentazione di superfici e di corpi ridotti o aumentati di dimensione, all'interno di un determinato spazio, disposti così come appaiono realmente all'occhio all'interno del cono visivo, e poiché di ogni oggetto una parte è sempre più vicina all'occhio rispetto a un'altra, e la parte più vicina si presenta sempre sotto un angolo maggiore rispetto a quella più lontana, entro i limiti assegnati, e non potendo l'intelletto giudicare da solo la loro misura, cioè quanto una parte sia più vicina e quanto l'altra sia più lontana, dico quindi che la prospettiva è necessaria. Essa distingue tutte le dimensioni in modo proporzionato, proprio come una vera scienza, mostrando la diminuzione o l'aumento di ogni grandezza per mezzo della forza delle linee. Seguendo la quale (ovvero la prospettiva), molti antichi pittori ottennero eterna gloria; come Aristomenes Tasius, Polides, Apello, Andramides, Nitheo, Zeusi e molti altri. Ma a molti è stata concessa la lode pur non conoscendo la prospettiva, tale lode però deriva da coloro che non hanno conoscenza del valore dell'arte, e dunque ne hanno un giudizio errato. E quindi, come amante della gloria dell'arte e di questa epoca, e forse con un po' di presunzione, ho avuto l'ardire di scrivere questa piccola opera sulla prospettiva applicata alla pittura, articolandola, come dissi all'inizio, in tre libri. Nel primo ho mostrato i metodi di rappresentazione in prospettiva delle superfici piane in più modi. Nel secondo ho illustrato le rappresentazioni prospettiche dei corpi cubici e poliedrici posti perpendicolarmente sui piani. Ma poiché ora, in questo terzo libro, intendo trattare della rappresentazione in prospettiva di corpi delimitati da superfici diverse e disposti in maniera variata, dovendo quindi affrontare corpi più complessi, adotterò un altro metodo e un'altra

via per rappresentarli, diversa da quella usata nelle dimostrazioni precedenti; ma in sostanza sarà la stessa cosa, perché ciò che vale per l'uno vale anche per l'altro. Ma per due motivi cambierò l'ordine seguito in precedenza: il primo è che così sarà più facile da dimostrare e da comprendere; il secondo è la grande quantità di linee che sarebbe necessario tracciare su questi corpi seguendo il metodo precedente, al punto che l'occhio e l'intelletto si confonderebbero in mezzo a tutte quelle linee, senza le quali tali corpi non possono essere rappresentati in prospettiva in modo perfetto, né senza grande difficoltà. Perciò adotterò questo altro metodo, col quale potrò dimostrare le rappresentazioni prospettiche parte per parte. In questo metodo, come dissi all'inizio del primo libro, è necessario sapere chiaramente ciò che si vuole rappresentare, e saperlo disporre correttamente nella sua forma sul piano. Perché, una volta che le forme saranno poste correttamente, seguendo la forza delle linee, l'arte le produrrà in prospettiva, così come esse si presentano nello spazio delimitato dalle linee visuali. Perciò è necessario saper tracciare con precisione tutti i contorni di ciò che si vuole rappresentare, e disporli sul piano nei loro giusti posti e nella forma corretta, metodo del quale darò spiegazione nelle dimostrazioni che seguiranno.

Dunque, gli ultimi casi trattati nel Libro III sono prevalentemente caratterizzati da una estrema complessità, sicché critici e studiosi suggeriscono che sia lecito pensare che Piero si sia servito spesso, nel redigere il testo, di un disegno ben più grande e dettagliato di quello che ha poi riprodotto, sommariamente, nel codice, affidandosi all'*ekphrasis*¹ per colmare, con la descrizione testuale, le lacune della descrizione grafica. Ora, come è noto, Piero non entra affatto nel dettaglio del metodo che usa per rappresentare il mondo così come è, se non le scarse parole con le quali conclude il proemio del Libro III, dando pertanto per scontato che il pittore, suo lettore elettivo, conosca l'arte di rappresentare gli oggetti in propria forma e di operare su quella rappresentazione come opererebbe nello spazio. Questo carattere della operatività del metodo non deve essere sottovalutato, perché, se l'abilità di rappresentare in modo ineccepibile gli oggetti a tre dimensioni in pianta e alzato è già documentata dalle numerose incisioni di età greca e romana a noi pervenute, la capacità di servirsi di quelle per

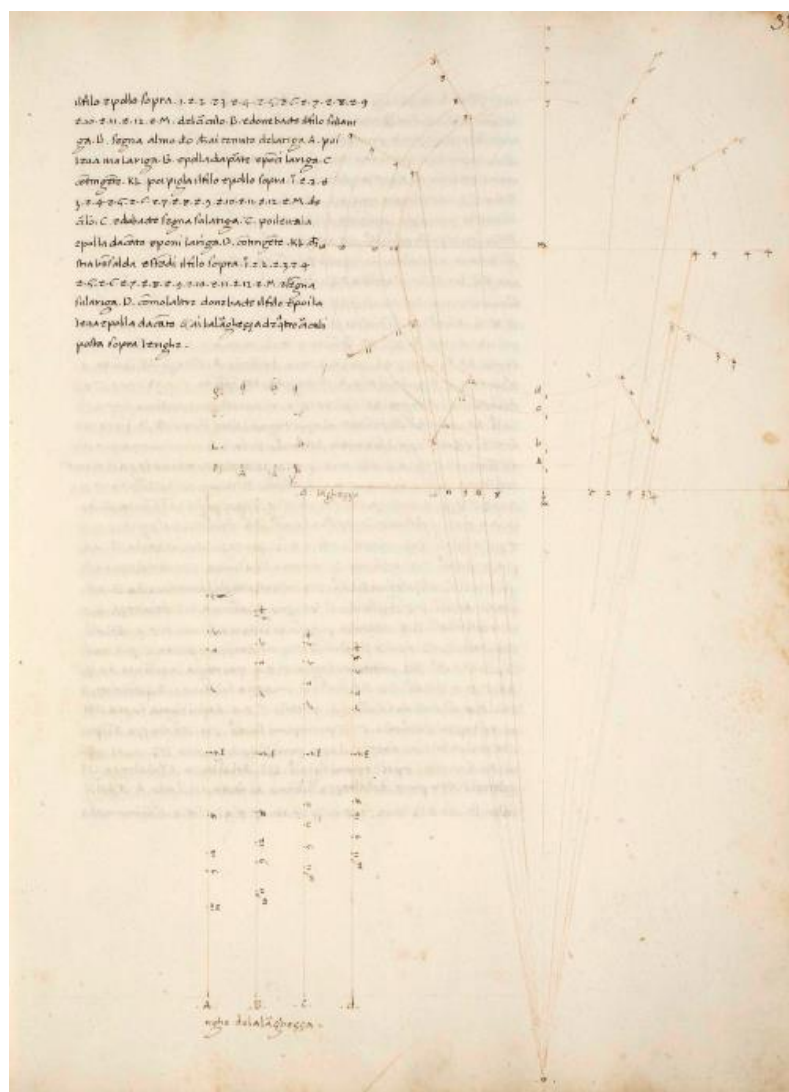
¹ Figura retorica e genere letterario che consiste nella descrizione verbale di un'opera d'arte visiva, come un quadro, una scultura o un edificio, per renderla vivida e concreta agli occhi di chi legge. Il termine greco *ἐκφρασις* significa "esporre, descrivere con eleganza"

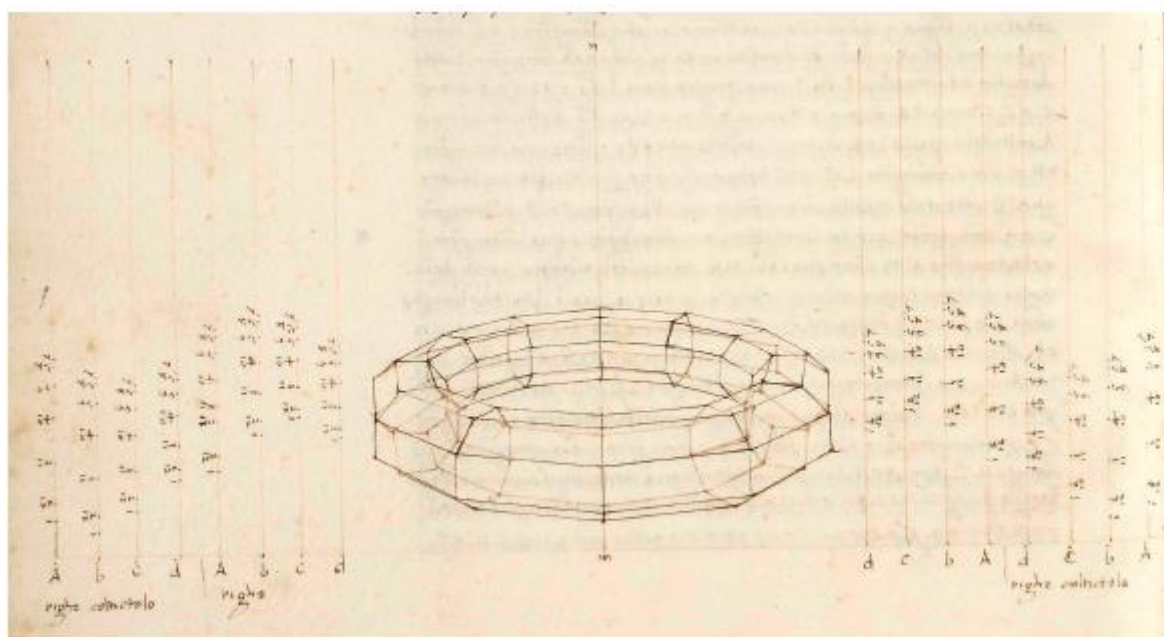
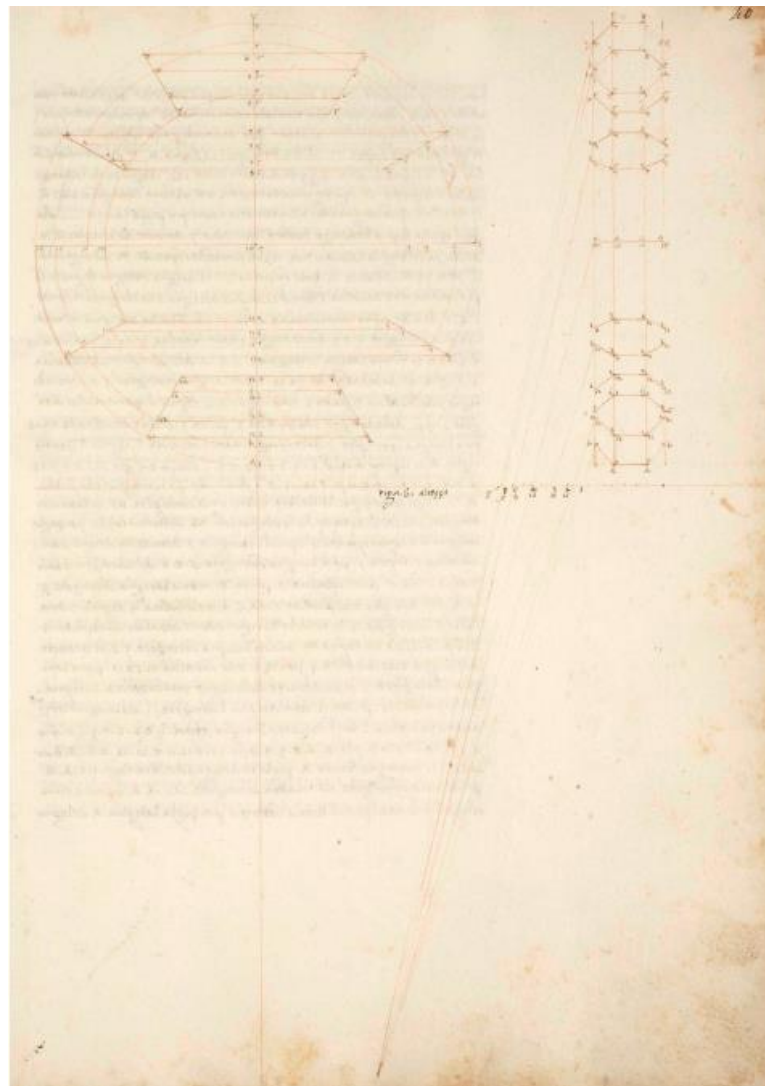
muovere gli oggetti rappresentati nello spazio o sezionare rette e piani, è attestata con certezza, per la prima volta, da questi disegni di Piero Della Francesca. Ne esaminiamo di seguito alcuni più significativi del Libro III.

[III.IV] *Il torculo dato, avente octo circuli continente la grosseçça, in dodici parti equali deviso, com proportione deminuire.*

Dato il torculo, avente otto cerchi che ne indicano lo spessore, suddiviso in dodici parti uguali, degradarlo in proporzione.

Il torculo è una superficie di rotazione, ottenuta dalla rivoluzione di un ottagono attorno ad un asse complanare esterno da esso. È caratterizzato da un raggio maggiore (distanza del centro dell'ottagono dall'asse) e un raggio minore (raggio della circonferenza che circonda l'ottagono).

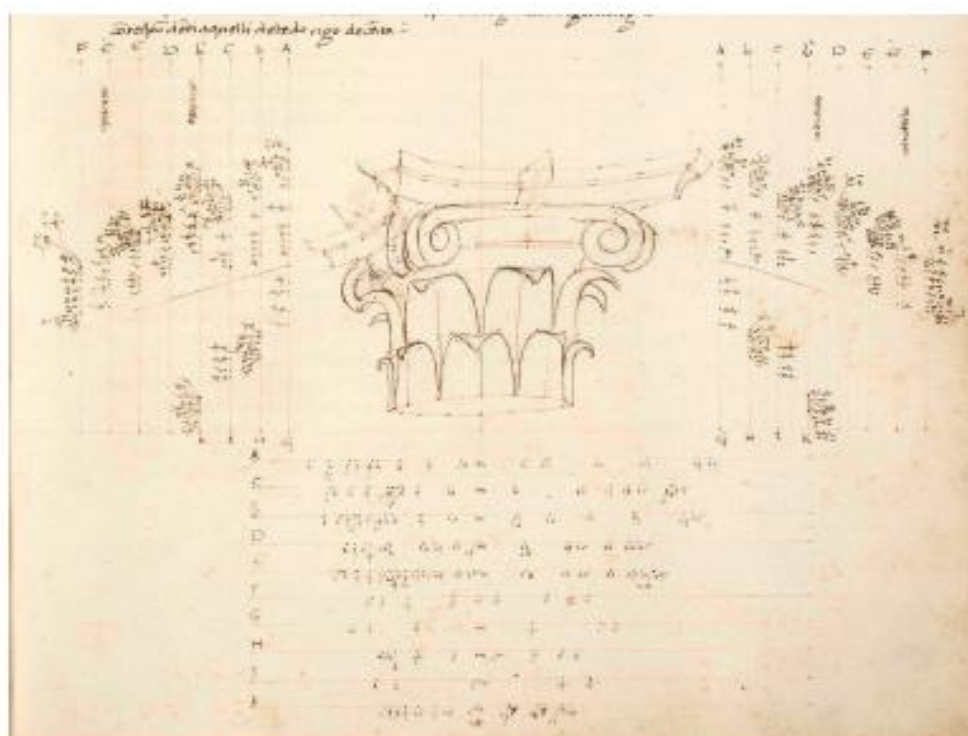
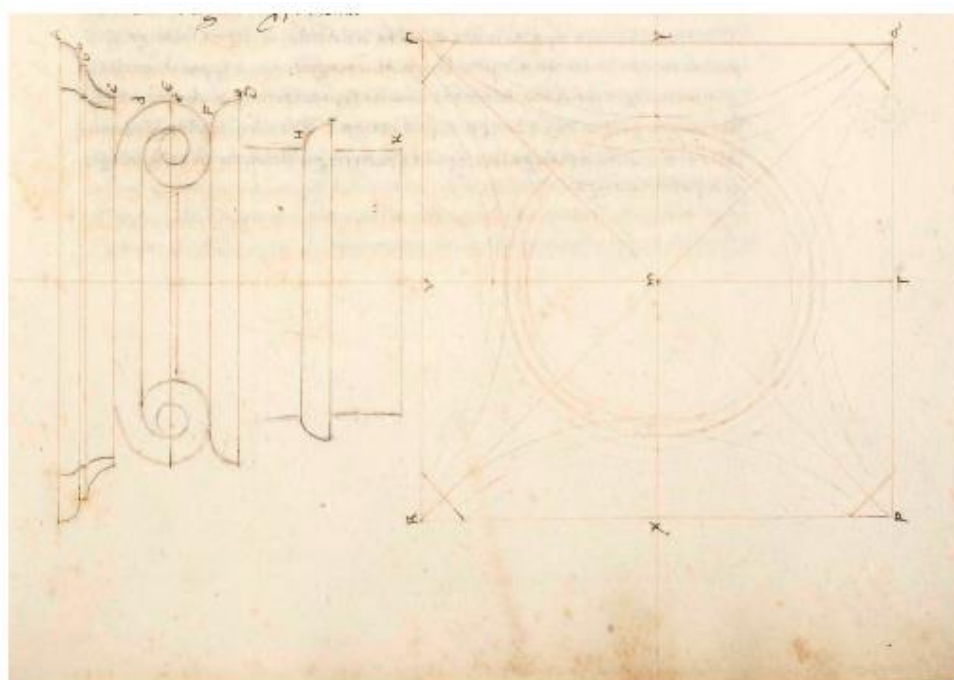


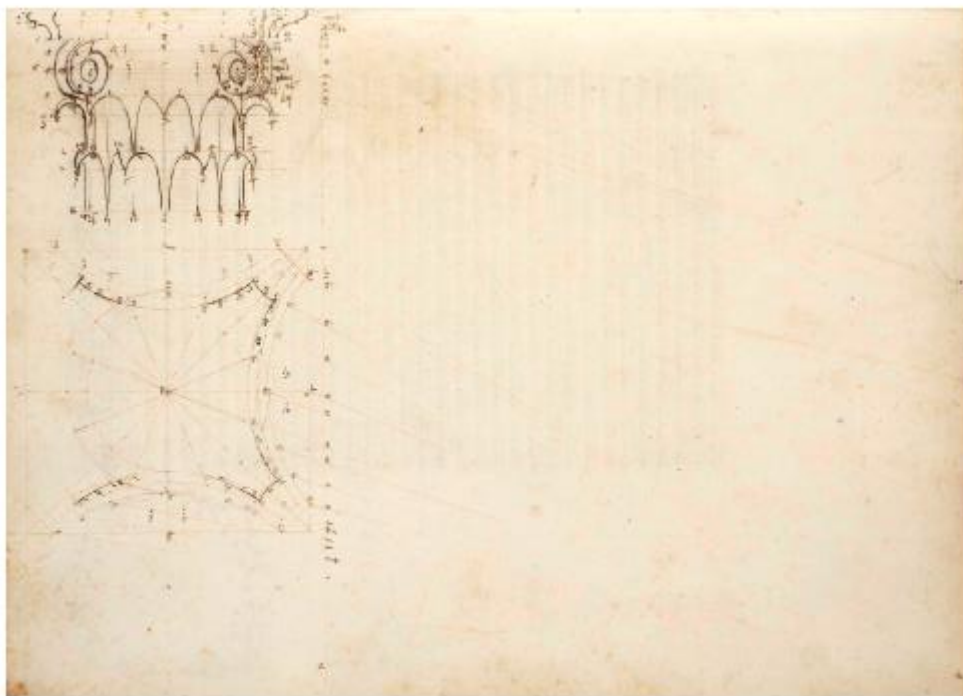


[III.VII] *Dal dato puncto, nel termine posto, il capitello descritto con proportione degradare.*

Dal punto dato, nel piano stabilito, si deve rappresentare in prospettiva il capitello disegnato, riducendolo proporzionalmente.

Dunque, Piero rappresenta il capitello nelle sue diverse angolazioni, raggiungendo livelli di accuratezza nel suo lavoro davvero strabilianti; ne possiamo di seguito ammirare l'elaborazione e la bellezza.



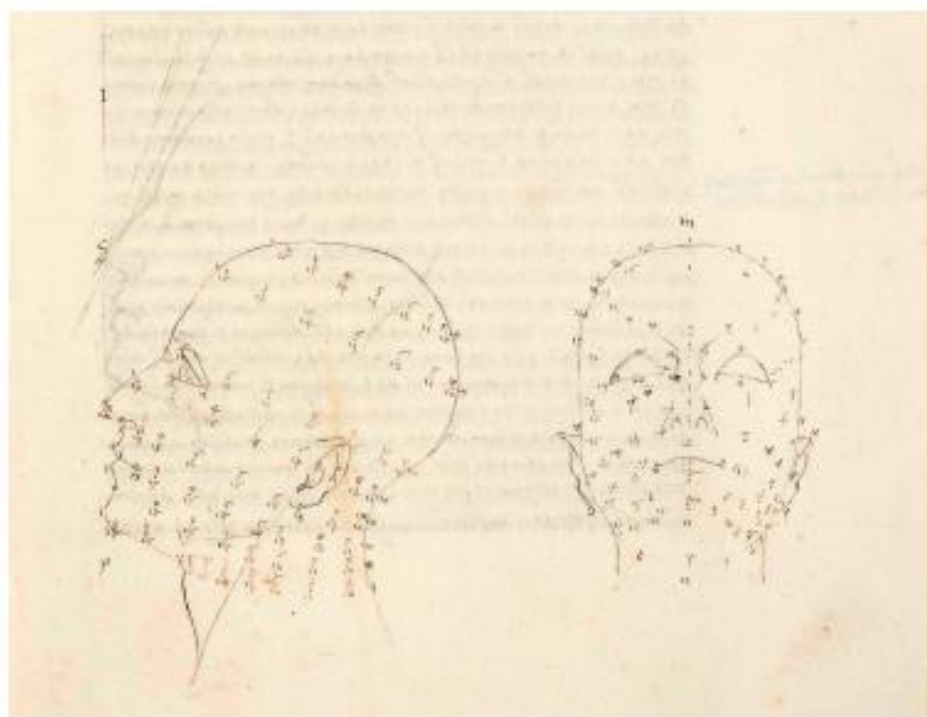
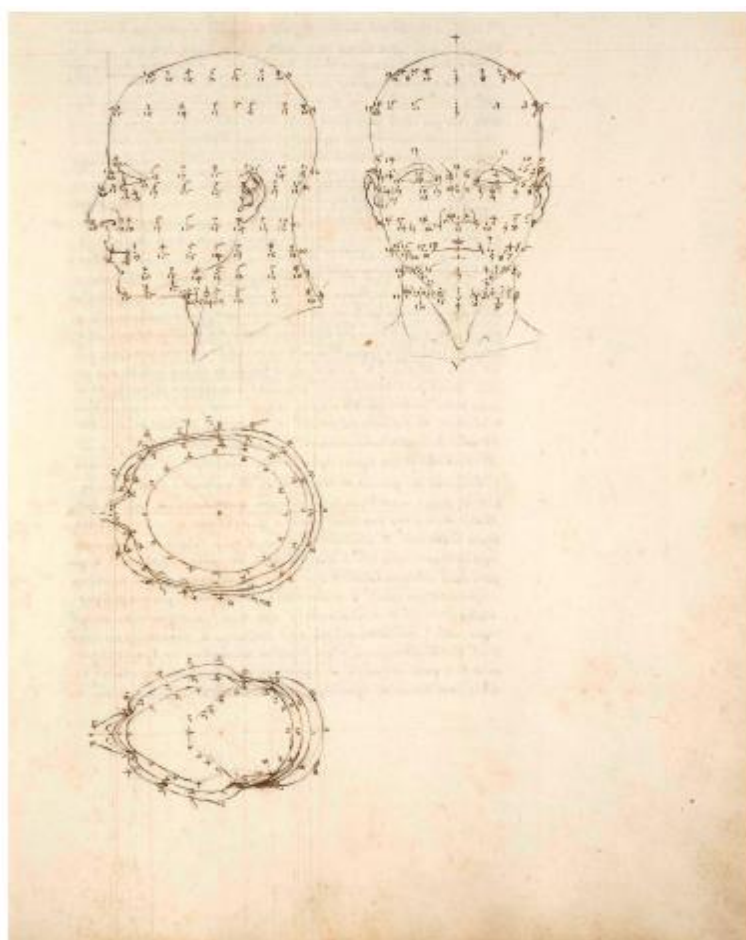


[III.VIII] *Nel termine asignato, col dato puncto, proportionalmente la testa degradare.*

Si commo nel principio di questo dixi che era de bisogno sapere designare quelle cose che l'omo vol fare in propria forma; però desegna una testa in uno occhio, cioè in canto con quello profilo che tu intendi degradare, et con quella ne fa' poi un'altra in faccia con doi occhi, de quella medesima grandezza et tucte le parti correspondenti.

Nel piano assegnato, a partire dal punto dato, si deve ridurre proporzionalmente una testa in prospettiva. Come dissi all'inizio di questo trattato, è necessario saper disegnare le cose che si vogliono rappresentare nella loro forma corretta; quindi, disegna una testa vista di profilo, cioè di lato, con il profilo che intendi rappresentare in prospettiva, e poi disegnane un'altra di fronte, con entrambi gli occhi, della stessa grandezza e con tutte le parti corrispondenti.

Questo passaggio è un'istruzione tecnica su come impostare correttamente una figura (una testa umana) per applicare la degradazione prospettica. L'autore consiglia di partire da disegni ben proporzionati nelle viste principali (profilo e fronte) per poi applicare correttamente la prospettiva.



Concludiamo così l'analisi del *De Prospectiva Pingendi*, ammaliati ed ipnotizzati da tanta plenitudine di un grande precursore di quell'epoca.

Conclusioni

In virtù della nostra trattazione è, senza dubbio, ormai noto come alle origini della teoria matematica vi sia sempre, come fonte di ispirazione, la realtà. Invero, in quanto frutto dell'esperienza reale, la matematica è una rappresentazione ed uno strumento volto a comprendere la realtà stessa. Essa è difatti un linguaggio astratto che trascende da cultura e lingua, che consente di formulare principi applicabili, in modo rigoroso, a tutto ciò che ci circonda e, più importante di ogni altra cosa, principi universali.

Nella nostra trattazione abbiamo affrontato un bellissimo viaggio lungo diversi secoli, che ci ha permesso di scoprire come, ispirati dall'arte e dal desiderio di rappresentare la realtà nel modo più coerente e verosimile possibile, siamo approdati al formalismo scientifico della Geometria Proiettiva. Abbiamo visto come l'intento di aiutare pittori, ingegneri e architetti nel loro lavoro fece sì che sapienti e matematici, approfondissero lo studio della prospettiva e facessero, nel corso dei secoli, pubblicazioni al riguardo sempre più complete e dettagliate, fino ad elaborare una vera e propria teoria assiomatica nuova ed integrale.

La geometria proiettiva, infatti, affonda le sue radici nel XVI-XVII secolo, come formalizzazione rigorosa della prospettiva artistica, studiata e sviluppata da artisti del Rinascimento italiano come Filippo Brunelleschi e Leon Battista Alberti. Se nel Medioevo lo scopo dell'arte e della pittura era quello di glorificare Dio e magnificare la religione, illustrando temi biblici e agiografie (le quali non avevano un aspetto particolarmente realistico, ma erano ritratte simbolicamente, in modo piatto ed innaturale), nel Rinascimento invece, lo scopo delle arti figurative iniziò a mutare, diventando quello di rappresentare il mondo reale nel modo più fedele possibile e questo portò ad affrontare la problematica di trasformare il mondo tridimensionale in un mondo bidimensionale, per essere rappresentato sulla tela mediante, per l'appunto, l'applicazione delle regole della prospettiva.

Per dare una base teorica rigorosa a queste tecniche che gli artisti mettevano in pratica, dapprima in modo istintivo ed intuitivo, furono cercati nuovi strumenti che potessero

rispondere al compito di descrivere formalmente e rigorosamente questa disciplina, del tutto nuova, che si affacciava al mondo per la prima volta. Fu così che nacque un raffinato connubio: l'arte incontrò e si fuse con il rigore della geometria ed il formalismo matematico. L'opera di Piero Della Francesca, che abbiamo approfondito in questa tesi, è la testimonianza eccelsa dell'inizio di questa unione indissolubile e di come il lavoro per il raggiungimento del formalismo definitivo ed odierno della geometria proiettiva sia stato lungo, impegnativo e tortuoso; inoltre è altresì una ennesima dimostrazione di come, in ogni nuovo inizio, ci possano essere dello scetticismo e delle grandi difficoltà nel comprendere ed accettare ciò che è ignoto e non consueto.

Il lavoro personale di analisi effettuato sul *De Prospectiva Pingendi* di Piero Della Francesca è stato estremamente interessante in quanto mi ha dato modo di addentrarmi nella lettura di testi antichi che per la prima volta affrontavano l'arduo compito di descrivere rigorosamente dei procedimenti necessari per poter ottenere dei risultati corretti in questo intreccio tra arte e scienza. Particolarmente emozionante è stato il confronto degli svariati manoscritti dell'opera in analisi, sia in latino che in volgare, ad oggi conservati nelle biblioteche di alcune delle più grandi città italiane ed europee, come Parma, Milano, Londra o Parigi. Inoltre, dalla visione diretta (accessibile online) delle sette copie originali giunte sino ai nostri giorni, ho potuto ricavare in prima persona, alcune informazioni di copertina. È stato particolarmente affascinante, inoltre, dilettermi nella "traduzione" dal volgare all'italiano del *De Prospectiva Pingendi*, cercando di fare nel migliore dei modi un impegnativo esercizio di lettura e scelta delle parti più significative. Non si può non sottolineare quanto la retorica matematica del 1500 fosse estremamente pesante (in quanto priva di simbologia e sintesi), e quanto Piero Della Francesca, non essendo un matematico puro, ci abbia lasciato in eredità spiegazioni e dimostrazioni estremamente laboriose, impegnative e a volte pedanti nel superfluo, eppure poco dettagliate in ciò che invece avrebbe dovuto argomentare dettagliatamente e formalmente. Tuttavia, è esattamente questo insieme di cose a rendere veramente interessante uno studio del genere, che porta ad intraprendere un viaggio appassionante nel passato e a capire nel profondo l'evoluzione della matematica nel corso dei secoli. Si può asserire che si sia trattato di un lavoro che ha abbracciato diversi ambiti di studio quali la storia, la storia dell'arte, la storia della matematica, la geometria e, potremmo azzardare, anche un po' di filologia.

Senza dubbio un lavoro di grande soddisfazione.

Con questa trattazione, però, vogliamo mettere in luce, oltre la narrazione e l'analisi di come si sia giunti al formalismo matematico a partire dall'arte intuitiva, anche il profondo legame della matematica con il mondo intero.

La matematica, infatti, oltre che una scienza può essere considerata una vera e propria forma d'arte. Essa trae ispirazione dalla realtà, ma ispira essa stessa nuove realtà, ci spinge ad oltrepassare i nostri limiti e a non costruire confini laddove non possiamo dimostrare che ne esistano; è la scintilla creativa che rende vivo l'essere umano, che regala lo stimolo dell'inventiva. Nel nostro piccolo vogliamo esaltarne la bellezza, intesa come arte, che risiede nella sua estetica intrinseca, nella semplicità o complessità elegante delle sue dimostrazioni con le quali smonta e avalla ipotesi, nelle sue profonde connessioni con l'universo del quale cerca di spiegare ogni mistero e nelle sue applicazioni creative nelle arti come la musica e, soprattutto per l'interesse di questa trattazione, nella pittura e nell'architettura.

La matematica è un linguaggio universale di chiarezza e armonia che unisce verità e creatività, similmente a ciò che avviene nell'esperienza artistica dove per contro, però, vige la libertà di espressione ed interpretazione. Essa è un piacere intellettuale ed estetico per chi la apprezza, in grado pertanto di contribuire in modo decisivo alla creazione non soltanto di invenzioni tecnologiche (che spesso ultimamente si rivelano essere, purtroppo, potenzialmente più pericolose di quanto utili), ma anche di spiegare formalmente esperienze creative che riescono ad allietare l'animo e lo spirito, come ad esempio il formalismo che si nasconde dentro un quadro esposto in un museo d'arte.

Vogliamo così smontare gli stereotipi che descrivono la matematica come una disciplina asettica ed elitaria, completamente distaccata da tutti gli altri campi del sapere e destinata soltanto a pochi talenti dall'intelligenza rara. La matematica, infatti, non è soltanto dei matematici o per gli scienziati che applicano il metodo scientifico partendo da alcune osservazioni, facendo esperimenti per avallare le loro ipotesi, raccogliendo e condividendo i dati ottenuti, con lo scopo di ampliare la conoscenza ed il sapere umano in un campo specifico della scienza, attraverso nuove scoperte o aprendo la strada a nuove invenzioni. Dunque, asseriamo con fermezza che la matematica è per tutti perché, oltre ad essere uno strumento essenziale per comprendere il mondo che ci circonda, ad aiutarci a sviluppare il pensiero logico e quindi ad argomentare le nostre idee in modo chiaro e corretto e a prendere le decisioni più opportune nella vita quotidiana, è lo strumento attraverso il quale leggere ed apprezzare la bellezza che ci circonda.

Partendo da tal proposito, così come ho esordito, terminerò questa dissertazione, servendomi di una citazione; quest'ultima sintetizza un concetto filosofico di vitale importanza, ovvero che l'ignoranza ci rende schiavi mentre il sapere ci apre ad infinite possibilità, permettendoci di fare scelte consapevoli e di sfidare le convenzioni limitanti; dunque, la conoscenza (intesa come consapevolezza e comprensione di verità, fatti o informazioni ottenute attraverso l'esperienza o l'apprendimento e quindi, come la intendevano gli antichi, un approccio a tutti i campi del sapere senza settorializzarlo) è essenziale per l'emancipazione personale e sociale e per lo sviluppo di un pensiero critico che, sebbene a volte non ne siamo nemmeno consapevoli, ci aiuta anche a conoscere davvero noi stessi, a saperci guardare meglio sia fuori che dentro, e ad apprezzare al meglio tutto ciò che ci circonda, cogliendo la bellezza dei dettagli e delle piccole cose che, contro ogni aspettativa, possono davvero fare la differenza.

"Il sapere rende liberi, l'ignoranza rende prigionieri."

Socrate

Bibliografia e sitografia

1) *Storia della Matematica Modulo 2*, M.G.Lugaresi

2) *Storia della Matematica Modulo 1*, Coen (Euclide; Saccheri)

3) Su DANTI-DA VINCI- MICHELANGELO-ANATOMIA:

I manuali dell'arte: Anatomia artistica. Un metodo efficace e coinvolgente per apprendere i segreti del disegno e della pittura. L'Airone editrice.

L'anima di Leonardo, un genio alla ricerca del segreto della vita. Fritjof Capra; Ed. Rizzoli.

Viaggio nell'arte italiana da Firenze a Roma tra Medioevo e Rinascimento, Piergiacomo Petrioli; Ed. Ulrico Hoepli Milano

4) *Trattati d'arte del Cinquecento, Vol. I*, 1960 (In particolare: *V. Danti, Il primo libro del trattato delle perfette proporzioni*; pag 207, 347 , 494 commenti)

5) *Tra cielo e terra, tra devozione e scienza: l'artista, mediatore d'eccezione negli ospedali fiorentini* (sec. XIV-XVIII). Ether Dia

5) *Dispense di Fondamenti di geometria da un punto di vista superiore*, Monica Idà

6) *La Matematica nella realtà; Castelnuovo/Gori Giorgi/Valenti La nuova Italia 1984* (cattabriga)

7) Wikipedia: Monge; Poncelet;

9) wikipedia proiezione cartografica; prospettiva.

Anatomia dell'occhio umano: com'è fatto e come funziona.

10) <https://www.zeiss.it/vision-care/benessere-occhi/comprendere-la-visione/anatomia-occhio-umano-come-fatto-e-come-funziona.html>

11) <https://mostre.museogalileo.it/deprospectivapingendi/indice.html>

- 12) https://mostre.museogalileo.it/images/dpp/manoscritti/1040199_00011.jpg
- 13) De Prospectiva Pingendi di Piero Della Francesca, a cura di Chiara Gizzi, Edizioni Ca' Foscari
- 14) <https://mostre.museogalileo.it/deprospectivapingendi/prefazioni.html>
- 15) I modelli dello spazio nel trattato De Prospectiva Pingendi di Piero della Francesca, Riccardo Migliari, Accademia Nazionale dei Lincei, 2015
- 16) *Dispense di geometria Proiettiva*, Monica Idà

Ringraziamenti

"Chiunque smetta di imparare è vecchio, che abbia 20 o 80 anni.

Chiunque continua ad imparare resta giovane"

Henry Ford

A 20 anni vuoi mangiare la vita a morsi, hai sete di vedere e toccare e assaporare e correre veloce, di vivere senza freni! Studiare riempie le tue giornate, ma lo fa in modo poco spontaneo e piuttosto costretto, anche quando ami riempirti la testa di conoscenza.

Ma da adulto hai tutta un'altra consapevolezza. Sei sereno, hai già raggiunto tanti obiettivi e realizzato tanti desideri; allora scegliere di riempire la vita con altra conoscenza ha tutto un altro sapore. Ti lascia un gusto tutto diverso in bocca perché sei nel pieno della tua consapevolezza e puoi scegliere di studiare soltanto per te stesso ed il piacere di farlo, non con l'obiettivo di registrare gli esami sul libretto e prendere buoni voti, ma con vera passione ed entusiasmo, gustandoti ogni pagina di quei libri, con le conoscenze e l'esperienza che a 20 anni sognavi soltanto.

E con la curiosità e la voglia di vivere che mi contraddistinguono spero di prevenire l'appiattimento e la routine che uccidono un poco alla volta, per continuare a sentirmi viva e non fermarmi mai finché respiro!!

Eccomi, così, giunta ad un altro bellissimo traguardo...

Questa volta, prima di ogni altra cosa, vorrei ringraziare il mio cervellino!!!!  È lui la mia grande forza, non mi abbandona mai, nonostante io continui a metterlo sempre sotto stress e torturarlo con i miei continui, nuovi obiettivi!!

Mi ha accompagnata sempre brillantemente nella vita, anche e soprattutto negli ultimi anni, che sono stati durissimi e difficilissimi a causa di tanti problemi gravi di salute vissuti da tutta la mia famiglia. Sono stata male anch'io, ma ho sempre cercato di reagire come meglio potevo, anche quando pensavo di aver toccato il fondo e non vedevo più la luce.

In pochissimi hanno visto le mie lacrime, perché io mostro sempre e solo il mio sorriso e la mia forza vitale, ma chi mi è accanto nella vita e chi mi conosce bene sa che, anche se mi sento e mi mostro sempre invincibile, ho avuto anch'io i miei problemi di salute, le mie debolezze e le mie grandi fragilità; quindi vorrei dire GRAZIE dal profondo della mia anima, oltre che a me stessa per non essermi mai arresa, anche a tutti coloro che mi vogliono bene e sono sempre presenti nella mia vita o che, anche se lontani, si fanno sempre sentire vicini al mio cuore.

Naturalmente ringrazio di cuore la mia relatrice che mi ha accompagnata sul finale di questo viaggio e che nonostante le difficoltà e la distanza, non mi ha mai abbandonata, ha sempre creduto in me, ha mostrato empatia e profonda dolcezza e per tutto questo non posso che esserle profondamente riconoscente.

Ed ora.. eccomi qui... pronta a tagliare quest'altro traguardo!

Felicissima ed orgogliosa di me. 