

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Gruppi iperbolici e il problema della parola

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Nicolò Rondoni

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

La nascita della teoria geometrica dei gruppi è attribuita al matematico russo Mikhael Gromov con la pubblicazione nel 1987 del suo lavoro *Hyperbolic groups* ([3]). L’idea alla base dell’articolo, e successivamente di tutta la teoria, è quella di studiare la struttura algebrica di un gruppo associandogli una metrica, detta metrica della parola. Il principio fondante della teoria è quindi quello di invertire il processo della topologia algebrica. La topologia algebrica associa a oggetti geometrici degli invarianti algebrici, quali i gruppi d’omotopia e d’omologia, studia questi oggetti e ricava proprietà di natura geometrica. La teoria geometrica dei gruppi considera oggetti di natura algebrica, ci associa una geometria e ricava proprietà di natura algebrica. Nel suo lavoro Gromov definisce in particolare il concetto di iperbolicità di uno spazio metrico, generalizzando le definizioni della geometria iperbolica. Lo strumento combinatorico alla base della teoria è il grafo di Cayley associato ad un gruppo e ad un suo insieme di generatori. Su di esso si definisce una metrica e tale metrica viene poi ereditata dal gruppo. Il grafo di Cayley è il ponte che permette di passare dall’interpretazione algebrica a quella geometrica. Al grafo di Cayley e ad altri argomenti di natura più combinatorica è dedicato il primo capitolo di questa tesi. Sempre nel primo capitolo introdurremo il problema della parola, che poi risolveremo per i gruppi iperbolicci nel terzo capitolo. La natura locale dei gruppi visti come spazi metrici è banale. La metrica della parola induce la topologia discreta sul gruppo e questo fa sì che le applicazioni continue e le isometrie non siano adatte per studiare tali spazi. Per questo intordurremo le quasi-isometrie, applicazioni che vedono solo la natura globale degli oggetti e ignorano quella locale. Introdurremo inoltre anche i concetti di geodetiche e quasi-geodetiche, definizioni indispensabili per studiare la geometria di uno spazio metrico. Dimostreremo infine il lemma di Švarc-Milnor, da molti considerato il teorema fondamentale della teoria geometrica dei gruppi. Un’altra porzione molto importante e interessante della teoria è lo studio delle azioni di gruppi su spazi metrici. Questa parte, per quanto affascinante, non verrà trattata in dettaglio in questa tesi se non per il lemma di Švarc-Milnor. Nell’ultimo capitolo definiremo finalmente

Introduzione

gli spazi iperbolicci usando il concetto di triangoli sottili. Questa definizione non è quella originale data da Gromov ma è attribuita al matematico Ilya Rips. Una caratteristica particolarmente interessante degli spazi iperbolicci è che in essi geodetiche e quasi-geodetiche sono strettamente legate. Questo legame verrà reso preciso dal teorema di stabilità e verrà usato per dimostrare un risultato oltremodo utile che è l'invarianza per quasi-isometrie dell'iperbolicità. Risolveremo infine il problema della parola per gruppi iperbolicci usando le presentazioni di Dehn, introdotte per la prima volta dal matematico tedesco Max Dehn per lo studio dei gruppi fondamentali delle superfici orientabili di genere almeno 2. L'intuizione alla base della dimostrazione è quella di sfruttare l'iperbolicità per trovare scorciatoie nei cammini chiusi del grafo di Cayley che corrispondono a parole banali nel gruppo. Riusciremo dunque a dimostrare una proprietà puramente algebrica (avere problema della parola risolubile), usando proprietà geometriche del gruppo (l'iperbolicità). La principale risorsa usata per la stesura di questa tesi è il libro di Clara Löh *Geometric Group Theory, An Introduction* [7].

Indice

Introduzione	ii
1 Teoria combinatoria dei gruppi	1
1.1 Teoria delle categorie	1
1.2 Insiemi di generatori	4
1.3 Generatori e relazioni	5
1.4 Il problema della parola	7
1.5 Cenni di teoria dei grafi	8
1.6 Grafi di Cayley	12
2 Teoria geometrica dei gruppi	15
2.1 Quasi-isometrie	15
2.2 Metrica della parola	21
2.3 Geodetiche e quasi-geodetiche	23
2.4 Lemma di Švarc-Milnor	30
3 Spazi e gruppi iperbolicci	36
3.1 Spazi iperbolicci e quasi-iperbolici	36
3.2 Teorema di stabilità	40
3.3 Gruppi iperbolicci	47
3.4 Presentazione di Dehn	52
3.5 Problema della parola nei gruppi iperbolicci	53
Bibliografia	57

Capitolo 1

Teoria combinatoria dei gruppi

In questo capitolo intordurremo i concetti fondanti della teoria combinatorica dei gruppi. Inizieremo con alcuni concetti preliminari di teoria delle categorie, per poi passare alle definizioni di generatori, gruppo libero e descrizione di un gruppo tramite generatori e relazioni. Introdurremo il problema della parola e dimostreremo che questo è risolubile per gruppi liberi. Daremo alcune definizioni introduttive della teoria dei grafi, tra cui quelle di grafo, cammino, ciclo e albero. Infine definiremo il grafo di Cayley associato a un gruppo e ad un suo insieme di generatori, dimostrando poi che il grafo di Cayley di un gruppo libero è un albero.

1.1 Teoria delle categorie

In questa sezione diamo una breve introduzione al linguaggio della teoria delle categorie che useremo nelle sezioni e nei capitoli successivi.

Per una trattazione più approfondita si può consultare [6].

Definizione 1.1.1 (Categoria). Una **Categoria** \mathcal{C} è il dato di

- Una classe $Ob(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti **oggetti**.
- Per ogni $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, un insieme $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i cui elementi sono detti **morfismi**.
- Per ogni $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ un'operazione

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

detta **composizione**.

che verificano:

1. La composizione è associativa: per ogni $X, Y, Z, W \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$ si ha $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
2. Per ogni $X \in Ob(\mathcal{C})$ esiste $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ tale che per ogni $Y \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ si ha $f \circ id_X = f$ e $id_X \circ g = g$.

Notazione 1.1.2. I morfismi $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ vengono spesso denotati

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{oppure} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Esempio 1.1.3.

- La classe degli insiemi, con morfismi le funzioni definisce una categoria denotata **Set**.
- I gruppi insieme ai morfismi tra essi formano una categoria chiamata **Grp**.

Definizione 1.1.4 (Isomorfismo). Siano \mathcal{C} una categoria e $f : X \rightarrow Y$ un morfismo. f è detto un **isomorfismo** se esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. In tal caso X e Y sono detti **isomorfi**.

Definizione 1.1.5 (Prodotto). Siano \mathcal{C} una categoria e $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ due oggetti. Un **prodotto** di X e Y è una tripla (P, p_1, p_2) dove $P \in Ob(\mathcal{C})$ è un oggetto e $p_1 : P \rightarrow X$, $p_2 : P \rightarrow Y$ sono morfismi tali che per ogni $Z \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : Z \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$, esiste un unico morfismo $h : P \rightarrow Z$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow f & \downarrow h & \searrow g & \\ X & \xleftarrow{p_2} & P & \xrightarrow{p_1} & Y \end{array}$$

è commutativo. Con abuso di linguaggio chiamiamo prodotto sia la tripla (P, p_1, p_2) che l'oggetto $P \in \mathcal{C}$, sottintendendo l'esistenza delle mappe p_1, p_2 .

Proposizione 1.1.6. *Il prodotto di due oggetti, se esiste, è unico a meno di isomorfismo. Cioè se $X, Y \in \mathcal{C}$ ammettono due prodotti (P, p_1, p_2) e (P', p'_1, p'_2) , allora P e P' sono isomorfi in \mathcal{C} .*

Dimostrazione. Siano (P, p_1, p_2) e (P', p'_1, p'_2) prodotti. Allora esistono $f : P \rightarrow P'$ e $g : P' \rightarrow P$ tali che

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ p_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow p_2 \\ X & \xleftarrow{p'_2} & P' \xrightarrow{p'_1} Y \\ & & \\ & P' & \\ p'_1 \swarrow & \downarrow g & \searrow p'_2 \\ X & \xleftarrow{p_2} & P \xrightarrow{p_1} Y \end{array}$$

commutano. In particolare $f \circ g$ e $g \circ f$ verificano ancora la proprietà della definizione di prodotto, quindi per unicità $f \circ g = id_{P'}$ e $g \circ f = id_P$. \square

Esempio 1.1.7. Siano G e H due gruppi. Allora il loro prodotto nella categoria **Grp** è costituito dal prodotto insiemistico $G \times H$ con la struttura di gruppo

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$$

Le mappe sono le proiezioni usuali.

La nozione duale a quella di prodotto è quella di coprodotto.

Definizione 1.1.8 (Coprodotto). Siano \mathcal{C} una categoria e $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ due oggetti. Un **coprodotto** di X e Y è una tripla (C, i_1, i_2) dove $C \in Ob(\mathcal{C})$ è un oggetto e $i_1 : X \rightarrow C$, $i_2 : Y \rightarrow C$ sono morfismi tali che per ogni $Z \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : X \rightarrow Z$, $g : Y \rightarrow Z$, esiste un unico morfismo $h : C \rightarrow Z$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & f \nearrow & \uparrow h & \swarrow g & \\ X & \xrightarrow{i_1} & C & \xleftarrow{i_2} & Y \end{array}$$

è commutativo. Con abuso di linguaggio chiamiamo coprodotto sia la tripla (C, i_1, i_2) che l'oggetto $C \in \mathcal{C}$, sottintendendo l'esistenza delle mappe i_1, i_2 .

Proprietà come quelle verificate da prodotto e coprodotto sono dette **proprietà universali**.

Proposizione 1.1.9. *Il coprodotto di due oggetti, se esiste, è unico a meno di isomorfismo. Cioè se $X, Y \in \mathcal{C}$ ammettono due coprodotti (C, i_1, i_2) e (C', i'_1, i'_2) , allora C e C' sono isomorfi in \mathcal{C} .*

Dimostrazione. Analoga a 1.1.6. \square

Esempio 1.1.10. Siano A e B due insiemi. Allora esiste il coprodotto di A e B in **Set**. Viene indicato con $A \amalg B$ e può essere definito come

$$A \amalg B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Le mappe di inclusione sono

$$\begin{aligned} i : A &\longrightarrow A \amalg B & j : B &\longrightarrow A \amalg B \\ a &\longmapsto (a, 1) & b &\longmapsto (b, 2) \end{aligned}$$

$A \amalg B$ viene chiamato unione disgiunta. Quando è chiaro a quale insieme appartiene un elemento scriviamo $a = (a, 1)$ e $b = (b, 2)$.

Esempio 1.1.11. Il coprodotto nella categoria **Grp** viene indicato con $G * H$ e viene chiamato prodotto libero. Nella sezione successiva ne dimostreremo l'esistenza.

1.2 Insiemi di generatori

Definizione 1.2.1 (Insieme di generatori). Siano G un gruppo e $S \subseteq G$. Il **sottogruppo generato** da S in G è il più piccolo sottogruppo (rispetto all'inclusione) di G contenente S e lo indichiamo con $\langle S \rangle_G$. Se G è chiaro dal contesto scriviamo semplicemente $\langle S \rangle$. Diciamo che S è un **insieme di generatori** di G se $G = \langle S \rangle_G$. Diciamo che G è **finitamente generato** se esiste un insieme finito di generatori.

Esempio 1.2.2 (\mathbb{Z}). Consideriamo il gruppo degli interi \mathbb{Z} . Due possibili insiemi di generatori sono

$$S_1 = \{1\} \quad S_2 = \{2, 3\}$$

Esempio 1.2.3 ($SL_2(\mathbb{Z})$). Consideriamo

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

e consideriamo gli elementi

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle.$$

Per una dimostrazione si può consultare [5].

1.3 Generatori e relazioni

Definizione 1.3.1 (Gruppo libero). Sia S un insieme. Un **gruppo libero** generato da S è il dato di un gruppo F e di una mappa $i : S \rightarrow F$ che verifica la seguente proprietà universale: per ogni G gruppo e $j : S \rightarrow G$ mappa, esiste un unico morfismo di gruppi $\varphi : F \rightarrow G$ tale che

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow j & \downarrow \varphi \\ & & G \end{array}$$

commuta. Diciamo inoltre che F è liberamente generato da S .

Per semplicità con il termine gruppo libero ci riferiamo al gruppo F sottintendendo la mappa i .

Osservazione 1.3.2. Se il gruppo libero esiste, allora è unico a meno di isomorfismo.

Definizione 1.3.3 (Parole). Sia S un insieme non vuoto. Indichiamo con S^* l'insieme delle parole con lettere in S . Con ε indichiamo la parola vuota.

Teorema 1.3.4 (Esistenza del gruppo libero). *Sia S un insieme. Allora esiste il gruppo libero generato da S .*

Dimostrazione. Sia $W = (S \cup S^{-1})^*$ dove con S^{-1} indichiamo l'insieme dei simboli s^{-1} per $s \in S$. Definiamo l'insieme F^{red} delle *parole ridotte* come

$$F^{red} = \{a_1 \cdots a_n \in W \mid \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, a_i \neq a_{i+1}^{-1}\}.$$

Su F^{red} consideriamo l'operazione binaria

$$\begin{aligned} \cdot : F^{red} \times F^{red} &\longrightarrow F^{red} \\ (a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_m) &\longmapsto a_1 \cdots a_{n-k} b_{k+1} \cdots b_m \end{aligned}$$

dove

$$k = \max\{i \in \{1, \dots, \min(n, m)\} \mid \forall j \in \{1, \dots, i\}, b_j = a_{n-j+1}^{-1}\}.$$

Si verifica facilmente che (F^{red}, \cdot) è un gruppo ed è liberamente generato da S . \square

In generale indichiamo con $F(S)$ la classe di isomorfismo del gruppo libero generato da S . Se vogliamo esplicitamente usare la descrizione della dimostrazione scriviamo $F^{red}(S)$.

Perché è interessante il gruppo libero? $F(S)$ rappresenta ‘il più piccolo gruppo’ contenente S senza alcuna relazione tra i suoi elementi se non quelle banali. Possiamo quindi usare $F(S)$ come base per costruire tutti gli altri gruppi aggiungendo delle relazioni.

Definizione 1.3.5 (Sottogruppo normale generato). Siano G un gruppo e $S \subseteq G$. Chiamiamo **sottogruppo normale generato da S in G** il più piccolo sottogruppo normale di G contenente S . Lo indichiamo con $\langle\langle S \rangle\rangle_G$, $\langle\langle S \rangle\rangle$ se G è ovvio dal contesto.

Definizione 1.3.6 (Presentazione). Siano S un insieme e $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$. Definiamo il gruppo **generato da S con relazioni R** come

$$\langle S|R \rangle = F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle_{F(S)}.$$

Se G è un gruppo e $G \cong \langle S|R \rangle$, diciamo che $\langle S|R \rangle$ è una **presentazione** di G .

Intuitivamente $\langle S|R \rangle$ è il gruppo che si ottiene uguagliando all’elemento neutro tutte le parole in R .

Una notazione comoda nelle presentazioni è la seguente: se $ab^{-1} \in R$, allora scriviamo $a = b$. Questa scrittura ha senso poiché in $\langle S|R \rangle$ vale $ab^{-1} = e$, e quindi vale $a = b$.

Osservazione 1.3.7. Per ogni gruppo esiste una presentazione ovvia:

$$G \cong \langle \{x_g\}_{g \in G} \mid \{x_g x_h = x_{g \cdot h}\}_{g, h \in G} \rangle.$$

Esempio 1.3.8. Alcuni esempi di presentazioni sono i seguenti:

- $F(S) = \langle S | \rangle$
- $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b | ab = ba \rangle$ e più in generale

$$\mathbb{Z}^n \cong \langle a_1, \dots, a_n \mid a_i a_j = a_j a_i \rangle.$$

- Indichiamo con D_n il gruppo delle simmetrie dell’n-agono regolare. Allora

$$D_n \cong \langle r, s \mid r^n = s^2 = (sr)^2 = e \rangle.$$

- Indichiamo con $\pi_1(S_g)$ il gruppo fondamentale della superficie di genere g . Usando il teorema di Van Kampen si può mostrare che

$$\pi_1(S_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \rangle$$

dove $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

L'uso delle presentazioni è particolarmente utile per calcolare coprodotti nella categoria dei gruppi.

Proposizione 1.3.9. *Siano G_1 e G_2 gruppi. Supponiamo che abbiano presentazioni $G_1 \cong \langle S_1 | R_1 \rangle$ e $G_2 \cong \langle S_2 | R_2 \rangle$. Allora esiste il coprodotto di G_1 e G_2 e vale*

$$G_1 * G_2 \cong \langle S_1 \amalg S_2 | R_1 \amalg R_2 \rangle.$$

Dimostrazione. A meno di isomorfismo possiamo lavorare con le presentazioni di G_1 e G_2 . Definiamo

$$\begin{aligned} i_1 : \langle S_1 | R_1 \rangle &\longrightarrow \langle S_1 \amalg S_2 | R_1 \amalg R_2 \rangle & i_2 : \langle S_2 | R_2 \rangle &\longrightarrow \langle S_1 \amalg S_2 | R_1 \amalg R_2 \rangle \\ [w] &\longmapsto \varphi[w] & [w] &\longmapsto \varphi[w] \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà dell'unione disgiunta si dimostra che $\langle S_1 \amalg S_2 | R_1 \amalg R_2 \rangle$ insieme alle mappe i_1 e i_2 è effettivamente un coprodotto di G_1 con G_2 . \square

Definizione 1.3.10 (Finitamente presentato). Sia G un gruppo. Diciamo che G è **finitamente presentato** se esistono S e R insiemi finiti tali che $G \cong \langle S | R \rangle$.

1.4 Il problema della parola

Definizione 1.4.1 (Problema della parola risolubile). Data una presentazione $\langle S | R \rangle$ diciamo che questa ha **problema della parola risolubile** se esiste un algoritmo che presa in input una parola $w \in (S \cup S^{-1})^*$ determina se questa è l'elemento neutro del gruppo.

Osserviamo come verificare se due parole rappresentano lo stesso elemento in $\langle S | R \rangle$ equivale a stabilire se la loro differenza in senso moltiplicativo è l'identità.

In questo contesto la parola *algoritmo* è informale: quello che richiediamo è una procedura che in un tempo finito permetta di risolvere il problema. Per

un approccio più rigoroso si veda [10].

Il problema della parola nella sua forma più generale non ha soluzione, neppure se ci si restringe ai gruppi finitamente presentati.

Teorema 1.4.2 (Novikov-Boon-Britton). *Esiste un gruppo finitamente presentato con problema della parola irrisolubile.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [10]. □

Per ovviare a questo problema ci si restringe allo studio di alcune classi particolari di gruppi. Un esempio importante sono i gruppi liberi.

Teorema 1.4.3. *I gruppi liberi hanno problema della parola risolubile.*

Dimostrazione. Sia S un insieme e $\langle S \rangle$ la presentazione del gruppo libero su S . Sia w una parola.

- Se w è la parola vuota abbiamo finito.
- Se w non è vuota ed è ridotta allora non è l'elemento neutro.
- Se w non è vuota e non è ridotta allora eliminiamo una sottoparola del tipo aa^{-1} oppure $a^{-1}a$ e ritorniamo al punto iniziale.

Ad ogni passo la lunghezza della parola diminuisce quindi il procedimento termina in tempo finito. □

Nel capitolo 3 introdurremo i gruppi iperbolicci e mostreremo che anch'essi hanno problema della parola risolubile.

1.5 Cenni di teoria dei grafi

Definizione 1.5.1 (Grafo). Un **grafo** Γ è una coppia (V, E) dove

- V è un insieme non vuoto.
- E è un sottoinsieme (possibilmente vuoto) di $V^{[2]} = \{e \subseteq V \mid |e| = 2\}$.

Gli elementi di V sono detti **vertici**, quelli di E sono detti **lati**.

Osservazione 1.5.2. La definizione data non tiene conto della presenza di loop (lati che hanno per estremi lo stesso vertice) e non tiene conto della presenza di più lati tra due vertici. Viene anche ignorata la possibile orientazione dei lati. Questo approccio segue [7] e ha il vantaggio di minimizzare la complessità combinatorica. In letteratura sono presenti molte altre definizioni che includono le varianti menzionate sopra. Un esempio in cui vengono usati grafi orientati è [11].

Chiamiamo **grado** di un vertice $v \in V$ il numero di vertici adiacenti ad esso, cioè la cardinalità di $\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$.

Un grafo può essere rappresentato graficamente in questo modo: a ogni vertice corrisponde un punto, e a ogni lato corrisponde un segmento congiungente i suoi vertici.

Esempio 1.5.3. Poniamo

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{5, 4\}\}.$$

Allora $\Gamma_1 = (V, E)$ è un grafo in cui, ad esempio, i vertici 5 e 4 sono adiacenti e il grado di 4 è 3. La rappresentazione grafica di Γ è in figura 1.1.

Altri esempi di grafi Figura (1.1) sono i seguenti:

$$\Gamma_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\})$$

$$\Gamma_3 = (\{1, \dots, 5\}, \{\{i, j\} \mid \forall i \neq j \in \{1, \dots, 5\}\})$$

$$\Gamma_4 = (\{1, \dots, 7\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{6, 7\}\})$$

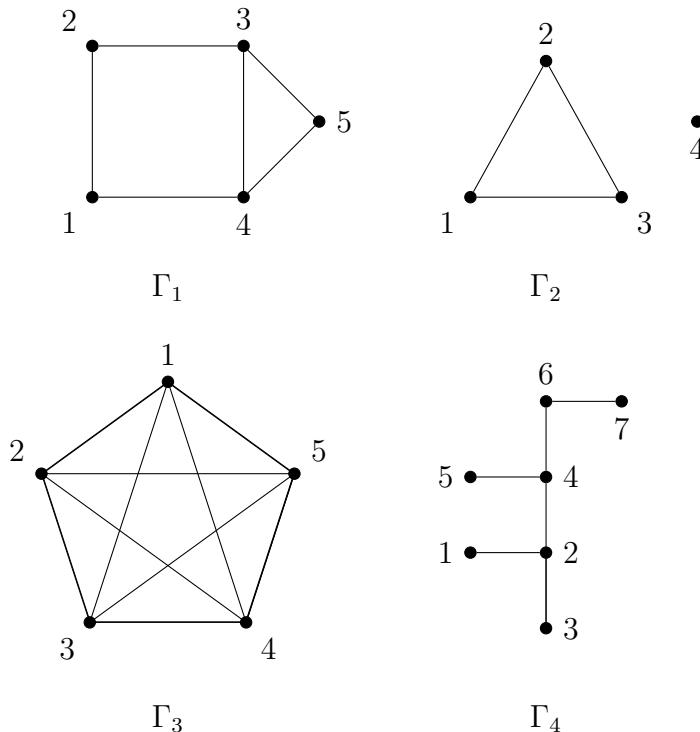
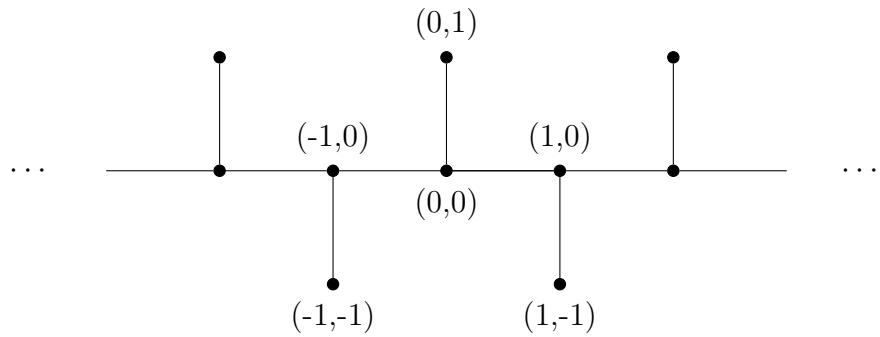


Figura 1.1: Rappresentazioni grafiche di Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4

Esempio 1.5.4 (Grafo infinito). Un esempio di grafo con un numero infinito di vertici è il seguente:

$$\begin{aligned}\Gamma_5 = & (\{(n, 0), (n, (-1)^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ & \{\{(n, 0), (n, (-1)^n)\}, \{(n, 0), (n+1, 0)\} \mid n \in \mathbb{Z}\})\end{aligned}$$

avente diagramma:



Definizione 1.5.5 (Cammino, cammino semplice). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un **cammino** in Γ di lunghezza $n \in \mathbb{N}$ è una lista ordinata di $n + 1$ vertici (v_0, \dots, v_n) tali che per ogni $i = 0, \dots, n - 1$ $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Un cammino è detto **semplice** se non ci sono ripetizioni nei vertici.

Definizione 1.5.6 (Grafo connesso). Un grafo è **connesso** se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li congiunge.

Esempio 1.5.7. I grafi Γ_1 , Γ_3 e Γ_4 dell'esempio 4 sono connessi, Γ_2 non lo è.

Proposizione 1.5.8. Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $v, w \in V$. Se esiste un cammino che congiunge v e w , allora esiste un cammino semplice che congiunge v e w .

Dimostrazione. Sia (v_0, \dots, v_n) un cammino tra v e w . Se in v_0, \dots, v_n non ci sono ripetizioni, allora è un cammino semplice. Altrimenti esistono $i, j \in \{0, \dots, n\}$ tali che $i < j$ e $v_i = v_j$. Allora si può considerare il cammino $(v_0, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$ di lunghezza minore di n . Induttivamente si ottiene un cammino semplice tra v e w . \square

Definizione 1.5.9 (Ciclo). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un **ciclo** in Γ è un cammino (v_0, \dots, v_n) in cui $v_0 = v_n$. Un ciclo è detto **semplice** se ha lunghezza $n \geq 3$ e, a meno degli estremi, non ci sono ripetizioni nei vertici.

Esempio 1.5.10. $(1, 4, 3, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 2, 3)$ sono cicli semplici rispettivamente in Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 dell'esempio 4.

Una famiglia particolarmente importante di grafi è costituita dagli alberi.

Definizione 1.5.11 (Albero). Un **albero** è un grafo connesso senza cicli semplici.

Esempio 1.5.12. Nelle notazioni precedenti i grafi Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 non sono alberi, Γ_4 e Γ_5 lo sono.

Proposizione 1.5.13 (Caratterizzazione degli alberi). *Un grafo è un albero se e solo se per ogni coppia di vertici esiste un unico cammino semplice che li congiunge.*

Dimostrazione. Sia Γ un albero e siano $v, v' \in V$ due vertici. Per ipotesi Γ è connesso, quindi per la proposizione 1.5.8 esiste un cammino semplice tra v e v' . Dimostriamo l'unicità. Siano $\gamma = (v_0, \dots, v_n)$ e $\gamma' = (v'_0, \dots, v'_m)$ due cammini semplici tra v e v' . Se $n = 0$, allora per l'assenza di ripetizioni in un cammino semplice $m = 0$. Supponiamo $n \geq 1$. Definiamo

$$i = \min\{k \in \{1, \dots, n\} \mid v_k \text{ è un vertice di } \gamma\}.$$

L'insieme è non vuoto poiché $v_n = v'_m$. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$ tale che $v_i = v'_j$. Se $i > 1$ oppure $j > 1$, allora

$$(v_0, \dots, v_i = v'_j, v'_{j-1}, \dots, v'_1)$$

è un cammino semplice di lunghezza $i + j - 1 \geq 2$, quindi è un ciclo. Dunque $i = j = 1$ e la tesi segue per induzione sui cammini (v_1, \dots, v_n) e (v'_1, \dots, v'_m) .

Viceversa supponiamo che ogni coppia di vertici sia connessa da esattamente un cammino semplice. Ovviamente Γ è connesso. Se (v_0, \dots, v_{n-1}) è un ciclo, allora (v_0, \dots, v_{n-1}) e (v_0, v_{n-1}) sono due cammini semplici distinti ($n \geq 3$) che congiungono v_0 e v_{n-1} . \square

Quando due grafi sono isomorfi? La risposta più sensata è quando, a meno di rinominare i vertici, le due strutture di grafo sono le stesse.

Definizione 1.5.14 (Isomorfismo di grafi). Siano $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ e $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ due grafi. Un **isomorfismo** tra Γ_1 e Γ_2 è una funzione biunivoca $f : V_1 \rightarrow V_2$ tale che

$$\forall \{v, w\} \in E_1^{[2]}, \{v, w\} \in E_1 \iff \{f(v), f(w)\} \in E_2.$$

Se $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, allora gli isomorfismi vengono chiamati **automorfismi**. L'insieme degli automorfismi di un grafo Γ viene indicato con $Aut(\Gamma)$.

Osservazione 1.5.15. La classe dei grafi insieme agli isomorfismi tra essi forma una categoria.

Osservazione 1.5.16. $Aut(\Gamma)$ forma un gruppo rispetto alla composizione.

La definizione di automorfismi di grafi permette di definire cosa significa per un gruppo agire su un grafo.

Definizione 1.5.17 (Azione di un gruppo su un grafo). Siano G un gruppo e $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un'**azione** di G su Γ è il dato di un morfismo di gruppi $G \rightarrow Aut(\Gamma)$.

Lo studio delle azioni di gruppi su grafi ha una teoria particolarmente ricca. A tale riguardo menzioniamo la teoria di Bass-Serre [11] che studia e classifica in modo completo le azioni di gruppi su alberi.

1.6 Grafi di Cayley

Lo scopo della teoria combinatorica dei gruppi è quello di studiare i gruppi associandogli degli invarianti di tipo combinatorico. Uno di questi invarianti è costituito dal grafo di Cayley.

Definizione 1.6.1 (Grafo di Cayley). Siano G un gruppo e sia $S \subseteq G$ un insieme di generatori per G . Chiamiamo **grafo di Cayley** il grafo

$$Cay(G, S) = (G, \{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}).$$

Osservazione 1.6.2. Per definizione $Cay(G, S) = Cay(G, S \cup S^{-1})$.

Osservazione 1.6.3. $Cay(G, S)$ è *regolare* nel senso che il grado di ogni vertice è costante ed uguale a $|(S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}|$.

Esempio 1.6.4.

- Su \mathbb{Z} possiamo considerare gli insiemi di generatori $\{1\}$ e $\{2, 3\}$, i due grafi di Cayley associati sono:

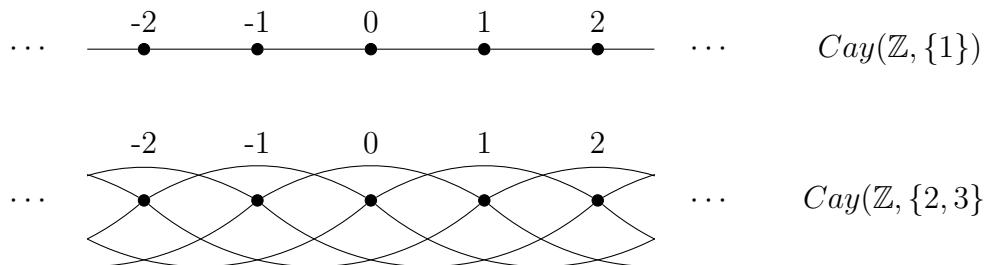
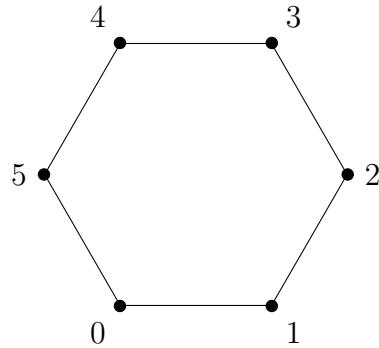


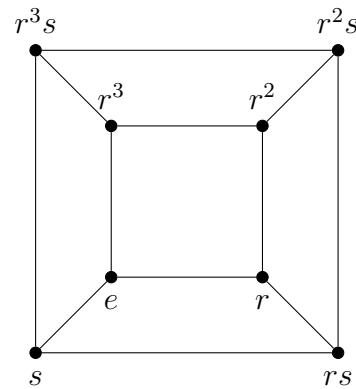
Figura 1.2: Alcuni grafi di Cayley di \mathbb{Z}

- $Cay(\mathbb{Z}/6, \{1\})$ è un esagono:

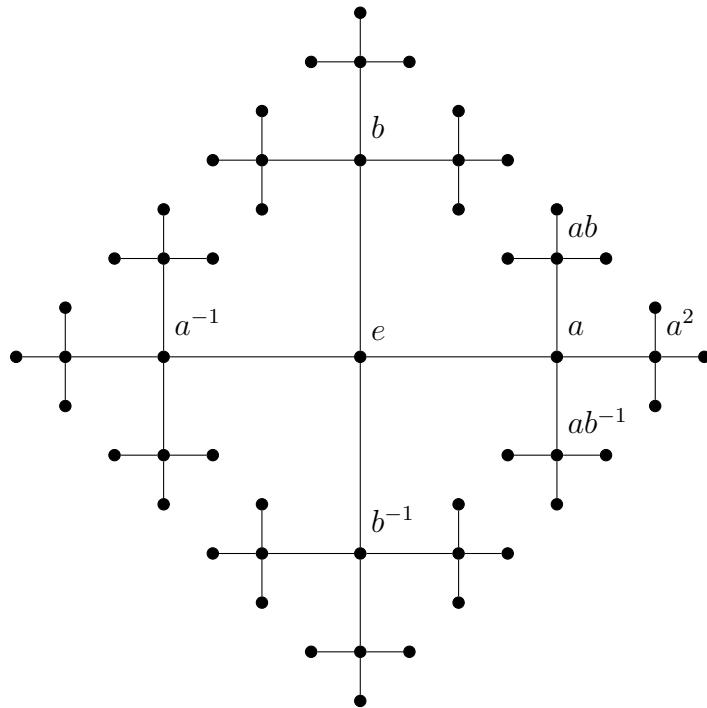
Figura 1.3: $Cay(\mathbb{Z}/n, \{1\})$

Analogamente $Cay(\mathbb{Z}/n, \{1\})$ è un n-agono. L'unica eccezione è costituita da $Cay(\mathbb{Z}/2, \{1\})$ che è un segmento: 

- Sia $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = (rs)^2 = e \rangle$. Allora $Cay(D_4, \{r, s\})$ è

Figura 1.4: $Cay(D_4, \{r, s\})$

- $Cay(F(a, b), \{a, b\})$ è un albero con una struttura ricorsiva:

Figura 1.5: $Cay(F(a, b), \{a, b\})$

Proposizione 1.6.5. Siano G un gruppo e $S \subseteq G$ un insieme di generatori. Allora $Cay(G, S)$ è connesso.

Dimostrazione. Siano $g, h \in G$. Scriviamo $g^{-1}h = s_1 \cdots s_n$ con $s_i \in S \cup S^{-1}$. Allora $(g, g \cdot s_1, g \cdot s_1 \cdot s_2, \dots, g \cdot s_1 \cdots s_n = h)$ è un cammino tra g e h . \square

L'idea alla base del grafo di Cayley è che ad ogni ciclo nel grafo corrisponde una relazione nei generatori. Sfruttando questa intuizione si ottiene la seguente proposizione.

Proposizione 1.6.6. Sia S un insieme. Allora $Cay(F(S), S)$ è un albero.

Dimostrazione. Usiamo la descrizione di $F(S)$ con le parole ridotte. Supponiamo esista un ciclo semplice $(g, g \cdot s_1, \dots, g \cdot s_1 \cdots s_{n-1}, g \cdot s_1 \cdots s_n)$. Poiché il ciclo è semplice si ha che la parola $s_1 \cdots s_n$ è ridotta. Per la condizione di ciclo $s_1 \cdots s_n = e$. Assurdo. \square

Capitolo 2

Teoria geometrica dei gruppi

In questo capitolo introdurremo gli strumenti principali della teoria geometrica dei gruppi. Partiremo con le definizioni di isometrie, equivalenze bilipschitziane e quasi-isometrie, mettendone in evidenza le principali differenze. Definiremo poi una metrica sui grafi connessi e la utilizzeremo per introdurre la metrica della parola sui gruppi. Daremo quindi le definizioni di spazi geodetici, spazi quasi-geodetici e realizzazione geometrica di un grafo, mostrando che quest'ultima è geodetica e quasi-isometrica al grafo stesso. Infine enunceremo e dimostreremo il lemma di Švarc-Milnor e ne daremo due interessanti corollari.

2.1 Quasi-isometrie

Iniziamo ricordando la definizione di spazio metrico.

Definizione 2.1.1 (Spazio metrico). Uno **spazio metrico** è il dato di un insieme X non vuoto e di una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, detta **metrica** o **distanza**, tali per cui valgono le seguenti proprietà:

1. Positività:

$$\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

2. Simmetria:

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x).$$

3. Disuguaglianza triangolare:

$$\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Quando non c'è ambiguità indichiamo con X lo spazio metrico sottintendendo la metrika d .

Per una trattazione completa sugli spazi metrici e sulla loro topologia si può vedere [8].

Vogliamo definire una categoria i cui oggetti sono gli spazi metrici. Quali dovrebbero essere i morfismi in questa categoria? La risposta non è scontata e varia a seconda del contesto. Le definizioni di morfismi per noi più interessanti sono tre. La prima è quella di immersione isometrica ed è la più rigida tra le tre. La seconda è quella di immersione bilipschitziana, meno rigida delle isometrie ma ancora abbastanza restrittiva. Infine la terza è quella di immersione quasi-isometrica che, oltre ad essere la più lasca, è quella che per noi sarà più interessante.

Definizione 2.1.2 (Immersione isometrica). Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. f è detta **immersione isometrica** se per ogni $x, x' \in X$ vale

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

Osserviamo che le immersioni isometriche sono iniettive. La classe degli spazi metrici insieme alle immersioni isometriche forma una categoria denotata **IMet**. Gli isomorfismi in **IMet** sono, per definizione, immersioni isometriche $f : X \rightarrow Y$ tali che esiste $g : Y \rightarrow X$ e valgono $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$. Si verifica facilmente che f è un isomorfismo se e solo se è una immersione isometrica suriettiva. Gli isomorfismi in **IMet** sono detti **isometrie**.

Definizione 2.1.3 (Immersione bilipschitziana). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Diciamo che f è una **immersione bilipschitziana** se esiste $c \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall x, x' \in X, \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x').$$

La composizione di immersioni bilipschitziane è ancora una immersione bilipschitziana. Infatti se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono immersioni bilipschitziane di costanti rispettivamente c e c' , allora per ogni $x, x' \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{c \cdot c'} \cdot d_X(x, x') &\leq \frac{1}{c'} \cdot d_Y(f(x), f(x')) \\ &\leq d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x), f(x')) \\ &\leq c \cdot c' \cdot d_X(x, x'). \end{aligned}$$

Gli spazi metrici insieme alle immersioni bilipschitziane formano quindi una categoria denotata **BMet**. Gli isomorfismi in **BMet** sono detti **equivalenze bilipschitziane**.

Osservazione 2.1.4. Le immersioni bilipschitziane sono iniettive e, come per le immersioni isometriche, si ha che un'immersione bilipschitziana è una equivalenza se e solo se è suriettiva.

In particolare si ha che sia le isometrie che le equivalenze bilipschitziane sono omeomorfismi rispetto alla topologia indotta dalle metriche. Quindi entrambi i tipi di isomorfismo ricordano le proprietà locali degli spazi considerati e sono abbastanza rigidi.

Definizione 2.1.5 (Immersione quasi-isometrica). Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. f è detta una **immersione quasi-isometrica** di costanti $c > 0$ e $b \geq 0$ se vale

$$\forall x, x' \in X, \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b.$$

Osservazione 2.1.6. Se esistono $c_1, c_2 > 0$ e $b_1, b_2 \geq 0$ tali che

$$\forall x, x' \in X, \frac{1}{c_1} \cdot d(x, x') - b_1 \leq d(f(x), f(x')) \leq c_2 \cdot d(x, x') + b_2$$

allora f è un'immersione quasi-isometrica. Infatti le costanti $c = \max(c_1, c_2)$ e $b = \max(b_1, b_2)$ verificano la definizione.

In modo analogo a quanto fatto sopra si mostra che composizione di immersioni quasi-isometriche è un'immersione quasi-isometrica. Si ottiene quindi la categoria **QMet'** i cui oggetti sono gli spazi metrici e i morfismi le immersioni quasi-isometriche.

Definizione 2.1.7 (Distanza finita tra funzioni). Siano X, Y spazi metrici e $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni. Diciamo che f e g hanno **distanza finita** se esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall x \in X, d(f(x), g(x)) \leq c.$$

Proposizione 2.1.8. *Una qualsiasi mappa che ha distanza finita da un'immersione quasi-isometrica è un'immersione quasi-isometrica.*

Dimostrazione. Siano $f : X \rightarrow Y$ un'immersione quasi-isometrica di costanti c, b e sia $g : X \rightarrow Y$ a distanza finita da f con costante $d \geq 0$. Per ogni $x, x' \in X$ si ha

$$\begin{aligned} d(g(x), g(x')) &\leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x')) + d(f(x'), g(x')) \\ &\leq d + c \cdot d(x, x') + b + d \\ &= c \cdot d(x, x') + 2d + b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 d(x, x') &\leq c \cdot d(f(x), f(x')) + c \cdot b \\
 &\leq c \cdot (d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x')) + d(g(x'), f(x'))) + c \cdot b \\
 &\leq c \cdot d(g(x), g(x')) + 2c \cdot d + c \cdot b.
 \end{aligned}$$

Quindi g è un'immersione quasi-isometrica. \square

Avere distanza finita è una relazione d'equivalenza sull'insieme dei morfismi tra due spazi metrici nella categoria **QMet'**. Vogliamo dimostrare che quoziendo i morfismi rispetto alla relazione si ottiene una categoria. La categoria quoziante è denotata **QMet**.

Proposizione 2.1.9. *Siano X, Y, Z spazi metrici e $f, g : X \rightarrow Y$ due mappe a distanza finita.*

1. *Se $h : Y \rightarrow Z$ è un'immersione quasi-isometrica, allora $h \circ f$ ha distanza finita da $h \circ g$.*
2. *Se $h : Z \rightarrow X$ è una mappa, allora $f \circ h$ ha distanza finita da $g \circ h$.*

Dimostrazione. Seguono entrambe in modo banale dalle definizioni. Supponiamo che per ogni $x \in X$ si abbia $d(f(x), g(x)) \leq d$.

1. Se le costanti di h sono c, b , allora per ogni $x \in X$ si ha

$$d(h(f(x)), h(g(x))) \leq c \cdot d(f(x), g(x)) + b \leq c \cdot d + b.$$

2. Sia $z \in Z$. Allora $d(f(h(z)), g(h(z))) \leq d$.

\square

Definiamo quindi la categoria **QMet** che ha come oggetti gli spazi metrici e come morfismi

$$\text{Hom}_{QMet}(X, Y) = \text{Hom}_{QMet'}(X, Y)/\text{distanza finita}.$$

La composizione è il passaggio al quoziante della composizione di funzioni:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{QMet}(X, Y) \times \text{Hom}_{QMet}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{QMet}(X, Z) \\
 ([f], [g]) &\longmapsto [f \circ g]
 \end{aligned}$$

dove X, Y, Z sono spazi metrici. La proposizione garantisce che tale mappa è ben posta.

Gli isomorfismi in **QMet** vengono chiamati **quasi-isometrie**. Per definizione una quasi-isometria tra due spazi metrici X e Y è una classe d'equivalenza $[f] \in \text{Hom}_{\text{QMet}}(X, Y)$, tale per cui esiste $[g] \in \text{Hom}_{\text{QMet}}(Y, X)$ e valgono $[f] \circ [g] = [\text{id}_Y]$ e $[g] \circ [f] = [\text{id}_X]$. In modo più esplicito una quasi-isometria è il dato di due immersioni quasi-isometriche $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ hanno distanza finita rispettivamente da id_Y e id_X . La seguente proposizione permette di caratterizzare le quasi-isometrie in modo più diretto.

Definizione 2.1.10 (Sottospazi quasi-densi). Siano X uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme. A è detto **quasi-denso** se esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall x \in X, \exists a \in A : d(x, a) \leq c.$$

Proposizione 2.1.11 (Caratterizzazione delle quasi-isometrie). *Siano X, Y spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ una mappa. Allora f è una quasi-isometria se e solo se è un'immersione quasi-isometrica con immagine quasi-densa.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una quasi-isometria. Allora esiste $g : Y \rightarrow X$ immersione quasi-isometrica tale che $f \circ g$ ha distanza finita da id_Y . Sia $c \geq 0$ tale che $d(f(g(y)), y) \leq c$ per ogni $y \in Y$. Allora $\text{Im}(f)$ è quasi-denso in Y . Viceversa supponiamo che f sia un'immersione quasi-isometrica con costanti (c, b) e che $\text{Im}(f)$ sia quasi-densa con costante d . Quindi per ogni $y \in Y$, esiste $g(y) \in X$ tale che $d(y, f(g(y))) \leq d$. Vogliamo mostrare che la funzione $g : Y \rightarrow X$ così costruita è una quasi-inversa di f . Per definizione di g la distanza tra $f \circ g$ e id_Y è al più d . Sia $x \in X$. Allora

$$\begin{aligned} d(g(f(x)), x) &\leq c \cdot d(f(g(f(x))), f(x)) + c \cdot b \\ &\leq c \cdot d + c \cdot d. \end{aligned}$$

Quindi $g \circ f$ ha distanza finita da id_X . Manca dimostrare che g è un'immersione quasi-isometrica. Siano $y, y' \in Y$. Segue che

$$\begin{aligned} d(y, y') &\leq d(y, f(g(y))) + d(f(g(y)), f(g(y'))) + d(f(g(y')), y') \\ &\leq c \cdot d(g(y), g(y')) + b + 2d. \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} c \cdot d(g(y), g(y')) - b &\leq d(f(g(y)), f(g(y'))) \\ &\leq d(f(g(y)), y) + d(y, y') + d(y', f(g(y'))) \\ &\leq 2d + d(y, y'). \end{aligned}$$

Riscrivendo la diseguaglianza si ottiene la tesi. \square

Se tra due spazi metrici esiste una quasi-isometria, allora diciamo che sono **quasi-isometrici**.

Osservazione 2.1.12. Segue dalle definizioni che ogni isometria è un'equivalenza bilipschitziana e che ogni equivalenza bilipschitziana è una quasi-isometria. In generale le inclusioni opposte sono false.

Esempio 2.1.13. L'esempio principale di quasi-isometria è dato dall'inclusione $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ e, più in generale, da $i : \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Entrambe le mappe sono infatti immersioni isometriche, quindi immersioni quasi-isometriche, e hanno entrambe immagine quasi densa. Ogni punto di \mathbb{R}^n dista al più 1 da un punto a coordinate intere. Più esplicitamente una quasi inversa dell'inclusione di \mathbb{Z} in \mathbb{R} è data da

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor\end{aligned}$$

Definizione 2.1.14 (Diametro). Siano X uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Chiamiamo **diametro** di A la quantità

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\}.$$

Diciamo che A è **limitato** se $\text{diam}(A) \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.1.15. *Sia X uno spazio metrico. Allora X è quasi-isometrico ad uno spazio metrico limitato se e solo se X è limitato. In particolare gli spazi metrici limitati formano un'unica classe di quasi-isometria.*

Dimostrazione. Siano Y uno spazio metrico limitato quasi-isometrico a X . Sia a la costante che limita la distanza in Y . Sia $f : Y \rightarrow X$ una quasi-isometria di costanti c e b . Allora per ogni $x, x' \in X$ si ha

$$\begin{aligned}d(x, x') &\leq c \cdot d(f(x), f(x')) + c \cdot b \\ &\leq c \cdot a + c \cdot b.\end{aligned}$$

Viceversa se X è limitato, allora X è quasi-isometrico a sé stesso. \square

Osserviamo come, al contrario delle isometrie e delle equivalenze bilipschitziane, le quasi-isometrie non sono in generale iniettive, suriettive, o continue e non mantengono informazioni locali come la dimensione.

2.2 Metrica della parola

Prima di definire una metrica sui gruppi finitamente generati definiamo il concetto più generale di metrica su un grafo connesso.

Definizione 2.2.1 (Metrica su grafi). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Definiamo $d_\Gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$d_\Gamma(v, w) = \min\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ è un cammino con estremi } v \text{ e } w\}$$

per ogni $v, w \in V$. Con $l(\gamma)$ indichiamo la lunghezza del cammino.

Proposizione 2.2.2. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Allora d_Γ è una metrica su V .*

Dimostrazione. Per definizione $d_\Gamma(v, w) \geq 0$ e $d_\Gamma(v, w) = 0$ se e solo se $v = w$. I cammini non sono orientati, quindi la simmetria di d_Γ è ovvia. Manca la disuguaglianza triangolare. Siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ e siano γ_1 e γ_2 cammini con estremi v_1, v_2 e v_2, v_3 rispettivamente che realizzano le distanze in Γ . Allora concatenando γ_1 con γ_2 si ottiene un cammino γ tra v_1 e v_3 di lunghezza $l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Quindi

$$d_\Gamma(v_1, v_3) \leq l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) = d_\Gamma(v_1, v_2) + d_\Gamma(v_2, v_3).$$

□

Osservazione 2.2.3. La topologia indotta da d_Γ su V è quella discreta.

Definizione 2.2.4 (Metrica della parola). Siano G e S come sopra. Definiamo la **metrica della parola** su G associata ad S come

$$\begin{aligned} d_S(g, h) &= d_{Cay(G, S)}(g, h) \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} : g^{-1} \cdot h = s_1 \cdots s_n\}. \end{aligned}$$

Esempio 2.2.5. Consideriamo \mathbb{Z} con l'insieme di generatori $\{1\}$. Allora la metrica della parola coincide con la metrica euclidea indotta da \mathbb{R} . Più in generale consideriamo \mathbb{Z}^n con insieme di generatori

$$S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

La metrica definita da S non è indotta dalla metrica euclidea, ma dalla metrica l_1 :

$$d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Osservazione 2.2.6. La metrica d_S è invariante per traslazioni a sinistra, cioè per ogni $g, h, t \in G$ si ha

$$d_S(g, h) = d_S(t \cdot g, t \cdot h).$$

Come cambia la metrica indotta su G cambiando insieme di generatori?

Proposizione 2.2.7. *Sia G un gruppo finitamente generato e siano $S, T \subseteq G$ due insiemi finiti di generatori. Allora $\text{id}_G : (G, d_S) \rightarrow (G, d_T)$ è un'equivalenza bilipschitziana. In particolare se G è bilipschitzianamente equivalente (o quasi-isometrico) a X spazio metrico rispetto ad un insieme finito di generatori, allora lo è rispetto ad ogni altro insieme finito di generatori.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che esiste $c \geq 0$ tale che per ogni $g, h \in G$ si ha

$$\frac{1}{c} \cdot d_S(g, h) \leq d_T(g, h) \leq c \cdot d_S(g, h).$$

Per ogni $g, h \in G$ si ha che $d_S(g, h) = d_S(g^{-1}h, e)$ e analogamente per d_T . Quindi possiamo dimostrare l'enunciato con $h = e$. Sia $g \in G$ e sia

$$g = s_1 \cdots s_n$$

la scrittura minimale di g con elementi di $S \cup S^{-1}$. Poiché S è finito si ha

$$c = \max\{d_T(s, e) \mid s \in S\} < +\infty.$$

Dall'invarianza per traslazioni si ottiene

$$\begin{aligned} d_T(g, e) &= d_T(s_1 \cdots s_n, e) \\ &\leq d_T(s_1 \cdots s_n, s_1 \cdots s_{n-1}) + d_T(s_1 \cdots s_{n-1}, s_1 \cdots s_{n-1}) + \\ &\quad + \dots + d_T(s_1, e) \\ &= d_T(s_n, e) + d_T(s_{n-1}, e) + \dots + d_T(s_1, e) \\ &\leq c \cdot n \\ &= c \cdot d_S(g, e). \end{aligned}$$

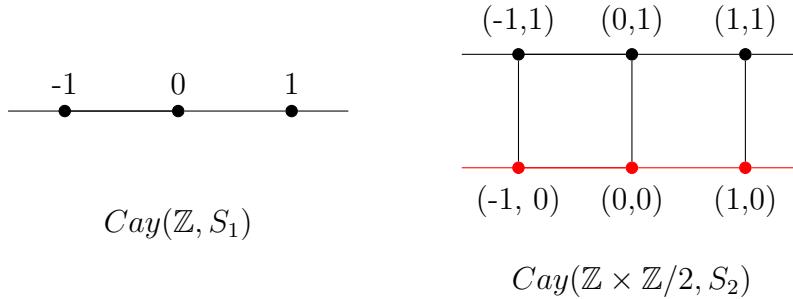
Invertendo i ruoli di S e T si ottiene l'altra disegualanza. \square

La classe di quasi-isometria di un gruppo finitamente generato è quindi indipendente dall'insieme (finito) di generatori scelto. Potremo quindi dire che G è quasi-isometrico a (X, d) , sottintendendo che tale isomorfismo è rispetto ad un qualsiasi insieme finito di generatori.

Esempio 2.2.8. Consideriamo i gruppi \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ dove con $\mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ indichiamo il gruppo abeliano con due elementi. Allora \mathbb{Z} è quasi-isometrico a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$. Infatti se si considera l'inclusione

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2 \\ k &\longmapsto (k, 0) \end{aligned}$$

allora questa è una immersione quasi-isometrica con immagine quasi densa. Possiamo vedere questo guardando i grafi di Cayley. I grafi di \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ rispetto agli insiemi di generatori $S_1 = \{1\}$ e $S_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ sono rispettivamente



L'inclusione i mappa isometricamente $Cay(\mathbb{Z}, S_1)$ nel sottografo di $Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2, S_2)$ disegnato in rosso in figura. Sempre dai grafi risulta ovvio come ogni punto del grafo di Cayley di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ sia a distanza al più uno dall'immagine di i .

2.3 Geodetiche e quasi-geodetiche

Definizione 2.3.1 (Geodetica). Sia (X, d) uno spazio metrico. Una **geodetica** in X è una isometria

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Se $I = [a, b]$, allora la quantità $b - a$ viene chiamata **lunghezza** della geodetica e i punti $\gamma(a), \gamma(b)$ vengono chiamati **estremi**. (X, d) è detto **geodetico** se per ogni coppia di punti in X esiste una geodetica con estremi quei punti.

Esempio 2.3.2. \mathbb{R} è geodetico. Infatti siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$. Poniamo

$$\begin{aligned} \gamma : [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot x + \frac{t}{L} \cdot y \end{aligned}$$

dove $L = y - x$. Un semplice calcolo mostra che γ è una geodetica.

Esempio 2.3.3. Analogamente all'esempio sopra si dimostra che \mathbb{R}^n è geodetico.

Le geodetiche appena descritte sono le uniche in \mathbb{R}^n .

Proposizione 2.3.4. *Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora, a meno di traslazioni nel dominio, l'unica geodetica che ha per punto iniziale x_0 e per punto finale y_0 è*

$$\begin{aligned}\gamma : [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (1 - \frac{t}{L}) \cdot x_0 + \frac{t}{L} \cdot y_0\end{aligned}$$

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che la curva γ è una geodetica. Sia $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una geodetica avente per estremi x_0 e y_0 . A meno di comporre con $t \mapsto t + a$ possiamo supporre $a = 0$ e $b = L$. Per ogni $t \in [0, L]$ vale

$$d(x_0, y_0) = L = d(x_0, \eta(t)) + d(\eta(t), y_0).$$

Necessariamente si deve avere $\eta(t)$ appartenente alla retta che congiunge x_0 e y_0 (altrimenti la diseguaglianza triangolare sarebbe stretta). Quindi esiste $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\eta(t) = (1 - \alpha(t))x_0 + \alpha(t)y_0.$$

Per ipotesi η è una geodetica, quindi vale

$$|t| = \|(1 - \alpha(t))x_0 + \alpha(t)y_0 - x_0\| = |\alpha(t)| \|y_0 - x_0\| = L|\alpha(t)|.$$

In particolare esiste $\varepsilon : [0, L] \rightarrow \{\pm 1\}$ tale che

$$\alpha(t) = \varepsilon(t) \cdot \frac{t}{L}.$$

Per continuità ε è costante e, siccome $\alpha(L) = 1$, vale $\varepsilon(t) = 1$. η è quindi della forma cercata. \square

Esempio 2.3.5. Un altro esempio di spazio geodetico in cui si possono classificare tutte le geodetiche è il piano iperbolico \mathbb{H}^2 . Per una dimostrazione si veda [7].

Osservazione 2.3.6. \mathbb{R}^n con la metrica euclidea e \mathbb{H}^2 sono due esempi in cui dati due punti esiste un'unica geodetica che li congiunge. Questo non è sempre vero. Per un controsenso si può considerare \mathbb{R}^2 con la metrica

$$d_1((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$$

In (\mathbb{R}^2, d_1) una qualsiasi curva definita a "gradini" è una geodetica.

In modo analogo alla definizione di geodetica diamo la definizione di quasi-geodetica.

Definizione 2.3.7 (Quasi-geodetica). Siano (X, d) uno spazio metrico, $c > 0$ e $b \geq 0$. Una **quasi-geodetica** di costanti (c, b) (o una (c, b) -quasi-geodetica) è una immersione quasi-isometrica

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

di costanti (c, b) dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Se $I = [a, b]$ diciamo che γ congiunge, o ha per estremi, i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. (X, d) è detto **quasi-geodetico** di costanti (c, b) (o (c, b) -quasi-geodetico) se per ogni coppia di punti esiste una (c, b) -quasi-geodetica che li congiunge. (X, d) è detto quasi-geodetico se esistono costanti (c, b) tali per cui è (c, b) -quasi-geodetico.

Proposizione 2.3.8. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Allora (V, d_Γ) è $(1, 1)$ -quasi-geodetico.*

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$ e sia $(v_0 = v, \dots, v_n = w)$ un cammino (semplice) in Γ di lunghezza minima che congiunge v e w . In particolare $n = d_\Gamma(v, w)$. Poniamo

$$\begin{aligned} \gamma : [0, n] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \begin{cases} v_i & \text{se } t \in [i, i+1[\text{ con } 0 \leq i \leq n-1 \\ v_n & \text{se } t = n \end{cases}. \end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che γ è una $(1, 1)$ -quasi-geodetica. Siano $0 \leq a \leq b \leq n$. Siano $i, j \in \{0, \dots, n\}$ tali che $i \leq a < i+1$ e $j \leq b < j+1$. Allora

$$d_\Gamma(\gamma(a), \gamma(b)) = d_\Gamma(v_i, v_j) = j - i$$

dove l'ultima disegualanza deriva dal fatto che se esistesse un cammino di lunghezza minore di $j - i$ che congiunge v_i con v_j , allora esisterebbe un cammino di lunghezza minore di n che congiunge v con w . Si ha

$$b - 1 - a \leq j - i \leq b - a + 1.$$

Quindi γ è una $(1, 1)$ -quasi-geodetica. □

Corollario 2.3.9. *Sia G un gruppo e $S \subseteq G$ un insieme di generatori. Allora (G, d_S) è quasi-geodetico.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che d_S coincide con $d_{Cay(G, S)}$. □

Osserviamo come un grafo in generale non è quasi mai geodetico. Infatti se ha più di un vertice la topologia indotta dalla metrica è quella discreta. Risulta quindi comodo associare uno spazio metrico, che dimostreremo poi essere geodetico, al grafo in questione. L'idea è molto semplice: incollare i lati del grafo ai vertici e poi definire una distanza incollando le distanze dei vari intervalli.

Definizione 2.3.10 (Realizzazione geometrica di un grafo). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. La **realizzazione geometrica** di Γ è l'insieme

$$|\Gamma| = \frac{\coprod_{\{v,w\} \in E} [0, 1] \times \{(v, w), (w, v)\}}{\sim}$$

dove \sim è la relazione d'equivalenza generata dalle relazioni

$$\begin{aligned} (0, (v, w)) &\sim (0, (v, w')) \\ (0, (v, w)) &\sim (1, (v', v)) \\ (1, (v, w)) &\sim (0, (w, w')) \\ (1, (v, w)) &\sim (0, (v', w)) \\ (t, (v, w)) &\sim (1 - t, (w, v)) \end{aligned}$$

con $v, w, v', w' \in V$ e $t \in [0, 1]$ sono tali per cui sono definite le formule.

Il motivo della presenza di due segmenti per lato è l'assenza di un'orientazione per Γ . Considerato un lato in Γ questo non ha un'orientazione naturale come l'intervallo $[0, 1]$. Quindi aggiungiamo i due segmenti con le due orientazioni possibili per poi incollarli tra loro percorrendoli nei versi opposti. Questo è dato dalla quinta relazione. Le prime quattro assicurano che gli estremi vengano incollati nel modo naturale.

Per semplicità di notazione indichiamo con (t, v, w) la classe $[(t, (v, w))]$.

Vogliamo rendere $|\Gamma|$ uno spazio metrico. Definiamo

$$\begin{aligned} d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t', v', w')) &= \\ &= \begin{cases} |t - t'| & \text{se } (v, w) = (v', w') \\ |t - (1 - t')| & \text{se } (v, w) = (w', v') \\ \min(t + d_\Gamma(v, v') + t', & \text{se } \{v, w\} \neq \{v', w'\} \\ t + d_\Gamma(v, w') + 1 - t', \\ 1 - t + d_\Gamma(w, v') + t' \\ 1 - t + d_\Gamma(w, w') + 1 - t' \end{cases} \end{aligned}$$

La buona definizione segue dal fatto che $d_{|\Gamma|}$ è invariante rispetto alle relazioni che generano \sim . La simmetria e la positività della metrica sono immediate. L'unica proprietà non banale è la disuguaglianza triangolare.

Proposizione 2.3.11. $d_{|\Gamma|}$ verifica la disuguaglianza triangolare.

Dimostrazione. Siano $(t, v, w), (t', v', w'), (t'', v'', w'') \in |\Gamma|$. Supponiamo che $\{v, w\} \neq \{v', w'\}$, $\{v', w'\} \neq \{v'', w''\}$ e $\{v, w\} \neq \{v'', w''\}$. Non è restrittivo supporre valgano

$$\begin{aligned} d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t', v', w')) &= t + d_\Gamma(v, v') + t' \\ d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t'', v'', w'')) &= t + d_\Gamma(v, v'') + t'' \\ d_{|\Gamma|}((t', v', w'), (t'', v'', w'')) &= t' + d_\Gamma(v', v'') + t''. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t', v', w')) &= t + d_\Gamma(v, v') + t' \\ &\leq t + d_\Gamma(v, v'') + d_\Gamma(v'', v') + t' \\ &\leq t + d_\Gamma(v, v'') + t'' + t'' + d_\Gamma(v'', v') + t' \\ &= d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t'', v'', w'')) + \\ &\quad d_{|\Gamma|}((t'', v'', w''), (t', v', w')). \end{aligned}$$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare su \mathbb{R} si dimostrano in modo analogo gli altri casi. \square

Esempio 2.3.12.

- La realizzazione geometrica del grafo con due vertici e un lato è isometrica al segmento $[0, 1]$.
- La realizzazione geometrica di $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ è isometrica a \mathbb{R} .

Osservazione 2.3.13. Su $|\Gamma|$ ci sono due topologie naturali. La prima è quella data dalla topologia quoziente, la seconda quella indotta dalla metrica. Si può dimostrare che se ogni vertice ha grado finito, allora le topologie coincidono. Se invece un vertice ha grado infinito, allora la topologia quoziente è strettamente più fine di quella indotta dalla metrica. Quello che si può dimostrare è che, con la topologia quoziente, $|\Gamma|$ non è metrizzabile se un vertice ha grado infinito. Per vederlo consideriamo

$$X = ([0, 1] \times \mathbb{N}) / ((0, k) \sim (0, 0) \text{ per } k \in \mathbb{N})$$

dotato della topologia quoziente con mappa quoziente $\pi : [0, 1] \times \mathbb{N} \rightarrow X$. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di intorni di $[(0, 0)]$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\pi^{-1}(U_n) = \coprod_{k \in \mathbb{N}} U_n^{(k)} \times \{k\}$$

con $U_n^{(k)} \subseteq [0, 1]$ intorno aperto di 0. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $V_n \subseteq [0, 1]$ intorno aperto di 0 contenuto strettamente in $U_n^{(n)}$. Allora

$$\pi\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} V_n \times \{n\}\right)$$

è un intorno aperto di $[(0, 0)]$ che non contiene nessuno degli U_n . Quindi $[(0, 0)]$ non possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile e X non è metrizzabile.

In particolare se G gruppo è finitamente generato da S , allora ogni vertice ha grado finito e le topologie coincidono.

Proposizione 2.3.14. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso e $|\Gamma|$ la sua realizzazione geometrica. Allora (V, d_Γ) è quasi-isometrica a $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ tramite un'immersione isometrica.*

Dimostrazione. Se V contiene un solo elemento la dimostrazione è banale. Supponiamo $|V| \geq 2$. Allora, per connessione, per ogni $v \in V$ esiste $w_v \in V$ tale che $\{v, w_v\} \in E$. Poniamo

$$\begin{aligned} i : V &\hookrightarrow |\Gamma| \\ v &\mapsto (0, v, w_v). \end{aligned}$$

Segue in modo immediato dalla definizione di $d_{|\Gamma|}$ che i è un'immersione isometrica. Inoltre ogni punto di $|\Gamma|$ ha distanza al più $1/2$ dall'immagine di i . Quindi i è un'immersione isometrica con immagine quasi-densa ed è una quasi-isometria. \square

Lemma 2.3.15 (Concatenazione di geodetiche). *Siano (X, d) uno spazio metrico e $\gamma_1 : [0, L_1] \rightarrow X, \dots, \gamma_n : [0, L_n] \rightarrow X$ geodetiche tali che per ogni $i = 1, \dots, n - 1$ si ha $\gamma_i(L_i) = \gamma_{i+1}(0)$. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ poniamo $S_i = \sum_{k=1}^i L_k$ e $S_0 = 0$. Definiamo*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, S_n] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma_i(t - S_{i-1}) \text{ per } t \in [S_{i-1}, S_i]. \end{aligned}$$

Se

$$d(\gamma(0), \gamma(S_n)) = S_n,$$

allora γ è una geodetica.

Dimostrazione. Siano $a, b \in [0, S_n]$ tali che $a \leq b$. Siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tali che

$$\begin{aligned} S_{i-1} &\leq a \leq S_i \\ S_{j-1} &\leq b \leq S_j. \end{aligned}$$

Se $i = j$, allora la tesi segue dal fatto che γ_i è una geodetica. Supponiamo quindi $i < j$. Si ha

$$\begin{aligned} d(\gamma(a), \gamma(b)) &\leq d(\gamma(a), \gamma(S_i)) + d(\gamma(S_i), \gamma(S_{i+1})) + \dots + \\ &\quad + d(\gamma(S_{j-2}), \gamma(S_{j-1})) + d(\gamma(S_{j-1}), b) \\ &= d(\gamma_i(a - S_{i-1}), \gamma_i(L_i)) + d(\gamma_{i+1}(0), \gamma_{i+1}(L_{i+1})) + \dots + \\ &\quad + d(\gamma_{j-1}(0), \gamma_{j-1}(L_{j-1})) + d(\gamma_j(0), \gamma_j(b - S_{j-1})) \\ &= L_i - a + S_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_{j-1} + b - S_{j-1} \\ &= b - a + S_{j-1} - S_{j-1} \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che $d(\gamma(a), \gamma(b)) < b - a$. Allora

$$\begin{aligned} S_n &= d(\gamma(0), \gamma(S_n)) \\ &\leq d(\gamma(0), \gamma(a)) + d(\gamma(a), \gamma(b)) + d(\gamma(b), \gamma(S_n)) \\ &\leq a + d(\gamma(a), \gamma(b)) + S_n - b \\ &< a + b - a + S_n - b \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Assurdo. □

Teorema 2.3.16. *Sia Γ un grafo connesso. Allora $(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$ è geodetico.*

Dimostrazione. Siano $(t, v, w), (t', v', w') \in |\Gamma|$.

Supponiamo $\{v, w\} = \{v', w'\}$. A meno di scambiare i vertici possiamo supporre $v = v'$ e $w = w'$. Allora

$$\begin{aligned} \gamma : [0, |t' - t|] &\longrightarrow |\Gamma| \\ s &\longmapsto ((1-t)\frac{s}{|t' - t|} + t'\frac{s}{|t' - t|}, v, w) \end{aligned}$$

è la geodetica cercata.

Supponiamo $\{v, w\} \neq \{v', w'\}$. Non è restrittivo supporre che

$$d_{|\Gamma|}((t, v, w), (t', v', w')) = t + d_\Gamma(v, v') + t'.$$

Sia $(v_0 = v, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v')$ un cammino di lunghezza minima in Γ che congiunge v con v' . Definiamo per $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\gamma_i : [0, 1] &\longrightarrow |\Gamma| \\ s &\longmapsto (s, v_{i-1}, v_i)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha : [0, t] &\longrightarrow |\Gamma| \\ s &\longmapsto (t - s, v, w) \\ \beta : [0, t'] &\longrightarrow |\Gamma| \\ s &\longmapsto (s, v', w').\end{aligned}$$

Per la prima parte della dimostrazione tutti i cammini definiti sono geodetiche. Sono verificate le condizioni del lemma 2.3.15. La concatenazione di $\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \beta$ è quindi una geodetica che congiunge (t, v, w) e (t', v', w') . \square

2.4 Lemma di Švarc-Milnor

Il lemma di Švarc-Milnor è molto spesso definito per la sua importanza il teorema fondamentale della teoria geometrica dei gruppi. Esso fornisce un ponte tra la teoria delle quasi-isometrie vista finora e la geometria più classica. Il teorema permette infatti di determinare la classe di quasi-isometria di un gruppo studiando come questo agisce tramite isometrie su spazi metrici. I suoi corollari sono altrettanto notevoli e ne menzioneremo un paio alla fine della sezione. Per approfondire l'argomento si può consultare [4].

Teorema 2.4.1 (Lemma di Švarc-Milnor). *Sia G un gruppo che agisce per isometrie su uno spazio metrico X . Supponiamo che X sia (c, b) -quasi-geodetico e che esista $A \subseteq X$ tale che:*

1. *Il diametro di A è finito.*
2. *I traslati di A tramite G ricoprono X , cioè $\bigcup_{g \in G} g \cdot A = X$.*
3. *L'insieme $S = \{g \in G \mid (g \cdot A') \cap A'\}$ è finito, dove*

$$A' = \overline{B}_{2b}(A) = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(a, x) \leq 2b\}.$$

Allora G è generato da S (in particolare è finitamente generato) e per ogni $x \in X$ la mappa

$$\begin{aligned}\alpha_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

è una quasi-isometria.

Dimostrazione. Dimostriamo che G è generato da S .

Siano $g \in G$ e $x \in A$. X è (c, b) -quasi-geodetico, quindi esiste una quasi-geodetica $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ di costanti c, b che congiunge x e $g \cdot x$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$(n-1)\frac{b}{c} < L \leq n\frac{b}{c}.$$

Per $i \in \{0, \dots, n-1\}$ poniamo

$$t_i = i\frac{b}{c}$$

e definiamo $t_n = L$. Siano $x_i = \gamma(t_i)$. I traslati di A ricoprono X , quindi per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$, esiste $g_i \in G$ tale che $x_i \in g_i \cdot A$. In particolare possiamo scegliere $g_0 = e$ e $g_n = g$. Si ha

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i-1}) &= d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \\ &\leq c \cdot (t_i - t_{i-1}) + b \\ &\leq c \cdot \frac{c}{b} + b \\ &= 2b. \end{aligned}$$

Quindi

$$x_i \in g_i A \cap \overline{B}_{2b}(g_{i-1} A) = g_i A \cap g_{i-1} A' \subseteq g_i A' \cap g_{i-1} A'$$

dove per la prima uguaglianza abbiamo usato il fatto che G agisce per isometrie. Quindi

$$g_{i-1}^{-1} g_i A' \cap A' \neq \emptyset.$$

Dunque per ogni i esiste $s_i \in S$ tale che $g_{i-1}^{-1} g_i = s_i$, cioè $g_i = g_{i-1} s_i$. Per induzione otteniamo $g = g_n = e \cdot s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_n$ con $s_i \in S$.

Dimostriamo che la mappa α_x è una quasi-isometria. Mostriamo che α_x è un'immersione quasi-isometrica con immagine quasi densa. Osserviamo che siccome G agisce per isometrie e i traslati di A ricoprono X , allora non è restrittivo supporre $x \in A$. Infatti esiste $g_0 \in G$ tale che $g_0 x \in A$. Componendo α_x con l'isometria

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto gg_0 \end{aligned}$$

otteniamo $\alpha_{g_0 x}$. In particolare α_x è un'immersione quasi-isometrica se e solo se lo è $\alpha_{g_0 x}$. Supponiamo quindi $x \in A$.

La mappa α_x ha immagine quasi-densa. Sia $x' \in X$. Esiste $g \in G$ tale che $x' \in gA$. Allora

$$d(x', \alpha_x(g)) = d(x', gx) \leq \text{diam}(gA) = \text{diam}(A).$$

Per ipotesi $\text{diam}(A)$ è finito, da cui si ottiene $Im(\alpha_x)$ quasi-densa.

La mappa α_x è un'immersione quasi-isometrica. Diamo prima una stima di $d(\alpha_x(g), \alpha_x(e))$ per ogni $g \in G$. Siano $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ la (c, b) -quasi-geodetica usata nella prima parte della dimostrazione e n sempre come sopra. Allora

$$\begin{aligned} d(\alpha_x(e), \alpha_x(g)) &= d(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{L}{c} - b \\ &> \frac{b}{c^2}(n-1) - b \\ &\geq \frac{b}{c^2}d_S(e, g) - \frac{b}{c^2} - b. \end{aligned}$$

Supponiamo che $m = d_S(e, g)$. Esistono quindi $s_1, \dots, s_m \in S \cup S^{-1}$ tali che $g = s_1 \cdots s_m$. Si ottiene

$$\begin{aligned} d(x, g \cdot x) &= d(x, s_1 \cdots s_m \cdot x) \\ &\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + \dots + \\ &\quad d(s_1 \cdots s_{m-1} \cdot x, s_1 \cdots s_m \cdot x) \\ &= d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \dots + d(x, s_m \cdot x) \\ &\leq 2m(\text{diam}(A) + 2b) \\ &= 2(\text{diam}(A) + 2b) \cdot d_S(e, g) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che G agisce per isometrie su X e che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ si ha, per definizione di S , $A' \cap s_i A' \neq \emptyset$. La tesi per $g, h \in G$ arbitrari segue applicando quanto appena visto e usando le proprietà

$$\begin{aligned} d_S(g, h) &= d(e, h^{-1}g) \\ d(g \cdot x, h \cdot x) &= d(h^{-1}g \cdot x). \end{aligned}$$

Usiamo anche l'osservazione 2.1.6. Abbiamo quindi dimostrato che α_x è una quasi-isometria. \square

Osservazione 2.4.2. Il lemma di Švarc-Milnor fornisce solo una quasi isometria, non un'equivalenza bilipschitziana e né tantomeno una isometria. Infatti l'azione di \mathbb{Z} su \mathbb{R} verifica tutte le ipotesi del teorema ma \mathbb{Z} e \mathbb{R} non sono né isometrici né bilipschitzianamente equivalenti.

Diamo una versione più geometrica del lemma di Švarc-Milnor, comunemente usata nelle applicazioni. Prima di enunciare il teorema è necessario dare qualche definizione preliminare.

Definizione 2.4.3 (Spazio metrico proprio). Sia (X, d) uno spazio metrico. (X, d) è detto **proprio** se le palle chiuse $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ sono compatte.

Esempio 2.4.4. \mathbb{R}^n con la metrica euclidea è proprio.

Proposizione 2.4.5. *Sia G un gruppo e $S \subseteq G$ un insieme di generatori. (G, d_S) è proprio se e solo se S è finito.*

Dimostrazione. Se S è finito, allora le palle chiuse sono finite e quindi compatte. Se S non è finito, allora la palla chiusa unitaria B coincide con $S \cup S^{-1} \cup \{e\}$. In particolare B è infinito. La topologia indotta da d_S su G è quella discreta, quindi B non è compatto. \square

Definizione 2.4.6 (Azione propria). Siano G un gruppo discreto e X uno spazio topologico. Supponiamo G agisca su X per omeomorfismi. Tale azione è detta **propria** se per ogni $K \subseteq X$ sottospazio compatto, l'insieme

$$\{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$$

è finito.

Per una trattazione più approfondita delle azioni di gruppi su spazi topologici si guardi [8].

Esempio 2.4.7. L'azione di \mathbb{Z} su \mathbb{R} data dalle traslazioni è propria.

Definizione 2.4.8 (Azione cocompatta). Siano G un gruppo e X uno spazio topologico. Supponiamo G agisca su X per omeomorfismi. Tale azione è detta **cocompatta** se lo spazio quoziante $G \backslash X$ è compatto.

Esempio 2.4.9. Il quoziante di \mathbb{R} rispetto all'azione per traslazioni di \mathbb{Z} è omeomorfo a S^1 , quindi l'azione è cocompatta.

Corollario 2.4.10 (Versione geometrica del lemma di Švarc-Milnor). *Siano X uno spazio metrico geodetico e G un gruppo che agisce per isometrie su X . Se X è proprio e l'azione di G su X è propria e cocompatta, allora G è finitamente generato e per ogni $x \in X$ la mappa*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è una quasi-isometria.

Dimostrazione. Dimostriamo che sono verificate le ipotesi di 2.4.1. Sia

$$\pi : X \longrightarrow G \setminus X$$

la proiezione al quoziante. π è aperta (si veda [8]), quindi

$$\{\pi B(x, 1) \mid x \in X\}$$

è un ricoprimento aperto di $G \setminus X$. L'azione è cocompatta, quindi esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che

$$G \setminus X = \bigcup_{i=1}^n \pi B(x_i, 1).$$

Poniamo

$$A = \bigcup_{i=1}^n \overline{B}_1(x_i).$$

X è proprio, quindi A è compatto. In particolare A ha diametro finito. Per definizione A contiene un insieme di rappresentanti rispetto all'azione di G , quindi i suoi traslati ricoprono X . Infine, usando l'ipotesi che l'azione è propria, si ha che

$$\{g \in G \mid (g \cdot A) \cap A \neq \emptyset\}$$

è finito. Sfruttando che X è $(1, 0)$ -quasi-geodetico possiamo applicare il lemma di Švarc-Milnor. \square

Il primo corollario che enunciamo è relativo al tipo di quasi-isometria di un gruppo.

Corollario 2.4.11. *Siano G un gruppo e $H \leqslant G$ un sottogruppo di indice finito. Allora G è finitamente generato se e solo se H lo è. In tal caso l'inclusione $i : H \hookrightarrow G$ è una quasi-isometria.*

Dimostrazione. Se H è finitamente generato, allora un suo insieme finito di generatori unito ad un insieme di rappresentanti delle sue classi laterali in G genera il gruppo. Viceversa supponiamo G finitamente generato e consideriamo l'azione di H su G data dalla moltiplicazione a sinistra. L'invarianza della metrica su G per traslazioni implica che H agisce per isometrie. Per la proposizione 2.3.8, G è $(1, 1)$ -quasi-geodetico. Sia $B \subseteq G$ un insieme di rappresentanti per l'azione. H ha indice finito, quindi B è finito. In particolare B ha diametro finito. Per definizione i traslati di B ricoprono G . Siccome G è finito, l'insieme

$$B' = \{g \in G \mid \exists b \in B : d(b, g) \leq 2\}$$

è finito. Di conseguenza anche

$$S = \{h \in H \mid h \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

è finito. Infatti se $h \in S$, allora esistono $b_h, b'_h \in B'$ tali che $h \cdot b_h = b'_h$. Quindi $h = b'_h \cdot b_h^{-1}$. B' è finito, quindi gli elementi della forma $b'b^{-1}$ con $b, b' \in B$ sono in numero finito. Si può quindi applicare Švarc-Milnor ottenendo che H è finitamente generato e che l'inclusione i è una quasi-isometria.

□

Osservazione 2.4.12. Senza usare il lemma di Švarc-Milnor non è affatto ovvio che G finitamente generato implichi H finitamente generato.

Come secondo corollario menzioniamo un risultato in geometria Riemanniana. Daremo solo un cenno della dimostrazione in quanto una prova completa richiederebbe di introdurre numerosi concetti di geometria differenziale. Per una esposizione dettagliata si può vedere [4].

Teorema 2.4.13. *Siano M una varietà Riemanniana chiusa (compatta, connessa e senza bordo) e \widetilde{M} il suo rivestimento universale. Allora $\pi_1(M)$ è quasi-isometrico a \widetilde{M} .*

Dimostrazione. Si dimostra che l'azione di rivestimento di $\pi_1(M)$ su \widetilde{M} è propria e cocompatta. È cocompatta in quanto il quoziente è M . Si dimostra che è propria usando solo le proprietà di rivestimento. La struttura di varietà Riemanniana indotta su \widetilde{M} fa sì che l'azione sia per isometrie. Usando tecniche di geometria Riemanniana si dimostra che \widetilde{M} è proprio. È possibile quindi applicare la versione geometrica del lemma di Švarc-Milnor. □

Corollario 2.4.14. *I gruppi fondamentali delle superfici orientabili di genere almeno 2 sono quasi-isometrici al piano iperbolico.*

Dimostrazione. Diamo solo un cenno della dimostrazione.

Le superfici di genere almeno due possono essere costruite a partire dal piano iperbolico come quozienti rispetto ad un gruppo di isometrie. La proiezione al quoziente diventa una mappa di rivestimento e si può applicare il teorema precedente. □

Capitolo 3

Spazi e gruppi iperbolici

In quest'ultimo capitolo definiamo e studiamo spazi e gruppi iperbolici. Iniziamo dando la definizione di spazio iperbolico tramite triangoli sottili, per poi passare al linguaggio delle quasi-isometrie e definire in modo analogo gli spazi quasi-iperbolici. Dimostriamo poi il teorema di stabilità, uno dei risultati fondanti della teoria degli spazi iperbolici. Usando la metrica della parola definiamo i gruppi iperbolici e dimostriamo che questa proprietà è equivalente all'iperbolicità del grafo di Cayley. Dimostriamo che il prodotto libero di gruppi iperbolici è iperbolico, dando così un modo induuttivo per costruire esempi di gruppi iperbolici. Infine definiamo le presentazioni di Dehn, dimostriamo che esse hanno problema della parola risolubile e che i gruppi iperbolici ammettono tale tipo di presentazioni.

3.1 Spazi iperbolici e quasi-iperbolici

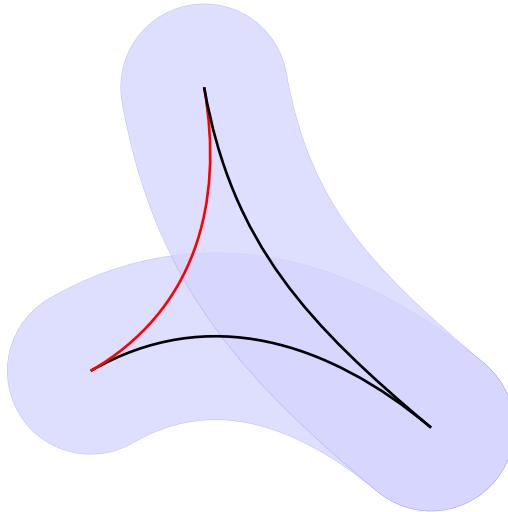
Definizione 3.1.1 (Triangolo geodetico). Sia X uno spazio metrico. Un **triangolo geodetico** T è una tripla $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tale che per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ $\gamma_i : [0, L_i] \rightarrow X$ è una geodetica e valgono

$$\gamma_1(L_1) = \gamma_2(0) \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_3(0) \quad \gamma_3(L_3) = \gamma_1(0).$$

Per semplicità di notazione se γ è una curva indichiamo con γ sia la funzione che la sua immagine.

Definizione 3.1.2 (Triangoli geodetici δ -sottili). Siano X uno spazio metrico, $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triangolo geodetico e $\delta \geq 0$. T è detto **δ -sottile** se valgono

$$\gamma_1 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_2 \cup \gamma_3) \quad \gamma_2 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_3 \cup \gamma_1) \quad \gamma_3 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_2 \cup \gamma_1).$$

Figura 3.1: Triangolo δ -sottile

Definizione 3.1.3 (Spazi iperbolici). Sia X uno spazio metrico.

1. Sia $\delta \geq 0$. X è detto **δ -iperbolico** se è geodetico e ogni suo triangolo geodetico è δ -sottile.
2. X è detto **iperbolico** se esiste $\delta \geq 0$ tale che è δ -iperbolico.

Il primo a definire il concetto di iperbolicità negli spazi metrici è stato il matematico russo Mikhael Gromov nel suo articolo [3]. La sua definizione è diversa da quella data sopra, che invece è attribuita da Gromov stesso a Ilya Rips. Per una trattazione completa delle due definizioni e una dimostrazione della loro equivalenza in spazi geodetici si può consultare [1].

Proposizione 3.1.4. \mathbb{R}^n con la metrika euclidea non è iperbolico per $n \geq 2$.

Dimostrazione. Supponiamo $n = 2$. Sia $\delta \geq 0$. Consideriamo i punti

$$x_0 = (0, 0) \quad x_1 = (3\delta, 0) \quad x_2 = (0, 3\delta).$$

Le uniche geodetiche in \mathbb{R}^2 sono della forma descritta nella proposizione 2.3.4. Indichiamo con $[x, y]$ l'unica geodetica che ha per estremi x e y . Allora

$$\begin{aligned} \inf\left\{d\left(\left(\frac{3}{2}\delta, \frac{3}{2}\delta\right), x\right) \mid x \in [x_0, x_1]\right\} &= d\left(\left(\frac{3}{2}\delta, \frac{3}{2}\delta\right), \left(\frac{3}{2}\delta, 0\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\delta > \delta. \end{aligned}$$

In modo analogo

$$\begin{aligned}\inf\{d((\frac{3}{2}\delta, \frac{3}{2}\delta), x) \mid x \in [x_0, x_2]\} &= d((\frac{3}{2}\delta, \frac{3}{2}\delta), (0, \frac{3}{2}\delta)) \\ &= \frac{3}{2}\delta > \delta.\end{aligned}$$

Quindi $[x_1, x_2] \ni (\frac{3}{2}\delta, \frac{3}{2}\delta) \notin \overline{B}_\delta([x_0, x_1] \cup [x_0, x_2])$. Per arbitrarietà di δ , \mathbb{R}^2 con la metrica euclidea non è iperbolico.

Per il caso generale è sufficiente notare che \mathbb{R}^n contiene una copia isometrica di \mathbb{R}^2 (basta un qualsiasi sottospazio di dimensione 2) e che le geodetiche che congiungono punti del piano sono contenute nel piano stesso. \square

Esempio 3.1.5. \mathbb{R} è 0-iperbolico.

Esempio 3.1.6. Il piano iperbolico \mathbb{H}^2 è iperbolico (si veda [7]).

In modo del tutto analogo possiamo definire il concetto di quasi-iperbolicità usando curve quasi-geodetiche.

Definizione 3.1.7 (Triangoli quasi-geodetici). Siano X uno spazio metrico, $c > 0$ e $b \geq 0$. Un **triangolo (c, b) -quasi-geodetico** T è una tripla $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tale che per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ $\gamma_i : [0, L_i] \rightarrow X$ è una (c, b) -quasi-geodetica e valgono

$$\gamma_1(L_1) = \gamma_2(0) \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_3(0) \quad \gamma_3(L_3) = \gamma_1(0).$$

Definizione 3.1.8 (Triangoli quasi-geodetici δ -sottili). Siano X uno spazio metrico, $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triangolo quasi-geodetico e $\delta \geq 0$. T è detto **δ -sottile** se valgono

$$\gamma_1 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_2 \cup \gamma_3) \quad \gamma_2 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_3 \cup \gamma_1) \quad \gamma_3 \subseteq \overline{B}_\delta(\gamma_2 \cup \gamma_1).$$

Definizione 3.1.9 (Spazi quasi-iperbolici). Sia X uno spazio metrico.

1. Siano $c > 0$ e $b, \delta \geq 0$. Diciamo che X è **(c, b, δ) -quasi-iperbolico** se X è (c, b) -quasi-geodetico e ogni triangolo (c, b) -quasi-geodetico è δ -sottile.
2. Siano $c > 0$ e $b \geq 0$. Diciamo che X è **(c, b) -quasi-iperbolico** se per ogni $c' \geq c$ e $b' \geq b$, esiste $\delta \geq 0$ tale che X è (c', b', δ) -quasi-iperbolico.
3. Diciamo che X è **quasi-iperbolico** se esistono $c > 0$ e $b \geq 0$ tali che è (c, b) -quasi-iperbolico.

Sfruttando il fatto che una quasi-isometria porta triangoli quasi-geodetici in triangoli quasi-geodetici possiamo dimostrare che la quasi-iperbolicità è un invariante quasi-isometrico.

Lemma 3.1.10. *Siano X e Y spazi metrici quasi-isometrici. Se X è quasi-geodetico, allora anche Y è quasi-geodetico.*

Dimostrazione. Siano $f : X \rightarrow Y$ una (a, b) -quasi-isometria. Supponiamo $Im(f)$ c-densa. Siano $y, y' \in Y$. Esistono $x, x' \in X$ tali che $f(x)$ e $f(x')$ hanno distanza al più c da y e y' rispettivamente. Supponiamo X (d, e) -quasi-geodetico e sia γ una (d, e) -quasi-geodetica in X con estremi x e x' . Poniamo

$$\begin{aligned} \gamma' : [0, L] &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto \begin{cases} y & \text{se } t = 0 \\ f \circ \gamma(t) & \text{se } t \in]0, L[\\ y' & \text{se } t = L \end{cases} \end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra che γ' è una quasi-geodetica con costanti che dipendono solo da a, b, c, d, e . Quindi Y è quasi-geodetico. \square

Lemma 3.1.11. *Siano X e Y spazi metrici. Se Y è quasi-iperbolico, X è quasi geodetico ed esiste $f : X \rightarrow Y$ immersione quasi-isometrica, allora X è quasi-iperbolico.*

Dimostrazione. Siano $c > 0$ e $b \geq 0$ tali che X è (c, b) -quasi-geodetico, f è una immersione (c, b) -quasi-isometrica e Y è (c, b) -quasi-iperbolico. Tali costanti esistono poiché nella definizione di quasi-iperbolicità le costanti c, b possono essere arbitrariamente grandi. Mostriamo che X è (c, b) -quasi-iperbolico. Siano $c' \geq c$ e $b' \geq b$ e sia $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triangolo (c', b') -quasi-geodetico in X con $\gamma_i : [0, L_i] \rightarrow X$. Esistono costanti c'', b'' che dipendono solo da c', b', c, b tali che $c'' \geq c$, $b'' \geq b$ e $f \circ T = (f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ è un triangolo (c'', b'') -quasi-geodetico. Y è (c, b) -quasi-iperbolico, quindi esiste $\delta \geq 0$ tale che $f \circ T$ è δ -sottile. Sia $t \in [0, L_1]$. Sappiamo che

$$f \circ \gamma_1 \subseteq \overline{B}_\delta(f \circ \gamma_2 \cup f \circ \gamma_3).$$

Non è restrittivo supporre esista $t' \in [0, L_2]$ tale che

$$d(f \circ \gamma_1(t), f \circ \gamma_2(t')) \leq \delta.$$

f è un'immersione (c, b) -quasi-isometrica, dunque

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) &\leq c \cdot d(f \circ \gamma_1(t), f \circ \gamma_2(t')) + c \cdot b \\ &\leq c \cdot \delta + c \cdot b. \end{aligned}$$

Allora X è $(c', b', c \cdot \delta + c \cdot b)$ -quasi-iperbolico. \square

Corollario 3.1.12. *Siano X e Y spazi quasi-isometrici. Allora X è quasi-iperbolico se e solo se Y è quasi-iperbolico.*

Dimostrazione. Segue dai lemmi 3.1.10 e 3.1.11. \square

3.2 Teorema di stabilità

Uno dei risultati più importanti ed eleganti della teoria elementare degli spazi iperbolici è il cosiddetto teorema di stabilità. Il teorema afferma che le quasi-geodetiche negli spazi iperbolici possono essere approssimate in modo uniforme da geodetiche. Questa approssimazione permette in molti casi di poter lavorare solo con geodetiche anche in contesti quasi-isometrici. Il corollario più importante del teorema afferma che l'iperbolicità è un invariante quasi-isometrico.

Teorema 3.2.1 (Di stabilità). *Siano $c > 0$ e $b, \delta \geq 0$. Allora esiste $\Delta \geq 0$ tale che per ogni X spazio δ -iperbolico, $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ (c, b) -quasi-geodetica e $\gamma' : [0, L'] \rightarrow X$ geodetica con $\gamma'(0) = \gamma(0)$ e $\gamma'(L') = \gamma(L)$, valgono*

$$\gamma \subseteq \overline{B}_\Delta(\gamma') \quad \gamma' \subseteq \overline{B}_\Delta(\gamma).$$

Prima di dare la dimostrazione serve dimostrare qualche lemma preliminare.

Definizione 3.2.2 (Lunghezza di una curva). Siano X uno spazio metrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua. Definiamo la **lunghezza** di γ come

$$L_X(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}, t_i)) \mid n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Proposizione 3.2.3 (Proprietà della lunghezza). *Siano X uno spazio metrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua. Allora*

1. *La lunghezza è additiva, cioè per ogni $c \in [a, b]$ vale*

$$L_X(\gamma) = L_X(\gamma|_{[a,c]}) + L_X(\gamma|_{[c,b]}).$$

2. *Se $L_X(\gamma) < +\infty$, allora la funzione $[a, b] \ni t \mapsto L_X(\gamma|_{[a,t]})$ è continua e monotona crescente.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si può vedere [9]. \square

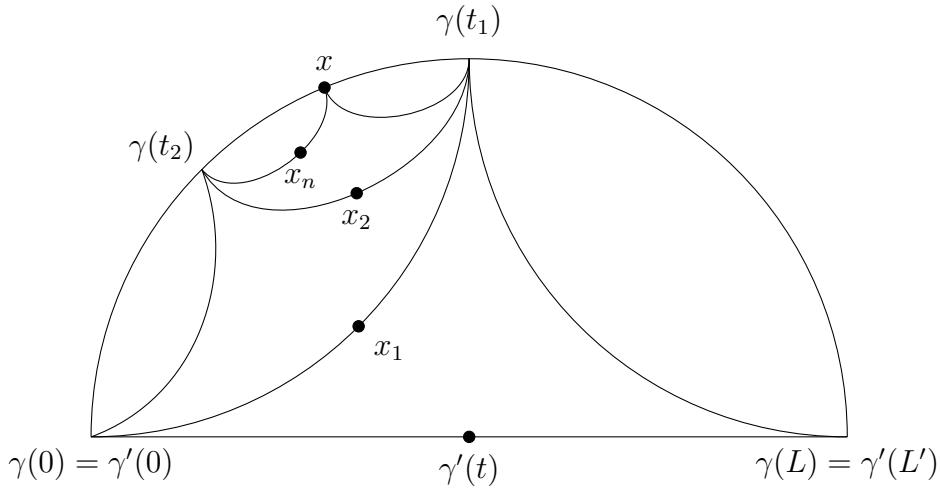


Figura 3.2: Costruzione dell'albero di Natale.

Definizione 3.2.4 (Distanza di un punto da un insieme). Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $A \subseteq X$. Definiamo la distanza di x da A come

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Lemma 3.2.5 (Dell'albero di Natale). *Siano $\delta \geq 0$ e X uno spazio δ -iperbolico. Se $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ è una curva continua e $\gamma' : [0, L'] \rightarrow X$ è una geodetica tali che $\gamma(0) = \gamma'(0)$ e $\gamma(L) = \gamma'(L')$, allora per ogni $t \in [0, L']$ si ha*

$$d(\gamma'(t), \gamma) \leq \delta \cdot |\log_2(L_X(\gamma))| + 1.$$

Dimostrazione. Se $L_X(\gamma) = +\infty$, la tesi è banale. A meno di riparametrizzare γ possiamo supporre $L = L_X(\gamma)$.

Se $L \leq 1$, allora per ogni $t \in [0, L']$ si ha

$$\begin{aligned} d(\gamma'(t), \gamma) &\leq d(\gamma'(t), \gamma(0)) \\ &= d(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= t \leq L' \\ &= d(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\leq L \leq 1 \\ &\leq \delta \cdot |\log_2(L)| + 1. \end{aligned}$$

Supponiamo $L > 1$. Sia $t \in [0, L']$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{L}{2^{n+1}} < 1 \leq \frac{L}{2^n}.$$

Per continuità della funzione $s \mapsto L_X(\gamma|_{[0,s]})$ esiste $t_1 \in [0, L]$ tale che $L_X(\gamma|_{[0,t_1]}) = \frac{L}{2}$. Per ipotesi X è geodetico, quindi esistono α_1 e β_1 geodetiche che congiungono rispettivamente i punti $\gamma(0), \gamma(t_1)$ e $\gamma(t_1), \gamma(L)$. $(\gamma', \alpha_1, \beta_1)$ è un triangolo geodetico e per ipotesi X è δ -iperbolico, quindi esistono $\gamma_1 \in \{\alpha_1, \beta_1\}$ e $x_1 \in \gamma_1$ tali che

$$d(\gamma'(t), x_1) \leq \delta.$$

Inoltre, supponendo ad esempio che $\gamma_1 = \alpha_1$, si ha

$$L_X(\gamma_1) = d(\gamma(0), \gamma(t_1)) \leq L(\gamma|_{[0, \frac{L}{2}]}) = \frac{L}{2}.$$

Iterando il procedimento si ottengono $\gamma_1 : [0, L_1] \rightarrow X, \dots, \gamma_n : [0, L_n] \rightarrow X$ geodetiche con estremi in γ , e x_1, \dots, x_n punti in queste geodetiche tali che

$$\begin{aligned} d(\gamma'(t), x_1) &\leq \delta \quad d(x_1, x_2) \leq \delta \quad \dots \quad d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta \\ L_X(\gamma_i) &\leq \frac{L}{2^i} \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In figura 3.2 è rappresentato graficamente il procedimento appena descritto. γ_n è una geodetica, quindi esiste $x \in \gamma_n$ estremo tale che

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_n(0), \gamma_n(L_n)).$$

In particolare $x \in \gamma$ e

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{2}L_X(\gamma_n) \leq \frac{L}{2^{n+1}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} d(\gamma'(t), \gamma) &\leq d(\gamma'(t), x) \\ &\leq d(\gamma'(t), x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, x) \\ &\leq \delta \dots \delta + \frac{L}{2^{n+1}} \\ &\leq n \cdot \delta + 1 \\ &\leq \delta \cdot \log_2(L) + 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.6 (Approssimazione di quasi-geodetiche). *Siano $c > 0$ e $b \geq 0$. Allora esistono $c' > 0$ e $b' \geq 0$ tali che per ogni X spazio metrico geodetico e $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ (c, b) -quasi-geodetica, esiste $\gamma' : [0, L] \rightarrow X$ (c', b') -quasi-geodetica continua che verifica:*

1. $\gamma(0) = \gamma'(0)$ e $\gamma(L) = \gamma'(L)$.

2. Per ogni $s, t \in [0, L]$ con $s \leq t$ si ha

$$L_X(\gamma'|_{[s,t]}) \leq c' \cdot d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'.$$

3. $\gamma' \subseteq \overline{B}_{c+b}(\gamma)$ e $\gamma \subseteq \overline{B}_{c+b}(\gamma')$.

Dimostrazione. Definiamo $I = [0, L] \cap \mathbb{Z}$ e poniamo $\gamma'|_I = \gamma|_I$. Estendiamo poi γ inserendo geodetiche opportunamente riparametrizzate tra punti successivi. Ovviamente γ' è continua e valgono $\gamma(0) = \gamma'(0)$, $\gamma(L) = \gamma'(L)$.

Siano $s, t \in [0, L]$ con $s \leq t$. Poniamo $t' = \lfloor t \rfloor$ e $s' = \lfloor s \rfloor$. γ è una (c, b) -quasi-geodetica e γ' è ottenuta concatenando geodetiche (riparametrizzate), quindi

$$\begin{aligned} d(\gamma'(s), \gamma(s')) &\leq d(\gamma(s'+1), \gamma(s')) \leq c + b \\ d(\gamma'(t), \gamma(t')) &\leq d(\gamma(t'+1), \gamma(t')) \leq c + b. \end{aligned}$$

Mostriamo che γ' è una quasi-geodetica.

$$\begin{aligned} d(\gamma'(s), \gamma'(t)) &\leq d(\gamma'(s), \gamma(s')) + d(\gamma(s'), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma'(t)) \\ &\leq c \cdot |s' - t'| + 2(c + b) + b \\ &\leq c \cdot (t - s) + 2(c + b) + b + 2c. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} d(\gamma'(s), \gamma'(t)) &\geq d(\gamma(s'), \gamma(t')) - d(\gamma'(s), \gamma(s')) - d(\gamma'(t), \gamma(t')) \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot |t' - s'| - 2(c + b) - b \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot (t - s) - 2(c + b) - b - 2c. \end{aligned}$$

Quindi γ' è una (c'', b'') -quasi-geodetica con c'', b'' costanti che dipendono solo da c e b .

Mostriamo la condizione 2. Per additività della lunghezza si ha

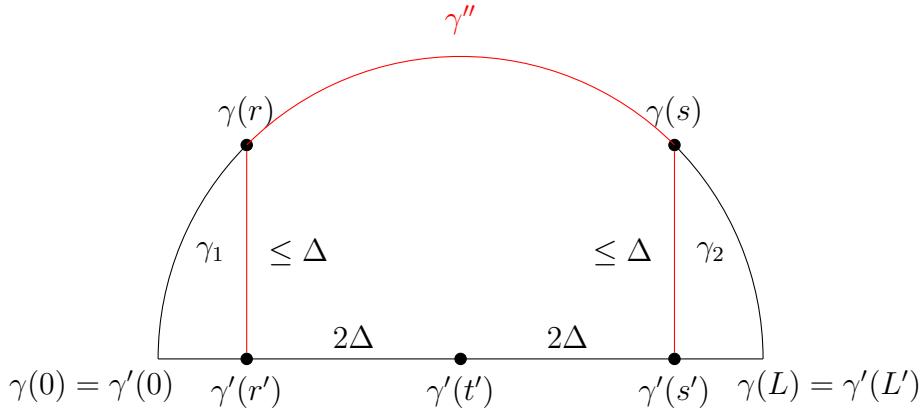
$$L_X(\gamma'|_{[s,t]}) = t - s \leq c'' \cdot d(\gamma'(t), \gamma'(s)) + c''b''.$$

Prendendo come c' e b' i massimi delle costanti ottenute sopra si ottiene la tesi.

Per la condizione 3 basta osservare che

$$\begin{aligned} d(\gamma'(t), \gamma(t')) &\leq c + b \\ d(\gamma(t), \gamma'(t')) &\leq c + b. \end{aligned}$$

□

Figura 3.3: Curva γ''

Possiamo ora dimostrare il teorema di stabilità

Dimostrazione del Teorema 3.2.1. Per il lemma 3.2.6 possiamo sostituire γ con una (c', b') -quasi-geodetica continua, dove (c', b') sono costanti che dipendono solo da (c, b) . In particolare vale

$$L_X(\gamma|_{[s,t]}) \leq c \cdot d(\gamma(s), \gamma(t)) + b$$

per ogni $s, t \in [0, L]$ con $s \leq t$.

Dimostriamo che γ' è vicina a γ . Consideriamo il caso peggiore:

$$\Delta = \sup\{d(\gamma'(t'), \gamma) \mid t' \in [0, L']\}.$$

Se dimostriamo che Δ è stimato da una costante che dipende solo da c, b, δ abbiamo finito. Per continuità delle curve esiste $t' \in [0, L]$ tale che $\Delta = d(\gamma'(t'), \gamma)$. Per definizione di Δ si deve necessariamente avere $t' \geq \Delta$ e $L' - t' \geq \Delta$ (altrimenti $d(\gamma'(t'), \gamma) < \Delta$). Definiamo

$$r' = \max(0, t' - 2\Delta) \quad s' = \max(L', t' + 2\Delta).$$

Per definizione di Δ esistono $r, s \in [0, L]$ tali che

$$d(\gamma'(r'), \gamma(r)) \leq \Delta \quad \text{e} \quad d(\gamma'(s'), \gamma(s)) \leq \Delta.$$

Siano γ_1 e γ_2 geodetiche che hanno per estremi rispettivamente $\gamma'(r')$, $\gamma(r)$ e $\gamma'(s')$, $\gamma(s)$. Sia γ'' la curva (continua) ottenuta concatenando γ_1 , $\gamma|_{[s,r]}$ e γ_2 . Per una rappresentazione grafica si veda la figura 3.2.

Vogliamo mostrare che $\Delta \leq d(\gamma'(t'), \gamma'')$. Sia $x \in \gamma''$. Se $x \in \gamma|_{[s,r]}$, allora per definizione di $\Delta = d(\gamma'(t'), \gamma)$ vale $\Delta \leq d(\gamma'(t'), x)$. Se $x \in \gamma_1$, allora dobbiamo considerare due casi:

1. Se $r' = 0$, allora $\gamma_1 = \gamma'(0)$ e $d(\gamma'(t'), \gamma'(0)) = t \geq \Delta$.

2. Se $r' = t' - 2\Delta$, allora

$$d(\gamma'(t'), x) \geq d(\gamma'(t'), \gamma'(r')) - d(\gamma'(r'), x) \geq 2\Delta - \Delta = \Delta.$$

Se $x \in \gamma_2$ il calcolo è analogo. Applicando il lemma 3.2.5 otteniamo

$$\Delta \leq d(\gamma'(t'), \gamma'') \leq \delta \cdot |\log_2(L_X(\gamma''))| + 1.$$

Usando l'additività della lunghezza stimiamo $L_X(\gamma'')$:

$$\begin{aligned} L_X(\gamma'') &= L_X(\gamma_1) + L_X(\gamma|_{[r,s]}) + L_X(\gamma_2) \\ &\leq c \cdot d(\gamma(r), \gamma(s)) + b + 2\Delta \\ &\leq c \cdot (d(\gamma(r), \gamma'(r')) + d(\gamma'(r'), \gamma'(t')) + d(\gamma'(t'), \gamma'(s')) + \\ &\quad + d(\gamma'(s'), \gamma(s))) + 2\Delta + b \\ &\leq c \cdot (\Delta + 2\Delta + 2\Delta + \Delta) + 2\Delta + b \\ &= (6c + 2)\Delta + b. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\Delta \leq \delta \cdot |\log_2((6c + 2)\Delta + b)| + 1.$$

Il logaritmo cresce più lentamente rispetto ad una funzione lineare, quindi Δ è stimato dall'alto da una quantità che dipende solo da c, b, δ .

Dimostriamo che γ è vicina a γ' . Sia Δ come sopra. Definiamo

$$\begin{aligned} f : [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto d(\gamma(t), \gamma'). \end{aligned}$$

γ è continua, quindi f è continua. Vogliamo mostrare che $Im(f)$ è stimata da una quantità dipendente solo da c, b, δ . Se $f(t) \leq \Delta$, abbiamo finito. Supponiamo esista $w \in [0, L]$ tale che $f(w) > \Delta$. Sia $]r, s[\subseteq [0, L]$ massimale rispetto alla proprietà

$$f(]r, s[) \subseteq]\Delta, +\infty[.$$

Per continuità di f , $f(w) > \Delta$ implica $r < s$ (l'intervallo è non vuoto). Per massimalità $f(r) = f(s) = \Delta$. Definiamo

$$\begin{aligned} g : [0, L'] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t' &\longmapsto d(\gamma'(t'), \gamma|_{[0,r]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : [0, L'] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t' &\longmapsto d(\gamma'(t'), \gamma|_{[s, L]}). \end{aligned}$$

g e h sono continue e valgono $(g - h)(0) \leq 0$, $(g - h)(L') \geq 0$. Quindi esiste $t' \in [0, L']$ tale che $g(t') = h(t')$. Per la prima parte della dimostrazione le immagini di g e h sono contenute in $[0, \Delta]$. Quindi esistono $r' \leq r$ e $s' \geq s$ tali che

$$d(\gamma'(t'), \gamma(r')) \leq \Delta \quad \text{e} \quad d(\gamma'(t'), \gamma(s')) \leq \Delta.$$

Sfruttando la condizione sulla lunghezza di γ si ottiene

$$\begin{aligned} L_X(\gamma|_{[r, s]}) &\leq L_X(\gamma|_{[r', s']}) \\ &\leq c \cdot d(\gamma(r'), \gamma(s')) + b \\ &\leq 2c\Delta + b. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} d(\gamma(w), \gamma'(t')) &\leq d(\gamma(w), \gamma(r)) + d(\gamma(r), \gamma'(t')) \\ &\leq L_X(\gamma|_{[r, s]}) + \Delta \\ &\leq (2c + 1)\Delta + b. \end{aligned}$$

Cioè

$$\gamma(w) \in \overline{B}_{(2c+1)\Delta+b}(\gamma').$$

Per arbitrarietà di w si ottiene la tesi. \square

Come corollario dimostriamo l'invarianza per quasi-isometrie dell'iperbolicità.

Teorema 3.2.7. *Sia X uno spazio metrico geodetico. Allora X è iperbolico se e solo se X è quasi-iperbolico.*

Dimostrazione. Le geodetiche sono in particolare quasi-geodetiche, quindi l'implicazione da quasi-iperbolico a iperbolico è ovvia.

Supponiamo che X sia δ -iperbolico. Siano $b \geq 0$ e $c > 0$. Sia Δ come nel teorema di stabilità. Vogliamo mostrare che X è $(c, b, 2\Delta + \delta)$ -quasi-iperbolico. Sia $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triangolo (c, b) -quasi-geodetico. X è geodetico, quindi esiste $(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ triangolo geodetico avente gli stessi estremi di T . Mostriamo che

$$\gamma_1 \subseteq \overline{B}_{2\Delta+\delta}(\gamma_2 \cup \gamma_3).$$

Sia $x \in \gamma_1$. Per il teorema di stabilità esiste $x' \in \gamma'_1$ tale che $d(x, x') \leq \Delta$. X è iperbolico, quindi esiste $y' \in (\gamma'_2 \cup \gamma'_3)$ tale che $d(x', y') \leq \delta$. Sempre per il teorema di stabilità esiste $y \in \gamma_2 \cup \gamma_3$ tale che $d(y, y') \leq \Delta$. La tesi segue dalla disuguaglianza triangolare. \square

Corollario 3.2.8. *Siano X, Y spazi metrici geodetici e quasi-isometrici. Allora X è iperbolico se e solo se Y è iperbolico.*

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che X sia iperbolico. Per il teorema 3.2.7 X è quasi-iperbolico. Per il corollario 3.1.12, Y è quasi-iperbolico. Sempre per il teorema 3.2.7, Y è iperbolico. \square

Osservazione 3.2.9. In generale determinare se uno spazio è quasi-iperbolico dalla definizione è particolarmente difficile. Questo deriva dal comportamento a priori non regolare delle quasi-geodetiche. Il corollario appena dimostrato permette, per spazi geodeticci, di ridurre il problema allo studio dell'iperbolicità, che è molto più trattabile. Infatti, al contrario delle quasi-geodetiche, si riesce molto spesso a trovare in modo esplicito tutte le geodetiche di uno spazio. Due esempi sono il piano iperbolico \mathbb{H}^2 e lo spazio euclideo \mathbb{R}^n .

3.3 Gruppi iperbolici

Prima di definire l'iperbolicità nei gruppi la definiamo sui grafi.

Definizione 3.3.1 (Grafi iperbolici). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Γ è detto **iperbolico** se (V, d_Γ) è quasi-iperbolico.

Proposizione 3.3.2. *Sia Γ un grafo connesso. Allora Γ è iperbolico se e solo se $|\Gamma|$ è iperbolico.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.3.14 e per il teorema 2.3.16 si ha che Γ è quasi-isometrico a $|\Gamma|$ e $|\Gamma|$ è geodetico. La tesi segue da 3.2.7 e 3.1.12. \square

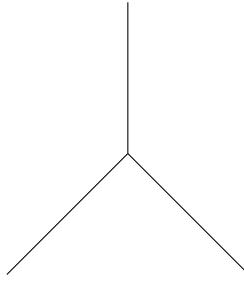


Figura 3.4: Triangoli geodetici in un albero

Un esempio abbastanza elementare di grafi iperbolici è costituito dagli alberi.

Proposizione 3.3.3. *Gli alberi sono iperbolici.*

Dimostrazione. Sia T un albero. L'assenza di cicli semplici in T implica l'assenza di cicli in $|T|$. In particolare i triangoli geodetici in $|T|$ sono della forma in figura 3.3 e $|T|$ è 0-iperbolico. \square

Definizione 3.3.4 (Gruppi iperbolici). Sia G un gruppo finitamente generato. G è detto **iperbolico** se esiste un insieme finito di generatori $S \subseteq G$ rispetto al quale (G, d_S) è quasi-iperbolico.

Proposizione 3.3.5. *Sia G un gruppo finitamente generato. Se G è iperbolico, allora per ogni $S \subseteq G$ insieme finito di generatori (G, d_S) è quasi-iperbolico.*

Dimostrazione. Due insiemi finiti di generatori definiscono spazi metrici quasi-isometrici e la quasi-iperbolicità è un invariante quasi-isometrico. \square

Esempio 3.3.6 (Gruppi iperbolici).

- I gruppi finiti sono iperbolici.
- Per la proposizione 1.6.6, i grafi di Cayley di gruppi liberi finitamente generati sono alberi. Quindi per la proposizione 3.3.3 i gruppi liberi sono iperbolici.
- In particolare \mathbb{Z} è iperbolico.
- Per 2.4.14, i gruppi fondamentali delle superfici di genere almeno 2 sono quasi-isometrici al piano iperbolico, quindi sono iperbolici.
- \mathbb{Z}^n per $n \geq 2$ è quasi-isometrico a \mathbb{R}^n , quindi non è iperbolico.
- Il grafo di Cayley di $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 \cong \langle a, b, c | a^2, b^2, c^2 \rangle$ è un albero, quindi il gruppo è iperbolico.

Il prossimo teorema che vogliamo dimostrare fornisce un modo per costruire iterativamente gruppi iperbolici usando il prodotto libero. Per la dimostrazione usiamo una costruzione più generale.

Definizione 3.3.7 (Wedge di spazi metrici). Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Il **wedge** di X e Y lungo i punti x_0 e y_0 è lo spazio metrico $((X, x_0) \vee (Y, y_0), d)$, definito nel modo seguente:

- $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \coprod Y)/x_0 \sim y_0$.

$$\bullet \quad d([z_1], [z_2]) = \begin{cases} d_X(z_1, z_2) & \text{se } z_1 \in X, z_2 \in X \\ d_Y(z_1, z_2) & \text{se } z_1 \in Y, z_2 \in Y \\ d_X(z_1, x_0) + d_Y(y_0, z_2) & \text{se } z_1 \in X, z_2 \in Y \\ d_Y(z_1, y_0) + d_X(x_0, z_2) & \text{se } z_1 \in Y, z_2 \in X \end{cases}.$$

Se x_0 e y_0 sono chiari dal contesto, indichiamo il wedge con $X \vee Y$.

Intuitivamente $X \vee Y$ è ottenuto incollando X e Y nei punti x_0 e y_0 . Segue in modo immediato dalla definizione che le mappe

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow X \vee Y & j : Y &\longrightarrow X \vee Y \\ x &\longmapsto [x] & y &\longmapsto [y] \end{aligned}$$

sono immersioni isometriche.

Per comodità indichiamo l'elemento $[z] \in X \vee Y$ semplicemente con z , ricordando che in $X \vee Y$ vale $x_0 = y_0$.

Proposizione 3.3.8. *Siano X, Y spazi metrici. Allora X e Y sono geodetici se e solo se $X \vee Y$ è geodetico.*

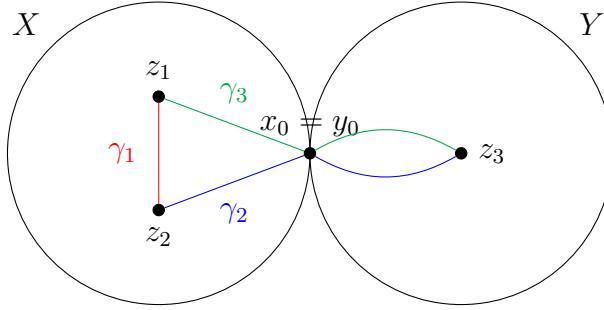
Dimostrazione. Supponiamo X e Y geodetici e siano $z_1, z_2 \in X \vee Y$. Se $z_1, z_2 \in X$ oppure $z_1, z_2 \in Y$, allora posso usare una geodetica nello spazio X o Y . Supponiamo $z_1 \in X$ e $z_2 \in Y$. Per la proposizione 2.3.15, la concatenazione di una geodetica che congiunge z_1 con x_0 con una geodetica che congiunge y_0 con z_2 è una geodetica in $X \vee Y$. Il caso $z_1 \in Y$ e $z_2 \in X$ è analogo.

Supponiamo $X \vee Y$ geodetico. Siano $x_1, x_2 \in X$ e sia $\gamma : [0, L] \rightarrow X \vee Y$ una geodetica con estremi x_1 e x_2 . Vogliamo mostrare che $\gamma \subseteq X$. Supponiamo esista $\gamma(t) \in Y \setminus y_0$. $X \vee Y \setminus \{x_0 = y_0\}$ ha due componenti connesse e $\gamma(0), \gamma(L) \in X$, quindi esistono $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq L$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = x_0$. Le geodetiche sono iniettive, dunque si ha un assurdo. \square

Teorema 3.3.9. *Siano X e Y spazi metrici. Allora X e Y sono iperbolici se e solo se $X \vee Y$ è iperbolico. In particolare se X e Y hanno costanti di iperbolicità rispettivamente δ_1 e δ_2 , allora $X \vee Y$ è $\max(\delta_1, \delta_2)$ -iperbolico.*

Dimostrazione. Supponiamo $X \vee Y$ iperbolico. Per 3.3.8, X e Y sono geodetici. Le mappe di inclusione sono immersioni isometriche, quindi X e Y sono iperbolici.

Supponiamo X e Y iperbolici di costanti δ_1 e δ_2 . Sia $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triangolo geodetico in $X \vee Y$ con estremi z_1, z_2, z_3 . A meno di permutazione si hanno quattro possibilità: tutti i punti sono in X , due punti sono in X e uno in Y , due punti sono in Y e uno in X , tutti i punti sono in Y . Se $z_1, z_2, z_3 \in X$ oppure $z_1, z_2, z_3 \in Y$, allora la tesi segue dall'iperbolicità dei due spazi. Supponiamo $z_1, z_2 \in X$ e $z_3 \in Y$. Per un ragionamento simile

Figura 3.5: Triangoli geodetici in $X \vee Y$.

a 3.3.8, $\gamma_1 \subseteq X$ ed esistono $t_2 \in [0, L_2]$, $t_3 \in [0, L_3]$ tali che $\gamma_2(t_2) = x_0$, $\gamma_3(t_3) = x_0$ e

$$\gamma_2([0, t_2]) \subseteq X \quad \gamma_2([t_2, L_2]) \subseteq Y \quad \gamma_3([0, t_3]) \subseteq Y \quad \gamma_3([t_3, L_3]) \subseteq X$$

(Si veda la figura 3.3). Quindi $(\gamma_1, \gamma_2|_{[0, t_2]}, \gamma_3|_{[t_3, L_3]})$ e $(\gamma_2|_{[t_2, L_2]}, \gamma_3|_{[0, t_3]}, y_0)$ sono triangoli geodetici rispettivamente in X e Y . Per iperbolicità di X e Y si ha la tesi. Il caso rimanente è analogo. \square

Corollario 3.3.10. *Siano X_1, \dots, X_n spazi metrici. Allora X_1, \dots, X_n sono iperbolici se e solo se il loro wedge (fatto in qualsiasi ordine) è iperbolico. In particolare se X_1, \dots, X_n hanno costanti di iperbolicità $\delta_1, \dots, \delta_n$, allora il wedge è $\max(\delta_1, \dots, \delta_n)$ -iperbolico.*

Dimostrazione. Si applica induttivamente il teorema precedente. \square

Usando il wedge di spazi metrici possiamo descrivere la realizzazione geometrica del grafo di Cayley del prodotto libero di due gruppi tramite le realizzazioni geometriche dei loro grafi di Cayley. Siano G, G' due gruppi e $S \subseteq G, S' \subseteq G'$ insiemi finiti di generatori. Indichiamo con Γ e Γ' i due spazi $|Cay(G, S)|$ e $|Cay(G', S')|$. Definiamo induttivamente i grafi Γ_k come segue:

- $\Gamma_1 = \Gamma$.
- $\Gamma_2 = (\Gamma', e) \bigvee_{g \in G} (\Gamma, g)$, dove la notazione indica che il wedge tra gli spazi viene fatto contemporaneamente.
- Supponiamo di aver definito Γ_{k-1} con $k \geq 3$.

Se $k = 2l$, allora definiamo

$$\Gamma_k = (\Gamma', e) \bigvee_{\substack{g_1 \in G, g_2, \dots, g_l \in G \setminus \{e\} \\ g'_1, \dots, g'_{l-1} \in G' \setminus \{e'\}}} (\Gamma_{k-1}, g_1 g'_1 \cdots g_{l-1} g'_{l-1} g_l).$$

Se $k = 2l + 1$, allora definiamo

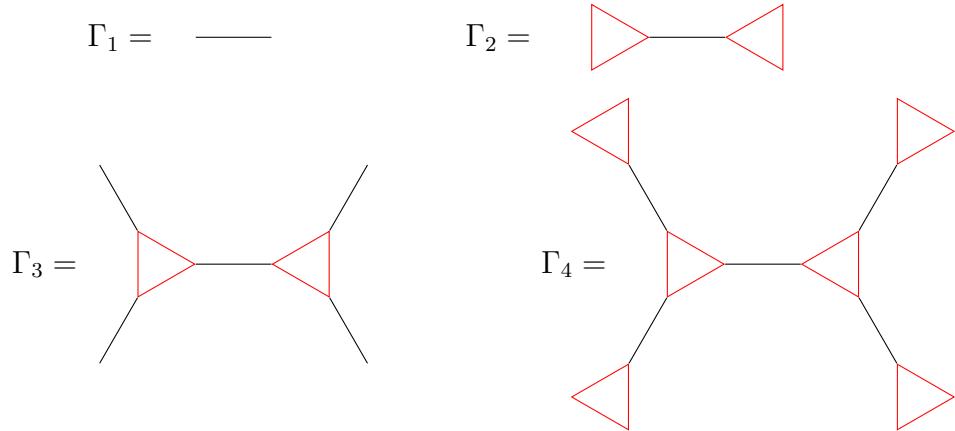
$$\Gamma_k = (\Gamma, e) \bigvee_{\substack{g_1 \in G, g_2, \dots, g_l \in G \setminus \{e\} \\ g'_1, \dots, g'_l \in G' \setminus \{e'\}}} (\Gamma_{k-1}, g_1 g'_1 \cdots g_l g'_l).$$

Dove $g_1 g'_1 \cdots \in \Gamma_{k-1}$ indica l'elemento ottenuto seguendo la successione g_1, g'_1, \dots in Γ_{k-1} .

Osservazione 3.3.11. Siccome ad ogni vertice non viene mai incollata più di una copia di un grafo si ha che le due topologie, quella quoziente e quella metrica, coincidono.

Si può immaginare Γ_k come costruito a strati. Il primo strato è Γ_1 . Il secondo strato è ottenuto incollando (Γ_2, e') ad ogni vertice di Γ_1 . Lo strato k è ottenuto incollando (Γ, e) (o (Γ', e') a seconda della parità di k) ad ogni vertice diverso dall'identità dello strato precedente.

Esempio 3.3.12. Per $G = \mathbb{Z}/2$ e $G' = \mathbb{Z}/3$ si ha



Possiamo vedere $|Cay(G * G', S \cup S')|$ come l'unione di tutti i Γ_k . Più formalmente si potrebbe descrivere $|Cay(G * G', S \cup S')|$ come limite diretto della successione di spazi Γ_k nella categoria **IMet**. Per quello che vogliamo mostrare questa descrizione non serve, perciò la evitiamo.

Tenendo a mente la costruzione appena data possiamo dimostrare che il prodotto libero di gruppi iperbolici è iperbolico.

Teorema 3.3.13. *Siano G e H gruppi. Allora G e H sono iperbolici se e solo se $G * H$ è iperbolico.*

Dimostrazione. Supponiamo $G * H$ iperbolico. Le immersioni di G e H in $G * H$ inducono delle immersioni isometriche $|Cay(G, S)| \rightarrow |Cay(G * H, S \cup T)|$,

$|Cay(H, T)| \rightarrow |Cay(G * H, S \cup T)|$. Tutti gli spazi sono geodetici, quindi G e H sono iperbolici.

Supponiamo G e H iperbolici. Siano $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ tali che $|Cay(G, S)|$ e $|Cay(H, T)|$ sono rispettivamente δ_1 -iperbolico e δ_2 -iperbolico. Sia T un triangolo geodetico in $|Cay(G * H, S \cup T)|$. Per compattezza T è contenuto in un numero finito di copie di $|Cay(G, S)|$ e $|Cay(H, T)|$ con cui è costruito $|Cay(G * H, S \cup T)|$. In particolare T è contenuto nel wedge di un numero finito di spazi iperbolici di costanti δ_1 e δ_2 . Per il corollario 3.3.10, T è $\max(\delta_1, \delta_2)$ -sottile. \square

Per induzione si mostra che il prodotto libero finito di gruppi iperbolici è iperbolico.

Esempio 3.3.14. $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\} \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ e $SL_2(\mathbb{Z})$ sono iperbolici.

3.4 Presentazione di Dehn

L'idea alla base delle presentazioni di Dehn è quella di avere delle relazioni che, in caso la parola sia ridotta, permettono di ridurre la lunghezza della stringa. Dehn ha sviluppato per la prima volta l'algoritmo cercando di risolvere il problema della parola per i gruppi fondamentali delle superfici di genere almeno 2. Per l'approccio originale di Dehn si può consultare [2].

Se w è una parola, indichiamo con $|w|$ la sua lunghezza.

Definizione 3.4.1 (Presentazione di Dehn). Sia $\langle S|R \rangle$ una presentazione finita. Diciamo che $\langle S|R \rangle$ è una **presentazione di Dehn** se esistono $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ parole che verificano:

1. $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots, u_nv_n^{-1}\}$.
2. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $|v_i| < |u_i|$.
3. Per ogni $w \in F(S)$ tale che $w = e$ in $\langle S|R \rangle$, esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che u_i è una sottoparola di w .

La terza proprietà della definizione è la più forte ed è quella che permette di scambiare u_i con v_i riducendo la lunghezza della parola. Seguente questa idea dimostriamo che il problema della parola è risolubile per presentazioni di Dehn.

Teorema 3.4.2. *Se $\langle S|R \rangle$ è una presentazione di Dehn, allora essa ha problema della parola risolubile.*

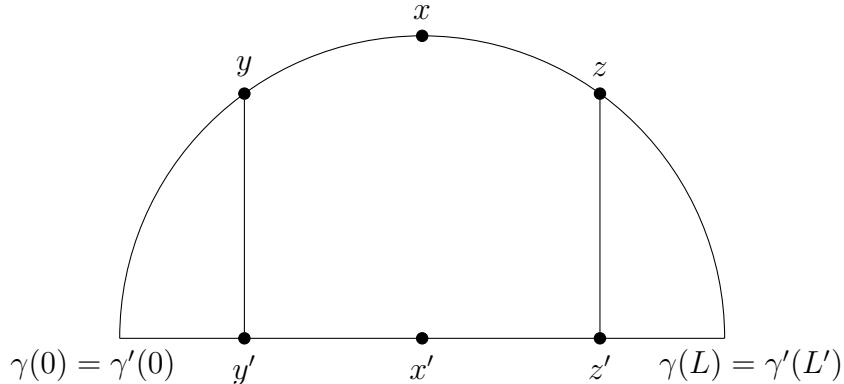


Figura 3.6: Quadrilatero geodetico

Dimostrazione. Sia w una parola. Supponiamo $R = \{u_i v_i^{-1}\}$. Se $w = \varepsilon$ abbiamo finito. Se $w \neq \varepsilon$ e w non contiene come sottoparola nessuna tra le u_i , allora per la proprietà 3 non è l'elemento neutro. Se $w \neq \varepsilon$ e w contiene una sottoparola u_i , allora sostituiamo u_i con v_i e ripetiamo il procedimento. Ovviamente l'algoritmo termina poiché ad ogni passo riduciamo la lunghezza della parola. \square

3.5 Problema della parola nei gruppi iperbolici

In questa sezione dimostriamo che i gruppi iperbolici hanno una presentazione di Dehn. La dimostrazione segue l'approccio di [7]. L'idea è quella di trovare delle scorciatoie geometriche negli spazi iperbolici che poi si traducono in semplificazioni negli elementi del gruppo.

Definizione 3.5.1 (Geodetiche locali). Siano X uno spazio metrico, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva e $c > 0$. γ è detta una **c -geodetica locale** se per ogni $t, t' \in [a, b]$ tali che $|t - t'| \leq c$, si ha

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|.$$

Lemma 3.5.2 (Geodetiche locali in spazi iperbolici). *Siano $\delta \geq 0$, X uno spazio δ -iperbolico, $c > 8\delta$, $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ e $\gamma' : [0, L'] \rightarrow X$. Se γ è una c -geodetica locale, γ' è una geodetica e valgono $\gamma(0) = \gamma'(0)$, $\gamma(L) = \gamma'(L')$, allora*

$$\gamma \subseteq \overline{B}_{2\delta}(\gamma').$$

Dimostrazione. Sia $\gamma(t) = x$ che massimizza $d(x, \gamma')$ e sia $x' \in \gamma'$ tale che $d(x, \gamma') = d(x, x')$. La dimostrazione prevede tre casi.

Caso 1: $t - a > 4\delta$ e $t - b > 4\delta$. Esistono $t_1, t_2 \in [a, b]$ tali che

$$t_1 < t < t_2 \quad t_2 - t > 4\delta \quad t - t_1 > 4\delta \quad t_2 - t_1 \leq c.$$

Poniamo $y = \gamma(t_1)$ e $z = \gamma(t_2)$. Siano $\gamma'(t'_1) = y', \gamma'(t'_2) = z' \in \gamma'$ che realizzano $d(y, \gamma')$ e $d(z, \gamma')$. Siano α e β geodetiche con estremi y, y' e z, z' rispettivamente. Abbiamo ottenuto $(\gamma|_{[t_1, t_2]}, \beta, \gamma'|_{[t'_1, t'_2]}, \alpha)$ quadrilatero geodetico (si veda in figura 3.5). Applicando la definizione di iperbolicità due volte dividendo il quadrilatero con una diagonale si ottiene che esiste $w \in \alpha \cup \gamma'|_{[t'_1, t'_2]} \cup \beta$ a distanza al più 2δ da x . Se $w \in \alpha$, allora

$$\begin{aligned} d(x, x') - d(y, y') &\leq d(x, y') - d(y, y') \\ &= d(x, w) + d(w, y') - d(y, w) - d(w, y') \\ &\leq d(w, x') - d(y, x') + d(x', w) \\ &< 4\delta - 4\delta = 0 \end{aligned}$$

che contraddice la massimalità di $d(x, x')$. In modo analogo non è possibile che $w \in \beta$. Quindi $w \in \gamma'$.

Caso 2: al più uno tra $t - a$ e $b - t$ è minore di 4δ . Supponiamo $b - t \leq 4\delta$. Sia $t_1 < t$ tale che $t - t_1 > 4\delta$ e $b - t_2 \leq c$. Poniamo $y = \gamma(t_1)$. Sia $\gamma'(t'_1) = y' \in \gamma'$ che minimizza $d(y, \gamma')$. Sia α una geodetica con estremi y e y' . $(\gamma|_{[t_1, b]}, \gamma'|_{[t'_1, L]}, \alpha)$ è un triangolo geodetico, quindi esiste $w \in \alpha \cup \gamma'$ tale che $d(x, w) \leq \delta$. Se $w \in \alpha$, allora un calcolo analogo al punto 1 porta a una contraddizione. Quindi $w \in \gamma'$. Il caso $t - a \leq 4\delta$ è analogo.

Caso 3: $b - a \leq 8\delta$. Allora γ è una geodetica. $(\gamma, \gamma', \gamma(a))$ è un triangolo geodetico degenero, quindi $x \in \overline{B}_\delta(\gamma')$. \square

Lemma 3.5.3 (Scorciatoie nei gruppi iperbolici). *Siano G un gruppo iperbolico e $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Supponiamo che $|Cay(G, S)|$ sia δ -iperbolico. Se $\gamma : [0, n] \rightarrow |Cay(G, S)|$ è la realizzazione lineare a tratti di un ciclo in $Cay(G, S)$ di lunghezza $n > 0$, allora esistono $t, t' \in [0, n]$, $t < t'$ tali che*

$$L_{|Cay(G, S)|}(\gamma|_{[t, t']}) \leq 8\delta$$

e $\gamma|_{[t, t']}$ non è una geodetica.

Dimostrazione. Mostriamo che per ogni $c > 8\delta$, γ non è una c -geodetica locale. Supponiamo per assurdo che esista tale c . γ è un ciclo, quindi non può essere una geodetica. In particolare $n > c > 8\delta$. Applicando il lemma 3.5.2 con $\gamma' = \gamma(0)$ geodetica degenera si ottiene $\gamma \subseteq \overline{B}_{2\delta}(\gamma(0))$. Quindi

$$4\delta \geq diam(\overline{B}_{2\delta}(\gamma(0))) \geq d_S(\gamma(0), \gamma(5\delta)) = 5\delta.$$

Assurdo. Allora esistono $t < t'$ tali che

$$t' - t \leq 8\delta \quad \text{e} \quad d(\gamma(t), \gamma(t')) \neq t' - t$$

e $\gamma|_{[t,t']}$ non è una geodetica. γ è la realizzazione lineare a tratti di un ciclo in $Cay(G, S)$, quindi

$$L_{|Cay(G,S)|}(\gamma|_{[t,t']}) = t' - t \leq 8\delta.$$

□

Teorema 3.5.4. *Siano G un gruppo iperbolico e $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora esiste $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$ tale che $G \cong \langle S|R \rangle$ è una presentazione di Dehn per G .*

Dimostrazione. Sia $\delta \geq 0$ la costante di iperbolicità di $|Cay(G, S)|$. Siano $D = \lceil 8\delta \rceil + 2$ e $\pi : F(S) \rightarrow G$ la proiezione canonica. Definiamo

$$\begin{aligned} R &= \{uv^{-1} \mid u, v \in F(S), d_S(\pi(u), e) < |u| \leq D, \pi(u) = \pi(v), \\ &\quad |v| = d_S(\pi(u), e)\} \\ R' &= \{st\varepsilon \mid s, t \in S \cup S^{-1}, \pi(st) = e\}. \end{aligned}$$

Ovviamente $R' \subseteq R$. Sia $\varphi : \langle S|R \rangle \rightarrow G$ il morfismo ottenuto da π passando al quoziente. Siccome S genera G , φ è suriettivo. Vogliamo mostrare che φ è iniettivo e $\langle S|R \rangle$ è una presentazione di Dehn. Sia $w \in (S \cup S^{-1})^*$ tale che $\pi(w) = e$. Dimostriamo per induzione sulla lunghezza di w che $w \in \langle R \rangle$ e che esiste u sottoparola di Dehn di w . Se w ha lunghezza 0, allora $w = \varepsilon$. Supponiamo w non nulla. Consideriamo due casi:

- w ha come sottoparola un elemento di $R' \subseteq R$. Supponiamo $w = w_1st\varepsilon w_2$. Ovviamente $\pi(w_2w_1) = \pi(w_1^{-1}ww_1) = e$. Per ipotesi induttiva $w_2w_1 \in \langle R \rangle$. Coniugando per w_1^{-1} si ha $w \in \langle R \rangle$.
- w non contiene come sottoparola un elemento di R' . Allora la parola w può essere interpretata come un ciclo nel grafo $Cay(G, S)$. Applicando il lemma 3.5.3 alla realizzazione geometrica di tale ciclo otteniamo una decomposizione

$$w = w_1uw_2$$

in sottoparole w_1 , u e w_2 tali che

$$d_S(\pi(u), e) < |u| \leq D.$$

Infatti se γ è il ciclo, allora esistono $t \leq t'$ tali che $\gamma|_{[t,t']}$ non è una geodetica e

$$L_{|Cay(G,S)|}(\gamma|_{[t,t']}) = t' - t \leq 8\delta \leq D.$$

Possiamo porre u la sottoparola ottenuta seguendo γ dal primo vertice che segue $\gamma(t)$ al primo vertice che precede $\gamma(t')$. Allora

$$|u| \leq L_{|Cay(G,S)|}(\gamma|_{[t,t']}) \leq D.$$

Se si avesse $d_S(\pi(u), e) = |u|$, allora $\gamma|_{[t,t']}$ sarebbe una geodetica. Quindi $d_S(\pi(u), e) < |u|$. Dunque esiste $v \in F(S)$ tale che $|v| = d_S(\pi(u), e) < |u|$. u è la sottoparola cercata. Si ha

$$e = \pi(w_1 uw_2) = \pi(w_1 vw_2)$$

Quindi per ipotesi induttiva $w_1 vw_2 \in \langle\!\langle R \rangle\!\rangle$. Allora

$$w = w_1 uw_2 = w_1 uv v^{-1} w_1^{-1} w_1 vw_2 \in \langle\!\langle R \rangle\!\rangle.$$

□

Corollario 3.5.5. *I gruppi iperbolici hanno problema della parola risolubile.*

Osservazione 3.5.6. Il risultato del teorema 3.5.4 è puramente teorico. Infatti è vero che nella dimostrazione si costruisce esplicitamente una presentazione di Dehn, ma per determinarla si deve già sapere la soluzione del problema della parola per parole di lunghezze minori od uguali a D .

Bibliografia

- [1] Michael Kapovich Cornelia Drutu. *Geometric group theory*. A cura di American Mathematical Society. Colloquium Publications.
- [2] Max Dehn. *Papers on Group Theory and Topology*. Springer New York, NY.
- [3] M. Gromov. «Hyperbolic Groups». In: *Essays in Group Theory*. A cura di S. M. Gersten. New York, NY: Springer New York, 1987, pp. 75–263.
- [4] Pierre de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. The University of Chicago Press.
- [5] Keith Konrad. $SL_2(\mathbb{Z})$. URL: [https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf).
- [6] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY.
- [7] Clara Löh. *Geometric Group Theory*. Universitext. Springer Cham.
- [8] Marco Manetti. *Topologia*. UNITEXT. Springer Milano.
- [9] André Haefliger Martin R. Bridson. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer Berlin, Heidelberg.
- [10] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.
- [11] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Berlin, Heidelberg.