

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea (Magistrale) in Matematica

Politopi e visualizzazione geometrica: dai solidi platonici ai policori regolari

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
SILVIA BENVENUTI

Presentata da:
MARIA LETIZIA
CORRADO

Anno Accademico 2024-2025

A papà.

*«Siede all'alta scrivania di fronte a noi,
mette gli occhiali sulla fronte e poggia la testa su entrambe le mani.
Dentro quelle mani vede un calcolo immaginario che ci legge ad alta voce;
quel calcolo lo comprendiamo come se lo vedessimo anche noi.»*

— Thomas Archer Hirst, *Diario* (Berlino, 31 ottobre 1852),
a lezione di Lejeune Dirichlet —

Introduzione

Scorrendo tra le pagine dei manuali di storia della matematica, emerge in maniera evidente quanto l'origine della geometria affondi nella necessità dell'uomo di categorizzare, contare e misurare ciò che poteva osservare e manipolare nel mondo fisico.

Queste esigenze erano finalizzate alla risoluzione di problemi concreti e all'ottimizzazione delle dinamiche politico-sociali in continua evoluzione.

La consapevolezza che lo stesso metodo potesse essere applicato a problematiche analoghe ha portato a una naturale classificazione degli enti in gioco e, di conseguenza, alla loro formalizzazione e trasmissione alle generazioni future.

Fin dal primo esempio di sistema ipotetico-deduttivo, rappresentato da *Gli Elementi* di Euclide, la formalizzazione della geometria come teoria assiomatica ha costituito un pilastro fondamentale nella costruzione del pensiero scientifico.

Tale processo è un'espressione significativa dello sforzo umano di procedere, mediante ragionamento, all'astrazione, peculiarità distintiva della nostra specie: un cammino che passa attraverso operazioni quali l'osservazione, la misurazione, la classificazione, la rappresentazione e l'argomentazione.

Lo sviluppo della geometria piana e spaziale è stato affrontato in modo descrittivo e sintetico sin da *Gli Elementi*, tuttavia l'introduzione di metodi analitici ha aperto la strada a nuove prospettive, rendendo possibile la formulazione di problemi fino ad allora inaccessibili all'esperienza sensoriale.

In questo contesto si inserisce lo studio della *geometria quadridimensionale* e, più in generale, della *geometria iperdimensionale*, il cui sviluppo inizia nei

primi decenni del XIX secolo, in concomitanza con la fondazione delle *geometrie non euclidee*.

Quasi contemporaneamente, emergono due distinti filoni di ricerca nello studio iperdimensionale, entrambi di ragguardevole valore accademico, inizialmente indipendenti e raramente intersecantesi:

- Il *metodo analitico*, che proprio dell'analisi predilige il rigore di risoluzione, in cui le ipersuperfici diventano strumenti essenziali per lo sviluppo di svariate branche della matematica, tra cui la geometria algebrica.
- Il *metodo sintetico*, che attribuisce un'importanza centrale alla costruzione geometrica, mantenendo una stretta connessione con la tradizione euclidea, pur senza rinunciare al concetto di coordinata spaziale.

Lo studio dei politopi e la loro rappresentazione grafica ha dato origine a un vasto settore di ricerca, dedicato alla loro visualizzazione tramite proiezioni e sezioni, sia mediante rappresentazioni prospettiche bidimensionali, sia facendo uso di modelli tridimensionali.

I principali studiosi che hanno contribuito alla sistematizzazione dei politopi e il cui lavoro è alla base di questo elaborato sono *Ludwig Schläfli*, *Washington Irving Stringham*, *Alicia Boole Stott*, *Pieter Hendrik Schoute*, *Harold Scott MacDonald Coxeter* ed *Ernesto Cesàro*.

Numerosi studi nell'ambito della *didattica della matematica* sottolineano l'importanza della manipolazione diretta delle figure geometriche per favorire un apprendimento significativo.

La letteratura in merito è vasta e supportata da numerosi esperimenti laboratoriali sulla costruzione e manipolazione di poligoni e poliedri.

L'intento di questo lavoro è quello di indagare quali strategie espositive è meglio adottare e quali strumenti utilizzare per rendere accessibile il pensiero geometrico relativo agli oggetti iperdimensionali, in particolare ai politopi regolari quadridimensionali.

Nei secoli in cui la matematica ha sviluppato la teoria delle iperdimensionalità, si è data relativamente poca importanza alla costruzione fisica dei politopi. Probabilmente ciò era dovuto all'assenza di tecnologie adeguate per visualizzare concretamente quanto teorizzato.

Oggi, con l'avvento delle tecnologie informatiche, le tecniche di rappresentazione degli spazi di dimensione superiore hanno acquisito un ruolo di primo piano, anche in relazione alla costruzione di ambienti virtuali e simulazioni. Questo lavoro intende presentare esempi di tali tecniche, mettendone in luce le potenzialità per lo studio della geometria iperdimensionale.

Indice

1	Poligoni e poliedri	1
1.1	Poligoni	1
1.2	Poliedri	9
1.2.1	Coordinate cartesiane poliedrali	22
1.2.2	Raggi e angoli poliedrali	26
1.2.3	Gruppi di simmetria dei poliedri regolari	33
2	Politopi	38
2.1	L'approccio intuitivo	39
2.1.1	Dal punto $\mathcal{T}_0$ all' n -simpleso $\mathcal{T}_n$	39
2.1.2	Dal punto $\mathcal{O}_0$ alla n -bipiramide $\mathcal{O}_n$	41
2.1.3	Dal punto $\mathcal{C}_0$ all' n -prisma $\mathcal{C}_n$	42
2.2	La formalizzazione	44
2.2.1	Politopi regolari	45
2.2.2	Criterio di Schläfli	47
2.3	Formula di Eulero generalizzata	55
2.4	Rappresentazione dei 6 policori	58
2.4.1	L'ipertetraedro $\{3, 3, 3\}$	58
2.4.2	L'ipercubo $\{4, 3, 3\}$	59
2.4.3	L'iperottaedro $\{3, 3, 4\}$	61
2.4.4	Il 24-celle $\{3, 4, 3\}$	61
2.4.5	Il 600-celle $\{3, 3, 5\}$	66
2.4.6	Il 120-celle $\{5, 3, 3\}$	71

3	La visualizzazione	73
3.1	La proiezione stereografica	74
3.2	Proiezione radiale e immagine sferica dei poliedri	79
3.3	La composizione Φ_2	83
3.4	Estensione ai policori regolari	85
3.5	Galleria	88
A	Superficie e volume di un'ipersfera	95
B	Numeri di Fibonacci	99
C	Richiami di geometria sferica	103
	Bibliografia	106

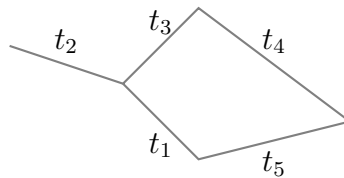
Poligoni e poliedri

1.1 Poligoni

Facendo riferimento ai principi fondamentali della geometria euclidea, o ripensando ad alcuni concetti che vengono trattati anche durante il percorso scolastico, è possibile identificare alcuni tra i più noti *poligoni regolari*, quali il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, l'esagono e così via.

Ciò nonostante, formulare una definizione rigorosa di poligono che sia al contempo elementare ed esaustiva non è un compito banale. Una possibile definizione potrebbe descrivere un poligono come una *figura piana costituita da un numero finito di segmenti consecutivi*.

Tuttavia, un approccio di questo tipo porterebbe a considerare come poligono anche la figura seguente:



Maria Dedò nel suo testo [Ded99] riporta la seguente definizione:

Definizione 1.1.1. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione continua, iniettiva su $]0, 1[$, tale che $f(0) = f(1)$. Si supponga inoltre che esistano n punti $t_0, t_1, \dots, t_n$ con la condizione

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1.$$

Sia la *poligonale* l'immagine dell'applicazione affine $f(t) = a_i t + b_i$, con $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Si definisca invece *poligono* come la componente connessa limitata che è complementare all'immagine di f .

Se, in particolare, $a_i \neq a_{i+1}$ per ogni i , allora il poligono è un *n-poligono*.

Una definizione senza dubbio esaustiva e matematicamente impeccabile che esclude ogni dubbio, ma non per questo immediatamente accessibile a studenti di scuola secondaria, come la stessa autrice riconosce.

È possibile adottare definizioni alternative di poligono convesso che prescindano dall'uso delle poligonali.

Definizione 1.1.2. Un *n-poligono convesso* è un sottoinsieme limitato del piano che soddisfa il sistema di disequazioni:

$$a_h x + b_h y \leq c_h \quad \text{con} \quad h = 1, \dots, n \quad (1.1.1)$$

Questa definizione ha, però, un inconveniente: non è in grado di individuare i vertici e i lati del poligono.

Definizione 1.1.3. Un poligono convesso è l'involuppo convesso di n punti fissati del piano.

Questa definizione presenta un problema evidente: non è in grado di classificare il poligono in base ai suoi elementi, ovvero non è possibile determinare se si tratti di un triangolo, un quadrilatero e così via.

Infatti, alcuni degli n punti potrebbero trovarsi anche all'interno dell'involuppo convesso - a parte il particolare caso in cui questi siano tutti appartenenti a una circonferenza e, quindi, non partecipare alla conta dei vertici.

Si noti inoltre che, per il momento, si sono potuti classificare solo i poligoni convessi, escludendo quindi poligoni non convessi, come ad esempio quello in figura 1.1.

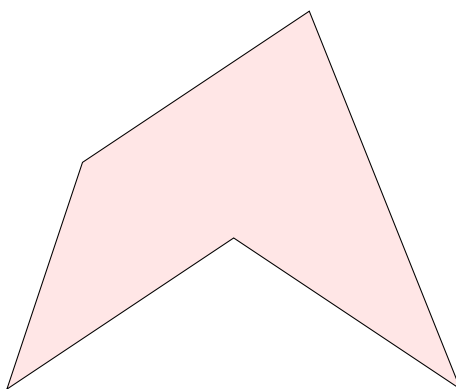


Figura 1.1: *Pentagono non convesso*

Potrebbe risultare più efficace ricorrere alla seguente definizione:

Definizione 1.1.4. Un n -poligono è la componente connessa limitata di una n -poligonale chiusa.

Nonostante questa definizione sia presente anche nei libri di scuola superiore (dove solitamente si omettono riferimenti topologici), essa fa uso del *Teorema della Curva di Jordan*¹. Sebbene il teorema sia enunciato in modo apparentemente semplice, la sua dimostrazione è estremamente complessa e si estende su ben 6500 righe di testo.

In conclusione, come si può osservare, ogni tentativo di semplificare la definizione di poligono finisce per escludere una parte del suo insieme oppure

¹Il *Teorema della curva di Jordan* stabilisce che una curva semplice chiusa nel piano, ossia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a S_1 , suddivide il piano in due componenti connesse: una limitata, detta *interno*, e una illimitata, detta *esterno*, aventi la curva stessa come frontiera comune.

per includere figure piane che non sono ciò che comunemente si definirebbero poligoni.

Per tale motivo si procederà secondo il seguente schema:

Definizione 1.1.5. Si definisce *n-poligono* un circuito chiuso formato da n segmenti di linea $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$, che congiungono coppie consecutive di n punti, a tre a tre non allineati. I segmenti e i punti sono denominati rispettivamente *lati* e *vertici*. In questo capitolo, si assumerà, inoltre, che i lati suddetti non si intersechino vicendevolmente. Se i vertici sono complanari, l' n -poligono è un *poligono piano*.

Un poligono piano suddivide il piano in due componenti connesse, di cui quella limitata rappresenta il suo interno.

A seconda del contesto, si potrà considerare il poligono come la sola poligonale chiusa oppure includere anche la sua regione interna.

Definizione 1.1.6. Di particolare interesse è il caso di un *n-poligono convesso*, ovvero una figura in cui nessun lato penetra all'interno della regione delimitata. In un sistema di riferimento cartesiano, tale poligono può essere descritto da un sistema di disequazioni lineari del tipo:

$$a_hx + b_hy \leq c_h, \quad h = 1, \dots, n. \quad (1.1.2)$$

Tali disequazioni identificano la poligonale e la sua regione interna D , la cui area viene espressa facilmente mediante l'integrale doppio:

$$\iint_D dx dy. \quad (1.1.3)$$

Definizione 1.1.7. Un poligono si definisce *equilatero* se i suoi lati hanno tutti la stessa lunghezza ed *equiangolo* se gli angoli descritti dai suoi lati hanno tutti la stessa ampiezza.

Per $n > 3$, un n -poligono può essere equilatero senza essere necessariamente equiangolo e viceversa. Ad esempio, un rombo è certamente equilatero, ma

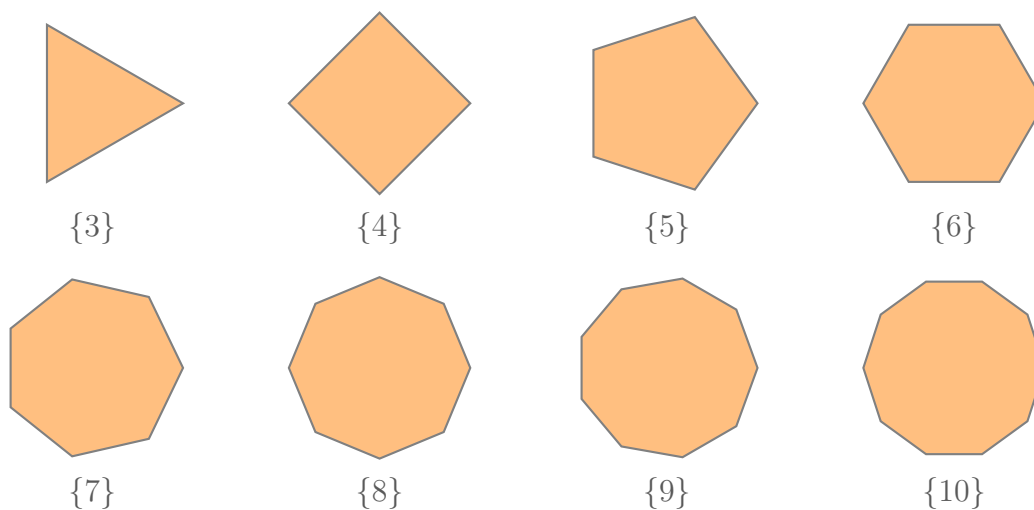
non necessariamente equiangolo. Un rettangolo è invece equiangolo, ma non necessariamente equilatero.

Un n -poligono si dice *regolare* quando è equilatero ed equiangolo.

Definizione 1.1.8. Un poligono regolare viene denotato simbolicamente mediante la *notazione di Schläfli* $\{p\}$.

Di conseguenza, si può scrivere:

- $\{3\}$ triangolo equilatero;
- $\{4\}$ quadrato;
- $\{5\}$ pentagono regolare;
- $\{p\}$ p -agono regolare.



Un poligono regolare è sempre caratterizzato da un centro O , dal quale tutti i vertici possiedono la stessa distanza ${}_0R$, raggio della circonferenza circoscritta al poligono.

Analogamente, la distanza di ciascun lato dal centro è indicata con ${}_1R$, corrispondente al raggio della circonferenza inscritta.

I lati di un $\{p\}$ possono essere rappresentati come vettori disposti consecutivamente. In tal caso, la loro somma risulta nulla, secondo la regola della poligonale.

Se tali vettori vengono traslati in modo da renderli concorrenti in un unico punto, gli angoli tra essi si identificano con gli angoli esterni del poligono.

L'esempio riportato in figura 1.2 illustra questo concetto nel caso $p = 3$.

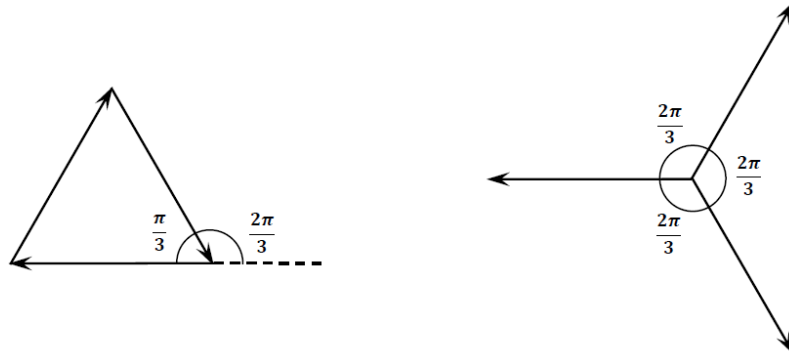


Figura 1.2

Si desume che la somma degli angoli esterni di un p -poligono equivale a 2π . Da ciò consegue che ogni angolo esterno possiede un'ampiezza pari a $2\pi/p$, quindi ogni angolo interno, essendo suo supplementare, possiede un'ampiezza pari a

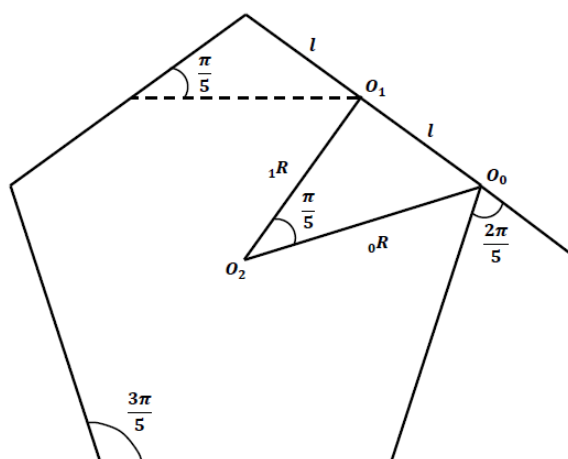
$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi \quad (1.1.4)$$

dai cui la somma degli angoli interni di un p -poligono regolare risulta

$$(p - 2)\pi \quad (1.1.5)$$

Se si denota con $2l$ la lunghezza del lato di un p -poligono regolare, il suo perimetro risulta ovviamente equivalente a $2lp$. È altresì possibile risalire con facilità al valore della relativa area.

Esempio. Allo scopo di visualizzare il concetto, si può far riferimento al caso del pentagono regolare; in simbolo $\{5\}$.



$${}_0R = \frac{l}{\sin \frac{\pi}{5}}; \quad {}_1R = l \cot \frac{\pi}{5}. \quad (1.1.6)$$

$$S_{OO_0O_1} = \frac{1}{2} {}_1Rl = \frac{l^2}{2} \cot \frac{\pi}{p}$$
$$S_{\{p\}} = 2p S_{OO_0O_1}$$
$$S_{\{p\}} = pl^2 \cot \frac{\pi}{p}. \quad (1.1.7)$$

Introducendo un riferimento cartesiano ortonormale la cui origine corrisponde al punto O - definito come centro del poligono a pagina 5 del presente elaborato

- e ipotizzando che il vertice A_1 venga posizionato sul semiasse positivo delle x , i vertici del p -poligono giacciono certamente sulla circonferenza di raggio ${}_0R$ centrata nell'origine.

Le relative coordinate si desumono dalla relazione

$$A_{h+1} \left({}_0R \cos \frac{2h\pi}{p}, {}_0R \sin \frac{2h\pi}{p} \right) \quad \text{con} \quad h = 0, 1, \dots, p-1.$$

Osservazione. È interessante osservare che, nel piano complesso, ai relativi vertici sono associati i numeri

$$z_{h+1} = {}_0R \left(\cos \frac{2h\pi}{p} + i \sin \frac{2h\pi}{p} \right) = {}_0Re \left(i^{\frac{2h\pi}{p}} \right)$$

$$\text{con} \quad h = 0, 1, \dots, p-1$$

che si identificano con le n soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione binomia

$$z^p = {}_0R^p.$$

Passando, infine, al limite per $p \rightarrow +\infty$, le misure di perimetro e area di un $\{p\}$ tendono a quelli del cerchio a esso circoscritto di raggio ${}_0R$.

In particolare, per il perimetro si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2nl &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \left({}_0R \sin \frac{\pi}{n} \right) = \\ &= 2{}_0R \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{\pi}{n} = 2{}_0R\pi. \end{aligned}$$

Analogamente, per l'area si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nl^2 \cot \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left({}_0R \sin \frac{\pi}{n} \right)^2 \cot \frac{\pi}{n} =$$

$$= {}_0R^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = {}_0R^2 \pi.$$

1.2 Poliedri

Per la definizione di poliedro, si riscontrano le stesse problematiche analizzate nel paragrafo precedente riguardo la definizione di poligono.

Se si volesse affermare, ad esempio, che *un poliedro è una regione limitata dello spazio il cui bordo è costituito da poligoni aventi, due a due, solo uno spigolo in comune*, ci si troverebbe ad includere nella categoria di poliedro anche i solidi geometrici in figura 1.3.

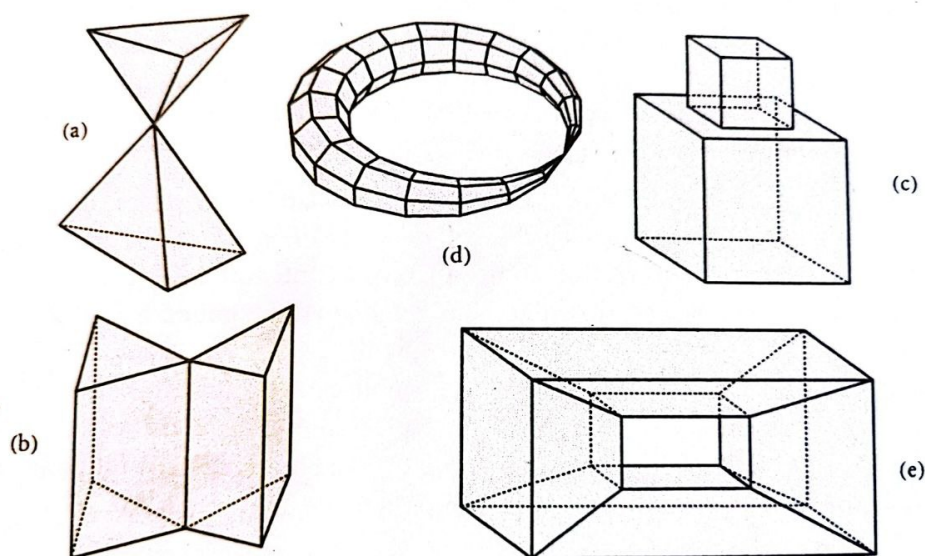


Figura 1.3: figure da [Ded99]

Maria Dedò, in [Ded99], offre una definizione rigorosa di poliedro:

Definizione 1.2.1. (secondo Dedò)

Una superficie poliedrale è un sottoinsieme connesso dello spazio che sia unione di un numero finito di poligoni, chiamati facce del poliedro, in modo tale che:

1. L'intersezione di due facce è o un lato o un vertice comune alle due facce, in alternativa è vuota;
2. Ogni lato appartiene esattamente a due facce;
3. Due facce adiacenti (tali che la loro intersezione sia un lato) non sono complanari;
4. Comunque si fissi un vertice v e due facce adiacenti f e g che contengono v , esiste una catena di facce $f_1, \dots, f_n$, tutte contenenti v , tale che $f = f_1$, $g = f_n$ e tali che f_i sia adiacente a f_{i+1} , $\forall i = 1, \dots, n-1$;
5. La superficie poliedrale è il bordo di una regione di spazio limitata semplicemente connessa che rappresenta l'interno della stessa.

Una definizione prolissa, tuttavia necessaria in quanto serve a escludere casi di forme spaziali che non vengono usualmente definite come superfici poliedrali.

Ad esempio:

- Il punto 1 evita che due facce si sovrappongano;
- Il punto 2 evita che un lato appartenga a 4, 6 o più facce, come nell'unione di due poliedri che si intersecano solo in uno spigolo;
- Il punto 4 evita che si includano tra le superfici poliedrali figure che sono unione di due poliedri che si intersecano solo in un vertice;
- Il punto 5, relativo alla semplice connessione, evita che vi siano figure con buchi.

Poiché tutti i punti, a parte il β , possono essere ricapitolati affermando che un poliedro è omeomorfo a una sfera, si può riassumere la definizione nel seguente modo:

Definizione 1.2.2. Una superficie poliedrale è un sottoinsieme dello spazio omeomorfo a una sfera che sia unione di un numero finito di poligoni, chiamati facce del poliedro, in modo tale che due facce adiacenti non siano complanari.

Come nel caso dei poligoni, è opportuno precisare che, a seconda del contesto, un poliedro può essere definito esclusivamente come la superficie poliedrale, oppure come l'unione della superficie poliedrale con la sua regione interna.

Di particolare interesse è il caso in cui le facce del poliedro siano costituite da piani di delimitazione tali da non intersecare la regione interna. In tal caso, il poliedro è detto *convesso*.

Definizione 1.2.3. Se N_0 è il numero dei vertici di un poliedro, N_1 è il numero dei suoi lati e N_2 è il numero delle sue facce, allora un poliedro convesso viene individuato, in un sistema di riferimento cartesiano, mediante un sistema definito di disequazioni lineari del tipo:

$$a_h x + b_h y + c_h z \leq d_h \quad \text{con } h = 1, 2, \dots, N_2. \quad (1.2.1)$$

che individuano la regione interna del poliedro.

Il volume della regione solida D così definita è esprimibile attraverso l'integrale triplo:

$$\iiint_D dx dy dz. \quad (1.2.2)$$

Sarà utile introdurre un nuovo concetto:

Definizione 1.2.4. (secondo [Cox48])

Sia P un poligono e sia v un suo vertice. La *figura al vertice* di P è il segmento che congiunge i punti medi dei due lati di P che concorrono in v .

Per un $\{p\}$ di lato $2l$, tutte le figure al vertice sono congruenti con lunghezza pari a

$$2l \cos \frac{\pi}{p}. \quad (1.2.3)$$

Definizione 1.2.5. (secondo [Cox48])

Sia P un poliedro e sia v un suo vertice. La *figura al vertice* di P è il poligono i cui lati sono le figure al vertice delle facce di P che concorrono in v . I suoi vertici sono quindi i punti medi dei lati di P che concorrono in v .

Un poliedro convesso si dice *regolare* quando le sue facce si configurano come poligoni regolari congruenti tra loro e le figure al vertice, per ogni vertice, risultano regolari e identiche.

Osservazione. Il fatto che le figure al vertice siano regolari e identiche è un requisito essenziale per la regolarità del poliedro.

Un esempio di un solido che non soddisfa questa condizione è il *disfenoide camuso*, in figura 1.4, il quale è costituito esclusivamente da facce triangolari equilaterali, ma presenta vertici con valenze differenti.

Definizione 1.2.6. Un poliedro regolare è comunemente denotato attraverso la notazione di Schläfli $\{p, q\}$, in cui:

- p rappresenta il numero di lati di ciascuna faccia;
- q indica il numero di lati delle figure al vertice, equivalente alla valenza di ogni vertice.

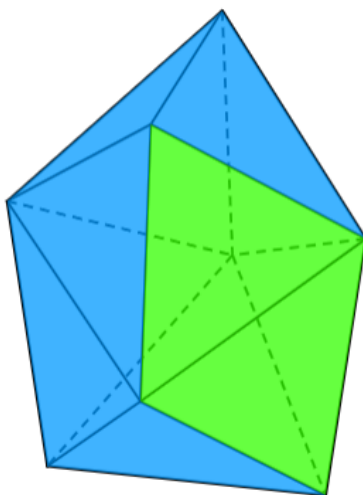


Figura 1.4: *Disfenoide camuso*

Teorema 1.2.7. *Esistono esattamente cinque poliedri regolari.*

Dim.: Un noto teorema afferma che la somma degli angoli piani delle facce di un poliedro convesso che concorrono in un vertice deve essere inferiore a 2π .

Infatti, se tale somma fosse pari a 2π , le facce incidenti nel vertice risulterebbero complanari, e dunque il solido perderebbe la sua tridimensionalità in quel punto.

Dalla (1.1.4), utilizzando la notazione di Schläfli, deve valere la relazione:

$$q \left(1 - \frac{2}{p} \right) \pi < 2\pi.$$

dalla quale segue:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \quad (1.2.4)$$

Assumendo $p = 3$, ossia il numero minimo di lati di una faccia poliedrale, la formula precedente conduce alla disuguaglianza

$$q < 6.$$

Questo consente di individuare i tre poliedri regolari aventi facce triangolari:

- $\{3, 3\}$: tetraedro regolare;
- $\{3, 4\}$: ottaedro regolare;
- $\{3, 5\}$: icosaedro regolare.

Ponendo, invece $p = 4$, si desume che $q < 4$. Nella fattispecie, si perviene all'unico poliedro regolare:

$$\{4, 3\} = \text{esaedro o cubo.}$$

Assumendo $p = 5$ si ricava $q < \frac{10}{3}$, da cui si individua l'unico poliedro regolare:

$$\{5, 3\} = \text{dodecaedro regolare.}$$

Si osserva che per $p \geq 6$ non è possibile pervenire ad alcun poliedro regolare, in quanto il corrispondente valore di q risulta inferiore a 3.

□

I cinque poliedri regolari menzionati vengono denominati *solidi platonici*.

Usando un approccio combinatorio è possibile adesso caratterizzare un poliedro rispetto ai suoi elementi costituenti: vertici, spigoli, facce.

Definizione 1.2.8. Se x e y sono elementi costituenti un poliedro (vertici, lati o facce), la scrittura $x < y$, che chiameremo *relazione di incidenza*, indica che x è un elemento contenuto in y - in questo caso x può essere un vertice o un lato e y può essere un lato o una faccia.

Una *bandiera* di un poliedro è una terna (v, s, f) formata da un vertice v , un lato s e una faccia f , tali che $v < s < f$.

In altre parole, i tre elementi sono mutuamente incidenti: il vertice appartiene al lato, e il lato alla faccia.

Se P e P' sono due poliedri e se A e A' sono gli insiemi di vertici, lati e facce rispettivamente di P e P' , si denota *isomorfismo combinatorio* tra P e P' un'applicazione biunivoca $T : A \rightarrow A'$ tale che

$$x < y \text{ in } A \iff T(x) < T(y) \text{ in } A'$$

Due poliedri si dicono *combinatoriamente equivalenti* se esiste un isomorfismo combinatorio tra P e P' .

Da un punto di vista combinatorio, le caratteristiche essenziali di un poliedro sono l'insieme dei suoi vertici, lati e facce e le relazioni di incidenza tra questi. Quindi, in questo caso, è utile usare un diagramma piano per costruire l'intera struttura combinatoria del poliedro.

Definizione 1.2.9. Il *diagramma di Schlegel* K associato a un poliedro P è un grafo che si ottiene proiettando su un piano vertici e spigoli di un poliedro da un punto opportunamente scelto.

Si prenda un punto x dello spazio abbastanza vicino ad una faccia F del poliedro ed un piano π opposto al punto scelto rispetto a P .

È possibile costruire una proiezione $f : P \rightarrow \pi$ di centro x in modo che l'immagine della faccia F , attraverso la proiezione, sia un poligono giacente sul piano π all'interno del quale si proiettano tutti i restanti vertici e spigoli di P .

Se P è semplicemente connesso, si può scegliere questo punto in modo che risulti biunivoca la proiezione su vertici e spigoli (a meno di equivalenze combinatorie su un altro poliedro).

Nel diagramma di Schlegel K di un poliedro P , il numero di vertici e di spigoli di K è uguale al numero di vertici e di spigoli di P mentre il numero di componenti connesse del complementare di K corrisponde al numero di facce

di P : in particolare la faccia più vicina al punto di proiezione x corrisponde alla componente illimitata.

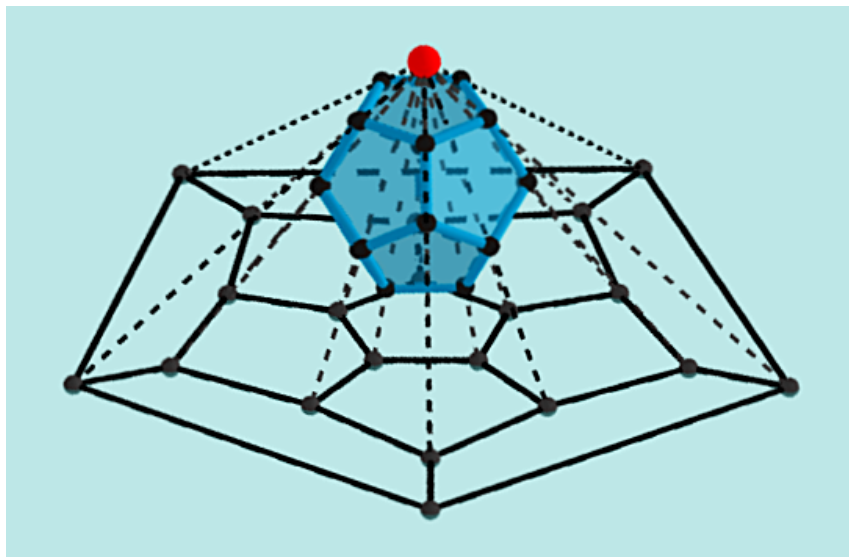


Figura 1.5: *Diagramma di Schlegel di un dodecaedro regolare*

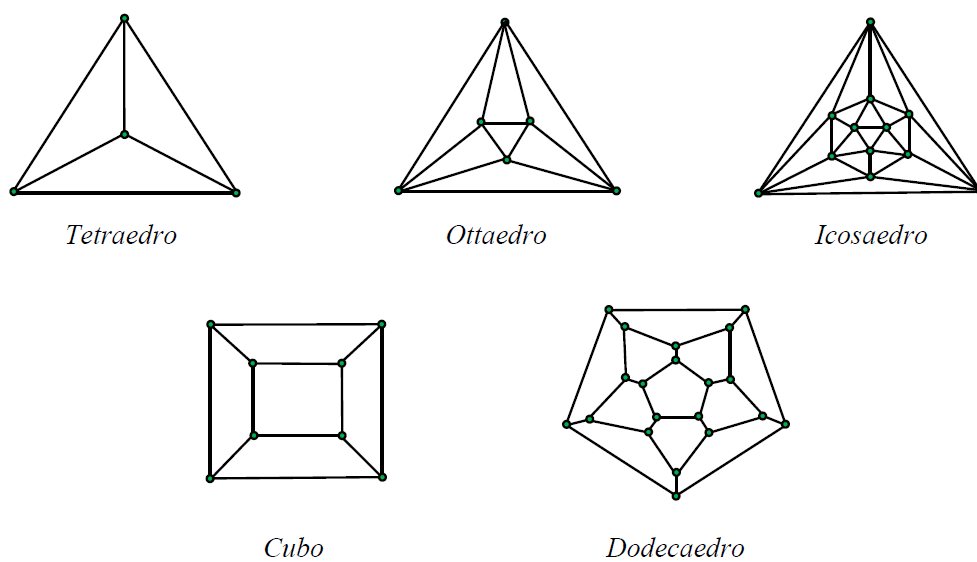


Figura 1.6: *Diagramma di Schlegel dei 5 poliedri regolari*

Ciò premesso, si può esprimere e dimostrare la *formula di Eulero*:

Teorema 1.2.10. (*formula di Eulero*)

Sia P un poliedro regolare. Indichiamo con

- N_0 il numero dei vertici di P ;*
- N_1 il numero degli spigoli di P ;*
- N_2 il numero delle facce di P .*

Vale allora la relazione

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2. \quad (1.2.5)$$

Dim.: Poichè un diagramma di Schlegel K di P , è combinatoriamente equivalente a P si può procedere con la dimostrazione lavorando su tale rappresentazione.

Si suddivide ogni componente connessa limitata del complementare di K in triangoli. Questo è sempre possibile attraverso un processo di *decomposizione in semplici o triangolazione tramite complessi simpliciali^a* della superficie, che non altera la struttura combinatoria del grafo.

Infatti, ogni n -poligono può essere suddiviso in $n - 2$ triangoli senza introdurre nuovi vertici, semplicemente tracciando $n - 3$ diagonali a partire da un vertice fissato.

Ad ogni passo, su una componente connessa non triangolare si ha:

$$N'_0 = N_0; \quad N'_1 = N_1 + (n + 3); \quad N'_2 = N_2 + (n + 3).$$

Si osserva ora che la relazione di Eulero è invariante rispetto a questa operazione di suddivisione, poichè:

$$N'_0 - N'_1 + N'_2 = N_0 - N_1 - (n-3) + N_2 + (n-3) = N_0 - N_1 + N_2.$$

Dunque, senza ledere generalità, si può supporre che le componenti connesse limitate del complementare di K siano tutte triangolari.

Fissata ora una faccia triangolare che sia adiacente alla componente illimitata, eliminandola si ottiene un nuovo grafo K' .

Possono verificarsi due possibili casi:

- Se la faccia ha in comune con la componente illimitata un solo lato, allora:

$$N'_0 = N_0, \quad N'_1 = N_1 - 1, \quad N'_2 = N_2 - 1.$$

- Se la faccia ha in comune con la componente illimitata due lati, allora:

$$N'_0 = N_0, \quad N'_1 = N_1 - 2, \quad N'_2 = N_2 - 1.$$

Proseguendo iterativamente il grafo finale risulta un *albero* per il quale $N'_0 = 3$, $N'_1 = 3$, e $N'_2 = 2$.

Da cui

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

□

^aUn *n-simplesso* è l'involuppo convesso di $n + 1$ punti affinalmente indipendenti in uno spazio euclideo. Una *decomposizione simpliciale* (o *triangolazione*) di una superficie è la sua rappresentazione come unione finita di semplici incollati lungo facce comuni [Hat02].

Si può dimostrare il teorema 1.2.7 anche utilizzando la relazione di Eulero.

Teorema 1.2.11. *Ci sono solo cinque poliedri regolari.*

Dim.: Visto che ogni spigolo di un poliedro P appartiene a due facce allora si può esprimere il numero di lati p di ciascuna faccia come:

$$p = \frac{2N_1}{N_2} \quad (1.2.6)$$

e visto che ogni spigolo contiene due vertici si può esprimere la valenza di ciascun vertice q come:

$$q = \frac{2N_1}{N_0}. \quad (1.2.7)$$

Sostituendo le due relazioni alla relazione di Eulero si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{2N_1}{q} - N_1 + \frac{2N_1}{p} &= 2 \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{N_1} > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

da cui è possibile ricondursi di nuovo ai cinque solidi platonici.

□

Utilizzando questa variante del teorema, si considerano le qualità combinatorie del poliedro, dunque risulta vera a meno di un'equivalenza combinatoria.

Osservazione. Questo risultato mostra che la classificazione dei poliedri regolari non dipende dalla loro forma esatta nello spazio euclideo, ma unicamente dalla loro struttura combinatoria.

Di conseguenza, ogni poliedro convesso regolare è univocamente determinato dalla sua struttura di incidenza e non dalla particolare disposizione dei suoi elementi geometrici.

Usando la formula di Eulero 1.2.10, in combinazione con (1.2.6) e (1.2.7), si possono ricavare i valori di N_0 , N_1 e N_2 in funzione di p e q :

$$N_0 = \frac{4p}{2p + 2q - pq}; \quad N_1 = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}; \quad N_2 = \frac{4q}{2p + 2q - pq}. \quad (1.2.9)$$

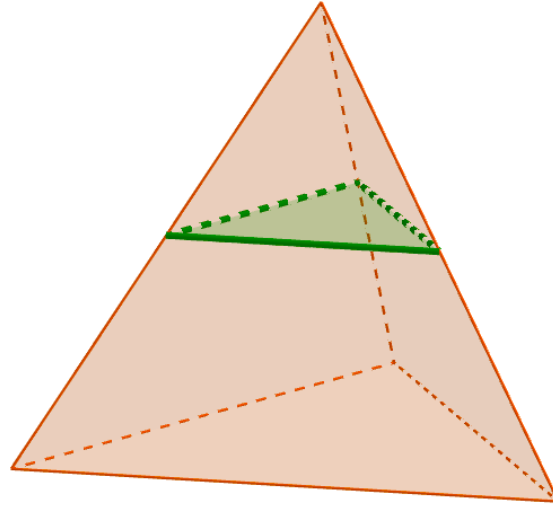


Figura 1.7: $\{3, 3\}$ con figura al vertice

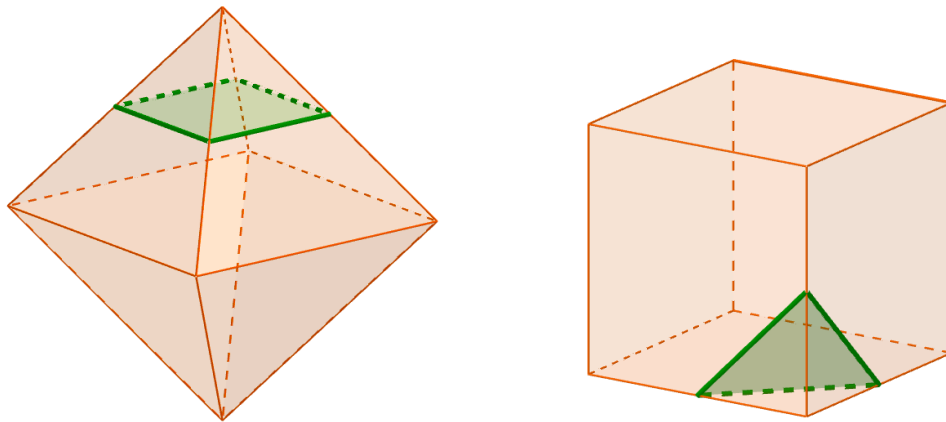


Figura 1.8: $\{3, 4\}$ e $\{4, 3\}$ con rispettive figure al vertice

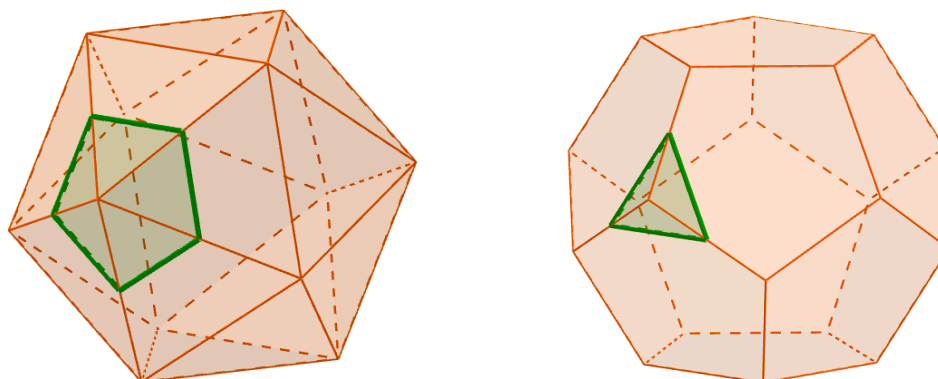


Figura 1.9: $\{3,5\}$ e $\{5,3\}$ con rispettive figure al vertice

Nella tabella sottostante, è rappresentato il numero degli elementi per ogni solido platonico a conclusione del ragionamento:

$\{p, q\}$	Nome	Facce N_2	Spigoli N_1	Vertici N_0
$\{3,3\}$	Tetraedro	4	6	4
$\{3,4\}$	Ottaedro	8	12	6
$\{3,5\}$	Icosaedro	20	30	12
$\{4,3\}$	Esaedro o Cubo	6	12	8
$\{5,3\}$	Dodecaedro	12	30	20

Tabella 1.1: *Elementi combinatori dei poliedri regolari*

Tra i poliedri regolari esiste una relazione nota col nome di *dualità combinatoria*. Questa relazione associa a ogni poliedro un altro poliedro detto *duale*, in cui le corrispondenze tra facce, spigoli e vertici si scambiano. In particolare:

- i centri delle facce di un cubo sono vertici di un ottaedro e viceversa;
- i centri delle facce di un icosaedro sono vertici di un dodecaedro e viceversa.

Più in generale, ogni poliedro regolare $\{p, q\}$ ha un duale $\{q, p\}$, ottenuto scambiando il numero di lati di ciascuna faccia con il numero di facce che incontrano ciascun vertice.

Formalizzando il concetto in senso combinatorio è possibile scrivere:

Definizione 1.2.12. Siano P e P' due poliedri. Siano A e A' gli insiemi degli elementi combinatori rispettivamente di P e P' , come sono stati definiti a pagina 12 dell'elaborato.

Si dirà che P e P' sono *combinatoriamente duali* se esiste una corrispondenza biunivoca $T : A \rightarrow A'$ tale che

$$x < y \text{ in } A \quad \Longleftrightarrow \quad T(y) < T(x) \text{ in } A'$$

dove la relazione $x < y$ indica che l'elemento x è contenuto in y (ad esempio, un vertice è contenuto in uno spigolo, e uno spigolo è contenuto in una faccia).

In particolare, N_0 di P è uguale a N_2 di P' ; N_1 di P è uguale a N_1 di P' ; N_2 di P è uguale a N_0 di P' .

Leggendo la tabella 1.1 si può notare facilmente che

$\{3,4\}$ è combinatoriamente duale di $\{4,3\}$;

$\{3,5\}$ è combinatoriamente duale di $\{5,3\}$.

Osservazione. Questo concetto non ha valore metrico ma solo topologico, in quanto la dualità così presentata vale nell'ambito di poliedri visti solo dal punto di vista combinatorio.

1.2.1 Coordinate cartesiane poliedrali

A meno di similitudini in $\mathbb{R}^3$, le coordinate cartesiane dei vertici di un solido platonico possono essere assegnate nel modo che segue.

Cubo:

Ponendo il centro della figura nell'origine e scegliendo come lunghezza del lato 2, i vertici del cubo corrispondono agli otto punti di coordinate

$$(\pm 1; \pm 1; \pm 1). \quad (1.2.10)$$

Tetraedro:

Si scelgano quattro vertici di un cubo, in modo tale che due siano i vertici di una diagonale di una sua faccia e gli altri due siano i vertici della faccia opposta della diagonale non parallela alla precedente.

Ad esempio, una configurazione di vertici adeguata è

$$\begin{aligned} (1; 1; 1), \quad (1; -1; -1), \\ (-1; 1; -1), \quad (-1; -1; 1). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Con questa scelta di coordinate, il lato del tetraedro ha lunghezza $2\sqrt{2}$.

Ottaedro:

I sei punti di coordinate

$$(\pm 1; 0; 0), \quad (0; \pm 1; 0), \quad (0; 0; \pm 1) \quad (1.2.12)$$

sono vertici di un ottaedro regolare centrato nell'origine.

Con questa assegnazione di coordinate, il lato dell'ottaedro misura $\sqrt{2}$.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + b = 1$. Il lato dell'ottaedro di estremi $(0; 0; 1)$ e $(0; 1; 0)$ viene suddiviso in due segmenti in rapporto $a : b$ dal punto di coordinate $(0, a, b)$.

Per ragionamento analogo, si individuino su ciascuno dei 12 spigoli dell'ottaedro i punti

$$(0; \pm a; \pm b), \quad (\pm b; 0; \pm a), \quad (\pm a; \pm b; 0)$$

che costituiscono i vertici di un icosaedro avente come facce 8 triangoli equilateri e 12 isosceli.

Senza ledere la generalità, è possibile supporre che $a \geq b$. Quando $a : b$ è grande, i triangoli isosceli presentano una base corta; al limite scompaiono, poiché i loro lati uguali coincidono e giacciono lungo i dodici spigoli dell'ottaedro. In qualche stadio intermedio, i triangoli isosceli devono diventare equilateri e quindi i vertici costituire l'icosaedro regolare.

A questo stadio i lati formati devono eguagliarsi, ovvero deve valere $a^2 - ab + b^2 = 2b^2$, che porta a

$$a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Dividendo per b^2 , si ottiene

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

ossia la nota equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

che fornisce come radici $x = \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ di cui quella positiva è il *numero aureo* ϕ^2 .

Quindi i dodici vertici dell'icosaedro regolare possono essere ottenuti dividendo i dodici lati di un ottaedro regolare secondo la *sezione aurea*.

²(vedi appendice B)

Icosaedro:

Partendo da un ottaedro regolare con vertici nei punti di coordinate

$$(\pm(1 + \phi); 0; 0), \quad (0; \pm(1 + \phi); 0), \quad (0; 0; \pm(1 + \phi)),$$

si ottengono i dodici vertici di un icosaedro regolare di lato 2, come

$$(\pm\phi; \pm 1; 0), \quad (\pm 1; 0; \pm\phi), \quad (0; \pm\phi; \pm 1). \quad (1.2.13)$$

Dodecaedro:

Per dualità sull'icosaedro, si invertono i ruoli di vertici e facce e si considerano i venti punti di coordinate

$$(\pm 1; \pm 1; \pm 1), \quad (\pm\phi; 0; \pm\phi^{-1}),$$

$$(0; \pm\phi^{-1}; \pm\phi), \quad (\pm\phi^{-1}; \pm\phi; 0), \quad (1.2.14)$$

tra i quali i punti di coordinate $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ corrispondono ai vertici di un cubo.

Con questa scelta di coordinate il lato del dodecaedro misura $2\phi^{-1}$.

1.2.2 Raggi e angoli poliedrali

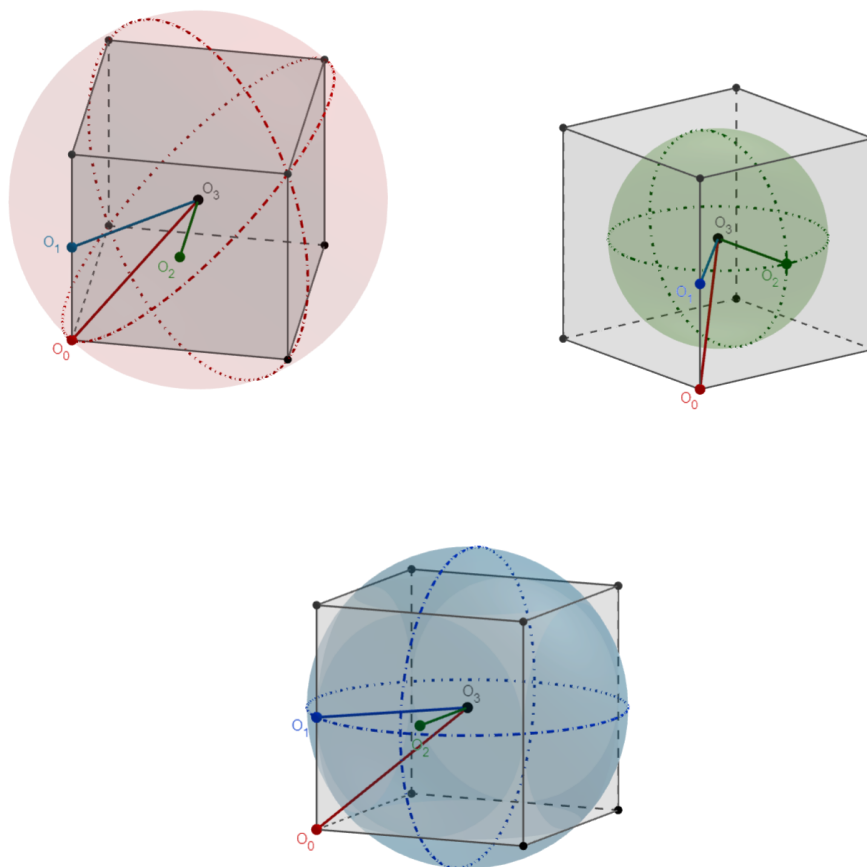


Figura 1.10: *Sfera circoscritta, inscritta e medioinscrita a un cubo*

Avendo descritto le coordinate cartesiane dei 5 solidi, sarebbe lecito pensare che si possano omettere le definizioni che qui seguiranno. Tuttavia, queste ultime si riveleranno particolarmente utili nel momento in cui, passando a una dimensione successiva, l'elaborazione visiva degli oggetti che vi abitano risulterà più complessa.

Definizione 1.2.13. Dato un poliedro regolare $\{p, q\}$, adottando la nomenclatura già impiegata per i poligoni, si definiscono O_3 il suo centro, O_2 il centro di

una sua faccia $\{p\}$, O_1 il centro di un lato di tale faccia e infine, O_0 un vertice di questo lato.

Si definiscono inoltre ${}_0R$, ${}_1R$ e ${}_2R$ rispettivamente il raggio della *sfera circoscritta* a cui appartengono tutti i suoi vertici, il raggio della *sfera medioinscritta* a cui appartengano tutti i vertici delle sue figure al vertice e il raggio della *sfera inscritta* a cui appartengono tutti i centri delle sue facce. (vedi figura 1.10 e 1.11)

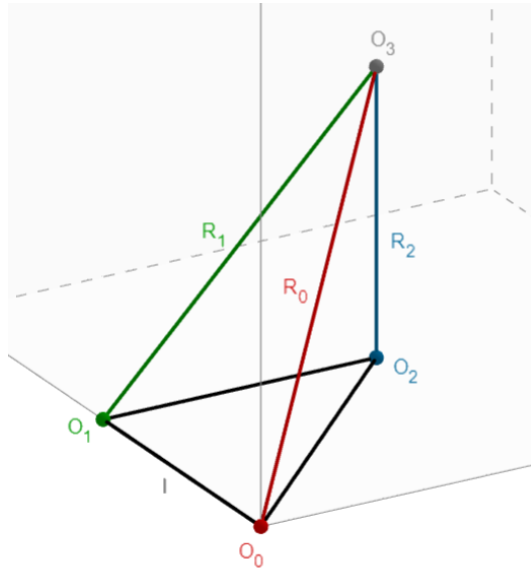


Figura 1.11

Dal momento che il triangolo $O_iO_jO_k$ (con $i < j < k$) è rettangolo in O_j , allora si ha

$${}_0R^2 = {}_1R^2 + (O_0O_1)^2 = {}_1R^2 + l^2 \quad (1.2.15)$$

sul triangolo $O_0O_1O_3$,

$${}_0R^2 = {}_2R^2 + (O_0O_2)^2 = {}_2R^2 + \left[l \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) \right]^2 \quad (1.2.16)$$

sul triangolo $O_0O_2O_3$,

$${}_1R^2 = {}_2R^2 + (O_1O_2)^2 = {}_2R^2 + \left[l \cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]^2 \quad (1.2.17)$$

sul triangolo $O_1O_2O_3$, facendo riferimento anche a $O_0O_1O_2$. (vedi figura 1.11)

Definizione 1.2.14. Sia $\{p, q\}$ un poliedro regolare con N_0 vertici, N_1 lati e N_2 facce.

Un *poliedro quasi regolare* $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$ si costruisce sostituendo al posto di ogni vertice di $\{p, q\}$ la sua figura al vertice $\{q\}$ con la proprietà che ogni spigolo di $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$ è condiviso esattamente da una faccia p -gonale e da una faccia q -gonale. I suoi vertici sono quindi in numero N_1 .

Le facce di $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$ sono N_0 di tipo $\{q\}$ e N_2 di tipo $\{p\}$.

Ci sono 4 lati uscenti da ogni vertice di $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$, quindi $2N_1$ lati in totale.

La formula di Eulero è soddisfatta, infatti

$$N_1 - 2N_1 + N_0 + N_2 = 2.$$

Un $\left\{\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\}$ è un ottaedro $\{3, 4\}$;

un $\left\{\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}$, evidentemente identico a un $\left\{\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\}$, è un cubottaedro;

un $\left\{\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right\}$, come un $\left\{\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\}$, è un icosidodecaedro.

Esaminando un modello di ottaedro, cubottaedro o icosidodecaedro (come quello fornito da [Cox48] in figura 1.12), si osservano un certo numero di poligoni equatoriali che, giacendo in piani che passano dal centro della figura, appartengono anche alla sfera circoscritta del poliedro quasi regolare $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$.

Questa sfera è anche sfera medioinscritta del poliedro regolare $\{p, q\}$.

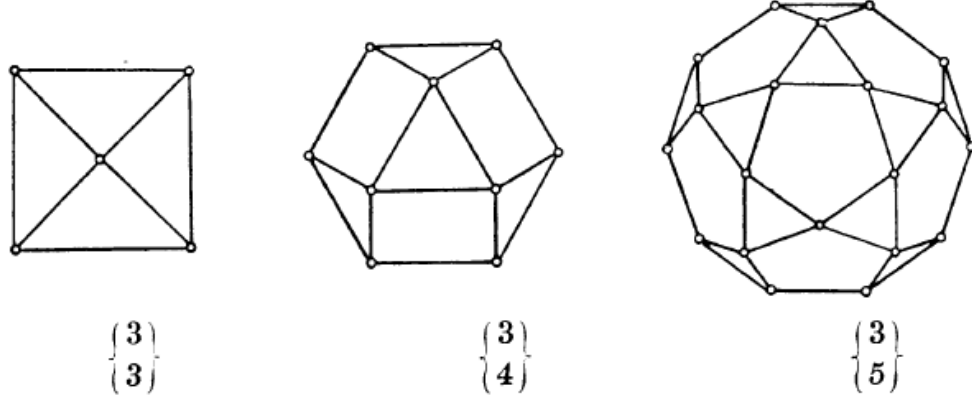


Figura 1.12: [Cox48]

Sia h il numero di lati di questo poligono equatoriale, con simbologia $\{h\}$, e la sua figura al vertice avrà lunghezza $2L \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$.

D'altra parte, per costruzione, la figura al vertice di un $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ di lato $2L$ è un rettangolo con lati di lunghezza $2L \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$ e $2L \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$.

Quindi, la figura al vertice di $\{h\}$ è la diagonale di questo rettangolo.

Per il teorema di Pitagora si ha

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{h}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right). \quad (1.2.18)$$

Da (1.2.18) possiamo ricavare il valore di h per i poligoni quasi regolari definiti, infatti:

- per un ottaedro $\left\{\frac{3}{3}\right\}$, $h = 4$;
- per un cubottaedro $\left\{\frac{4}{3}\right\}$, $h = 6$;
- per un icosidodecaedro $\left\{\frac{5}{3}\right\}$, $h = 10$.

Si può pervenire a un'espressione algebrica per h , dipendente dai valori p e q , non trigonometrica considerando che ogni lato di $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ appartiene a un solo $\{h\}$ (che chiaramente non è unico).

Quindi, in totale, si contano per ogni poliedro $2N_1/h$ poligoni equatoriali.

Ognuno di questi, poi, incontra gli altri in una coppia di vertici opposti e si ha

$$\frac{2N_1}{h} - 1 = \frac{h}{2}$$

da cui

$$h = \sqrt{4N_1 + 1} - 1. \quad (1.2.19)$$

Le proprietà metriche di un poliedro $\{p, q\}$ possono essere espresse elegantemente in termini dei valori p , q e h .

Un metodo semplice consiste nel trovare anzitutto il raggio della sfera circoscritta a $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right\}$. Questo raggio, indicato con ${}_1R$, coincide con quello di una circonferenza circoscritta a un $\{h\}$, il cui lato, come precedentemente osservato, ha lunghezza $2L$.

Allora, in virtù della (1.1.6),

$${}_1R = L \csc\left(\frac{\pi}{h}\right).$$

Nella costruzione di $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right\}$ come poligono quasi-regolare del poliedro regolare $\{p, q\}$ con spigoli di lunghezza $2l$, ${}_1R$ si presenta come il raggio della sfera medioinscritta di $\{p, q\}$.

Lo spigolo $2L$ di $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right\}$ è anche lo spigolo della figura al vertice di $\{p, q\}$, ovvero $2l \cos(\pi/p)$.

Quindi:

$$L = l \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

da cui

$${}_1R = l \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{h}\right). \quad (1.2.20)$$

Dalle relazioni (1.2.15), (1.2.16), (1.2.17) e (1.2.18), si ricavano inoltre le espressioni per il raggio della sfera circoscritta e per quello della sfera inscritta al poliedro:

$${}_0R = l \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{h}\right) \quad (1.2.21)$$

e

$${}_2R = l \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{h}\right). \quad (1.2.22)$$

Siano

$$\alpha = O_0 \widehat{O_3} O_1, \quad \beta = O_0 \widehat{O_3} O_2, \quad \gamma = O_1 \widehat{O_3} O_2$$

come in figura 1.13.

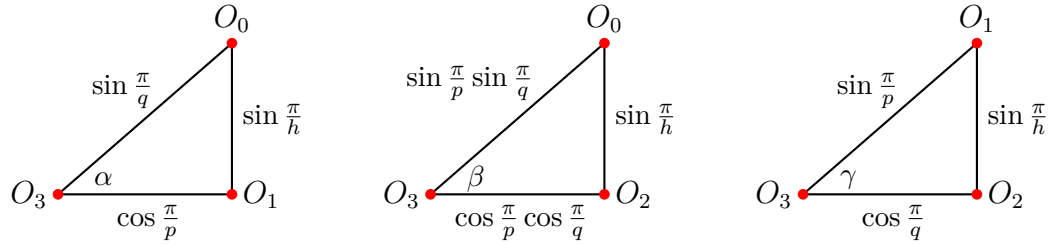


Figura 1.13

Gli angoli α , β e γ di $\{p, q\}$ equivalgono, per dualità, agli angoli γ , β e α di $\{q, p\}$. Si ottiene, infatti:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{O_1 O_3}{O_0 O_3} = \frac{{}_1 R}{{}_0 R} = \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ \cos \beta = \frac{O_2 O_3}{O_0 O_3} = \frac{{}_2 R}{{}_0 R} = \cot g\left(\frac{\pi}{p}\right) \cot g\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ \cos \gamma = \frac{O_2 O_3}{O_1 O_3} = \frac{{}_2 R}{{}_1 R} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \end{cases} \quad (1.2.23)$$

Si osserva inoltre che

$$\sin \alpha = \frac{l}{{}_0 R}$$

e che $\pi - 2\gamma$ è l'angolo diedro tra i piani di due facce adiacenti, come si evince considerando la sezione del piano $O_1 O_2 O_3$ che è perpendicolare allo spigolo comune di tali facce.

La prima delle equazioni di (1.2.23) afferma che $l \cos \alpha$ è uguale al raggio circonferenziale della figura al vertice $\{q\}$.

Può essere più facile dedurlo graficamente osservando la sezione di $\{p, q\}$ mediante il piano $O_0 O_1 O_3$ che unisce uno spigolo con il centro del poliedro, come si evince dalla figura 1.14.

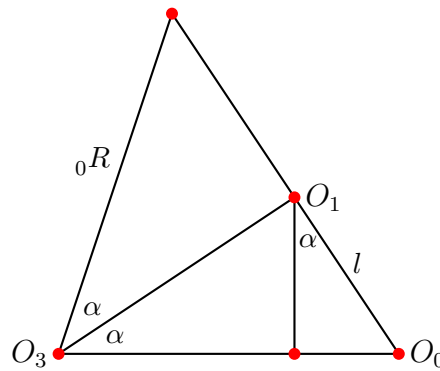


Figura 1.14

In virtù di (1.2.6), (1.2.7) e di (1.1.7) otteniamo che la superficie poliedrale

di un $\{p, q\}$ equivale a

$$S_{\{p,q\}} = N_2 \cdot S_{\{p\}} = 2N_1 \cdot l^2 \cot\left(\frac{\pi}{p}\right). \quad (1.2.24)$$

Il volume del $\{p, q\}$ invece si può trovare pensando al fatto che ogni poliedro di m facce possa essere scomposto nell'unione di m piramidi aventi lo stesso vertice (il centro del poliedro) e come base le facce del poliedro.

Quindi, per un poliedro regolare vale

$$V_{\{p,q\}} = \frac{1}{3} S_{\{p,q\}} \cdot 2R \Rightarrow$$

$$V_{\{p,q\}} = \frac{2}{3} N_1 \cdot l^3 \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{h}\right). \quad (1.2.25)$$

1.2.3 Gruppi di simmetria dei poliedri regolari

Si vogliono descrivere le caratteristiche di simmetria dei poliedri regolari. A tale scopo, si prenda in esame l'analisi delle simmetrie di un cubo P .

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, in modo che il cubo sia centrato nell'origine O e che i suoi spigoli risultino paralleli agli assi coordinati.

Quindi siano $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ le coordinate dei suoi vertici come descritto in (1.2.10).

Ogni isometria fissa il centro del cubo e, giacché per definizione le isometrie si configurano sempre come applicazioni lineari, gli elementi delle colonne delle loro rispettive matrici, certamente ortogonali, devono coincidere con le immagini delle componenti dei vettori della base ortonormale fissata.

Esistono 2^3 disposizioni con ripetizione dei segni $-$ e $+$ nelle tre colonne di una matrice che descrive l'isometria; quindi ci sono 8 matrici differenti con l'alternanza dei termini ± 1 disposti sulla diagonale.

Ciononostante, considerando tutte le possibili isometrie, occorre far riferimento anche alle matrici non diagonali con determinante non nullo.

Effettuando la permutazione di quelle diagonali si ricavano dunque ulteriori $5 \cdot 8 = 40$ matrici.

In tutto quindi il gruppo di simmetria del cubo contiene 48 elementi rappresentati dalle altrettante matrici ortogonali:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

Per identificare il tipo di isometria dalla matrice è sufficiente individuare gli autovalori λ della matrice ad essa associata.

Tali autovalori possono essere tutti reali (in tal caso assumono solo i valori $+1$ e -1), oppure uno di essi è reale e assume uno dei valori ± 1 , mentre i due rimanenti sono complessi.

Le diverse configurazioni di autovalori sono quelle riassunte nella tabella che segue.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = +1$	identità
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$	isometria antipodale
$\lambda_1 = +1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$	rotazione di π attorno ad un asse che si identifica con l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = +1$
$\lambda_1 = \lambda_2 = +1, \lambda_3 = -1$	riflessione in un piano che si identifica con l'autospazio relativo agli autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$
$\lambda_1 = +1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$	rotazione di un angolo $\theta \neq \pi$ attorno ad un asse che si identifica con l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = +1$
$\lambda_1 = -1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$	composizione di una riflessione in un piano con una rotazione di un angolo $\theta \neq \pi$ attorno a un asse ortogonale che si identifica con l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$

È altresì possibile individuare il gruppo di simmetria di un tetraedro regolare.

Nel sistema di riferimento ortonormale già introdotto $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, si prenda il tetraedro con vertici nelle coordinate $(1; 1; 1), (1; -1; -1), (-1; 1; -1), (-1; -1; 1)$. Si individuino, tra le 48 matrici del gruppo di simmetria del cubo, quelle che fissano questa quaterna di vertici.

Esse sono in tutto 24, in quanto le relative matrici associate devono essere caratterizzate da elementi non nulli contenenti un numero pari di segni negativi.

Osservazione. Se P è un poliedro regolare e P' è il suo duale, ogni isometria che fissa P fissa anche P' , quindi i due gruppi di simmetria coincidono. Visto che l'ottaedro regolare è il duale del cubo, trovando il gruppo di simmetria del cubo si individua anche quello dell'ottaedro regolare.

Analogamente determinando il gruppo di simmetria dell'icosaedro regolare si trova anche quello del dodecaedro regolare.

Per il dodecaedro e l'icosaedro si possono fissare 120 isometrie alle quali risultano associate altrettante matrici ortogonali.

Di esse, 60 sono caratterizzate da un determinante pari a -1 e si ottengono dalle rimanenti 60 con determinante pari a $+1$ mediante composizione con la matrice antipodale (cioè cambiando tutti i segni).

Pertanto, è sufficiente considerare solo il gruppo delle isometrie associate alle matrici di rotazione.

Le prime 12 matrici fondamentali si ottengono dalla permutazione delle colonne delle 4 matrici del sottogruppo di rotazione del tetraedro regolare:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

Occorre a tal punto determinare altre 5 matrici in 5 classi laterali che, combinate con queste 12, individuano le 60 richieste.

Sempre facendo riferimento ai vertici scelti in (1.2.14), si può prendere in esame la matrice A corrispondente ad una rotazione di $2\pi/5$ attorno all'asse ortogonale a due facce opposte. Si supponga che le suddette facce opposte appartengano ai due piani paralleli all'asse z

$$\pm(\phi x + y) = 1 + \phi.$$

A manda il vettore $(1; 1; 1)$ in $(\phi - 1; \phi; 0)$; il vettore $(1; 1; -1)$ in $(\phi; 0; -\phi + 1)$; il vettore $(1; -1; 1)$ in $(0; \phi - 1; \phi)$.

Posto allora

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

sussistono le relazioni

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi - 1 \\ \phi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \\ -\phi + 1 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi - 1 \\ \phi \end{bmatrix}.$$

Si ottiene

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi & \phi - 1 & -1 \\ \phi - 1 & 1 & \phi \\ 1 & -\phi & \phi - 1 \end{bmatrix}.$$

Le altre 4 sono:

$$A^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \phi & -\phi + 1 \\ \phi & -\phi + 1 & 1 \\ \phi - 1 & -1 & -\phi \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi - 1 \\ \phi & -\phi + 1 & -1 \\ -\phi + 1 & 1 & -\phi \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi & \phi - 1 & 1 \\ \phi - 1 & 1 & -\phi \\ -1 & \phi & \phi - 1 \end{bmatrix};$$

$$A^5 = Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 2

Politopi

La maggior parte degli studi di didattica della matematica ci conferma quanto sia essenziale adoperare un'iniziale pratica intuitiva per giungere infine alla costruzione di un solido sistema assiomatico e formale.

A tal pro, prima di introdurre una costruzione formale dell'argomento, si vorrebbe tentare un approccio intuitivo, così come è cognitivamente più naturale all'essere umano nell'approcciarsi al mondo.

Il capitolo precedente, che affronta i poligoni nel piano e i poliedri nello spazio, ci ha offerto diversi modi di visualizzare e modellizzare gli oggetti in esame.

Attraverso definizioni e teoremi diversi, osservazioni metriche o prettamente topologiche, è emersa una visione diversa di poligoni e poliedri. È stato costruito, tramite il diagramma di Schlegel, un modello che facilita la classificazione degli oggetti tramite proprietà combinatorie.

La similarità tra questi concetti, dal passaggio da poligono bidimensionale a poliedro tridimensionale, suggerisce che è possibile una naturale estensione del concetto anche oltre la terza dimensione.

Lo scopo di questo capitolo, dunque, è un approccio a questi *ipersolidi* la cui struttura è sorretta nella quarta, nella quinta, nella n -sima dimensione.

Questo percorso presenta indubbiamente delle difficoltà significative, dal momento che la nostra capacità percettiva è limitata alla visualizzazione di oggetti tridimensionali. D'altro canto, fin'ora sono stati forniti strumenti

essenziali per affrontare lo studio degli ipersolidi n -dimensionali, tale per cui è possibile sperimentare questo tentativo.

2.1 L'approccio intuitivo

Il termine generale che descrive le figure geometriche che abbiamo trattato nel capitolo precedente e che tratteremo da qui in poi è *politopo*.

In $\mathbb{R}^0$ gli unici politopi descrivibili sono chiaramente punti, mentre in $\mathbb{R}^1$ semplici segmenti. In $\mathbb{R}^2$ prendono il nome di *poligoni*, in $\mathbb{R}^3$ *poliedri*, in $\mathbb{R}^4$ *polìcori* e così via.

Con un ragionamento prettamente intuitivo si può immaginare di partire dal punto e *saltare fuori* a una dimensione successiva, via via costruendo politopi abitanti in dimensione sempre maggiore.

2.1.1 Dal punto $\mathcal{T}_0$ all' n -simpleso $\mathcal{T}_n$

In $\mathbb{R}^0$ l'unico politopo è il punto - ovvero $\mathbb{R}^0$ stesso - che verrà d'ora in poi chiamato Π_0 .

In $\mathbb{R}^1$ si considera l'infinità dei punti giacenti sulla retta; due punti rappresentano il bordo di un segmento, il politopo monodimensionale Π_1 .

Si può interpretare Π_1 come la traccia lasciata dall'azione di traslazione di un punto *saltando fuori* da $\mathbb{R}^0$.

Ragionando in questo modo, si può immaginare di *saltare fuori* da $\mathbb{R}^1$ per unire a Π_1 un altro punto che non giaccia in $\mathbb{R}^1$; si ottiene così il simpleso Π_2 , ovvero un triangolo in $\mathbb{R}^2$.

Per unire al simpleso Π_2 un altro punto fuori da $\mathbb{R}^2$ si compie un *salto* in $\mathbb{R}^3$ e si costruisce il tetraedro Π_3 .

Si costruisce in $\mathbb{R}^4$ il 4-*simpleso* Π_4 allo stesso modo, procedendo nell'intento di ampliare dimensionalmente la figura.

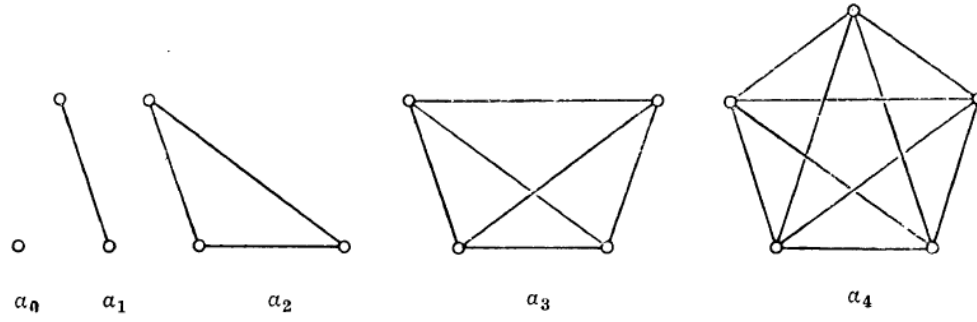


Figura 2.1: Costruzione 4-piramide in [Cox48]

Assumendo la regolarità, al fine di semplificare la notazione e di evitare ambiguità nei passaggi successivi, si introducono le seguenti convenzioni:

$$\mathcal{T}_0 = \Pi_0; \quad \mathcal{T}_1 = \Pi_1; \quad \mathcal{T}_2 = \Pi_2 = \{3\}; \quad \mathcal{T}_3 = \Pi_3 = \{3, 3\}; \quad \mathcal{T}_4 = \Pi_4.$$

Per contare gli elementi Π_k di un n -simpleso $\mathcal{T}_n$, si proceda secondo il seguente ragionamento:

ogni coppia di vertici condivide un lato; ogni terna di vertici condivide un triangolo; ogni quaterna di vertici condivide un tetraedro e così via. Quindi ci sono $\binom{n+1}{2}$ lati, $\binom{n+1}{3}$ triangoli, $\binom{n+1}{4}$ tetraedri e così via.

Generalizzando il ragionamento, si può affermare che

$$|\Pi_k|_n = N_k = \binom{n+1}{k+1}. \quad (2.1.1)$$

$n \backslash N_k$	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
2	3	3	1	-	-
3	4	6	4	1	-
4	5	10	10	5	1

Tabella 2.1: Numero degli elementi costituenti del n -simpleso

2.1.2 Dal punto $\mathcal{O}_0$ alla n -bipiramide $\mathcal{O}_n$

In uno spazio n -dimensionale, si può fissare un punto O e da questo far partire n rette ortogonali a due a due. Si possono inoltre individuare su ciascuna di queste n rette 2 punti equidistanti da O , in tutto $2n$. Questi sono i vertici di una figura chiamata n -bipiramide $\mathcal{O}_n$.

Come per il caso precedente, si procede con la costruzione di queste figure partendo da $\mathbb{R}^0$, aumentando progressivamente la dimensione.

Su $\mathbb{R}^0$, si costruisce $\mathcal{O}_0$ che coincide col punto O - o con $\mathbb{R}^0$ stesso.

Su $\mathbb{R}^1$, O è il punto medio del segmento che si identifica con $\mathcal{O}_1$.

Su $\mathbb{R}^2$, O rappresenta invece il centro di un quadrato, rappresentato da $\mathcal{O}_2$.

Su $\mathbb{R}^3$, dopo aver aggiunto i due vertici equidistanti da O in questa dimensione con quelli costruiti nella dimensione precedente, si rivela $\mathcal{O}_3$, l'ottaedro.

Nel passaggio in $\mathbb{R}^4$, unendo i due vertici della nuova dimensione con quelli della precedente, si visualizza la 4-bipiramide e così via.

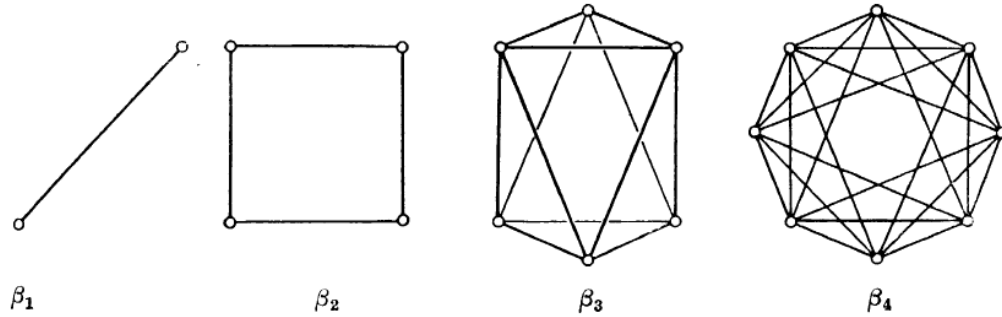


Figura 2.2: Costruzione 4-bipiramide in [Cox48]

Si assume la regolarità della figura

$$\mathcal{O}_0 = \Pi_0; \quad \mathcal{O}_1 = \Pi_1; \quad \mathcal{O}_2 = \Pi_2 = \{4\}; \quad \mathcal{O}_3 = \Pi_3 = \{3, 4\}; \quad \mathcal{O}_4 = \Pi_4.$$

Per contare gli elementi Π_k di un $\mathcal{O}_n$ si segua questo ragionamento:

i lati di $\mathcal{O}_2$ sono dei lati $\mathcal{T}_1$ in numero 2^2 , così come le facce di $\mathcal{O}_3$ sono dei 2-simplessi $\mathcal{T}_2$ in numero 2^3 . Per induzione ci si aspetta che le celle di un $\mathcal{O}_n$, ovvero gli elementi costituenti di dimensione $n - 1$, siano degli $(n - 1)$ -simplessi $\mathcal{T}_{n-1}$, in numero 2^n .

Il numero degli $\mathcal{T}_k$ in $\mathcal{O}_n$ è dato da

$$|\Pi_k|_n = |\Pi_k|_{n-1} + 2 |\Pi_{k-1}|_{n-1}.$$

Induttivamente si arriva alla formula

$$|\Pi_k|_n = N_k = 2^{k+1} \binom{n}{k+1}. \quad (2.1.2)$$

N_k n	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
2	4	4	1	-	-
3	6	12	8	1	-
4	8	24	32	16	1

Tabella 2.2: Numero degli elementi costituenti della n -bipiramide

2.1.3 Dal punto $\mathcal{C}_0$ all' n -prisma $\mathcal{C}_n$

La costruzione dell' n -prisma si fonda sul concetto di *trascinamento* di un oggetto da una dimensione a quella successiva lungo una direzione perpendicolare allo spazio dove risiede.

In $\mathbb{R}^0$, l'unico elemento è il punto rappresentato da $\mathcal{C}_0$ - ovvero $\mathbb{R}^0$ stesso.

Da $\mathbb{R}^0$ si passa a $\mathbb{R}^1$ *trascinando* $\mathcal{C}_0$ e lasciando una traccia, un segmento che verrà chiamato $\mathcal{C}_1$, l'1-prisma.

Lungo una direzione perpendicolare si *trascina* $\mathcal{C}_1$ giungendo in $\mathbb{R}^2$, formando un rettangolo $\mathcal{C}_2$, il 2-prisma.

Trasciniamo, poi, $\mathcal{C}_2$ lungo una direzione perpedicolare, si giunge in $\mathbb{R}^3$ e si costruisce il parallelepipedo $\mathcal{C}_3$, il 3-prisma.

Nello stesso modo, *trascinando* $\mathcal{C}_3$ in $\mathbb{R}^4$ si costruisce il 4-prisma $\mathcal{C}_4$, e così via.

Considerando la regolarità della figura,

$$\mathcal{C}_0 = \Pi_0; \quad \mathcal{C}_1 = \Pi_1; \quad \mathcal{C}_2 = \Pi_2 = \{4\}; \quad \mathcal{C}_3 = \Pi_3 = \{4, 3\}; \quad \mathcal{C}_4 = \Pi_4.$$

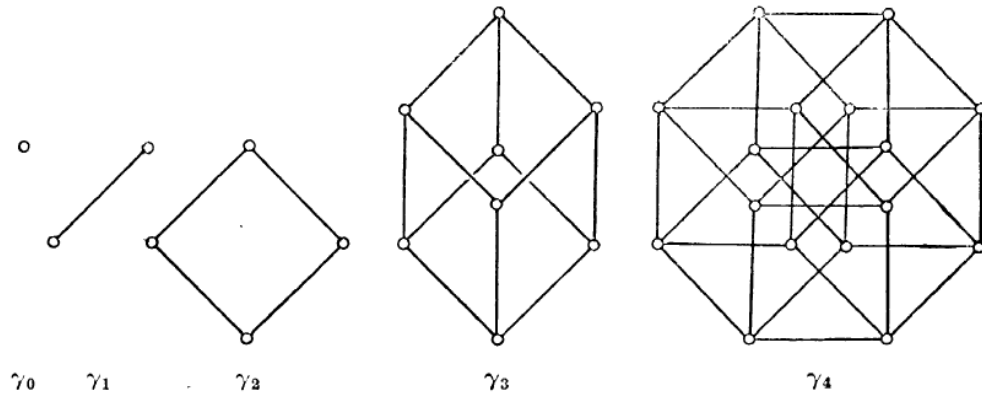


Figura 2.3: *Costruzione 4-prisma in [Cox48]*

ogni $\mathcal{C}_n$ così costruito avrà senz'altro 2^n vertici $\mathcal{C}_0$. Per determinare i restanti valori di k , si osserva che in $\mathcal{C}_n$ l'elemento $\mathcal{C}_k$ è contato 2 volte per il *trascinamento* dal passaggio da una dimensione a quella successiva più le volte in cui compare l'elemento $\mathcal{C}_{k-1}$ in $\mathcal{C}_{n-1}$.

Induttivamente si arriva alla formula:

$$|\Pi_k|_n = N_k = 2^{n-k} \binom{n}{k}. \quad (2.1.3)$$

$n \backslash N_k$	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
2	4	4	1	-	-
3	8	12	6	1	-
4	16	32	24	8	1

Tabella 2.3: Numero degli elementi costituenti dell' n -prisma

2.2 La formalizzazione

La seguente definizione di n -politopo si appoggia sulle definizioni di poligono (un 2-politopo) e poliedro (un 3-politopo) precedentemente affrontate:

Definizione: Un n -politopo P è una regione chiusa e limitata di $\mathbb{R}^n$ omeomorfa a $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ il cui bordo δP è omeomorfo a $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ che è costituito da un certo numero di $(n-1)$ -politopi.

Ad ogni n -politopo è associato l'insieme finito delle sue k -facce, con $k = 0, \dots, n-1$, $\Pi = \{\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}\}$ tale che

Π_{n-1} sono gli $(n-1)$ -politopi la cui unione rappresenta δP e vengono chiamate celle di P ;

Π_{n-2} sono gli $(n-2)$ -politopi che sono celle di celle di P ;

...

Π_3 sono i poliedri, celle dei Π_4 ;

Π_2 sono i poligoni, celle dei poliedri;

Π_1 sono gli spigoli, celle dei poligoni;

Π_0 sono i vertici, celle degli spigoli.

In accordo con questa nomenclatura, Π_n rappresenta P stesso.

Si richiede, inoltre, che ogni Π_{n-2} sia cella per due Π_{n-1} che non giacciono sullo stesso iperpiano di $\mathbb{R}^n$ e che l'intersezione di due k -facce di P o sia vuota oppure sia un h -faccia per entrambe, con $h < k$.

Come nei casi precedenti, a seconda del contesto si potrà assumere una doppia interpretazione di politopo: in alcuni casi, esso sarà definito esclusivamente come la sua ipersuperficie; in altri contesti, come l'unione della sua ipersuperficie con la sua regione interna.

Definizione 2.2.1. Si definisca un politopo analiticamente come l'insieme dei punti le cui coordinate cartesiane soddisfano le disuguaglianze:

$$b_{k_1}x_1 + b_{k_2}x_2 + \dots + b_{k_n}x_n \leq b_{k_0} \quad \text{con } k = 1, \dots, N_{n-1} \quad (2.2.1)$$

che individuano la regione interna del politopo.

Il volume della regione di iperspazio D così definita è esprimibile attraverso l'integrale finito:

$$\int \int \int \dots \int_D dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n. \quad (2.2.2)$$

2.2.1 Politopi regolari

Ai fini del presente elaborato, rivestono maggior interesse i politopi convessi. D'ora in poi verrà dunque assunta la loro convessità come proprietà fondamentale.

Definizione 2.2.2. Sia Π_n un politopo n -dimensionale convesso tale che i punti medi dei suoi lati che concorrono in uno stesso vertice giacciono tutti su uno

stesso iperspazio $(n - 1)$ -dimensionale. Per ogni vertice v di Π_n , tali punti medi sono a loro volta vertici di un $(n - 1)$ -politopo che rappresenta la *figura al vertice di Π_n in v* .

Seguendo il ragionamento svolto per poligoni e poliedri si fornisce la seguente definizione di regolarità.

Definizione 2.2.3. Un n -politopo convesso si dice *regolare* se

1. le sue celle sono $(n - 1)$ -politopi regolari e congruenti tra loro;
2. tutte le sue figure al vertice sono $(n - 1)$ -politopi regolari congruenti tra loro.

Considerando il caso quadridimensionale, le facce della figura al vertice di un 4-politopo regolare sono le figure al vertice dei poliedri che compongono le sue celle.

Se le celle di un 4-politopo sono poliedri di tipo $\{p, q\}$, allora le figure al vertice saranno poliedri di tipo $\{q, r\}$ dove q , come è noto, è il numero di lati della figura al vertice di $\{p, q\}$ e r indica il numero di poliedri $\{p, q\}$ che circondano lo stesso lato.

Nel caso dei policori $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{O}_4$ e $\mathcal{C}_4$ precedentemente analizzati, essi hanno come celle rispettivamente $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_3$ e $\mathcal{C}_3$ ovvero un tetraedro, un tetraedro e un cubo e come figure al vertice rispettivamente $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{O}_3$ e $\mathcal{T}_3$, ovvero un tetraedro, un ottaedro e un tetraedro.

In accordo con questo discorso, è possibile ampliare la nomenclatura di Schläfli alla quarta dimensione, riferendosi a un 4-politopo con la simbologia

$$\{p, q, r\}.$$

Quindi, si ha che

$$\mathcal{T}_4 = \{3, 3, 3\}, \quad \mathcal{O}_4 = \{3, 3, 4\}, \quad \mathcal{C}_4 = \{4, 3, 3\}.$$

Similmente, un 5-politopo regolare che ha come celle dei 4-politopi di tipo $\{p, q, r\}$, avrà delle figure al vertice di tipo $\{q, r, s\}$ e verrà denotato con la simbologia di Schläfli $\{p, q, r, s\}$.

In generale, un n -politopo di tipo $\{p, q, r, \dots, v, w\}$ avrà come celle degli $(n-1)$ -politopi di tipo $\{q, p, r, \dots, v\}$ e come figure al vertice degli $(n-1)$ -politopi di tipo $\{q, r, \dots, v, w\}$.

In particolare, per $n > 1$ si assume questa simbologia di Schläfli per l' n -simpleso, l' n -bipiramide e l' n -prisma:

$$\mathcal{T}_n = \{3, 3, 3, \dots, 3, 3\} = \{3^{n-1}\};$$

$$\mathcal{O}_n = \{3, 3, 3, \dots, 3, 4\} = \{3^{n-2}, 4\};$$

$$\mathcal{C}_n = \{4, 3, 3, \dots, 3, 3\} = \{4, 3^{n-2}\}.$$

Osservazione. Si è reso necessario precisare che questa notazione è valida per una dimensione maggiore di uno; infatti, non sarebbe possibile definire la regolarità di un segmento nè tantomeno di un punto.

2.2.2 Criterio di Schläfli

Con ragionamento analogo a quello fatto nel capitolo 1, si possono ora classificare i politopi regolari 4-dimensionali.

Per un 4-politopo regolare con simbolo di Schläfli $\{p, q, r\}$ si analizzano gli r poliedri regolari che si possono posizionare intorno a uno stesso spigolo. La somma dei loro angoli diedri dovrà essere necessariamente minore di 2π . Dal sistema 1.2.23, si può affermare che, per un poliedro $\{p, q\}$, l'angolo diedro è pari a³

3

$$\psi_{pq} = \pi - 2\gamma = \pi - 2 \arccos \left(\frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)} \right) = \pi - 2 \arcsin \left(\frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)} \right).$$

$$\psi_{pq} = 2 \arcsin \left(\frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}} \right)$$

per cui, affinché la somma di questi sia minore di un angolo giro, dovrà essere

$$r \psi_{pq} < \sin \frac{\pi}{r}$$

da cui

$$\frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}} < \sin \frac{\pi}{r}. \quad (2.2.3)$$

Per un tetraedro $\{3, 3\}$ la relazione (2.2.3) diventa

$$\sin \frac{\pi}{r} > \cot \frac{\pi}{3}$$

quindi r può assumere i valori 3, 4, 5.

Per un ottaedro $\{3, 4\}$ la relazione (2.2.3) diventa

$$\sin \frac{\pi}{r} > \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$$

e, in questo caso, r può assumere solo il valore 3.

Per un cubo $\{4, 3\}$

$$\sin \frac{\pi}{r} > \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

e l'unico valore per r è 3.

Per un dodecaedro $\{5, 3\}$

$$\sin \frac{\pi}{r} > \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \approx 0,851$$

quindi, anche in questo caso $r = 3$.

In ultimo, per l'icosaedro $\{3, 5\}$

$$\sin \frac{\pi}{r} > \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \approx 0,934.$$

quindi, per il caso dell'icosaedro non è possibile trovare nessun r che soddisfi la relazione (2.2.3).

In conclusione, gli unici 4-politopi regolari costruibili in $\mathbb{R}^4$ devono essere tra questi sei:

$$\{3, 3, 3\}, \quad \{3, 3, 4\}, \quad \{3, 3, 5\}, \quad \{3, 4, 3\}, \quad \{4, 3, 3\}, \quad \{5, 3, 3\}.$$

Osservazione. Questo metodo mostra che, se i 4-politopi esistono, allora devono essere alcuni o tutti tra questi. Tuttavia non è stato utile a dimostrarne l'esistenza.

Nel capitolo precedente, si è fatto ricorso a una dimostrazione intuitiva per il rinvenimento dei solidi platonici, un approccio che è stato ripreso anche in questa sede.

Tuttavia, in questo contesto, verrà sviluppato un criterio di ricerca formale e generale per individuare i politopi regolari in ogni n -dimensione. Tale è il criterio che prende il nome di *Criterio di Schläfli*.

Ogni n -politopo regolare Π_n possiede un centro O_n che è anche il centro di ogni ipersfera di raggio ${}_jR$ passante per tutti i centri delle j -celle Π_j dell' n -

politopo, con $j = 0, \dots, n-1$, di cui quella di raggio ${}_0R$ è l'ipersfera circoscritta e quella di raggio ${}_{n-1}R$ è l'ipersfera inscritta all' n -politopo.

Seguendo la nomenclatura usata nel capitolo 1, la naturale estensione degli angoli α , β e γ al caso n -dimensionale è

$$\alpha = O_0 \widehat{O_n} O_1, \quad \beta = O_0 \widehat{O_n} O_{n-1}, \quad \gamma = O_{n-2} \widehat{O_n} O_{n-1}.$$

Inoltre, si ha che

$${}_0R \sin \alpha = O_0 O_1 = l.$$

Se l' n -politopo ha simbolo di Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, siano ${}_0R'$, l' , α' i valori corrispondenti rispettivamente a ${}_0R$, l , α della figura al vertice, con simbolo di Schläfli $\{p_2, \dots, p_{n-1}\}$.

Si ha che

$${}_0R' \sin \alpha' = l' = l \cos \frac{\pi}{p_1}$$

e, osservando la figura 1.14,

$${}_0R' = l \cos \alpha.$$

Allora, si può scrivere che

$$\cos \alpha = \frac{{}_0R'}{l} = \frac{\cos \frac{\pi}{p_1}}{\sin \alpha'}$$

da cui

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{\sin^2 \alpha'} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \alpha = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{\sin^2 \alpha'}.$$

Il ragionamento si può iterare sulle successive figure al vertice.

Se α'' corrisponde all'angolo della seconda figura al vertice (la figura al vertice della figura al vertice) con simbolo di Schläfli $\{p_3, \dots, p_{n-1}\}$, allora, seguendo la stessa nomenclatura, $\alpha^{(k)}$ corrisponde all'angolo della k -esima figura al vertice con simbolo di Schläfli $\{p_{k+1}, \dots, p_{n-1}\}$.

Di conseguenza

$$\cos \alpha^{(k-1)} = \frac{\cos \frac{\pi}{p_k}}{\sin \varphi^{(k)}} \quad \text{da cui} \quad \sin^2 \alpha^{(k-1)} = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_k}}{\sin^2 \alpha^{(k)}}. \quad (2.2.4)$$

Visto che $\alpha^{(n-2)} = \pi/p_{n-1}$, si può scrivere la seguente frazione continua

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_2}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_3}}{\ddots \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_{n-2}}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_{n-1}}}}}}}$$

dalla quale si passa a introdurre la *funzione* Δ che è definita ricorsivamente in tal modo:

- $\Delta() = 1$;
- $\Delta(p) = \sin^2 \frac{\pi}{p}$;
- $\Delta(p_1, \dots, p_{n-1}) = \Delta(p_2, \dots, p_{n-1}) - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} \cdot \Delta(p_3, \dots, p_{n-1})$.

Osservazione. Per un poliedro $\{p, q\}$, la disuguaglianza $\Delta(p, q) > 0$ porta a

$$\Delta(p, q) = \Delta(q) - \cos^2 \frac{\pi}{p} \cdot 1 > 0 \implies$$

$$\implies \sin^2 \frac{\pi}{q} > \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$$

da cui si ottiene la formula 1.2.4.

Per un politopo $\{p, q, r\}$, la disuguaglianza $\Delta(p, q, r) > 0$ porta a

$$\begin{aligned} \Delta(p, q, r) &= \Delta(q, r) - \cos^2 \frac{\pi}{p} \sin^2 \frac{\pi}{r} = \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{r} - \cos^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p} \sin^2 \frac{\pi}{r} = \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{p} \sin^2 \frac{\pi}{r} - \cos^2 \frac{\pi}{q} > 0 \end{aligned}$$

da cui, invece si ottiene la formula 2.2.3.

Definizione 2.2.4. La disuguaglianza $\Delta(p_1, \dots, p_{n-1}) > 0$ è detta *Criterio di Schläfli* in quanto sussiste la proposizione che segue.

Lemma 2.2.5. *Se per una $(n-1)$ -pla di valori $p_1, \dots, p_{n-1}$ vale la disuguaglianza $\Delta(p_1, \dots, p_{n-1}) > 0$ allora esiste un n -politopo regolare con simbolo di Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$.*

Dim.: Per induzione si dimostra che

$$\Delta(p_1, \dots, p_n) = \prod_{k=0}^n \sin^2 \alpha^{(k)}.$$

Per $\Delta(p_1) = \sin^2 \pi/p_1 = \sin^2 \alpha^{(0)}$.

L'angolo $\alpha^{(1)}$ è π/p_2 , quindi

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1, p_2) &= \sin^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p} = \sin^2 \frac{\pi}{q} \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p}}{\sin^2 \frac{\pi}{q}} \right) = \\
&= \sin^2 \alpha^{(1)} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha^{(0)}}{\sin^2 \alpha^{(1)}} \right) = \sin^2 \alpha^{(1)} \sin^2 \alpha^{(0)}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è data da 2.2.4.

Allora

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1, \dots, p_n) &= \Delta(p_2, \dots, p_n) - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} \Delta(p_3, \dots, p_n) = \\
&= \sin^2 \alpha^{(1)} \dots \sin^2 \alpha^{(n)} - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} \sin^2 \alpha^{(2)} \dots \sin^2 \alpha^{(n)} = \\
&= \sin^2 \alpha^{(2)} \dots \sin^2 \alpha^{(n)} \left(\sin^2 \alpha^{(1)} - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} \right) = \\
&= \sin^2 \alpha^{(2)} \dots \sin^2 \alpha^{(n)} \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{\sin^2 \alpha^{(1)}} \right) = \prod_{k=0}^n \sin^2 \alpha^{(k)}.
\end{aligned}$$

Visto che gli angoli $\alpha^{(k)}$ non sono mai del tipo $j\pi$ (con $j \in \mathbb{Z}$), altrimenti non avrebbero significato nel loro contesto, allora questa relazione deve essere sempre positiva. $\square$

Lemma 2.2.6.

$$\Delta(3^{n-1}) = \frac{n+1}{2^n}; \quad \Delta(3^{n-2}, 4) = \frac{1}{2^{n-1}}; \quad \Delta(4, 3^{n-3}, 4) = 0.$$

Dim.: Si verifica facilmente per induzione. $\square$

Teorema 2.2.7. *Sia Π_n un politopo regolare con simbolo di Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, allora*

$(n = 2)$: $\{p\}$ con $p > 2$;

$(n = 3)$: $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 3\}$;

$(n = 4)$: $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3\}$;

$(n > 4)$: $\{3^{n-1}\}$, $\{3^{n-2}, 4\}$, $\{4, 3^{n-2}\}$.

Dim.: Per $n \leq 4$, si è già abbondantemente dimostrata la tesi.
Per $n = 5$, sviluppando i passaggi qui omessi, si ha che

$$\Delta(p, q, r, s) = \sin^2 \frac{\pi}{s} \left(\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q} \right) - \cos^2 \frac{\pi}{r} \sin^2 \frac{\pi}{p}.$$

Allora porre $\Delta(p, q, r, s) > 0$ significa scrivere

$$\sin^2 \frac{\pi}{s} \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} \sin^2 \frac{\pi}{p} < \sin^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{p}.$$

Dividendo per il secondo membro si ottiene

$$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{p}} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r}}{\sin^2 \frac{\pi}{s}} < 1$$

Sempre considerando gli angoli diedri dei poliedri regolari, si può scrivere che

$$\sin \frac{\psi_{pq}}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}} \quad \text{e} \quad \sin \frac{\psi_{sr}}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{r}}{\sin \frac{\pi}{s}}$$

$$\sin^2 \frac{\psi_{pq}}{2} + \sin^2 \frac{\psi_{sr}}{2} < 1 \quad \implies \quad \sin^2 \frac{\psi_{pq}}{2} < \cos^2 \frac{\psi_{sr}}{2} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi_{sr}}{2} \right)$$

per cui

$$\psi_{pq} + \psi_{sr} < \pi.$$

Quindi il criterio di Schläfli in dimensione 5 equivale a chiedere che la somma degli angoli diedri dei poliedri regolari $\{p, q\}$ $\{s, r\}$ sia minore di π . Si può concludere la dimostrazione per le dimensioni successive per induzione. $\square$

2.3 Formula di Eulero generalizzata

In questa sezione si presenta e si dimostra la formula di Eulero per politopi convessi di dimensione arbitraria. Tale formula estende la relazione di Eulero nota per i poliedri tridimensionali (ossia i 3-politopi convessi in $\mathbb{R}^3$), trattati nel Capitolo 1, al contesto n -dimensionale.

L'approccio scelto è di tipo topologico: ci si basa sulla struttura del bordo del politopo e sulla *caratteristica di Eulero* della sfera topologica S_{n-1} .

Per accedere a questi strumenti, è necessario introdurre brevemente il concetto di *triangolabilità*.

Definizione 2.3.1. Uno spazio topologico X si dice *triangolabile* se può essere ricoperto da un *complesso simpliciale finito*, ovvero suddiviso in un numero finito di triangoli (in 2 dimensioni), tetraedri (in 3 dimensioni) o, più in generale, n -simplici per ogni dimensione n , in modo tale che:

- due di questi simplici si intersecano, al più, lungo una k -cella comune;
- l'unione di tutti i simplici ricopre tutto lo spazio X .

Osservazione. Nella dimostrazione della formula di Eulero 1.2.10, è stato applicato proprio questo concetto.

Poiché il bordo di un n -politopo convesso Π_n è unione finita delle sue k -facce di dimensione inferiore, esso è uno spazio compatto e triangolabile.

Inoltre, dal punto di vista topologico, come già affermato nella definizione 2.2, il bordo di Π_n è omeomorfo alla sfera S^{n-1} . Ne consegue che la sua caratteristica di Eulero è ben definita tramite la sua struttura combinatoria e può essere espressa come somma alternata delle sue celle k -dimensionali nel modo seguente:

$$\chi(\partial\Pi_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N_k.$$

Lemma 2.3.2. *Sia $n \geq 1$. La caratteristica di Eulero della sfera topologica S_n è:*

$$\chi(S_n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Dim.: Si applichi la formula della caratteristica di Eulero^a, che afferma che per ogni spazio triangolabile X vale:

$$\chi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \text{rank}[H_k(X)]$$

In questa sede, non si intende approfondire i termini della dimostrazione di *Hatcher* anche se, per chi interessato, essa è disponibile in forma completa in [Hat02].

Sia qui sufficiente sapere che tale dimostrazione si basa sulla teoria dell'omologia singolare.

I gruppi di omologia della sfera S_n a coefficienti interi sono noti e dati da:

$$H_k(S_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \text{ o } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovvero si ha che $\text{rank}(H_0) = \text{rank}(H_n)$ e che $\text{rank}(H_k)$, per ogni $k \neq \{0, n\}$. Da ciò segue che la caratteristica di Eulero, definita come somma alternata dei ranghi dei gruppi di omologia, è:

$$\chi(S_n) = \text{rank}(H_0) + (-1)^n \cdot \text{rank}(H_n) = 1 + (-1)^n$$

□

^aTeorema 2.44 in Algebraic Topology

Teorema 2.3.3. (*Formula di Eulero generalizzata*) Sia Π_n un politopo convesso di dimensione n . Indichiamo con N_k il numero di facce di dimensione k di Π_n , con $0 \leq k \leq n$. Allora:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N_k = 1 + (-1)^{n-1}$$

Dim.: Il bordo $\partial \Pi_n$ è triangolabile e, come affermato sopra, omeomorfo alla sfera S_{n-1} . La sua caratteristica di Eulero è quindi:

$$\chi(\partial \Pi_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N_k = \chi(S_{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$$

□

Esempio. Riprendendo i tre politopi $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{O}_4$ e $\mathcal{C}_4$ definiti nel paragrafo 2.1, si può verificare che per essi valga la formula di Eulero generalizzata.

Infatti, viste le formule i cui risultati in 4 dimensioni sono espressi nelle tabelle 2.1, 2.2 e 2.3, per il 4-simpleso $\mathcal{T}_4$ vale

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 5 - 10 + 10 - 5 = 0;$$

per la 4-bipiramide $\mathcal{O}_4$ vale

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 8 - 24 + 32 - 16 = 0;$$

per il 4-prisma $\mathcal{C}_4$ vale

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 16 - 32 + 24 - 8 = 0.$$

2.4 Rappresentazione dei 6 polìcori

2.4.1 L'ipertetraedro $\{3, 3, 3\}$

Si prenda in esame l'*ipertetraedro* o il 4-simpleso, ovvero il 4-politopo $\mathcal{T}_4 = \{3, 3, 3\}$ che possiede cinque 3-cella di tipo $\mathcal{T}_3 = \{3, 3\}$, dieci 2-cella di tipo $\mathcal{T}_2 = \{3\}$, dieci lati e cinque vertici.

Attorno ad ogni lato convergono tre tetraedri distinti e le sue figure al vertice sono ancora tetraedri.

È più semplice costruire un n -simpleso partendo da uno spazio $(n + 1)$ -dimensionale e immaginarlo giacente su di un iperpiano n -dimensionale di equazione $\sum_{i=0}^n x_{i+1} = 1$. In questo modo si fissano gli $n + 1$ vertici con le permutazioni delle coordinate

$$(1; 0; \dots; 0) = (1; 0^n).$$

Quindi, con questa scelta di coordinate, l' n -simpleso ha lato di lunghezza $\sqrt{2}$.

Esempio. Un triangolo equilatero costruito su $\mathbb{R}^3$ giacente sul piano bidimensionale $x + y + z = 1$ ha coordinate $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ e $(0; 0; 1)$ con lato di lunghezza $\sqrt{2}$.

Ragionando in tal modo, l'ipertetraedro $\mathcal{T}_4$ avrà vertici le cui coordinate sono le cinque permutazioni di $(1; 0^4)$ in $\mathbb{R}^5$ giacenti sull'iperpiano 4-dimensionale $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Si intuisce che il gruppo di simmetria dell'ipertetraedro è isomorfo a S_5 .

2.4.2 L'ipercubo $\{4, 3, 3\}$

Si consideri ora l'ipercubo, ovvero il 4-prisma regolare $\mathcal{C}_4 = \{4, 3, 3\}$ che possiede otto 3-cella di tipo $\mathcal{C}_3 = \{4, 3\}$, ventiquattro 2-cella di tipo $\mathcal{C}_2 = \{4\}$, trentadue lati e sedici vertici. Attorno a ogni lato convergono tre cubi e le figure al vertice sono dei tetraedri.

Scegliendo l'origine degli assi cartesiani come centro della figura, si possono considerare come vertici dell'ipercubo le 2^4 permutazioni di

$$(\pm 1; \pm 1; \pm 1; \pm 1) = (\pm 1^4).$$

I punti medi degli spigoli sono i punti che si ottengono come permutazione di

$$(\pm 1; \pm 1; \pm 1; 0) = (\pm 1^3; 0).$$

I centri delle 2-cella sono invece le 24 permutazioni delle coordinate

$$(\pm 1; \pm 1; 0; 0) = (\pm 1^2; 0^2).$$

I centri dell 3-cella sono quindi le 8 permutazioni di

$$(\pm 1; 0; 0; 0) = (\pm 1, 0^3).$$

Così facendo, l'ipersfera circoscritta ha raggio ${}_0R = 2$, l'ipersfera passante per tutti i punti medi dei lati ha raggio ${}_1R = \sqrt{3}$, quella passante per tutti i centri delle 2-celle ha raggio ${}_2R = \sqrt{2}$ e, in ultimo, l'ipersfera passante per tutti i centri delle 3-celle ha raggio ${}_3R = 1$.

Procedendo come fatto nel sottoparagrafo 1.2.1, è possibile trovare le isometrie dell'ipercubo rappresentabili sotto forma di matrici ortogonali 4x4 fissando la base canonica $(O, e_1; e_2; e_3; e_4)$.

Si individuano, così, $24 \cdot 16 = 384$ matrici che descrivono il gruppo di simmetria isomorfo a $S_4 \times (\mathbb{Z}_2)^4$.

La definizione di bandiera data in 1.2.8 per il caso tridimensionale può essere naturalmente estesa al caso n -dimensionale.

Quindi, si fissi ora una bandiera, una quaterna (v, s, f, p) che indica una relazione di incidenza mutuale tra un vertice v , un lato s che lo contiene, una faccia f che contiene s e un poliedro p che contiene la faccia f . Possiamo mandare questa bandiera in un'altra mediante isometria.

Esempio. Sia fissata la seguente bandiera

$$X = \{(1; 1; -1; -1), (1; 1; -1; 0), (0; 1; -1; 0), (0; 1; 0; 0)\}$$

che si desidera mandare nella bandiera

$$X' = \{(-1; 1; -1; 1), (-1; 0; -1; 1), (-1; 0; -1; 0), (0; 0; -1; 0)\}$$

tramite l'isometria A .

Si vuole quindi che $X' = AX$, ovvero $A = X'X^{-1}$, ovvero

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4.3 L'iperottaedro $\{3, 3, 4\}$

Facendo uso della nozione di dualità applicata ai poliedri regolari in $\mathbb{R}^3$, è possibile individuare i vertici di un iperottaedro $\mathcal{O}_4 = \{3, 3, 4\}$, il 4-politopo duale dell'ipercubo $\mathcal{C}_4$.

Esso possiede sedici 3-celle di tipo $\mathcal{T}_3 = \{3, 3\}$, trentadue 2-celle di tipo $\mathcal{T}_2 = \{3\}$, ventiquattro lati e otto vertici. Attorno a ogni spigolo convergono tre tetraedri e le figure al vertice sono dei tetraedri.

Per tale ragione, gli otto vertici dell'iperottaedro possono essere descritti come i centri degli otto cubi che sono 3-celle per l'ipercubo.

Come illustrato nella sezione precedente, tali vertici possono essere scelti come le permutazioni dei punti

$$(\pm 1; 0^3).$$

Essendo duale dell'ipercubo, l'iperottaedro condivide con esso il medesimo gruppo di simmetria.

2.4.4 Il 24-celle $\{3, 4, 3\}$

Si procede a visualizzare il 4-politopo regolare $\{3, 4, 3\}$ chiamato anche 24-celle.

Si espone qui la costruzione di *Cesaro* [Ces87], il quale tratta il $\{3, 4, 3\}$ come troncamento dell'iperottaedro $\{3, 3, 4\}$.

Per lo sviluppo di tale costruzione, risulteranno necessarie alcune definizioni preliminari, che verranno qui di seguito esposte.

Definizione 2.4.1. Sia Π_n un n -politopo regolare, V_i uno dei suoi N_0 vertici e sia χ_i l'iperpiano $(n - 1)$ -dimensionale che contiene la figura al vertice in V_i . Sarà definita *cuspid* A_i l'intersezione di Π_n con il semispazio di $\mathbb{R}^n$ aperto delimitato da χ_i dalla parte di V_i .

Definizione 2.4.2. Verrà denominato *troncamento di un politopo* Π_n l' n -politopo Ω che si ottiene rimuovendo tutte le cuspidi per ogni i , ovvero

$$\Omega = \Pi_n \setminus \bigcup_{i=0}^{N_0} A_i.$$

Verrà chiamato χ_i^- il semispazio chiuso delimitato da χ_i che non contiene V_i , allora

$$\Omega = \Pi_n \cap \chi_1^- \cap \dots \cap \chi_{N_0}^-$$

e visto che l'intersezione finita di convessi è convessa, allora Ω è un n -politopo convesso.

Osservazione. Il troncamento di un n -politopo non è in generale convesso (guarda cubottaedro in 1.2.14) ma la scoperta di Cesaro è che il 4-politopo $\{3, 4, 3\}$ lo è.

Teorema 2.4.3. (*secondo Cesaro*) *Il troncamento di un $\{3, 3, 4\}$ è il 4-politopo regolare $\{3, 4, 3\}$.*

Per proseguire nell'analisi, saranno utili alcuni lemmi introduttivi la cui dimostrazione viene affidata al lettore.

Lemma 2.4.4. *Le 3-celle del troncamento di un 4-politopo regolare Π_4 sono le figure al vertice di Π_4 e i troncamenti delle 3-cella di Π_4 .*

Osservazione. Il lemma 2.4.4 offre un'informazione sul numero di 3-cella di $\{3, 4, 3\}$: infatti, assume che il numero di 3-cella del politopo è la somma del numero dei vertici di $\{3, 3, 4\}$ (poichè per ognuno di essi esiste una figura al vertice) e del numero delle 3-cella di $\{3, 3, 4\}$. Quindi in tutto sono $8+16=24$, da cui il nome 24-celle.

Lemma 2.4.5. *Il troncamento di un tetraedro è un ottaedro.*

Dim. (di Cesaro): Come noto, le figure al vertice dell'iperottaedro $\{3, 3, 4\}$ sono tutte ottaedri $\{3, 4\}$.

Inoltre, utilizzando il lemma 2.4.5, visto che le 3-cella dell'iperottaedro sono dei tetraedri, allora anche i troncamenti delle 3-cella dell'iperottaedro sono degli ottaedri.

Dal lemma 2.4.4, si conclude che il troncamento dell'iperottaedro è un 4-politopo che ha come 3-cella 24 ottaedri.

Inoltre, questi ottaedri sono certamente tutti congruenti. Infatti, presa una qualsiasi coppia (C, C') di 3-cella ottaedrali adiacenti di questo 4-politopo, è possibile trovare una catena di celle adiacenti $C_1, \dots, C_n$ con $C = C_1$ e $C' = C_n$ tale che la coppia (C_{i-1}, C_i) , $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ abbia uno spigolo in comune.

Lemma 2.4.6. *Ogni lato del troncamento di un 4-politopo regolare Π_4 appartiene esattamente a tre 3-cella del troncamento, una delle quali è una figura al vertice di Π_4 e le altre due sono i troncamenti di due 3-cella di Π_4 .*

Dim.: Sia fissato uno spigolo α del troncamento che è congiunzione di due punti medi di due spigoli σ_1 e σ_2 di Π_4 , i quali concorrono in un vertice V e appartengono a una stessa 2-cella β .

Inoltre β , che contiene α , è una 2-cella per esattamente due 3-cella del politopo di troncamento e α è lo spigolo di quella figura al vertice in V . Quindi, in tutto α è condiviso da tre 3-cella del troncamento. $\square$

Si rende necessario, ora, dimostrare che le figure al vertice del 24-celle sono dei cubi $\{4, 3\}$.

Per fare ciò, viene fissato un vertice V del 24-celle e si mostra che i vertici adiacenti ad esso si trovano in uno stesso iperpiano 3-dimensionale χ e che formano in esso un cubo.

Preso un vertice A adiacente a V il lato AV del 24-celle appartiene certamente a una sua 3-cella.

Per ogni 3-cella C che contiene V , si prendano i vertici adiacenti a V , siano questi l'insieme $A^C = \{A_1^C, \dots, A_j^C\}$.

Poichè ciascuna 3-cella C è un ottaedro e la sua figura al vertice è un quadrato, per ogni cella A^C si contano esattamente 4 elementi. Questi formano un quadrato Q_C giacente su un piano bidimensionale.

Si consideri un vertice A_1 adiacente ad A . Per il lemma 2.4.6, il segmento A_1A è in comune tra tre 3-celle; siano queste C_1 , C_2 e C_3 .

A_1 è intersezione degli insiemi A_1^C , A_2^C e A_3^C e i tre quadrati corrispondenti Q_1 , Q_2 e Q_3 concorrono in A_1 .

Ogni coppia tra questi quadrati, ad esempio Q_1 e Q_2 , ha anche un altro vertice in comune, sia questo A_2 , e formano un angolo diedro retto.

Si può iterare il discorso prendendo A_2 e affermare che questo è in comune tra tre 3-celle, ovvero C_1 , C_2 certamente e un'altra 3-cella C_4 a cui sono associati tre quadrati, di cui due già noti, e un terzo, Q_4 , che forma con Q_1 e Q_2 una porzione del bordo di un cubo.

Ragionando in questo modo, si giunge alla conclusione che i vertici adiacenti a un vertice A di un 24-celle sono tutti vertici di uno stesso cubo, giacente su di un unico iperpiano 3-dimensionale. $\square$

Ricapitolando, il 24-celle $\{3, 4, 3\}$ possiede 24 3-celle di tipo $\mathcal{O}_3 = \{3, 4\}$ e le sue figure al vertice sono dei cubi. Ogni 3-cella ottaedrale ha 12 spigoli e ognuno di questi è condiviso da tre ottaedri. Quindi

$$12 \cdot N_3 = 3 \cdot N_1; \quad 6 \cdot N_3 = 6 \cdot N_0$$

e, utilizzando la formula di Eulero, si può concludere che per il 24-celle

$$N_3 = 24; \quad N_2 = 96; \quad N_1 = 96; \quad N_0 = 24.$$

Il matematico *Thorold Gosset (1869-1962)* propone invece la costruzione del 24-celle partendo da un'ipercubo $\{4, 3, 3\}$.

Su ogni 3-cella cubica C dell'ipercubo costruisce un iperpiramide α_C con apice V_C tale che, se O è il centro dell'ipercubo e O_C quello della cella C , V_C risulti l'immagine di O di simmetria centrale rispetto a O_C . In particolare $OO_C = O_CV_C$ e V_C appartiene alla retta OO_C .

Ciascuna 3-cella di α_C è una piramide tridimensionale α' con base una faccia di C , quindi quadrata.

Considerato che ogni 2-cella quadrata di C è condivisa tra due 3-celle dell'ipercubo situate sullo stesso iperpiano, allora le piramidi α' si incontrano a

coppia a formare degli ottaedri regolari⁴.

Questo sistema di costruzione permette di definire meglio le coordinate dei vertici di un $\{3, 4, 3\}$.

Dato un sistema di coordinate cartesiane, per ogni $\ell > 0$, se l'ipercubo che si usa come base di partenza per la costruzione del 24-celle ha come coordinate le 16 permutazioni di

$$(\pm \ell; \pm \ell; \pm \ell; \pm \ell)$$

allora le coordinate del $\{3, 4, 3\}$ sono date dall'unione di queste con le coordinate degli 8 apici delle iperpiramidi α_C , ovvero le permutazioni di

$$(\pm 2\ell; 0; 0; 0) = (\pm 2\ell; 0^3).$$

2.4.5 Il 600-celle $\{3, 3, 5\}$

Qui di seguito, si passa alla costruzione del $\{3, 3, 5\}$, chiamato anche 600-celle, seguendo il procedimento di Gosset [Gos00] e utilizzando ancora i politopi di troncamento.

Il troncamento del 24-celle $\{3, 4, 3\}$, per il lemma 2.4.4, produce un 4-politopo che ha come 3-cella le ventiquattro figure al vertice del $\{3, 4, 3\}$ del tipo $\{4, 3\}$ e i troncamenti delle 3-cella ottaedrali, ovvero dei cubottaedri.

Così facendo, verrà prodotto un 4-politopo non regolare. Similmente a quanto fatto nel capitolo precedente per la costruzione dell'icosaedro partendo dall'ottaedro, si intende considerare un troncamento asimmetrico del $\{3, 4, 3\}$.

Sia, per semplicità di calcolo, Ω un 24-celle con spigolo di lunghezza 1. Si suddividano ciascuno spigolo in due segmenti con lunghezze in rapporto aureo

⁴La verifica che questo politopo così costruito sia regolare si trova in [Gos00].

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in modo che, nelle 2-cella triangolari del 24-celle, vengano a formarsi dei triangoli equilateri con vertici sui 2-cella.

In tal modo il politopo di troncamento asimmetrico risultante, denotato con Ω_ϕ , possiede centoventi 3-cella tetraedriche e ventiquattro 3-cella icosaedriche. Si possono costruire su ogni 2-cella di questi icosaedri delle piramidi tetraedriche regolari.

Così facendo, viene trasformato ogni icosaedro in un poliedro stellato, avente solo facce triangolari, e Ω_ϕ in un 4-politopo con solo 3-cella tetraedriche regolari e congruenti. Avendo ogni icosaedro 20 facce, il nuovo politopo avrà $120 + 20 \cdot 24 = 600$ 3-cella tetraedriche congruenti a due a due: da qui il nome 600-celle.

Questo nuovo 4-politopo viene denotato con Λ .

Affinchè Λ sia regolare anche le sue figure al vertice devono essere regolari e congruenti a due a due.

Per raggiungere questo obiettivo, si ricorre al seguente lemma.

Lemma 2.4.7. *Sia O il centro del $\{3, 4, 3\}$ e sia Ω_ϕ il suo troncamento asimmetrico operato tramite rapporto aureo ϕ . Sia Λ il 4-politopo costruito secondo Gosset, allora i vertici di Λ sono equidistanti da O .*

Dim.: Considerando il sistema di coordinate viste per la costruzione di Gosset, con $\ell = 1/2$, si pone l'origine come il centro del 24-celle con vertici i punti dell'ipercubo $(\pm (1/2)^4)$ più i vertici di coordinate $(\pm 1; 0^3)$, gli apici delle iperpiramidi.

Sia P un vertice del troncamento Ω_ϕ con la proprietà di appartenere a un lato di $\{3, 4, 3\}$ che sia anche lato per l'ipercubo. Presi ad esempio i vertici $(1/2; 1/2; 1/2; 1/2)$ e $(1/2; 1/2; -1/2; 1/2)$ di $\{3, 4, 3\}$, si può scegliere P con coordinate

$$P = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - 2\phi^{-1}); \frac{1}{2} \right).$$

Il quadrato della distanza di P dall'origine è

$$\begin{aligned}
{}_0R^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1 - 2\phi^{-1})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4 + 4\phi^{-2} - 4\phi^{-1}) = \\
&= 3 - \sqrt{5} = \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi, tutti i vertici di Ω_ϕ si trovano sulla superficie di un'ipersfera di raggio ${}_0R = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$ e centro l'origine.

Con questa scelta di coordinate, un altro punto Q di Ω_ϕ adiacente a P che si trova sulla stessa 3-cella icosaedrica C si deve cercare sul troncamento di un lato di $\{3, 4, 3\}$ che non è anche lato per l'ipercubo.

Quindi, fissando uno dei punti del 24-celle che si è scelto per costruire P , ad esempio $(1/2; 1/2; -1/2; 1/2)$, si può prendere ad esempio $(0; 0; 0; 1)$. In questo modo il vertice adiacente a P avrà coordinate

$$Q = \left(\frac{1 - \phi^{-1}}{2}; \frac{1 - \phi^{-1}}{2}; \frac{\phi^{-1} - 1}{2}; \frac{1 + \phi^{-1}}{2} \right).$$

Quindi la misura del lato di C è

$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{\frac{1}{2}\phi^{-2} + \frac{1}{4}(2 - 3\phi^{-1})^2 + \frac{1}{4}\phi^{-2}} = \\
&= \sqrt{3\phi^{-2} - 3\phi^{-1} + 1} = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Il centro della 3-cella icosaedrica C è anche il centro della corrispondente 3-cella ottaedrica del $\{3, 4, 3\}$ con coordinate $(1/2; 0; 0; 1/2) = O'$. Visto che O' e l'origine O sono equidistanti dai vertici di C , tutti i punti della retta OO' sono equidistanti da C e OO' è la retta normale all'iperpiano che contiene C .

Visto che i vertici di C giacciono tutti sull'ipersfera di raggio ${}_0R$, s'intende trovare un punto sulla retta OO' , del tipo $(t; 0; 0; t)$, la cui distanza da O sia effettivamente ${}_0R$.

A tal pro, si consideri il vertice V di coordinate

$$V = \left(\frac{{}_0R}{\sqrt{2}}; 0; 0; \frac{{}_0R}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0; 0; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

equidistante dai vertici di C e giacente sull'ipersfera di raggio ${}_0R$.

Se la distanza tra V e un vertice di C è uguale a PQ , allora V è apice della piramide tetraedrica aggiunta sulla faccia icosaedrica a formare il politopo Λ .

Dopo opportuni calcoli si verifica facilmente che $QV = PQ$ - e quindi V può essere usato come apice di una delle piramidi tetraedriche regolari - e la 3-cella costruita è un tetraedro regolare congruente alle altre.

Si conclude che tutti i vertici di Λ giacciono sulla stessa ipersfera di centro l'origine e raggio ${}_0R$. $\square$

Si deve ora mostrare che, per ogni vertice di Λ , la figura al vertice è un icosaedro regolare e che le figure al vertice sono congruenti a due a due.

Per far ciò, si fissano due vertici di Λ , V e V' tali che V' sia l'apice di un tetraedro costruito su una faccia degli icosaedri di Ω_ϕ e invece V sia un vertice già presente in Ω_ϕ .

I vertici di Λ adiacenti a V si trovano su di un'ipersfera di centro V e raggio l (la lunghezza dello spigolo di Λ). L'intersezione di questa ipersfera con quella di raggio ${}_0R$ e centro l'origine è una sfera tridimensionale. Sia questa α .

Per cui, i vertici di Λ adiacenti a V si trovano tutti su uno stesso iperpiano tridimensionale e definiscono i vertici di un poliedro convesso, sia questo P , che è la figura al vertice di Λ in V .

Visto che le 3-cella di Λ sono tetraedri allora le facce di P sono triangoli equilateri, anche se la configurazione locale del poliedro non è immediatamente evidente e non c'è modo di sapere che tipo di poliedro sia.

Invece, operando lo stesso ragionamento per i vertici di Λ adiacenti a V' , si conclude che questi si trovino tutti su di uno stesso iperpiano tridimensionale e definiscono i vertici di un poliedro che, per costruzione, è un icosaedro regolare, che denotiamo con I .

Esso rappresenta la figura al vertice di Λ in V' .

Il lemma 2.4.7 ha mostrato che tutti i vertici di Λ giacciono sulla superficie di una stessa ipersfera ed è quindi lecito portare V' in V tramite una rotazione di centro O , senza per questo ledere la struttura di Λ .

Quindi I può essere portato su un icosaedro inscritto nella sfera α .

In particolare, i vertici di P adiacenti a V si trovano sullo stessa circonferenza, a meno di rotazioni, su cui si trova la figura al vertice in V' di I e formano un poligono F regolare.

Tuttavia la figura al vertice in V' di I è un pentagono regolare e quindi anche F deve essere un pentagono regolare⁵. In particolare in V arrivano cinque facce di P che sono 3 triangoli equilateri.

Quindi, tutte le figure al vertice di P sono pentagoni regolari congruenti. Perciò, P è un icosaedro regolare.

Ogni 3-cella del $\{3, 3, 5\}$ è un tetraedro regolare con 4 vertici. Se V è un vertice, è certo che le 3-cella che hanno V come vertice sono pari al numero di facce della figura al vertice in V .

Quindi, ogni vertice del $\{3, 3, 5\}$ è comune a esattamente 20 celle. Inoltre, ogni spigolo è condiviso da 5 tetraedri.

Utilizzando queste informazioni, si può concludere che per il 600-celle valgono le relazioni

⁵Questo passaggio deriva da un corollario del teorema di Schläfli che si può trovare in bibliografia in [Lel17], anche se è un risultato ben noto della geometria classica.

"Un poligono con tutti i lati uguali inscritto in un cerchio è necessariamente regolare. Inoltre due poligoni regolari che hanno lo stesso lato e lo stesso raggio del cerchio circoscritto sono necessariamente congruenti."

$$4 \cdot N_3 = 20 \cdot N_0; \quad 6 \cdot N_3 = 5 \cdot N_1$$

da cui, utilizzando la formula di Eulero,

$$N_3 = 600; \quad N_2 = 1200; \quad N_1 = 720; \quad N_0 = 120.$$

2.4.6 Il 120-celle $\{5, 3, 3\}$

Il concetto di dualità tridimensionale si estende in modo naturale al caso n -dimensionale. Dato un n -politopo convesso, il suo n -politopo convesso duale e il duale del suo duale, che risulta essere l' n -politopo convesso di partenza, a meno di un' omotetia. [Br2]

Il duale di un n -politopo $P = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ è l' n -politopo con simbolo di Schläfli $\{p_{n-1}, \dots, p_1\}$, ovvero quello i cui termini sono quelli di P letti dall'ultimo al primo.

Infatti, si nota certamente che l'ipercubo $\{4, 3, 3\}$ e l'iperottaedro $\{3, 3, 4\}$ sono duali e che l'ipertetraedro $\{3, 3, 3\}$ e il 24-celle $\{3, 4, 3\}$ sono politopi autoduali. Infine, il 600-celle $\{3, 3, 5\}$ ha come suo duale un 4-politopo, di simbolo di Schläfli $\{5, 3, 3\}$, denotato comunemente 120-celle che possiede degli icosaedri regolari come 3-celle e dei tetraedri regolari come figure al vertice.

Si nota che il numero di 3-cella del $\{5, 3, 3\}$ è pari al numero di vertici del $\{3, 3, 5\}$ come anche il numero di vertici del $\{5, 3, 3\}$ equivale al numero di 3-cella del $\{3, 3, 5\}$. Si sa anche che, essendo le 3-celle degli icosaedri, quindi intorno a ogni spigolo convergono 3 icosaedri diversi allora, il numero degli spigoli del 120-celle può essere dedotto dalla relazione

$$30 \cdot N_3 = 3 \cdot N_1$$

da cui, utilizzando anche la formula di Eulero, si conclude che per il 120-celle si ha

$$N_3 = 120; \quad N_2 = 720; \quad N_1 = 1200; \quad N_0 = 600.$$

Capitolo 3

La visualizzazione

Lo scopo di questo capitolo è presentare gli strumenti geometrici che consentono di visualizzare gli n -politopi attraverso proiezioni su spazi di una dimensione inferiore.

L'idea di fondo è duplice: da un lato, la *proiezione radiale* permette di *gonfiare*, o meglio trasferire, il bordo di un n -politopo convesso su di un'ipersfera concentrica. Questa costruzione è un omeomorfismo e garantisce che la struttura combinatoria del politopo venga preservata; dall'altro lato, successivamente, è possibile applicare la *proiezione stereografica*, che consente di rappresentare su un iperpiano le figure ipersferiche.

La composizione delle due proiezioni – radiale e stereografica – fornisce una rappresentazione dell' n -politopo in dimensione $n-1$ che conserva la combinatoria dell'oggetto originario.

Questo procedimento è alla base dei *diagrammi di Schlegel*, introdotti da Sommerville e ripresi da Coxeter, che costituiscono uno strumento essenziale per visualizzare politopi di dimensione superiore a 3.

Nel seguito si descrivono le due proiezioni, se ne analizzano le proprietà topologiche e geometriche e, infine, si descrive la loro composizione. Si permette così di ottenere rappresentazioni efficaci sia per i poliedri nello spazio tridimensionale, sia per i policori nello spazio quadridimensionale.

3.1 La proiezione stereografica

Considerando un sistema di coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^{n+1}$, sia S_n l'ipersfera di raggio unitario il cui insieme di punti si può esprimere come

$$S_n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

Nel contesto e senza ledere generalità, si definisce *polo nord* il punto

$$N = (0, \dots, 1) \in S_n.$$

Sia, quindi, α l'iperpiano di proiezione di $\mathbb{R}^{n+1}$ il cui insieme di punti è

$$\alpha = \{x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.1.1. *Una proiezione stereografica è un omeomorfismo*

$$\pi_n : S_n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

che associa a ogni punto $P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_n \setminus \{N\}$ il punto, determinato in maniera univoca, intersezione tra la semiretta uscente da N e passante per P con l'iperpiano α :

$$\pi_n(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Dim.: Sia $P \in S_n \setminus \{N\}$. La retta per N e P ha equazione

$$N + t(P - N) = (y_1, \dots, y_n, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'intersezione con α si ottiene imponendo $x_{n+1} = 0$, da cui

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}.$$

In definitiva, il punto cercato è

$$\pi_n(P) = (y_1, \dots, y_n, 0) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0).$$

La mappa è continua e per concludere che π_n sia un omeomorfismo si mostra che $\forall (y_1, \dots, y_n, 0)$ esiste un unico $(x_1, \dots, x_{n+1})$ tale che

1. $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_n \setminus N$
2. $\forall \{1, \dots, n\}, y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}.$

L'equazione di S_n diventa

$$(1 - x_{n+1})^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 + x_{n+1}^2 = 1.$$

Se per semplicità di lettura si pone $\sum_{i=1}^n y_i^2 = r^2$, si può riscrivere l'equazione sopra come

$$(r^2 + 1)x_{n+1}^2 - 2r^2 x_{n+1} + r^2 - 1 = 0$$

da cui le due soluzioni

$$x_{n+1} = \frac{r^2 \pm 1}{r^2 + 1}.$$

La soluzione $x_{n+1} = 1$ non è ammissibile in quanto il punto non appartenerrebbe all'ipersfera S_n . Per tale ragione, l'unica soluzione accettabile è $x_{n+1} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$, per la quale

$$\pi_n^{-1}(y_1, \dots, y_n, 0) = \left(y_1 \left(\frac{2}{r^2 + 1} \right), \dots, y_n \left(\frac{2}{r^2 + 1} \right), \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right)$$

□

Nello spazio tridimensionale, si consideri la sfera unitaria con equazione $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e con polo nord di coordinate $N = (0, 0, 1)$.

Coerentemente con quanto descritto nelle pagine precedenti, sia allora α il piano di proiezione di equazione $x_3 = 0$.

Con tali scelte si può definire la funzione proiezione stereografica di $\mathbb{R}^3$ come

$$\pi_2(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right), \quad \pi_2^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{r^2 + 1}, \frac{2y_2}{r^2 + 1}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right).$$

Teorema 3.1.2. *La proiezione stereografica π_2 trasforma le circonferenze di S_2 in rette o in circonferenze di α .*

Dim.: Una circonferenza γ di S_2 è sempre intersezione di S_2 con un piano β che la seca. L'equazione di β è del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $|d| < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

L'immagine di γ mediante π_2 è l'insieme dei punti $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$a \left(\frac{2y_1}{r^2 + 1} \right) + b \left(\frac{2y_2}{r^2 + 1} \right) + c \left(\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right) + d = 0$$

$$2ay_1 + 2by_2 + (c + d)r^2 - c + d = 0$$

$$(c + d)(y_1^2 + y_2^2) + 2ay_1 + 2by_2 = c - d.$$

Se $N \in \beta$ allora $c + d = 0$, quindi l'equazione è lineare

$$ay_1 + by_2 = c$$

ovvero l'equazione di una retta.

Se $N \notin \beta$, allora $c + d \neq 0$. In tal caso l'equazione rappresenta una circonferenza:

$$y_1^2 + y_2^2 + \left(\frac{2a}{c+d}\right)y_1 + \left(\frac{2b}{c+d}\right)y_2 = \frac{c-d}{c+d}.$$

□

In $\mathbb{R}^4$, sia S_3 l'ipersfera di raggio unitario centrata nell'origine degli assi cartesiani di equazione

$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Sia $N = (0, 0, 0, 1)$ il suo polo nord e sia H l'iperpiano di equazione $x_4 = 0$. La proiezione stereografica $\pi_3 : S_3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a ogni punto P dell'ipersfera, diverso da N , associa le prime tre coordinate del punto di intersezione tra H e la retta passante per N e P . In questo modo si definisce

$$\pi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4}, 0\right)$$

e la funzione inversa

$$\pi_3^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2y_1}{r^2+1}, \frac{2y_2}{r^2+1}, \frac{2y_3}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right).$$

Teorema 3.1.3. *La proiezione stereografica π_3 trasforma le circonferenze di S_3 in rette o in circonferenze di H e le sfere di S_3 in piani o sfere di H .*

Dim.: Una sfera Γ di S_3 è della forma $S_3 \cap \Lambda$, con Λ iperpiano di $\mathbb{R}^4$ con equazione del tipo

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 + \varepsilon = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

L'immagine di Γ mediante π_3 è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costituito dai punti che soddisfano l'equazione

$$(\delta + \varepsilon) r^2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2 + 2\gamma y_3 + (\varepsilon - \delta) = 0. \quad (3.1.1)$$

Se $\delta + \varepsilon = 0$, l'equazione 3.1.1 diventa lineare e rappresenta un piano in H , ovvero

$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = \delta.$$

Se $\delta + \varepsilon \neq 0$, l'equazione 3.1.1 rappresenta una sfera in H .

Una circonferenza C di S_3 è $S_3 \cap \Pi$, dove Π è un piano di $\mathbb{R}^4$, ovvero l'intersezione di due iperpiani affini indipendenti

$$\Lambda_j : \alpha_j x_1 + \beta_j x_2 + \gamma_j x_3 + \delta_j x_4 + \varepsilon_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Ponendo $a_j = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$, $s_j = \delta_j + \varepsilon_j$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ si scrive l'immagine di C mediante π_3 in tal modo:

$$s_j r^2 + 2 a_j y + (\varepsilon_j - \delta_j) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.1.2)$$

Se $s_j = 0$ (cioè $N \in \Lambda_j$), allora 3.1.2 è lineare e rappresenta un piano in H :

$$a_j \cdot y = \delta_j.$$

Se $s_j \neq 0$, l'equazione 3.1.2 rappresenta una sfera in H .

□

3.2 Proiezione radiale e immagine sferica dei poliedri

Definizione 3.2.1 (Proiezione radiale). Sia $O \in \mathbb{R}^3$ e sia $S_2(O, R)$ la sfera di centro O e raggio $R > 0$. La *proiezione radiale* da O su $S_2(O, R)$ è la mappa

$$\rho_{O,R} : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \longrightarrow S_2(O, R), \quad X \longmapsto O + R \frac{X - O}{\|X - O\|},$$

dove X è un punto arbitrario dello spazio.

Definizione 3.2.2 (Immagine sferica di un poliedro). Sia $P \subset \mathbb{R}^3$ un poliedro regolare con centro O_3 e vertici $\{v_1, \dots, v_m\}$.

Indichiamo con $S_2(O_3, R)$ la sfera circoscritta a P , dove $R = {}_0R = \|v_i - O_3\|$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

L'*immagine sferica* di P è l'insieme

$$\Sigma(P) := \rho_{O_3,R}(\partial P) \subset S_2(O_3, R),$$

ottenuto come restrizione della proiezione radiale al bordo del poliedro:

$$\rho_{O_3, R}|_{\partial P} : \partial P \longrightarrow S_2(O_3, R).$$

Quindi è l'insieme dei vertici, spigoli e facce di P proiettati radialmente su $S_2(O_3, R)$.

Teorema 3.2.3. *La restrizione $\rho_{O_3, R}|_{\partial P} : \partial P \rightarrow S_2(O_3, R)$ è un omeomorfismo. In particolare, $\Sigma(P)$ preserva la struttura di incidenza di P .*

Dim.: La mappa $\rho_{O_3, R}$ è continua su $\mathbb{R}^3 \setminus \{O_3\}$; in particolare lo è su ∂P , poiché $O_3 \notin \partial P$.

Fissata una direzione $\vec{u} \in S_2(O_3, 1)$, si consideri la semiretta

$$\ell_{\vec{u}} := \{O_3 + t\vec{u} : t \geq 0\}.$$

Poiché P è convesso e $O_3 \in \text{int}(P)$, l'intersezione $\ell_{\vec{u}} \cap P$ è un intervallo del tipo $[O_3, O_3 + \tau(\vec{u})\vec{u}]$ con $\tau(\vec{u}) > 0$.

Per definizione di $\tau(\vec{u})$, il punto $X(\vec{u}) := O_3 + \tau(\vec{u})\vec{u}$ appartiene a ∂P ed è l'unico punto di ∂P sul raggio $\ell_{\vec{u}}$.

Ne segue che la mappa

$$\psi : S_2(O_3, R) \longrightarrow \partial P, \quad \psi(O_3 + R\vec{u}) = O_3 + \tau(\vec{u})\vec{u}$$

è ben definita.

Per ogni $X \in \partial P$ si ha $X = O_3 + \|X - O_3\|\vec{u}$ con $\vec{u} = \frac{X - O_3}{\|X - O_3\|}$, allora

$$\rho_{O_3, R}(X) = O_3 + R\vec{u}.$$

In particolare, $\rho_{O_3,R}(X(\vec{u})) = O_3 + R\vec{u}$, cioè $\rho_{O_3,R} \circ \psi = \text{id}$.

D'altra parte, se $\rho_{O_3,R}(X_1) = \rho_{O_3,R}(X_2)$, i vettori $X_1 - O_3$ e $X_2 - O_3$ hanno la stessa direzione, dunque X_1, X_2 giacciono sullo stesso raggio $\ell_{\vec{u}}$ e, per unicità del punto di frontiera su $\ell_{\vec{u}}$, segue $X_1 = X_2$.

Quindi $\rho_{O_3,R}|_{\partial P}$ è biettiva.

Il bordo ∂P è compatto e $S_2(O_3, R) \subset \mathbb{R}^3$, quindi è spazio di Hausdorff^a.

Pertanto $\rho_{O_3,R}|_{\partial P}$ è un omeomorfismo, e ψ è la sua inversa continua.

Poichè $\rho_{O_3,R}|_{\partial P}$ è un omeomorfismo, preserva la struttura topologica del complesso cellulare di ∂P . In particolare:

- i vertici v_i restano fissi, quindi $\rho_{O_3,R}(v_i) = v_i$;
- l'immagine di uno spigolo $[v_i, v_j]$ ($i \neq j$), è una curva continua che unisce $\rho(v_i)$ e $\rho(v_j)$, e, vista l'iniettività dimostrata, questa curva non interseca altre immagini se non nei punti corrispondenti;
- l'immagine di una faccia è un poligono sferico delimitato dagli archi immagine degli spigoli che vi appartengono.

Di conseguenza, i vertici restano collegati agli stessi spigoli e gli spigoli delimitano le stesse facce, quindi la relazione di incidenza tra vertici, spigoli e facce si preserva (cfr. Appendice C).

□

^aUno spazio topologico si dice di Hausdorff se ogni coppia di punti distinti ammette intorni aperti disgiunti. In particolare $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea è uno spazio di Hausdorff, e lo è quindi anche ogni suo sottospazio, come la sfera $S_2(O_3, R)$.

Teorema 3.2.4. *Ogni spigolo $[v_i, v_j]$ di P giace in un piano passante per O_3 che interseca $S_2(O_3, R)$ in un cerchio massimo. L'immagine $\rho_{O_3,R}(e)$ è quindi*

una geodetica sferica (cfr. Appendice C). Ogni faccia di P viene trasformata in un poligono sferico i cui lati sono geodetiche.

Dim.: Si fissi uno spigolo $[v_i, v_j]$ di P , con $i \neq j$. I tre punti O_3, v_i, v_j determinano un piano Π , in quanto certamente non allineati.

Poiché $O_3 \in \Pi$, l'intersezione $\Pi \cap S_2(O_3, R)$ è un *cerchio massimo*. Per ogni $X \in [v_i, v_j]$ si ha $X \in \Pi$, dunque anche il vettore $X - O_3 \in \Pi$.

Applicando la proiezione radiale a X ,

$$\rho_{O_3, R}(X) = O_3 + R \frac{X - O_3}{\|X - O_3\|} \in \Pi \cap S_2(O_3, R).$$

Ne segue che $\rho_{O_3, R}([v_i, v_j]) \subset \Pi \cap S_2(O_3, R)$, con estremi $\rho_{O_3, R}(v_i) = v_i$ e $\rho_{O_3, R}(v_j) = v_j$.

Questi è l'arco minore del cerchio massimo poiché l'angolo al centro tra $v_i - O_3$ e $v_j - O_3$ è $< \pi$.

Di conseguenza $\rho_{O_3, R}([v_i, v_j])$ è una geodetica sferica.

Sia F una faccia di P contenuta in un piano affine A . Poiché $\rho_{O_3, R}|_{\partial P}$ è un omeomorfismo, anche la restrizione $\rho_{O_3, R}|_{\partial F}$ lo è.

Dal caso degli spigoli, ciascun lato di ∂F viene mandato in un arco di cerchio massimo; di conseguenza $\rho_{O_3, R}(\partial F)$ è una poligonale sferica.

Essendo $\rho_{O_3, R}|_F$ la restrizione di un omeomorfismo, l'immagine $\rho_{O_3, R}(F)$ è la regione di $S_2(O_3, R)$ delimitata dalla poligonale $\rho_{O_3, R}(\partial F)$ sopra definita. $\square$

3.3 La composizione Φ_2

Sia $P \subset \mathbb{R}^3$ un poliedro regolare. Senza ledere generalità, assumiamo che il centro di P coincida con l'origine, $O_3 = O = (0, 0, 0)$, e che la sua sfera circoscritta abbia raggio unitario, $R = 1$.

Questa normalizzazione è sempre possibile per composizione di isometrie su P .

In queste ipotesi, la proiezione radiale è

$$\rho^{(3)}(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}.$$

Definizione 3.3.1. La *rappresentazione piana stereografica* di P è la mappa composta

$$\Phi_2 = \pi_2 \circ \rho^{(3)} : \partial P \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Teorema 3.3.2. La mappa Φ_2 è un omeomorfismo tra ∂P e $\Phi_2(\partial P)$ e preserva le relazioni di incidenza tra vertici, spigoli e facce di P .

Dim.: Per il Teorema 3.2.1, $\rho^{(3)} : \partial P \rightarrow S_2$ è un omeomorfismo e per il Teorema 3.1.1, $\pi_2 : S_2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un omeomorfismo.

Segue che Φ_2 è un omeomorfismo come composizione di omeomorfismi. $\square$

Teorema 3.3.3. Sia $[v_i, v_j]$ uno spigolo di P . Allora $\Phi_2([v_i, v_j])$ è un arco di circonferenza in $\mathbb{R}^2$, o un segmento di retta se il cerchio massimo contenente lo spigolo passa per N .

Dim.: Per il Teorema 3.2.2, $\rho^{(3)}([v_i, v_j])$ è un arco di cerchio massimo su S_2 e, per il Teorema 3.1.2, π_2 manda i cerchi di S_2 in circonferenze o rette se passano per N .

Quindi $\Phi_2([v_i, v_j])$ è un arco circolare o un segmento. $\square$

Teorema 3.3.4. *Sia F una faccia di P . Allora $\Phi_2(F)$ è un poligono circolare, cioè una regione delimitata da archi di circonferenze o da segmenti rettilinei.*

Dim.: Dal Teorema 3.2.2, $\rho^{(3)}(F)$ è un poligono sferico delimitato da archi di cerchi massimi. Dal Teorema 3.1.2, π_2 manda ciascun arco in un arco di circonferenza o in un segmento.

Quindi $\Phi_2(F)$ è un poligono circolare. $\square$

Osservazione. La costruzione coincide con i *diagrammi di Schlegel* ([Som29], [Cox48]). Scegliendo opportunamente il polo N , ad esempio opposto a una faccia, l'immagine planare rappresenta il poliedro in modo che tutte le altre facce appaiano inscritte all'interno di quella esterna, che è rappresentata dalla regione illimitata del piano.

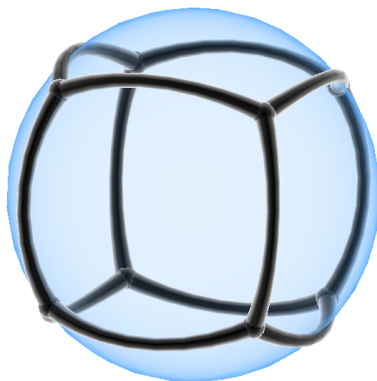


Figura 3.1: *Cubo gonfiato sulla sfera circoscritta*

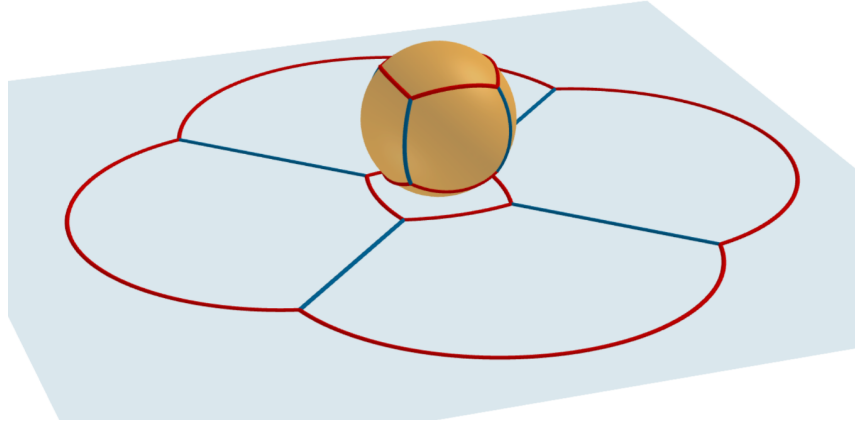


Figura 3.2: *Proiezione Φ_2 del cubo*

3.4 Estensione ai policori regolari

Sia $Q \subset \mathbb{R}^4$ un 4-politopo regolare. Senza perdita di generalità, si assume che il centro di Q coincida con l'origine e che la sfera circoscritta sia di raggio unitario. La proiezione radiale è, quindi

$$\rho^{(4)}(X) = \frac{X}{\|X\|}, \quad X \in \partial Q.$$

Definizione 3.4.1. La rappresentazione tridimensionale stereografica di Q è

$$\Phi_3 = \pi_3 \circ \rho^{(4)} : \partial Q \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Teorema 3.4.2. La mappa Φ_3 è un omeomorfismo su $\Phi_3(\partial Q)$ e preserva la struttura combinatoria di Q .

Dim.: Per il teorema (3.1.3), $\rho^{(4)}$ e π_3 sono omeomorfismi, quindi Φ_3 è un omeomorfismo. $\square$

Teorema 3.4.3. *Nella rappresentazione Φ_3 :*

- *gli spigoli diventano cerchi o rette in $\mathbb{R}^3$;*
- *le facce diventano poligoni circolari;*
- *le celle tridimensionali diventano poliedri circolari.*

Dim.: Sia $e = [v_i, v_j]$ uno spigolo di Q . Sia L_e il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dall'origine O e dalla retta affine contenente e .

Per ogni $X \in e$ il vettore $\frac{X}{\|X\|}$ appartiene a L_e , dunque $\rho^{(4)}(e) \subset S_3 \cap L_e$, che è una circonferenza massima di S_3 .

Il bordo $\rho^{(4)}(e)$ è un arco di tale cerchio massimo.

Per il Teorema 3.1.3, $\Phi_3(e)$ è un arco di circonferenza (o un segmento rettilineo nel caso degenerare in cui il cerchio massimo contenga N).

Sia F una faccia di Q contenuta in un piano affine $A_F \subset \mathbb{R}^4$ con $O \notin A_F$. Sia $L_F = \text{span}\{O, A_F\}$ il sottospazio generato da O e A_F . Allora $S_3 \cap L_F$ è una 2-sfera massima.

Ogni lato e di F viene mandato da $\rho^{(4)}$ in un arco di cerchio massimo contenuto in $S_3 \cap L_F$, perciò $\rho^{(4)}(\partial F)$ è una poligonale sferica su tale S_2 .

Poiché $O \notin A_F$, ogni semiretta uscente da O interseca A_F (e quindi F) al più in un punto; ne segue che $\rho_4|_F : F \rightarrow \rho^{(4)}(F)$ è iniettiva e continua, con inversa continua, dunque un omeomorfismo.

Applicando π_3 alla poligonale sferica $\rho^{(4)}(\partial F)$, ciascun lato diventa un arco di circonferenza o un segmento (Teorema 3.1.3). Per continuità e biiettività locale, l'interno di $\rho^{(4)}(F)$ viene

mandato nella regione piana delimitata da tali archi.

Quindi $\Phi_3(F)$ è un *poligono circolare*.

Sia C una cella tridimensionale di Q , contenuta in un sotto-spazio affine A_C di dimensione 3 con $O \notin A_C$.

Come sopra, sia $L_C = \text{span}\{O, A_C\}$: si ha $S_3 \cap L_C$ che è o una 3-sfera (se $L_C = \mathbb{R}^4$) o una 2-sfera (se $\dim L_C = 3$). In entrambi i casi la frontiera $\rho^{(4)}(\partial C)$ è una superficie sferica policellulare i cui spigoli sono archi di cerchi massimi e le cui facce sono poligoni sferici.

Gli spigoli diventano archi di circonferenze o segmenti e le facce diventano poligoni circolari dopo π_3 . Per continuità e iniettività (fuori dal polo N), l'intera superficie $\rho^{(4)}(\partial C)$ si trasforma in una superficie di $\mathbb{R}^3$, composta da poligoni circolari incollati secondo la stessa incidenza.

Pertanto $\Phi_3(C)$ è un *poliedro circolare*.

Si osserva che i casi in cui il polo N cade su un lato o su una faccia di $\rho^{(4)}(\partial Q)$ non alterano la conclusione: gli archi corrispondenti degenerano in segmenti rettilinei e le regioni possono risultare non compatte, ma restano delimitate da archi di circonferenze e/o rette, dunque circolari. $\square$

Osservazione. Questa costruzione è la generalizzazione ai 4-politopi dei diagrammi di Schlegel. Il politopo viene rappresentato in una dimensione inferiore conservando intatta la combinatoria ([WZLW19], [Cox48]).

3.5 Galleria

Le immagini di questa sezione dell'elaborato sono state ottenute con *Jenn3D* [Jen04], un software open source sviluppato dal *Dott. Fritz Obermeyer, Carnegie Mellon University (Pennsylvania)*.

Jenn3D è progettato per costruire e manipolare proiezioni stereografiche di politopi quadridimensionali nello spazio tridimensionale.

Il programma consente l'esplorazione interattiva delle strutture e la loro esportazione in immagini o modelli tridimensionali, e permette inoltre la rappresentazione dei grafi di Cayley associati ai gruppi di Coxeter, costruiti tramite l'algoritmo di Todd–Coxeter e immersi nella 3-sfera prima della proiezione nello spazio euclideo.

A fini divulgativi, si segnala anche il film didattico *Dimensions* [LA08], accessibile gratuitamente online e in multilingua. Si tratta di un progetto realizzato da *Dott. Étienne Ghys (ENS di Lione e direttore di ricerca CNRS)*, *Dott. Aurélien Alvarez (Université d'Orléans)* e *Ing. Jos Leys*, finalizzato a illustrare concetti di geometria multidimensionale.

Nelle pagine seguenti le rappresentazioni tridimensionali de l'**ipertetraedro** o anche 5-celle, l'**ipercubo** o anche 8-celle, l'**iperottaedro** o anche 16-celle, il **24-celle**, il **120-celle** e, infine, il **600-celle**.

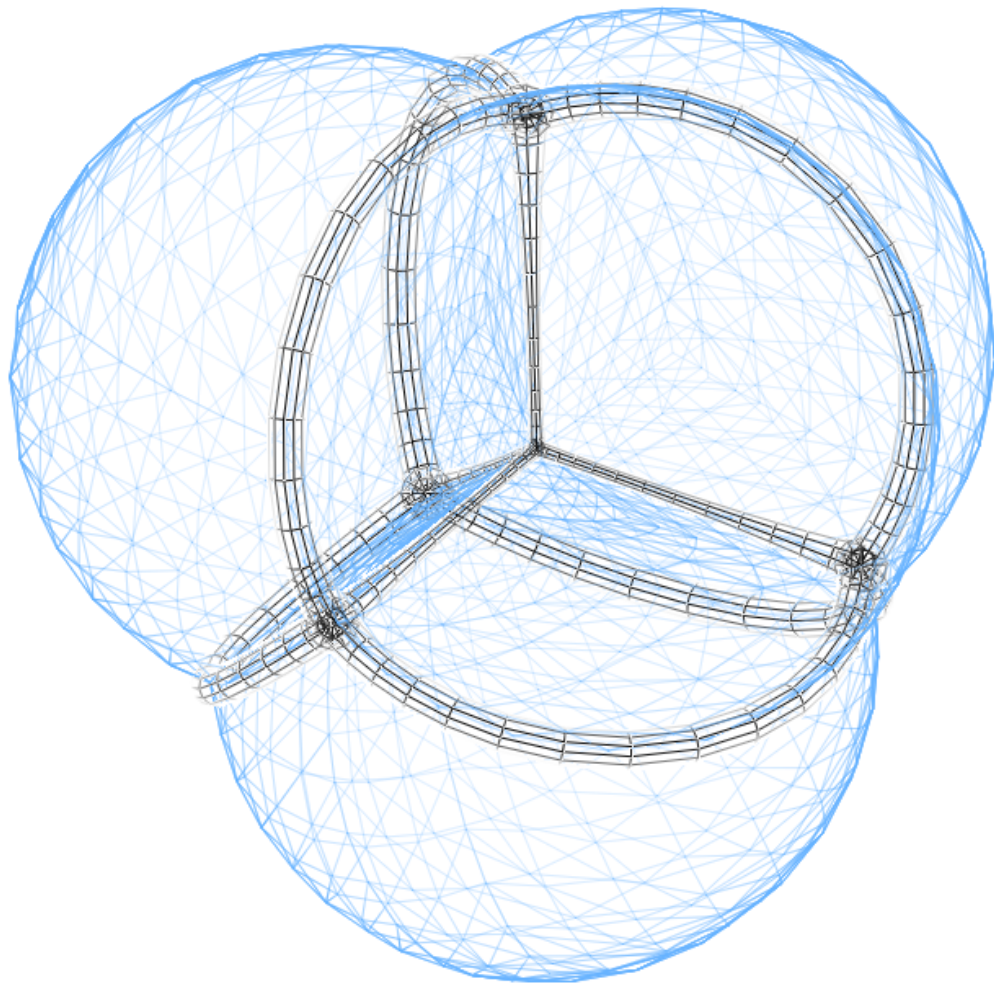


Figura 3.3: 5-celle

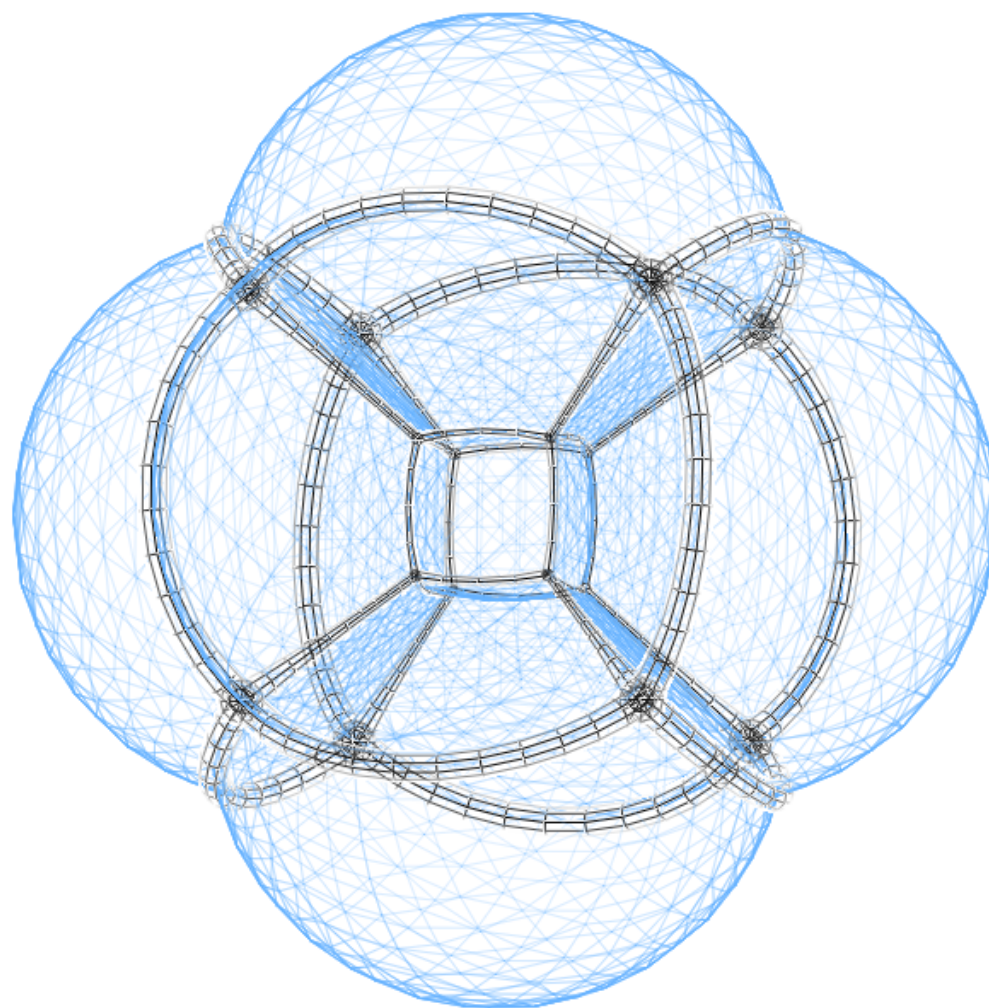


Figura 3.4: 8-celle

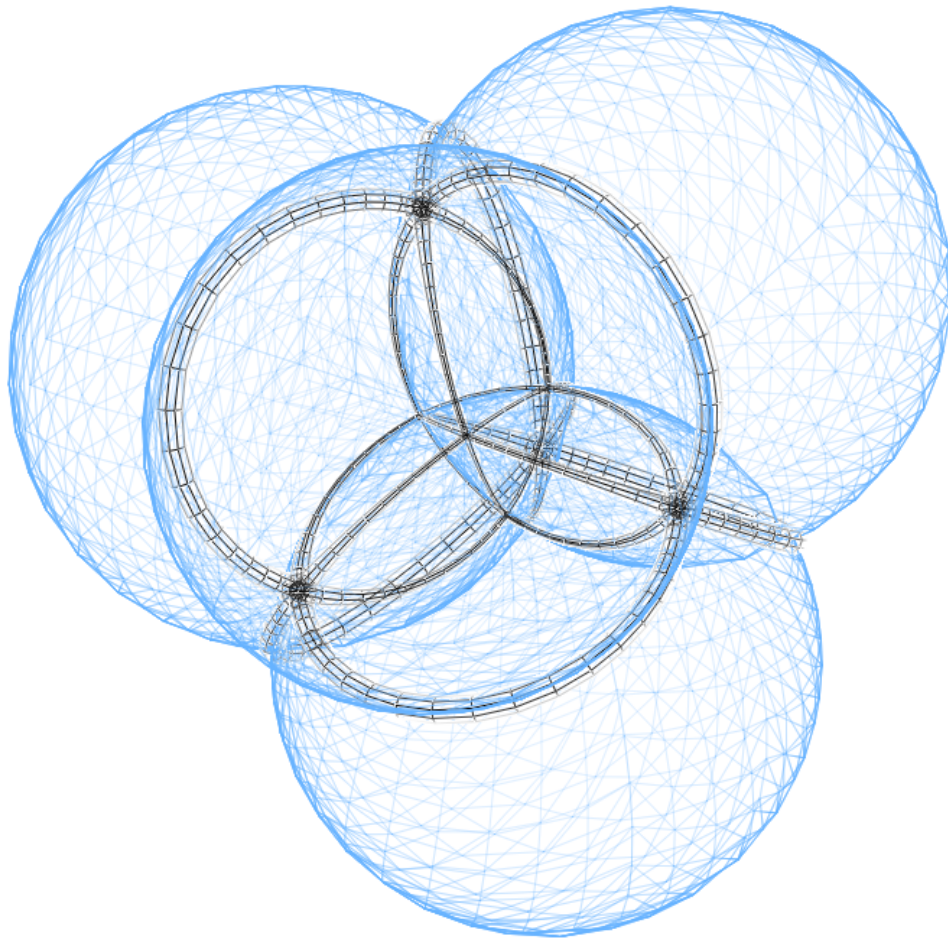


Figura 3.5: 16-celle

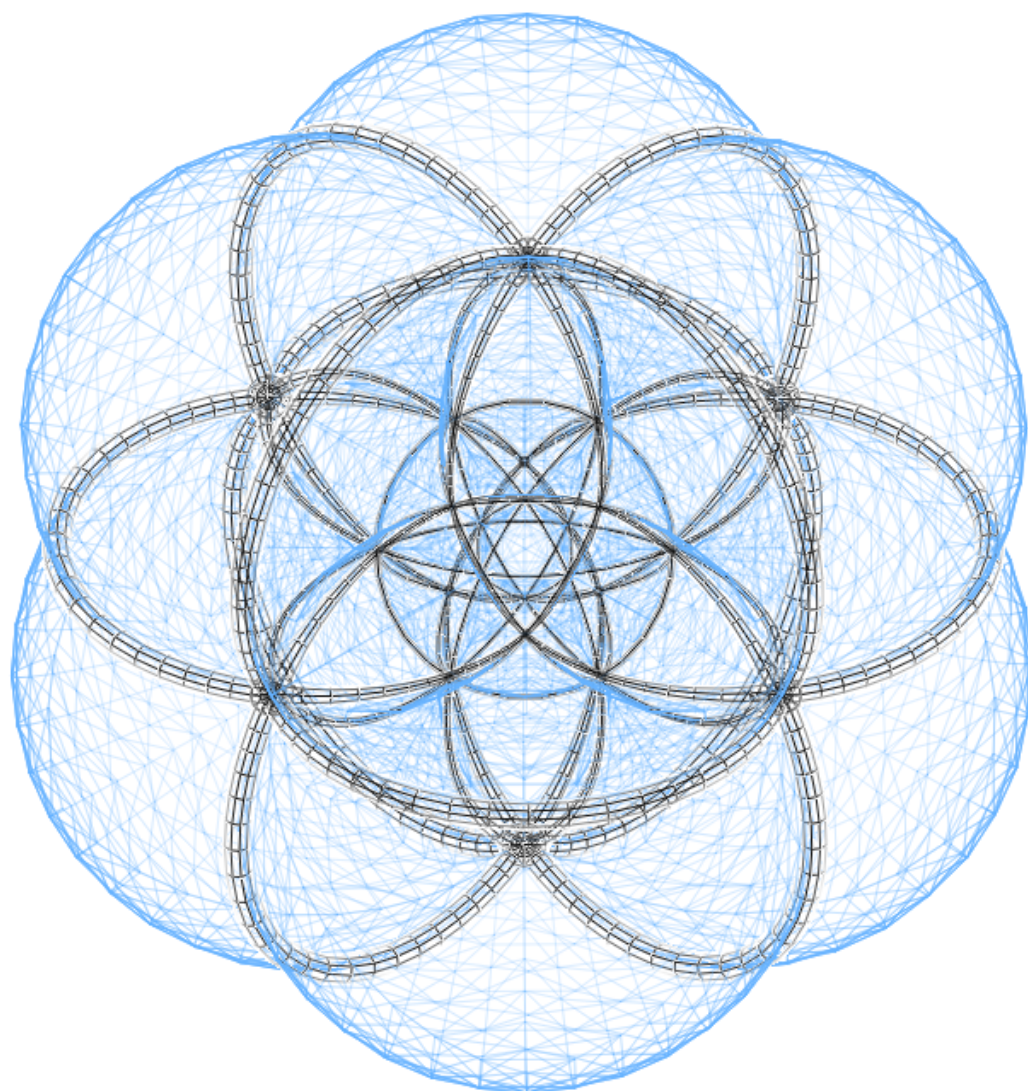


Figura 3.6: *24-celle*

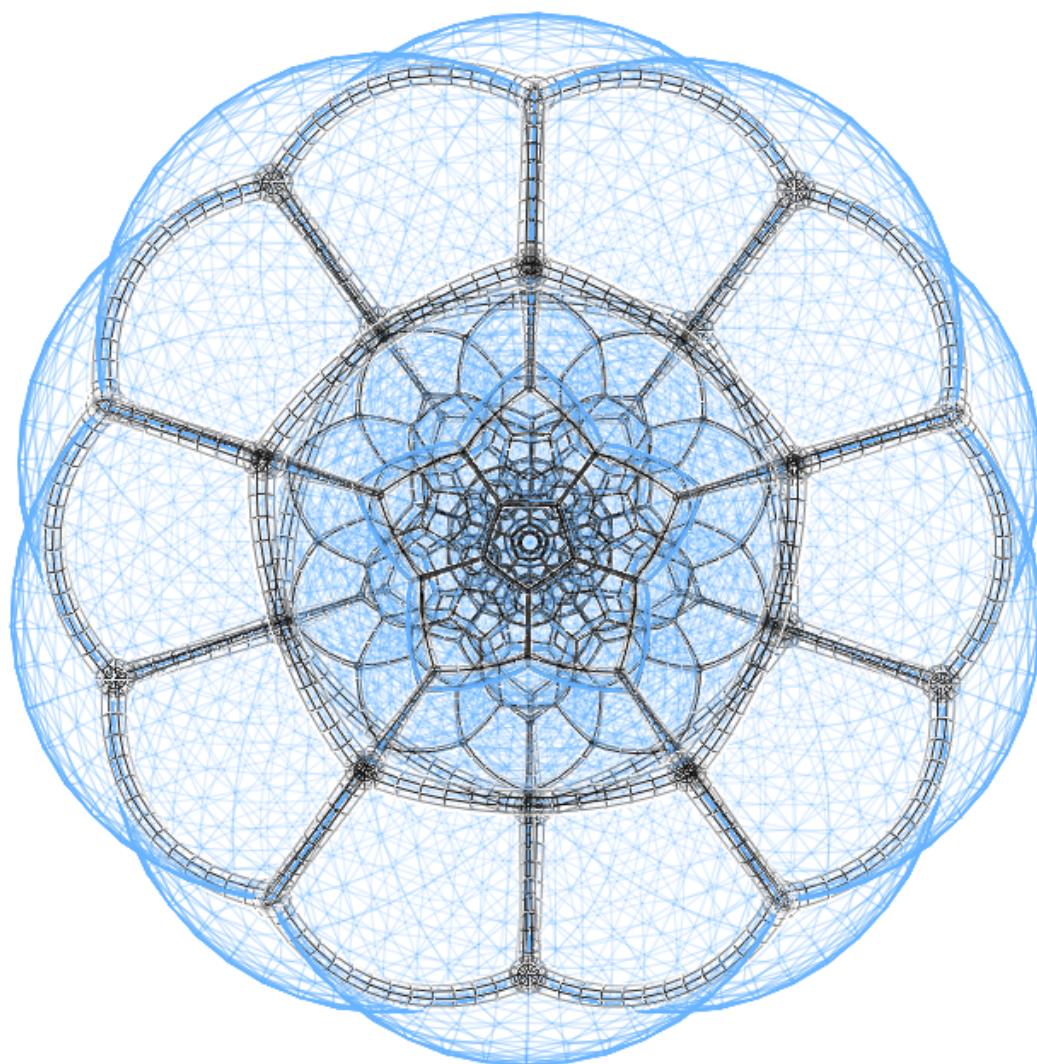


Figura 3.7: 120-celle

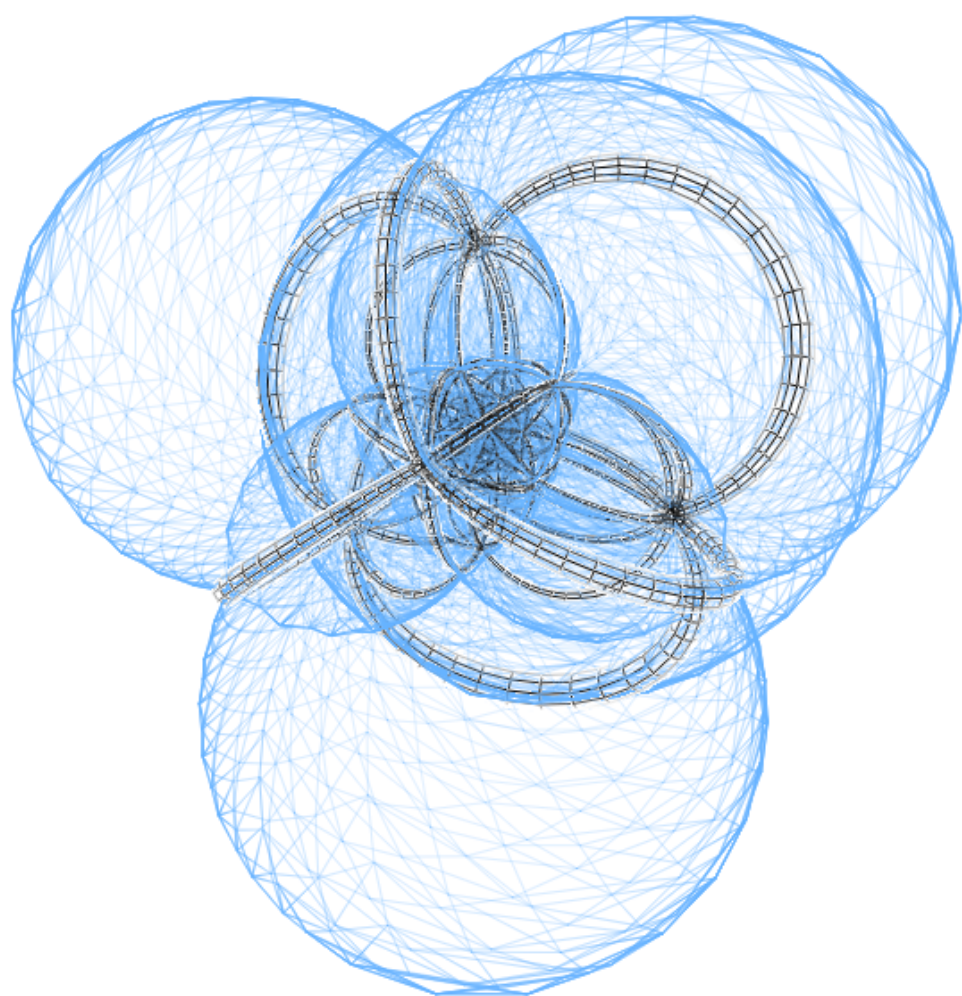


Figura 3.8: 600-*celle*

Superficie e volume di un'ipersfera

Si definisce sfera o ipersfera in $\mathbb{R}^n$ il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro dell'ipersfera.

In $\mathbb{R}^0$ l'ipersfera è un punto, in $\mathbb{R}^1$ è un segmento con estremi una coppia di punti, in $\mathbb{R}^2$ è una circonferenza, in $\mathbb{R}^3$ una sfera e così via.

L'ipersfera n -dimensionale si può pensare come la naturale estensione della sfera di raggio r 3-dimensionale, ovvero si può desumere $S_n(r)$ e $V_n(r)$, rispettivamente il bordo e il volume dell'ipersfera in $\mathbb{R}^n$, da $S_3(r)$ e $V_3(r)$, con

$$S_3(r) = 4\pi r^2 \quad e \quad V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (\text{A.0.1})$$

Si prenda in considerazione l'integrale

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^3 = \pi^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.0.2})$$

dove l'ultima uguaglianza è verificata dal noto *integrale di Poisson*.

Contestualmente, ricorrendo alle coordinate sferiche

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 dr = \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} 4\pi r^2 dr \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} S_3(r) dr. \quad (\text{A.0.3})$$

Visto che $S_3(1) = 4\pi$, risulta lecito scrivere che $S_3(r) = S_3(1)r^2$.

In n dimensioni, da (A.0.2) e (A.0.3)

$$I_n = \pi^{\frac{n}{2}} \quad e \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} S_n(1) r^{n-1} dr$$

Allora si ha

$$S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \pi^{\frac{n}{2}}$$

con sostituzione $r^2 = t$

$$\begin{aligned} S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(n-1)/2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} dt &= \\ &= \frac{1}{2} S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \pi^{n/2}. \end{aligned}$$

Ricordando che $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, si scrive

$$S_n(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

da cui si ottiene la *superficie dell'ipersfera*

$$S_n(r) = 2 \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1}.$$

Il *volume dell'ipersfera* si ottiene

$$\int_0^r S_n(r) dr = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot \int_0^r r^{n-1} dr \implies$$

$$V_n(r) = \frac{2}{n} \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^n.$$

Dall'analisi sulla funzione gamma di Eulero, si sa che

$$\Gamma(n+1) = n!$$

e che

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{n}.$$

Si può scrivere la relazione

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2} - 1\right)! & (n = 2p) \\ \frac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}} \sqrt{\pi} & (n = 2p+1) \end{cases} \quad \text{con } p \in \mathbb{N}^+$$

che consente di scrivere una formula generale per superficie $S_n(r)$ e volume $V_n(r)$ di una sfera in dimensione n , distinguendo se n sia pari o dispari:

$$S_n(r) = \begin{cases} \frac{n \pi^{n/2}}{(n/2)!} r^{n-1} & (n=2p) \\ \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!} r^{n-1} & (n=2p+1) \end{cases} \quad (\text{A.0.4})$$

$$V_n(r) = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n & (n=2p) \\ \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{n!!} r^n & (n=2p+1) \end{cases} \quad (\text{A.0.5})$$

con $p \in \mathbb{N}^+$.

È immediato osservare che, per $n = 2$, i valori di $S_2(r)$ e $V_2(r)$ individuano, rispettivamente, la lunghezza della circonferenza di raggio r e l'area del relativo cerchio.

Per $n = 3$, si ottengono le formule (A.0.1).

Se in (A.0.4) e (A.0.5) vengono assegnati a n valori successivi, si ricavano le formule per superficie e volume, di cui alcuni esempi sono presentati nella tabella che segue.

n	$S_n(r)$	$V_n(r)$
4	$2 \pi^2 r^3$	$\frac{1}{2} \pi^2 r^4$
5	$\frac{8}{3} \pi^2 r^4$	$\frac{8}{15} \pi^2 r^5$
6	$\pi^3 r^5$	$\frac{1}{6} \pi^3 r^6$
7	$\frac{16}{15} \pi^3 r^6$	$\frac{16}{105} \pi^3 r^7$
8	$\frac{1}{3} \pi^4 r^7$	$\frac{1}{24} \pi^4 r^8$
9	$\frac{32}{105} \pi^4 r^8$	$\frac{32}{945} \pi^4 r^9$

Appendice **B**

Numeri di Fibonacci

Il numero irrazionale ϕ , comunemente denominato *numero aureo*, si identifica con la radice positiva dell'equazione algebrica

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{B.0.1}$$

da cui

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

mentre la radice negativa viene indicata con $\tilde{\phi}$.

Dall'equazione si ricava anche che

$$\phi = \phi^2 - 1, \tag{B.0.2}$$

$$\phi + \tilde{\phi} = 1 \quad e \quad \phi \cdot \tilde{\phi} = -1. \tag{B.0.3}$$

Ciò premesso, si prende in esame la successione numerica $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n > 1. \tag{B.0.4}$$

La successione è nota come *successione di Fibonacci* e il suo termine generale

è direttamente correlato con i valori di ϕ e $\tilde{\phi}$.

- Vale la *formula di Binet*:

$$F_n = \frac{\phi^n - \tilde{\phi}^n}{\sqrt{5}} \quad (\text{B.0.5})$$

Senza ricorrere a una dimostrazione per induzione, si può verificare che F_n così definita è subordinata alla condizione di ricorrenza della successione di Fibonacci descritta in (B.0.4).

$$\begin{aligned} (\phi + \tilde{\phi})F_{n-1} &= \frac{(\phi + \tilde{\phi})(\phi^{n-1} - \tilde{\phi}^{n-1})}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n - \phi \cdot \tilde{\phi}^{n-1} + \tilde{\phi} \cdot \phi^{n-1} - \tilde{\phi}^n) = \\ &= \frac{\phi^n - \tilde{\phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi\tilde{\phi} \cdot (\phi^{n-2} - \tilde{\phi}^{n-2})}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Considerando la (B.0.3) si può scrivere allora

$$(\phi + \tilde{\phi})F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$$

che riconduce alla successione di Fibonacci. □

- Nonostante la successione di Fibonacci diverga evidentemente, si può dimostrare che il rapporto tra due termini consecutivi della successione tenda invece al numero aureo ϕ , ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \quad \forall n > 0 \quad (\text{B.0.6})$$

Per la (B.0.4) si ha

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \\
&= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n/F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Ovvero

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

da cui

$$L^2 - L - 1 = 0.$$

□

Allo stesso tempo, usando (B.0.3), risulta lecito scrivere anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\phi} = -\tilde{\phi} \quad \forall n > 1$$

- Si consideri ora la serie di potenze

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \tag{B.0.7}$$

con raggio di convergenza

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{F_n}{F_{n+1}} \right| = -\tilde{\phi}.$$

Dunque, la serie converge per ogni $x \in]\tilde{\phi}; -\tilde{\phi}[$. Moltiplicando $F(x)$ per $1 - x - x^2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 (1 - x - x^2)F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} = \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n = \\
 &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n = \\
 &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n = x
 \end{aligned}$$

quindi $(1 - x - x^2)F(x) = x$, da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}. \quad (\text{B.0.8})$$

La struttura analitica che, nell'intervallo di convergenza, individua il valore di $F(x)$ viene denominata *funzione generatrice* della sequenza di Fibonacci.

Richiami di geometria sferica

In questa appendice vengono raccolte alcune nozioni di base di geometria sferica utili per comprendere le immagini sferiche dei poliedri e dei politopi discusse nel Capitolo 3.

C.1 Cerchi massimi e geodetiche

Definizione C.0.1 (Cerchio massimo). Un cerchio massimo su una sfera $S_2(O, R)$ è l'intersezione della sfera con un piano che passa per il centro O .

I cerchi massimi rappresentano le geodetiche della sfera, ossia i cammini di lunghezza minima tra due punti non antipodali.

Definizione C.0.2 (Arco di cerchio massimo). Un arco di cerchio massimo è la porzione di cerchio massimo compresa tra due punti distinti della sfera.

Per ogni coppia di punti non antipodali esiste un unico arco di cerchio massimo che li unisce.

Teorema C.0.3. *La distanza sferica tra due punti $P, Q \in S_2(O, R)$ è la lunghezza dell'arco di cerchio massimo che li congiunge.*

Dim.: Siano

$$u = \frac{P - O}{R}, \quad v = \frac{Q - O}{R} \quad (\text{C.0.1})$$

i vettori unitari corrispondenti. L'angolo al centro θ soddisfa

$$\cos \theta = \langle u, v \rangle. \quad (\text{C.0.2})$$

La lunghezza dell'arco è quindi

$$d(P, Q) = R\theta = R \arccos(\langle u, v \rangle). \quad (\text{C.0.3})$$

□

C.2 Poligoni sferici

Definizione C.0.4 (Poligono sferico). Un poligono sferico è la regione di una sfera delimitata da un numero finito di archi di cerchi massimi.

Definizione C.0.5 (Angolo sferico). In un vertice V di un poligono sferico, siano u, v i vettori radiali corrispondenti ai lati incidenti.

L'angolo sferico in V è definito da

$$\angle_S(u, v) = \arccos \left(\frac{\langle u, v \rangle}{R^2} \right). \quad (\text{C.0.4})$$

Teorema C.0.6 (Somma degli angoli interni). *La somma degli angoli interni di un poligono sferico con n lati è maggiore di*

$$(n - 2)\pi. \quad (\text{C.0.5})$$

Dim.: Ogni poligono sferico può essere suddiviso in triangoli sferici. Applicando il teorema di Girard a ciascuno di essi e sommando le aree, si ricava che la somma degli angoli interni eccede $(n - 2)\pi$ di un valore proporzionale all'area del poligono.

□

Teorema C.0.7 (Formula di Girard). *L'area di un triangolo sferico con angoli interni α, β, γ su una sfera di raggio R è*

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (\text{C.0.6})$$

Dim.: Si consideri un triangolo sferico T su S_2 . L'angolo solido sotteso da T al centro O è proporzionale alla sua area rispetto all'area totale della sfera $4\pi R^2$. La misura dell'angolo solido coincide con

$$\Omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \quad (\text{C.0.7})$$

ottenendo così la formula

$$A = R^2\Omega = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (\text{C.0.8})$$

□

Bibliografia

- [Br2] A. Brøndsted. *An Introduction to Convex Polytopes*. Vol. 90 Springer Science & Business Media, 2012.
- [Ces87] E. Cesàro. *Forme poliedriche*. Hoepli, Milano, 1887.
- [Cox48] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Methuen Co. LTD, London, 1948.
- [Ded99] M. Dedò. *Forme simmetria e topologia*. Decibel editrice, Padova, 1999.
- [Gos00] T. Gosset. *On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions*. Messenger of Mathematics 29 43 - 48, Londra, 1900.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Jen04] Jenn3d – visualization of regular polytopes. Software open source, 2004. <http://www.jenn3d.org>.
- [Laz] Paolo Lazzarini. Geometria sulla sfera. https://www.paololazzarini.it/geometria_sulla_sfera/geo.htm.
- [Lel17] C. De Lellis. *Il teorema di Schläfli: un invito alla quarta dimensione*. Matematica, Cultura e Società, rivista dell’Unione Matematica Italiana (2: 111-156), 2017.
- [nLa24] nLab — The n-Category Lab. Stereographic projection, February 15 2024.

- [Pak10] Igor Pak. Lectures on discrete and polyhedral geometry. Lecture notes, UCLA, 2010.
- [Sch01] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Vol. 38. Zürcher & Furrer, Zurigo, 1901.
- [Som29] Duncan M.Y. Sommerville. *An Introduction to the Geometry of N Dimensions*. Methuen, 1929.
- [WZLW19] Xiaoping Wang, Lei Zhang, Tian Liang, and Chao Wang. Stereographic visualization of 5-dimensional regular polytopes. *Symmetry*, 11(3):333, 2019.
- [LA08] Étienne Ghys, Jos Leys, and Aurélien Alvarez. Dimensions – un film de mathématiques. Film e sito web, 2008. <http://www.dimensions-math.org>.