

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea (Triennale) in Matematica

INTRODUZIONE
ALLE
GEOMETRIE DI KLEIN

Tesi di Laurea in Geometria Differenziale

Relatore:
EMANUELE LATINI

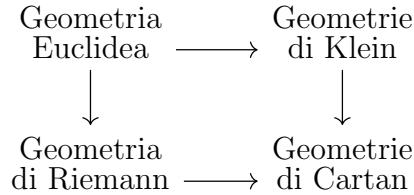
Presentata da:
ALESSANDRO
ABBASCIANO

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

Nel corso del diciannovesimo secolo un nuovo tipo di geometrie è iniziato a emergere: le *geometrie non-euclidee*. Esse sono molto simili alla geometria euclidea in quanto soddisfano tutti gli assiomi di Euclide, eccetto il quinto, ovvero il postulato delle rette parallele. Dunque se ci troviamo in una geometria non-euclidea, due rette parallele distinte possono "toccarsi". Un esempio è dato dalla geometria proiettiva, nella quale due rette parallele si toccano sempre in un punto detto all'infinito. Il nostro occhio ad esempio segue proprio questo modello, infatti se ci troviamo in mezzo a delle rotaie, guardando in lontanza i binari, che sono paralleli, essi convergeranno in un punto.

La geometria affine, proiettiva e iperbolica ne sono solo alcuni esempi. Ciascuna di esse può essere considerata come una teoria a sé, dotata dei propri teoremi. È stata un'idea di Felix Klein quella di ordinare queste nuove teorie sfruttando la nozione di *gruppo principale* di una geometria. Klein si è accorto che ogni geometria può essere vista come una varietà connessa M dotata di un gruppo di Lie G di trasformazioni che agisce transitivamente su di essa, inoltre a seconda del gruppo che agisce, tutte o alcune delle strutture matematiche studiate nell'ambito della specifica geometria rimangono invariate sotto tali trasformazioni. Nel caso della geometria Euclidea, le proprietà studiate e preservate sono angoli e lunghezze, e il gruppo è quello delle isometrie; per la geometria proiettiva, le proprietà sono la concorrenza di rette e la collinearità dei punti, e così via.



Ogni freccia del diagramma precedente implica una generalizzazione del concetto di "*geometria*". Proprio come la Geometria di Riemann può essere considerata, localmente, come lo spazio euclideo, reso però "irregolare" dall'introduzione della curvatura di Riemann. Allo stesso modo una geometria di Cartan può essere considerata, localmente, come una geometria di Klein, resa "irregolare" dall'introduzione della nozione di curvatura principale, la quale generalizza in un certo senso quella di Riemann. Una geometria di Cartan consiste nella studio di una connessione su un fibrato principale, ovvero una generalizzazione della forma di Maurer-Cartan di un gruppo di Lie. Possiamo pensare ad essa come un analogo non-euclideo della geometria di Riemann, e dunque lo studio delle geometrie di Klein ne è alle fondamenta.

Indice

Introduzione	i
1 Geometria differenziale	1
1.1 Varietà Differenziabili	1
1.2 Vettori e Spazio Tangente	4
1.3 Differenziale e Sottovarietà	6
1.4 Forme Differenziali	8
1.5 Gruppi di Lie	11
2 Fibrati	14
2.1 G-Fibrati	15
2.2 Fibrati Principali	17
2.3 Fibrati Vettoriali e Sezioni	19
2.4 Fibrato Tangente	20
3 Campi Vettoriali e Algebre di Lie	23
3.1 Campi Vettoriali	23
3.2 Algebre di Lie	28
3.3 Algebra di Lie di un Gruppo di Lie	29
3.4 Parallelizzabilità	32
3.5 Forma di Maurer-Cartan	34
4 Geometrie di Klein	36
4.1 Esempi di Geometrie di Klein	37

4.2 Caratterizzazione di Fibrati Principali	41
4.3 Geometrie di Klein	44
4.4 Geometrie di Klein Locali	48
4.5 Fibrato Tangente di una Geometria di Klein	50
Bibliografia	52

Capitolo 1

Geometria differenziale

In questo primo capitolo vedremo alcuni concetti che saranno utili per capire e studiare l'oggetto principale della trattazione, ovvero le geometrie di Klein

1.1 Varietà Differenziabili

Definizione 1. Sia M uno spazio topologico. Diciamo che M è una **varietà topologica** di dimensione n se M è T2, a base numerabile e localmente euclideo, cioè $\forall p \in M, \exists U \subseteq M$ aperto t.c $p \in U$ ed $\exists \varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ omeomorfismo.

Osservazione 1. Dato che M è localmente omeomorfa a un aperto di \mathbb{R}^n , allora è localmente connessa per archi, e dunque si ha che M è connessa se e solo se è connessa per archi.

Definizione 2. Una tale coppia (U, φ) si chiama **carta** in p e φ^{-1} si chiama **parametrizzazione locale** di M .

Se $\varphi(p) = 0$ diciamo che la carta è **centrata in p** .

Definizione 3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Diciamo che f è **differenziabile in x_0** se $\exists T(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T(x_0)h}{\|h\|} = 0$$

Se f è differenziabile per ogni $x_0 \in U$ allora diremo che f è **differenziabile (o liscia)**.

Definizione 4. Sia M una varietà topologica di dimensione n .

Chiamiamo **atlante (liscio)** su M una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ di carte tale che

1. $\bigcup_i U_i = M$
2. $\forall (U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ la mappa

$$\Phi = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

è liscia (i.e. C^∞).

Definizione 5. Data una varietà topologica M , due atlanti \mathcal{A} e \mathcal{A}' sono **equivalenti** se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante per M .

Una **struttura differenziabile (o liscia)** su M è una classe di equivalenza di atlanti.

Chiamiamo **atlante massimale** l'unione di tutti gli atlanti ad esso equivalenti.

Definizione 6. Una **varietà differenziabile (o liscia)** è una varietà topologica dotata di una struttura differenziabile.

Esempio 1. \mathbb{R}^n è una varietà topologica di dimensione n e ha un atlante liscio dato dalla sola carta $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$, dunque è una varietà differenziabile.

Esempio 2 (Spazi vettoriali). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Ciascuna base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V induce un isomorfismo lineare tra basi $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $\Phi(x^1, \dots, x^n) = x^i v_i$, la cui inversa è una carta *globale* per V . Dunque V è una varietà differenziabile con atlante $\{(\mathbb{R}^n, \Phi^{-1})\}$ e tale struttura prende il nome di **struttura liscia standard**.

Esempio 3. Consideriamo la varietà topologica $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Sia $U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_{n+1} > -1\} \subseteq S^n$. Allora U e $\rho(U)$ sono aperti di

S^n , dove $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ è una riflessione rispetto all'iperpiano di equazione $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$. Ora $U \cup \rho(U) = M$, inoltre U (e anche $\rho(U)$) è omeomorfo a \mathbb{R}^n tramite la proiezione stereografica

$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$, dunque S^n è una varietà differenziabile.

Definizione 7. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n .

Diciamo che $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ è **differenziabile in p** se per ogni (U, φ) carta attorno p , si ha che $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile.

Definizione 8. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m e n .

Diciamo che $F : M \rightarrow N$ è **differenziabile in p** se per ogni coppia di carte (U, φ) attorno p e (V, ψ) attorno $F(p)$ rispettivamente di M e N tali che $F(U) \subseteq V$ si ha che $\Phi = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

La mappa Φ si chiama **rappresentazione in coordinate di f**

Definizione 9. Siano M, N varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$.

Se F è liscia, bijettiva e con inversa liscia si dice **diffeomorfismo**.

Denotiamo con $C^\infty(M, N)$ l'insieme di tutte le mappe differenziabili da M a N e con $C^\infty(M)$ l'insieme delle mappe differenziabili da M in \mathbb{R} .

1.2 Vettori e Spazio Tangente

Definizione 10. Sia M una varietà differenziabile e sia $p \in M$.

Un **vettore tangente in p** (o derivazione in p) è una mappa $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- (i) (*Linearità*) $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (ii) (*Leibniz*) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$

Denotiamo inoltre $T_p M = \{v \mid v \text{ è un vettore tangente in } p\}$, esso prende il nome di **spazio tangente in p** .

Definizione 11. Sia M una varietà differenziabile e (U, φ) una sua carta. Denotando le funzioni delle coordinate di φ come $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, definiamo i **vettori delle coordinate** $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, n$ come

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

Osservazione 2. Per alleggerire la notazione, quando sarà chiaro a quali coordinate si sta facendo riferimento, abbrevieremo $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ con $\partial_i|_p$.

Osservazione 3. Nel corso della trattazione, talvolta, sfrutteremo la notazione di Einstein per sommatorie, omettendo il simbolo \sum per brevità.

Proposizione 1. \mathbb{R}^n e $T_p \mathbb{R}^n$ sono isomorfi come spazi vettoriali

Dimostrazione. Consideriamo \mathbb{R}_p^n , ovvero lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n traslato in modo tale che l'origine sia in p (banalmente \mathbb{R}^n è isomorfo a \mathbb{R}_p^n). Esso ha come base $\{e_{1p}, \dots, e_{np}\}$, indichiamo i suoi elementi con v_p (in particolare si ha $v_p = \sum_{i=1}^n v^i e_{ip}$). Indichiamo inoltre con \tilde{v}_p l'operatore derivata direzionale in direzione v_p , ovvero $\tilde{v}_p := \frac{\partial}{\partial v_p} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (è stata utilizzata la notazione di Einstein).

Consideriamo ora la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_p^n &\longrightarrow T_p \mathbb{R}^n \\ v_p &\longmapsto \tilde{v}_p \end{aligned}$$

Data $f = x^j$, dove x^j è la j -esima coordinata di \mathbb{R}^n , si ha

$$\tilde{v}_p(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = v^j$$

Supponiamo di avere $\tilde{v}_p = 0$, allora $v^j = 0 \forall j = 1, \dots, n$, dove v^j sono le componenti del vettore v_p , quindi $v = 0$. Abbiamo dunque mostrato che $Ker(\varphi) = \{0\}$.

Mostriamo ora che φ è suriettiva. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Utilizzando lo sviluppo di Taylor in $p = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ otteniamo

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - x_0^i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - x_0^i)$$

con $g_i(x)$ funzioni lisce tali che $g_i(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow p$. Sfruttando ora la *regola di Leibniz*, fissato un generico $X_p \in T_p \mathbb{R}^n$, otteniamo

$$X_p(f) = X_p(f)(p) + X_p\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x-x_0^i)\right) + X_p(g_i(x)(x^i-x_0^i)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)X_p((x^i-x_0^i))$$

Notiamo che $X_p(f(p)) = 0$ in quanto preso $f = 1$, per Leibniz si ha $X_p(f(p)) = X_p(f(p)^2) = X_p(f(p))^2 = 2X_p(f(p))$. Inoltre dato che $g_i(p) = (x^i - x_0^i) = 0$ si ha $X_p\left(\sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - x_0^i)\right) = 0$

Definendo ora $v^i := X_p(x^i)$, otteniamo che ogni X_p è immagine tramite φ di un vettore della forma $v = \sum_{i=1}^n v^i e_{ip}$. □

Definizione 12. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Chiamiamo **campo vettoriale** una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile.

Corollario 1. $\{\partial_i|_p\}$ formano una base per $T_p M$

Dimostrazione. Consideriamo X campo vettoriale su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. X è una mappa che associa a ogni $p \in U$ un vettore di \mathbb{R}^n . Dato che $\mathbb{R}^n \simeq T_p \mathbb{R}^n$ abbiamo che $X(p) = X_p \forall p \in U$.

Inoltre dato X campo vettoriale, si ha che $X(x) = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ dove a^i sono funzioni lisce. Concludiamo osservando che

$$X_p(f) = X(p)(f) = a^i(p) \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

□

Dato che i *"vettori delle coordinate"* formano una base per $T_p M$, una volta fissato un sistema di coordinate lisce, ovvero una carta di M , ogni vettore tangente $v \in T_p M$ può essere scritto nella forma

$$v = v^i \partial_i|_p$$

dove le componenti v^1, \dots, v^n sono ottenute applicando v alle funzioni delle coordinate, ovvero $v^i = v(x^i)$.

Su uno spazio vettoriale di dimensione finita V con la sua struttura standard di varietà differenziabile, esiste una naturale identificazione di ogni spazio tangente $T_p V$ con V stesso, ottenuta identificando un vettore $v \in V$ con la derivazione $D_v|_p$ definita da

$$D_v|_p(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_p f(p + tv)$$

1.3 Differenziale e Sottovarietà

Definizione 13. Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa liscia, $p \in M$.

Chiamiamo **differenziale di F in p** (o **pushforward**) la mappa lineare

$$\begin{aligned} F_{*p} : T_p M &\rightarrow T_{F(p)} N \\ v &\mapsto F_{*p}(v)(f) = v(f \circ F) \end{aligned}$$

dove $v \in T_p M$ e $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappa liscia.

Una volta scelte delle coordinate locali (x^i) per M e (y^j) per N , troviamo che la rappresentazione in coordinate del differenziale di $F : M \rightarrow N$ è data dalla *matrice jacobiana* della rappresentazione in coordinate di F .

Proposizione 2. *Sia $F : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo tra varietà differenziali di dimensione rispettivamente m e n .*

*Allora $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Dimostrazione. Sia $X_p \in T_p M$ tale che $F_{*p}(X_p) = 0$. Allora $0 = F_{*p}(X_p) = X_p(f \circ F)$ per ogni $f \in C^\infty(M)$. Sfruttando la base $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_m|_p\}$ di

$T_p M$, si ha $0 = X_p(f \circ F) = a_1 \partial_1|_p(f \circ F) + \cdots + a_m \partial_m|_p(f \circ F)$ con $a_i \in \mathbb{R}$. Abbiamo così ottenuto una combinazione lineare di elementi della base, dunque necessariamente $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Quindi X_p è la derivazione nulla. Abbiamo così mostrato che F_{*p} è iniettiva, e in particolare $m \leq n$. Ripetendo gli stessi ragionamenti per F^{-1}_{*p} , si ha $n \leq m$. \square

Definizione 14. Siano M, N varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ differenziabile.

- Diciamo che F è un'immersione se il differenziale $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è iniettivo per ogni $p \in M$.
- Se $\dim(M) \geq \dim(N)$ diciamo che F è una sommersione se il differenziale $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è suriettivo per ogni $p \in M$.
- Diciamo che F è un diffeomorfismo locale se è sia un'immersione, sia una sommersione
- Diciamo che F è un embedding liscio se è un'immersione iniettiva che è anche un embedding topologico (ovvero un omeomorfismo sull'immagine, dotato della topologia di sottospazio).

Definizione 15. Sia M una varietà differenziabile, $S \subseteq M$.

Diciamo che S è una sottovarietà differenziabile se S è una varietà differenziabile e l'inclusione $i : S \hookrightarrow M$ è un embedding.

1.4 Forme Differenziali

Definizione 16. Sia V spazio vettoriale di dimensione finita, $k \in \mathbb{N}$.

Diciamo che $\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$ è una **forma k -lineare** (o multilineare) su V in \mathbb{R} se $\alpha(v_1, \dots, v_n)$ è lineare in ogni componente, ovvero se vale

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda\alpha(v_1, \dots, v_n) + \mu\alpha(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n),$$

per ogni componente i , per ogni n -pla di vettori $v_1, \dots, v_n, v_i, v'_i \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Definizione 17. Sia α una forma k -lineare.

Diciamo che α è **alternante** se dati v_1, \dots, v_k linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Indichiamo con $A^k(V)$ lo spazio vettoriale delle forme k -lineari alternanti.

Osservazione 4. Dato che $\text{char}(\mathbb{R}) \neq 2$, una forma multilineare è alternante se e solo se è antisimmetrica, cioè se lo scambio di due vettori ha come effetto un cambiamento di segno

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Osservazione 5. $A^1(V) = V^*$ dove V^* denota il duale di V , ovvero lo spazio dei funzionali lineari $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Poniamo $A^0(V) := \mathbb{R}$.

Definizione 18. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\alpha \in A^k(V), \beta \in A^s(V)$.

Chiamiamo **prodotto wedge** la funzione

$$\begin{aligned} \wedge : A^k(V) \times A^s(V) &\rightarrow A^{k+s}(V) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

definita dalla forma $(k+s)$ -lineare

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+s}) = \frac{1}{k!s!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+s)})$$

Esempio 4. $\alpha, \beta \in A^1(V) = V^*$, allora $(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u)$.

Definizione 19. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita, $f : W \rightarrow V$ un'applicazione lineare, $\alpha \in A^k(V)$.

Chiamiamo **pullback di α** la k -forma alternante su W definita da

$$(f^*\alpha)(\omega_1, \dots, \omega_k) = \alpha(f(\omega_1), \dots, f(\omega_k))$$

Proposizione 3. Siano $\alpha \in A^k(V), \beta \in A^s(V)$. Valgono le seguenti

- (i) (anticommutatività) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k+s} \beta \wedge \alpha$
- (ii) (bilinearità) $(\alpha + \lambda\gamma) \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta) + \lambda(\gamma \wedge \beta)$.
- (iii) (associatività) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- (iv) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$

Prendiamo ora in considerazione il caso in cui $V = T_p M$ dove M è una varietà differenziabile.

Definizione 20. Sia M una varietà differenziabile.

$$\begin{aligned} \omega: M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} A^k(T_p M) \\ p &\rightarrow \omega(p) \in A^k(T_p M) \end{aligned}$$

ω si chiama **k -forma su M** .

Definiamo il prodotto di due forme su M puntualmente, ovvero $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$.

Data $F : N \rightarrow M$ una mappa liscia tra varietà differenziabili, ω una k -forma su M , definiamo il **pullback di ω** puntualmente, ovvero $(F^*\omega)(p) = (F_{*p})^*\omega(p)$.

Osservazione 6. F_{*p} è il differenziale di F in p ed è lineare.

Proposizione 4. $\{(dx_p^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{\mu_k})\}_{\mu_1 < \dots < \mu_k}$ è una base di $A^k(T_p M)$.

Osservazione 7. Se $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ è la base di $T_p M$, allora (dx_p^1, \dots, dx_p^n) è una base dello spazio duale $T_p^* M = A^1(T_p M)$ ed è definita come $dx_p^j(\partial_k) = \delta_k^j$ dove δ_k^j è la *delta di Kronecker*.

Dunque per ogni $p \in M$ possiamo scegliere una carta e descrivere localmente la k -forma, sfruttando la base locale di $A^k(T_p M)$.

Più esplicitamente, si ha $\omega(p) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k}(p) \cdot (dx_p^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{\mu_k})$ dove $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sono i coefficienti della combinazione lineare e si chiamano **funzioni componenti di ω** rispetto a U .

Definizione 21. Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$, ω una k -forma su M . Diciamo che ω è **differenziabile** se tutte le funzioni componenti sono differenziabili in p .

Se ω è differenziabile per ogni $p \in M$ allora si chiama **forma differenziale** su M .

Chiamiamo $\Omega^k(M)$ lo spazio delle forme k -differenziali su M .

Esempio 5. $M = \mathbb{R}^2$, allora $T_p M \simeq \mathbb{R}^2$ e dunque possiamo identificare $\partial_j = e_j$.

$dx_p^j(\partial_k) = \delta_k^j$ dunque si ha

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dx_1^p = (1, 0), \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad dx_2^p = (0, 1)$$

Calcoliamo ora il prodotto wedge di dx_p^1 con dx_p^2

$$\begin{aligned} (dx_p^1 \wedge dx_p^2)(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}) &= \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) dx_p^1(a_{\sigma(1)}) dx_p^2(a_{\sigma(2)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) a_{(1, \sigma(1))} a_{(2, \sigma(2))} \\ &= \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

1.5 Gruppi di Lie

Definizione 22. Chiamiamo **gruppo di Lie** un gruppo algebrico G che sia anche una varietà differenziabile e tale che le operazioni

$$\begin{aligned} m: G \times G &\longrightarrow G & i: G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y & x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

siano entrambe differenziabili.

Definizione 23. Sia un gruppo di Lie G . Sia H un sottogruppo di G .

Diciamo che H è un sottogruppo **chiuso (aperto)** di G se è chiuso (aperto) rispetto alla topologia indotta da G .

Diciamo che H è un **sottogruppo di Lie** di G se è un gruppo di Lie ed è una sottovarietà di G .

Proposizione 5. *Sia G un gruppo di Lie. Se H è un sottogruppo chiuso di G , allora esiste un'unica struttura differenziabile tale che H sia un sottogruppo di Lie di G .*

Esempio 6. Abbiamo già visto che \mathbb{R}^n è una varietà differenziabile con atlante banale ed è un gruppo con la consueta somma di vettori. Dunque è un gruppo di Lie.

Esempio 7. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ è un gruppo di Lie (abeliano) con il prodotto di \mathbb{C} .

Esempio 8. Sia $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ il gruppo lineare generale reale. La funzione

$$\begin{aligned} \det: M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

è continua, dunque $\det^{-1}(0)$ è chiuso in $M_n(\mathbb{R})$. Abbiamo quindi che $GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(0)$ è aperto in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ che è una varietà differenziabile di dimensione n^2 , pertanto $GL_n(\mathbb{R})$ ne eredita la struttura di varietà differenziabile.

Esempio 9. Il toro $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ è un gruppo di Lie abeliano con prodotto il prodotto di \mathbb{C} su ciascuna componente, ovvero $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$.

Definizione 24. Un **omomorfismo di gruppi di Lie** $\varphi : H \rightarrow G$ con H e G gruppi di Lie è un omomorfismo di gruppi che è anche differenziabile.

Un **isomorfismo di gruppi di Lie** è un omomorfismo di gruppi di Lie biettivo.

Il gruppo degli automorfismi $Aut(G)$ è il gruppo formato dagli isomorfismi di gruppi di Lie.

Definizione 25. Sia G un gruppo di Lie, M una varietà differenziabile e $\sigma : G \times M \rightarrow M$ un'azione di G su M .

Diciamo che σ è un'**azione di gruppo di Lie** (sinistra) su M se σ è differenziabile.

Osservazione 8. Analogamente definiamo un'azione *destra* di G su M , $\sigma : M \times G \rightarrow M$. Le definizioni date di seguito si estendono dunque al caso di azioni destre, con le quali lavoreremo successivamente.

Definizione 26. Sia M una varietà differenziabile, G un gruppo di Lie e $G \times M \rightarrow M$ un'azione liscia.

L'azione è **libera** se

$$gx = x \text{ per qualche } x \in M \implies g = e.$$

L'azione è **propria** se

$$\forall A, B \subseteq M \text{ compatti si ha che } \{g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset\} \text{ è compatto in } G.$$

L'azione è **fedele** se

$$\forall g \in G, g \neq e, \exists x \in M \text{ tale che } gx \neq x$$

L'azione è **transitiva** se

$$\forall x, y \in M, \exists g \in G \text{ tale che } gx = y$$

L'azione è **semplicemente transitiva** se

$$\forall x, y \in M, \exists! g \in G \text{ tale che } gx = y$$

Osservazione 9. Nel caso di spazi metrici, uno spazio topologico X è compatto se e solo se è compatto per successioni, ovvero se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X esiste una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente in X .

D'ora in poi sfrutteremo questo fatto in quanto un gruppo di Lie, essendo una varietà finito dimensionale, è in particolare metrizzabile.

Capitolo 2

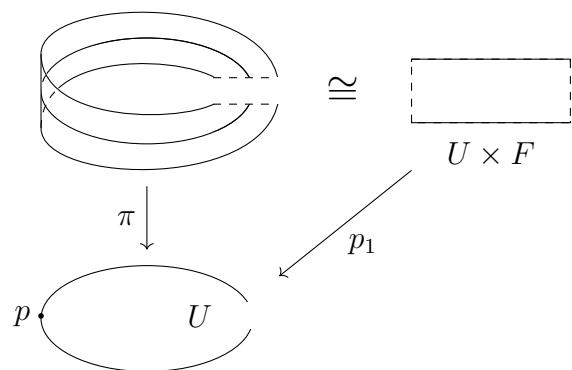
Fibrati

Definizione 27. Siano F una varietà differenziabile e $\pi : E \rightarrow B$ una mappa liscia tra varietà differenziabili. Chiamiamo la quadrupla $\xi = (E, B, \pi, F)$ un **fibrato differenziabile**, se $\forall p \in B$, $\exists U \subseteq B$ aperto, $\exists \varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ diffeomorfismo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \downarrow & & \swarrow \text{proj}_1 \\ U & & \end{array}$$

La coppia (U, φ) si chiama **trivializzazione (o carta)**, B si chiama **spazio base**, E si chiama **spazio totale** e F si chiama **fibra**.

Esempio 10. Il nastro di Möbius è un fibrato con spazio base S^1 e fibra $[0, 1]$.



2.1 G-Fibrati

Definizione 28. Sia $\xi = (E, B, \pi, F)$ un fibrato liscio e sia G un gruppo di Lie che agisce su F per diffeomorfismi.

Chiamiamo **G -atlante** per ξ una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tale che:

1. $\bigcup_i U_i = B$
2. $\forall (U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ la mappa

$$\Phi = \varphi \circ \psi^{-1} : (U \cap V) \times F \rightarrow (U \cap V) \times F$$

è della forma $\Phi(u, f) = (u, h(u)f)$ dove $h : U \cap V \rightarrow G$ è una mappa liscia. Φ si chiama **cambio di coordinate** e h **funzione di transizione**.

Definizione 29. Una **G -Struttura di atlanti** sul fibrato liscio ξ è una classe di equivalenza di G -Atlanti su ξ (rispetto all'unione). Un **G -Fibrato** è un fibrato liscio ξ dotato di una G -Struttura di atlanti.

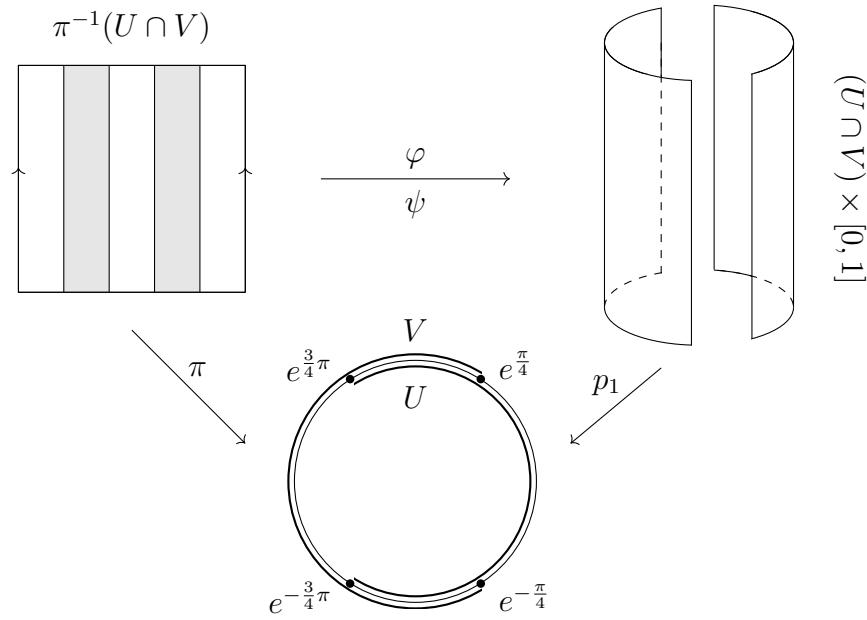
Osservazione 10. Se supponiamo che G agisca fedelmente su F non perdiamo di generalità, infatti se l'omomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(F)$ ha $\text{Ker}(\varphi) = H$ possiamo sempre considerare il G -Fibrato come fosse un G/H -Fibrato. In tal caso parleremo di G -Fibrato *fedele*.

Esempio 11 (Nastro di Möbius). Il nastro di Möbius N è un G -fibrato con $G = \mathbb{Z}/2$.

Costruiamo un $\mathbb{Z}/2$ -atlante per il nastro di Möbius $N = [0, 1]^2 / \sim$ dove $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \text{ e } y_1 + y_2 = 1)$ oppure $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Definiamo $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ dove $U = \{z \in S^1 \mid \text{Arg}(z) \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]\}$ e $V = \{z \in S^1 \mid \text{Arg}(z) \in [\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]\}$, e gli omeomorfismi sono dati da

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times [0, 1] & \psi : \pi^{-1}(V) &\rightarrow V \times [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} (e^{2\pi i x}, y), & \text{se } x \leq \frac{3}{8} \\ (e^{2\pi i x}, -y), & \text{se } x \geq \frac{5}{8} \end{cases} & (x, y) &\mapsto (e^{2\pi i x}, y) \end{aligned}$$



Osservando la scrittura esplicita delle carte si può notare che la funzione di transizione è della forma $\Phi(z, t) = (z, h(z)t)$ dove

$$h : U \cap V \rightarrow \mathbb{Z}/2, \quad h(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{Arg}(z) \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ -1 & \text{se } \operatorname{Arg}(z) \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \end{cases}$$

Inoltre il nastro di Möbius è un *G-fibrato "piatto"*, ovvero un fibrato per cui le funzioni di transizione $h : U \cap V \rightarrow G$ sono localmente costanti

2.2 Fibrati Principali

Un particolare tipo di G -fibrati è quello in cui il gruppo G "coincide" con la fibra F , nel senso che per qualche (e dunque per ogni) $f_0 \in F$, la mappa $G \rightarrow F$, $g \mapsto gf_0$ è un diffeomorfismo. Ne segue dunque che il G -fibrato è fedele e che quindi le mappe di transizione $h : U \cap V \rightarrow G$ sono determinate dal fibrato.

Definizione 30. Un **G -fibrato principale** è un fibrato liscio $\xi = (P, B, \pi, F)$ con un'azione destra $P \times G \rightarrow P$ che preserva la fibra e agisce in modo semplicemente transitivo su ogni fibra, cioè $\forall x, y \in F, \exists! g \in G$ tale che $xg = y$.

Osservazione 11. Un'azione è semplicemente transitiva se e solo se è libera e fedele.

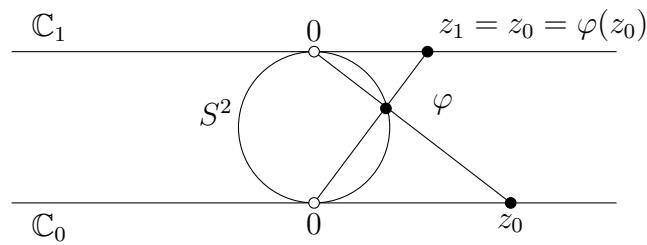
Osservazione 12. Un G -fibrato principale è in particolare un G -fibrato. Non è vero il viceversa.

Esempio 12 (Fibrazione di Hopf). Vediamo ora un interessante esempio di G -Fibrato principale: la *fibrazione di Hopf* $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.

Consideriamo il gruppo di Lie S^1 e la sua azione (liscia) su

$S^3 = \{(\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |\omega_0|^2 + |\omega_1|^2 = 1\}$ data da $\lambda(\omega_0, \omega_1) = (\lambda\omega_0, \lambda\omega_1)$ con $\lambda \in S^1$.

Consideriamo inoltre $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, dove $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}_0 \cup_{\varphi} \mathbb{C}_1$, $\varphi : \mathbb{C}_0^* \rightarrow \mathbb{C}_1^*$, $\varphi(z_0) = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(z_0) = z_0^{-1}$ e dove φ_0 e φ_1 sono le carte affini di \mathbb{CP}^1 . In altre parole, stiamo vedendo \mathbb{CP}^1 come unione delle due proiezioni stereografiche centrate nel polo nord e nel polo sud, "incollate" nell'intersezione dei loro domini (cioè \mathbb{C}^*) tramite φ .



Consideriamo la mappa $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ è data da

$$\pi(\omega_0, \omega_1) = \begin{cases} \omega_1/\omega_0 & \text{se } \omega_0 \neq 0 \\ \omega_0/\omega_1 & \text{se } \omega_1 \neq 0 \end{cases}$$

Notiamo che se $(\omega_0, \omega_1) \neq (0, 0)$ allora le due definizioni coincidono, infatti da $\mathbb{C}_0 \cup_{\varphi} \mathbb{C}_1$ abbiamo $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \varphi(\frac{\omega_0}{\omega_1}) = \frac{\omega_1}{\omega_0}$. Le trivializzazioni locali sono

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\mathbb{C}_0) &\cong \mathbb{C}_0 \times S^1 & \pi^{-1}(\mathbb{C}_1) &\cong \mathbb{C}_1 \times S^1 \\ (\omega_0, \omega_1) &\mapsto (\omega_1/\omega_0, \omega_0/|\omega_0|) & (\omega_0, \omega_1) &\mapsto (\omega_0/\omega_1, \omega_1/|\omega_1|) \end{aligned}$$

mentre il cambio di coordinate tra queste due carte è

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{C}_0^* \times S^1 &\rightarrow \mathbb{C}_1^* \times S^1 \\ (z, \lambda) &\mapsto (1/z, \lambda z/|z|) \end{aligned}$$

Osserviamo che Φ è della forma $(z, \lambda) \rightarrow (1/z, h(z)\lambda)$, ma dato che siamo in \mathbb{C}_1^* , abbiamo che $1/z = \varphi(1/z) = z$ e dunque la *fibrazione di Hopf* è un S^1 -fibrato su S^2 . Inoltre è un fibrato principale perché la fibra $F = S^1 = G$.

2.3 Fibrati Vettoriali e Sezioni

Definizione 31. Un **fibrato vettoriale** è un caso particolare di G -Fibrato in cui la fibra V è uno spazio vettoriale di dimensione n e il gruppo G che agisce sulla fibra è il gruppo generale lineare $GL_n(V)$.

Osservazione 13. Dal momento che la fibra è uno spazio vettoriale di dimensione finita n , esiste un isomorfismo canonico (cambiamento di base) tra V e \mathbb{R}^n . A seconda del caso ci riferiremo dunque alla fibra come \mathbb{R}^n .

Definizione 32. Due fibrati ξ_1 e ξ_2 tali che $B_1 = B_2$ si dicono **isomorfi** se $\exists \varphi : E_1 \rightarrow E_2$ diffeomorfismo tale che $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$.

φ si chiama **isomorfismo di fibrati** o **automorfismo di fibrati** se $\xi_1 = \xi_2$.

Definizione 33. Un **isomorfismo di fibrati vettoriali** è un isomorfismo di fibrati che è lineare sulle fibre

Proposizione 6. Sia M una varietà differenziabile e TM il suo fibrato tangente. Allora TM con la mappa di proiezione $\pi : TM \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale.

Definizione 34. Sia $\xi = (E, B, \pi, F)$ un fibrato.

Una **sezione (globale)** di E è una mappa continua (liscia se il fibrato è liscio) $\sigma : B \rightarrow E$ tale che $\pi\sigma = id_B$.

Denotiamo con $\Gamma(E)$ lo spazio di tutte le sezioni globali di E .

Definizione 35. Sia $\xi = (E, B, \pi, F)$ un fibrato.

Una **sezione locale** di E su $U \subseteq B$ è una mappa continua (liscia) $\sigma : U \rightarrow E$ tale che $\pi\sigma = id_B$.

Osservazione 14. Se (U, φ) è una trivializzazione locale di E , allora una sezione locale su U esiste sempre ed è in corrispondenza biunivoca con le mappe continue (o lisce) da U a F . In altre parole, definire una sezione su U equivale a definire una funzione continua (o liscia) $f : U \rightarrow F$, infatti

$$\begin{aligned}\sigma : U &\rightarrow \pi^{-1}(U) \cong U \times F \\ x &\mapsto (x, f(x))\end{aligned}$$

Osservazione 15. Una sezione σ su un fibrato $\pi : E \rightarrow B$ permette di identificare lo spazio base B con $\sigma(B)$ sottospazio di E .

2.4 Fibrato Tangente

Definizione 36. Sia M una varietà differenziabile.

Chiamiamo $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ **fibrato tangente** di M

Scriveremo un elemento di questa unione disgiunta come una coppia ordinata (p, v) con $p \in M$ e $v \in T_p M$.

Il fibrato tangente è dotato di una proiezione naturale $\pi : TM \rightarrow M$ che manda ogni vettore in $T_p M$ nel punto in cui il vettore è tangente, cioè $\pi(p, v) = p$. Il fibrato tangente può essere pensato semplicemente come un'unione disgiunta di spazi vettoriali, ma in realtà può essere dotato di interessanti strutture geometriche.

Proposizione 7. *Data M varietà differenziabile di dimensione n , il fibrato tangente TM ha una naturale topologia e una struttura liscia che rende TM una varietà differenziabile di dimensione $2n$. Rispetto a questa struttura, la proiezione $\pi : TM \rightarrow M$ è liscia.*

Dimostrazione. Iniziamo definendo le mappe che diventeranno le nostre carte lisce. Data una carta liscia (U, φ) per M , notiamo che $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ è l'insieme di tutti i vettori tangenti a M in tutti i punti di U . Siano (x^1, \dots, x^n) le funzioni di coordinate di φ , e definiamo una mappa

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

ponendo

$$\tilde{\varphi}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

La sua immagine è $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, che è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^{2n} . Inoltre $\tilde{\varphi}$ è una biezione sulla sua immagine, poiché la sua inversa può essere scritta

esplicitamente come

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Ora supponiamo di avere due carte lisce (U, φ) e (V, ψ) per M , e siano $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ le corrispondenti carte su TM . Gli insiemi

$$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

sono aperti in \mathbb{R}^{2n} , e la mappa di transizione

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

può essere scritta esplicitamente come

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x)v^j \right).$$

ed essa è chiaramente liscia.

Preso un ricoprimento numerabile $\{U_i\}$ di M tramite domini di coordinate lisce, otteniamo un ricoprimento numerabile di TM tramite domini di coordinate $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ tale che $\forall i, \varphi_i$ è una biezione tra U_i e la sua immagine $\varphi_i(U_i)$. Per verificare la condizione di Hausdorff (T2), basta notare che due punti nella stessa fibra di π , essi appartengono alla stessa carta, mentre se (p, v) e (q, w) giacciono in fibre differenti, esistono domini di coordinate disgiunti U, V per M tali che $p \in U$ e $q \in V$, e allora $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono intorni di coordinate disgiunti che contengono rispettivamente (p, v) e (q, w) .

Osserviamo infine che π è liscia, in quanto rispetto alle carte (U, φ) per M e $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ per TM , la sua rappresentazione in coordinate è

$$\pi(x, v) = x.$$

□

Definizione 37. Le coordinate (x^i, v^i) si chiamano **coordinate naturali** su TM .

Definizione 38. Siano M, N varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Chiamiamo **differenziale globale** la mappa $F_* : TM \rightarrow TN$ che manda un vettore $v \in T_p M$ in $F_{*p}(v) \in T_{F(p)} N$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{F_*} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

dove π_M denota la proiezione canonica $TM \rightarrow M$ che manda un vettore $v \in T_p M$ in $p \in M$.

Osservazione 16. Talvolta chiameremo il differenziale globale di F , la "derivata di F "

Proposizione 8. *Siano M, N varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Allora il differenziale globale $F_* : TM \rightarrow TN$ è una mappa liscia.*

Dimostrazione. Dall'espressione locale per F_{*p} in coordinate, segue che F_* ha la seguente rappresentazione in coordinate naturali per TM e TN :

$$F_*(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(F^1(x), \dots, F^n(x), \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)v^i \right).$$

Questa è liscia poiché F lo è. □

Proposizione 9. *Sia M una varietà differenziabile.*

Allora $\pi : TM \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale.

Capitolo 3

Campi Vettoriali e Algebre di Lie

3.1 Campi Vettoriali

Intuitivamente, un campo vettoriale è una funzione che associa a ogni punto p di una varietà differenziabile un vettore di $T_p M$ (una derivazione) della varietà stessa in modo liscio. Ad esempio un campo vettoriale sul piano cartesiano può essere pensato come una collezione di frecce ciascuna in biezione con un punto del piano.

Definizione 39. Data una varietà differenziabile M , chiamiamo **campo vettoriale liscio** su M una mappa $X : M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ X = id_M$ dove π è la proiezione da TM a M .

Denotiamo con $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme dei campi vettoriali differenziabili su M (formano uno spazio vettoriale).

Osservazione 17. D'ora in avanti, supporremo che ogni campo vettoriale sia differenziabile, dunque per brevità spesso li chiameremo solo *campi vettoriali*.

Osservazione 18. Un campo vettoriale è una sezione del fibrato tangente di M .

Supponiamo che M sia una varietà differenziabile di dimensione n . Se $X : M \rightarrow TM$ è un campo vettoriale (anche solo continuo) e $(U, (x^i))$ è una qualsiasi carta di coordinate liscia per M , possiamo scrivere il valore di X in un punto $p \in U$ in termini dei vettori di base delle coordinate:

$$X_p = X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Questo definisce n funzioni $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, chiamate le *funzioni componenti* di X nella carta data, anch'esse differenziabili.

Osservazione 19. Siano $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo $fX : M \rightarrow TM$ come $(fX)_p = f(p)X_p$. Inoltre $fX + gY$ è ancora un campo vettoriale.

Un'importante proprietà dei campi vettoriali è che essi definiscono operatori sullo spazio delle funzioni a valori reali differenziabili.

Infatti data $f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$, otteniamo una nuova funzione $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $(Xf)_p = X_p f$

Definizione 40. Sia M una varietà differenziabile e $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$. D si chiama **derivazione** se è \mathbb{R} -lineare e soddisfa

$$D(fg) = fDg + gDf, \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

Proposizione 10. *Sia M una varietà differenziabile.*

$D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è una derivazione se e solo se $Df = Xf$ per qualche $X \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni $f \in C^\infty(M)$

Dimostrazione. (\Leftarrow) Sia X un campo vettoriale, $f \in C^\infty(M)$. Per ogni $p \in M$ scegliamo una carta $(U, (x^i))$. Allora per ogni $x \in U$ scriviamo

$$Xf(x) = \left(X^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right) f = X^i(x) \frac{\partial f}{\partial X^i}(x)$$

Dato che le funzioni componenti X^i sono differenziabili su U , segue che Xf è differenziabile su U , e dato che questo vale per ogni $p \in M$, Xf è differenziabile su M . La mappa $f \mapsto Xf$ è la derivazione cercata, infatti è

chiaramente lineare su \mathbb{R} e dalla regola di Leibniz per i vettori tangenti si ha $X(fg) = fXg + gXf$. Dunque ogni campo vettoriale induce una derivazione
 (\Rightarrow) Sia $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ una derivazione. Definiamo $X_p f = (Df)(p)$. La linearità di D garantisce che l'espressione dipenda linearmente da f , e il fatto che D sia una derivazione assicura che sia soddisfatta la regola di Leibniz per i vettori tangenti. Dunque $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è un vettore tangente. Questo definisce un campo vettoriale (a priori non differenziabile), ma grazie all'ipotesi $Xf = Df$ differenziabile per ogni $f \in C^\infty(M)$ possiamo concludere. \square

Sfruttando questo risultato, talvolta identificheremo $\mathfrak{X}(M)$ con le derivazioni $C^\infty(M)$, utilizzando la stessa notazione sia per i campi vettoriali (pensati come mappe lisce da M a TM), sia per le derivazioni (pensate come mappe lineari da $C^\infty(M)$ in se stesso).

Definizione 41. Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile tra varietà differenziabili. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Diciamo che X e Y sono **F -relativi** se

$$F_{*p}(X_p) = Y_{F(p)}, \text{ per ogni } p \in M$$

Lemma 1. Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile tra varietà differenziabili, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Allora

$$X \text{ e } Y \text{ sono } F\text{-relativi} \iff X(f \circ F) = (Yf) \circ F, \quad \forall f \in C^\infty(N)$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$ e $f \in C^\infty(V)$, si hanno

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = F_{*p}(X_p)f, \quad (Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}f$$

\square

Proposizione 11. Siano M, N varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ diffeomorfismo. Allora per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, esiste un unico campo vettoriale Y su N in F -relativo ad X .

Dimostrazione. Dato che F è un diffeomorfismo e dal lemma $X(f \circ F) = (Yf) \circ F \iff F_{*p}(X_p) = Y_{F(p)}$, definiamo Y come

$$Y_q = F_{*F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

Notiamo che $Y : N \rightarrow TN$ è differenziabile in quanto è dato dalla composizione delle seguenti mappe

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{F_*} TN$$

□

Definizione 42. Sia $F : M \rightarrow N$ diffeomorfismo tra M e N varietà differenziabili. Definiamo il **pushforward di X tramite F** come

$$(F_*X)_q = F_{*F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

Definizione 43. Siano X, Y campi vettoriali su M varietà differenziabile. Chiamiamo **bracket di Lie** di X e Y l'operatore $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $[X, Y]f = XYf - YXf$.

Lemma 2. Siano X, Y campi vettoriali su M . Allora $[X, Y]$ è ancora un campo vettoriale su M .

Dimostrazione. Dalla Proposizione 10, è sufficiente mostrare che $[X, Y]$ è una derivazione. Siano $f, g \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= fXYg + YgXf + gXYf + YfXg \\ &\quad - fYXg - XgYf - gYXf - XfYg \\ &= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\ &= f[X, Y]g + g[X, Y]f \end{aligned}$$

□

Osservazione 20. Nella dimostrazione abbiamo utilizzato il fatto che il prodotto puntuale tra funzioni lisce in $C^\infty(M)$ è commutativo.

Proposizione 12. *Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile tra varietà differenziabili, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ tali che Y_i è F -relativo a X_i per $i = 1, 2$.*

Allora $[Y_1, Y_2]$ è F -relativo a $[X_1, X_2]$.

Dimostrazione. Per il Lemma 1, dato che X_i e Y_i sono F -relativi

$$X_1 X_2(f \circ F) = X_1((Y_2 f) \circ F) = (Y_1 Y_2 f) \circ F$$

Analogamente

$$X_2 X_1(f \circ F) = (Y_2 Y_1 f) \circ F$$

Dunque

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F \end{aligned}$$

□

Corollario 2. *Sia $F : M \rightarrow N$ diffeomorfismo, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Allora $F_[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente a $Y_i = F_*X_i$ con F diffeomorfismo. □

3.2 Algebre di Lie

Definizione 44. Una **algebra di Lie** è uno spazio vettoriale reale \mathfrak{g} di dimensione finita con un prodotto interno

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

tale che soddisfi:

1. (Bilinearità) $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w] \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. (Antisimmetria) $[u, u] = 0, \forall u \in \mathfrak{g}$
3. (Identità di Jacobi) $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$

Definizione 45. Una **sottoalgebra di Lie** di un'algebra di Lie \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che $\forall x, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}$.

Un **ideale** di un'algebra di Lie \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che $\forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}$.

Osservazione 21. Siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ due sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie \mathfrak{g} . Poniamo

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \left\{ \sum_i a_i [u_i, v_i], u_i \in \mathfrak{a}, v_i \in \mathfrak{b}, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Allora possiamo riscrivere le definizioni sopra con una diversa notazione, ovvero chiedendo che valga $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ per le sottoalgebre di Lie e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ per gli ideali.

Definizione 46. Un **omomorfismo di algebre di Lie** è una mappa lineare $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ che preserva il prodotto interno, cioè tale che $[\varphi(u), \varphi(v)]_{\mathfrak{g}_2} = \varphi([u, v]_{\mathfrak{g}_1})$ per ogni $u, v \in \mathfrak{g}$.

Un **isomorfismo di algebre di Lie** è un omomorfismo di algebre di Lie biettivo.

3.3 Algebra di Lie di un Gruppo di Lie

Ad ogni gruppo di Lie G è associata un'algebra di Lie \mathfrak{g} che, nel nostro caso, può essere pensata come lo spazio dei vettori tangenti all'identità del gruppo.

Sia G un gruppo di Lie, $g \in G$. Consideriamo le seguenti applicazioni

$$\begin{array}{lll} L_g: G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx \end{array} \quad \begin{array}{lll} R_g: G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xg \end{array} \quad \begin{array}{lll} Ad(g): G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

L_g e R_g sono diffemorfismi (ma non omomorfismi di gruppi) e si chiamano rispettivamente **traslazione sinistra** e **traslazione destra**.

$Ad(g)$ invece è un automorfismo di G e si chiama **automorfismo interno** indotto da g . Osserviamo inoltre che $Ad(g)(x) = L_g(R_g^{-1}(x)) = R_g^{-1}(L_g(x))$

Osservazione 22. Ricordiamo che se $F: M \rightarrow N$ è una mappa differenziabile tra varietà differenziabili, il differenziale (pushforward) di F in p è un'applicazione lineare $F_{p*}: T_p M \rightarrow T_{F(p)}N$.

Definizione 47. Sia $X \in \mathfrak{X}(G)$.

X si dice **invariante a sinistra** se $L_{g*}X_h = X_{gh}$ per ogni $g, h \in G$, cioè se $L_{g*}X = X$.

Proposizione 13. *Se X e Y sono due campi vettoriali invarianti a sinistra, allora anche i campi $X+Y$, λX con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $[X, Y]$ sono invarianti a sinistra.*

Dimostrazione. Dato che il differenziale L_{g*} è un'applicazione lineare, si ha facilmente che $X + Y$ e λX sono invarianti a sinistra. Infine per quanto visto in sezione 3.1, si ha che $[X, Y]$ è un campo vettoriale e che $L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y]$. \square

Definizione 48. Sia G gruppo di Lie. Allora, grazie alla precedente proposizione, denotiamo con \mathfrak{g} l'insieme dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra, esso ha una struttura di algebra di Lie e si chiama **algebra di Lie del gruppo di Lie G** .

Teorema 1. *Sia G un gruppo di Lie di dimensione n .*

La sua algebra di Lie \mathfrak{g} è isomorfa come spazio vettoriale a $T_e G$.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow T_e(G) \\ X &\longmapsto X_e\end{aligned}$$

Essa è chiaramente lineare. Se $X_e = 0$, allora $0 = L_{g_*}X_e = X_g$. Inoltre, se $v \in \mathfrak{g}$, possiamo definire $X_g = L_{g_*}v$, in modo tale che

$$L_{a_*}X_g = L_{a_*}L_{g_*}v = L_{ag_*}v = X_{ag}$$

Dunque, X è invariante a sinistra con $X_e = v$, e dunque la mappa è suriettiva.

□

In base al risultato precedente, possiamo introdurre su $T_e G$ una struttura di algebra di Lie definendo per ogni $x, y \in T_e G$, $[x, y] = [X, Y]_e$ dove X, Y sono gli unici campi invarianti a sinistra tali che $X_e = x$, $Y_e = y$. In questo modo $T_e G$ risulta essere isomorfo a \mathfrak{g} non solo come spazio vettoriale, ma anche come algebra di Lie.

Di seguito alcuni esempi di gruppi di Lie e della loro algebra di Lie.

Esempio 13. Consideriamo il gruppo di Lie $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ e cerchiamo di capire perché la sua algebra di Lie associata è $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$. Consideriamo una definizione equivalente dello spazio tangente in $p \in G$ di una varietà differenziabile, ovvero

$$T_p G = \{[\gamma] \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G, \gamma(0) = p\}$$

dove $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow$ data (U, φ) carta in p , si ha $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2(t))|_{t=0}$.

Sia

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL_n(\mathbb{R}), \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \quad \text{tale che} \quad \gamma(0) = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\det(\gamma(t)) = a(t)d(t) - b(t)c(t) = 1$, $a(0) = d(0) = 1$ e $b(0) = c(0) = 0$. Derivando entrambi i membri della prima espressione otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt}((a(t)d(t) - b(t)c(t))) \Big|_{t=0} = a'(0) + d'(0) = \text{tr}(\gamma'(0))$$

Abbiamo quindi che per definizione, $\gamma'(0) \in T_e G$, e per quanto appena fatto $\gamma'(0) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Dunque $T_e G \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, e per motivi dimensionali $T_e G = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Esempio 14 (Gruppo generale lineare positivo).

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}, \quad \mathfrak{gl}_n^+(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

Esempio 15 (Gruppo ortogonale).

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}, \quad \mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

Proposizione 14.

(i) Dato $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi di Lie, il pushforward all'identità $\varphi_{*e} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un omomorfismo di algebre di Lie

(ii) Dati $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ e $\psi : G_2 \rightarrow G_3$ omomorfismi di gruppi di Lie, si ha

$$(\psi \circ \varphi)_{*e} = \psi_{*e} \circ \varphi_{*e}$$

(iii) Sia $id : G \rightarrow G$ la mappa identità, allora $id_{*e} = id_{\mathfrak{g}}$

(iv) Se φ è un isomorfismo di gruppi di Lie, allora φ_* è un isomorfismo di algebre di Lie.

Dimostrazione. (i) Siano $u, v \in \mathfrak{g}_1$. Per Teorema 1 possiamo associare questi vettori in maniera univoca ai campi vettoriali invarianti a sinistra X, Y su G_1 (in modo tale che $X_e = u$, $Y_e = v$). Siano $u' = \varphi_*(u), v' = \varphi_*(v) \in \mathfrak{g}_2$ i quali sono associati ai campi vettoriali invarianti a sinistra X' e Y' su G_2 . Ora φ è un omomorfismo, dunque

$$\varphi \circ L_g(h) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = L_{\varphi(g)} \circ \varphi$$

Derivando questa uguaglianza si ha $\varphi_* \circ L_{g_*} = L_{\varphi(g)_*} \circ \varphi_*$, in modo tale che

$$\varphi_*(X_g) = \varphi_*(L_{g_*}u) = L_{\varphi(g)_*}(\varphi_*(u)) = L_{\varphi(g)_*}(u') = X'_{\varphi(g)}$$

Dunque, per il Lemma 1, X e X' sono φ -relativi. Analogamente anche Y e Y' sono φ -relativi. Segue dunque dalla Proposizione 12 che $[X, Y]$ e $[X', Y']$ sono φ -relativi e dunque in particolare $\varphi_*([u, v]) = [\varphi_*u, \varphi_*v]$.

- (ii) Segue dalla regola della catena.
- (iii) Segue dalla definizione di derivata.
- (iv) Da (ii) e (iii), se ψ è l'inversa di φ , allora l'inversa di φ_{*e} è ψ_{*e} .

□

3.4 Parallelizzabilità

Definizione 49. Sia M una varietà differenziabile.

Una k -upla ordinata (X_1, \dots, X_k) di campi vettoriali definiti su qualche aperto $A \subseteq M$ si dice **linearmente indipendente** se per ogni $p \in A$, $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ è una k -upla linearmente indipendente in $T_p M$.

Diciamo che una n -upla ordinata (E_1, \dots, E_n) di campi vettoriali su $U \subseteq M$ è un **frame locale** per M se è linearmente indipendente e genera il fibrato tangente TM .

Se $U = M$, diremo che (E_1, \dots, E_n) è un **frame globale**.

Definizione 50. Una varietà differenziabile M si dice **parallelizzabile** se ammette un frame globale.

Osservazione 23. Nel nostro caso stiamo assumendo campi vettoriali differenziabili, dunque il frame globale si dice anche frame globale *liscio*.

Esempio 16. \mathbb{R}^n , S^1 , S^3 , S^7 e il toro n-dimensionale \mathbb{T}^n sono esempi di varietà parallelizzabili.

Definizione 51. Data una varietà M e (X_1, \dots, X_n) un frame globale (locale), diciamo che (X_1, \dots, X_n) è un **frame globale (locale) invariante a sinistra** se X_i è invariante a sinistra per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposizione 15. *Ogni gruppo di Lie G è parallelizzabile.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. Allora ogni base di \mathfrak{g} è un frame globale invariante a sinistra per G , e dunque G è parallelizzabile. \square

Il concetto di frame locale e frame globale si estende in maniera naturale ai fibrati vettoriali.

Definizione 52. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale, $U \subseteq M$ aperto, $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ una k -upla di sezioni di E su U si dice **linearmente indipendente** se $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ forma una k -upla linearmente indipendente in E_p per ogni $p \in U$. Diciamo che **generano E** se per ogni $p \in U$, generano E_p .

Un **frame locale** per E su U è una k -upla ordinata di sezioni locali linearmente indipendenti su U che generano E (dunque $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ è una base per la fibra E_p per ogni $p \in U$).

Se $U = M$, il frame si dice **globale**.

I frame locali e globali definiti precedentemente sono ora dei frame per il fibrato tangente, ma i due concetti coincidono.

Proposizione 16. *Un fibrato vettoriale liscio ammette trivializzazione globale se e solo se ammette un frame globale liscio.*

Corollario 3. (*Parallelismo assoluto*) *Sia G un gruppo di Lie, allora il fibrato tangente ammette una trivializzazione locale, cioè $TG \cong G \times \mathfrak{g}$.*

3.5 Forma di Maurer-Cartan

Definizione 53. Sia G un gruppo di Lie, $\mathfrak{g} \cong T_e G$ la sua algebra di Lie.

Chiamiamo **forma di Maurer-Cartan** invariante a sinistra la 1-forma su G a valori in \mathfrak{g} , $\omega_G : TG \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da $\omega_G(v) = L_{g^{-1}*}(v)$ per $v \in T_g G$

Il termine *invariante a sinistra* è dovuto al fatto che ω_G è invariante sotto traslazioni a sinistra. Infatti, dal momento che $v \in T_g G \implies L_{h*}(v) \in T_{hg} G$, si ha

$$(L_h^* \omega_G)(v) = \omega_G(L_{h*}(v)) = L_{(hg)^{-1}}(L_{h*}(v)) = L_{g^{-1}*}(v) = \omega_G(v)$$

Esempio 17. La forma di Maurer-Cartan di \mathbb{R} è dx .

Infatti $\mathfrak{g} = T_e \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $L_x(y) = x + y$ e $L_{x*} = id_{\mathbb{R}}$. Ora $w_x(y) = L_{x*}(y) = y$, $v \in T_x \mathbb{R}$ si scrive come $v^1 \partial_x$, dunque presa l'1-forma dx definita da $dx(\partial_x) = 1$ si ha $dx(v) = dx(v^1 \partial_x) = v^1 dx(\partial_x) = v^1$ e quindi $\omega_x = dx$.

Esempio 18. $G = S^1 \subseteq \mathbb{C}$, dunque $TG = \{(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) \mid r, \theta \in \mathbb{R}\}$ e in particolare $T_e G = \{(1, ri) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Calcoliamo la forma di Maurer-Cartan

$$\omega(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) = L_{e^{-i\theta}*}(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) = (1, ir)$$

Definizione 54. Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Chiamiamo **rappresentazione aggiunta** la mappa

$$\begin{aligned} ad: G &\rightarrow Gl(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto ad(g) = Ad(g)_{*e} \end{aligned}$$

Per ogni $g \in G$, chiamiamo $ad(g) \in Gl(\mathfrak{g})$ **azione aggiunta** di g su \mathfrak{g} .

Proposizione 17.

(i) $ad(g)$ è un isomorfismo di algebre di Lie, e la mappa $Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

(ii) $R_g^* \omega_G = ad(g^{-1}) \omega_G$

Dimostrazione. (i) Segue dalla Proposizione 14

(ii) Sia $v \in T_h(G)$, si ha dunque che $R_{h*}(v) \in T_{gh}G$.

$$\begin{aligned} R_g^* \omega_G &= \omega_G(R_{g*}(v)) = L_{(gh)^{-1}*} R_{g*}(v) = L_{g^{-1}*} L_{h^{-1}*} R_{g*}(v) \\ &= L_{g^{-1}*} R_{g*} L_{h^{-1}*}(v) = ad(g^{-1})\omega_G(v) \end{aligned}$$

□

Osservazione 24. $R_h^* \omega_G$ è il pullback della forma di Maurer-Cartan

Capitolo 4

Geometrie di Klein

La generalizzazione attuata da Klein del concetto di geometria ci permette di spostare l'enfasi dalla varietà M al gruppo di trasformazioni G .

Fissato un punto $x \in M$, esiste una mappa

$$\begin{aligned}\pi: G &\rightarrow M \\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

Dalla transitività dell'azione segue che questa mappa è suriettiva. Osserviamo che $\pi^{-1}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} =: H_x$ è un sottogruppo chiuso di G e prende il nome di *stabilizzatore di x* .

Inoltre, $\pi(g) = \pi(h) \iff gx = hx \iff h^{-1}gx = x \iff h^{-1}g \in H_x$.

Da ciò segue che π induce una biezione $\bar{\pi}: G/H_x \rightarrow M$, $gH_x \mapsto gx$.

Dunque riassumendo, anzichè identificare una geometria con punto base come una coppia (M, x) dotata del suo gruppo principale, possiamo equivalentemente parlare della coppia (G, H) , dove $H = H_x$ è lo stabilizzatore dell'azione di G , che è in particolare un sottogruppo chiuso di G .

Cerchiamo ora di dare maggiore rigore e chiarezza ai ragionamenti di cui sopra.

Definizione 55. Sia G un gruppo di Lie, X una varietà differenziabile. Se G agisce su X e $x \in X$, chiamiamo

-) l'insieme $Gx = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$ **orbita** di x .

-) l'insieme $Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$ **stabilizzatore** di x .

Definizione 56. Sia X una varietà differenziabile e G un gruppo che agisce per diffeomorfismi su X in modo transitivo, allora X si chiama **spazio omogeneo**.

Teorema 2 (Teorema orbita-stabilizzatore per azioni di gruppi di Lie). *Sia G un gruppo di Lie che agisce su X varietà differenziabile.*

Allora per ogni $x \in X$, $Stab(x)$ è un sottogruppo chiuso e la mappa naturale $G/Stab(x) \rightarrow X$ è un'immersione iniettiva la cui immagine è l'orbita Gx .

Corollario 4. *Se G agisce in modo transitivo su X , allora $X \cong G/Stab(x)$ per ogni $x \in X$, cioè X è uno spazio omogeneo.*

Osservazione 25. Dato H sottogruppo chiuso di G , il quoziente G/H è a priori un quoziente topologico (non algebrico) in quanto H non è necessariamente normale.

4.1 Esempi di Geometrie di Klein

Prima di dare una definizione rigorosa di *Geometria di Klein*, vediamo alcune nel concreto. Il procedimento sopra descritto infatti permette di trovare numerosi esempi di geometrie di Klein. A priori non vale il viceversa, cioè non è vero in generale che ogni geometria di Klein si realizza come quoziente di un gruppo di Lie per lo stabilizzatore di un punto, rispetto a un'azione di G su una varietà connessa M .

Esempio 19 (Sfera). Siano $M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ e $G = O(n+1) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T A = AA^T = I\}$ il gruppo ortogonale di dimensione $n+1$. Consideriamo l'azione di G su M data da $A \mapsto A \cdot x$ con $x = (0, \dots, 0, 1)$ polo nord della sfera n -dimensionale.

L'azione è transitiva, infatti dati $x, y \in S^n$, essi hanno in particolare stessa norma, dunque esiste sempre $A \in O(n+1)$ tale che $Ax = y$.

Ora lo stabilizzatore del polo nord è dato da

$$\pi^{-1}(x) = \{A \in O(n+1) \mid A \cdot x = x\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n) \right\} \cong O(n)$$

Dato che $O(n+1)$ è il gruppo delle isometrie della sfera n -dimensionale, che $O(n)$ è lo stabilizzatore di x e che l'azione è transitiva, per il Corollario 4 $O(n+1)/O(n) \cong S^n$.

Prendendo ad esempio $n = 2$, lo stabilizzatore del gruppo nel polo nord $x = (0, 0, 1)$ è proprio dato dalle rotazioni della sfera attorno all'asse z che sono descritte da $O(2)$.

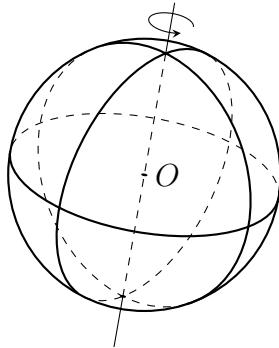


Figura 4.1: S^2 che ruota attorno a un asse di rotazione

Osservazione 26. $SO(n+1)/SO(n)$ è in biezione con la sfera unitaria *orientata*, che ha curvatura costante uguale a 1.

Questo è un esempio del fatto che è possibile ottenere una varietà connessa M come quoziente di gruppi di Lie diversi, e a seconda del gruppo G considerato, vengono preservate determinate strutture sulla varietà in questione. Ecco perché quando daremo la definizione di geometria di Klein, non ci focalizzeremo sullo spazio della geometria, ovvero la varietà M , bensì sulla coppia (G, H) che caratterizza la geometria rispetto alle strutture matematiche preservate dall'azione di G su G/H (in questo caso preserviamo l'orientazione).

Esempio 20 (\mathbb{CP}^1). Riprendiamo l'Esempio 12.

Il gruppo di Lie $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^H A = AA^H = I, \det(A) = 1\}$ è diffeomorfo a S^3 , infatti possiamo vederlo più esplicitamente come

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & \omega \\ -\bar{\omega} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, \omega \in \mathbb{C}, |z|^2 + |\omega|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

Inoltre $SU(2)$ agisce su S^2 in modo transitivo e lo stabilizzatore di un punto è $S^1 = U(1) = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$.

Dunque, si ha $SU(2)/U(1) = S^3/S^1 = S^2$, che come abbiamo già visto è un S^1 -fibrato principale. Ancora una volta lo spazio quoziante è S^2 , ma con una struttura differente dagli esempi precedenti, infatti in questo caso abbiamo la *sfera di Riemann*.

Esempio 21 (Piano Euclideo). $M = \mathbb{R}^2$ e il gruppo di simmetrie di Lie è

$$G = Euc_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R(\theta) \end{pmatrix} \mid R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}$$

che agisce su M come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R(\theta) \end{pmatrix} \cdot x = R(\theta)x + v, \text{ dove } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Un semplice calcolo mostra che lo stabilizzatore dell'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ è dato dal sottogruppo delle rotazioni

$$H = SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Dunque abbiamo trovato $Euc_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$.

Infatti, $Euc_2(\mathbb{R}) \cong SO_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2$ (prodotto semidiretto).

Esempio 22 (Piano Affine). $M = \mathbb{R}^2$, come nell'esempio precedente, e il gruppo è il gruppo affine 2-dimensionale dato da

$$G = Aff_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \in GL_3^+(\mathbb{R}) \mid A \in GL_2^+(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

L'azione su M è data dalla formula $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \cdot x = Ax + v$, dove x, v sono vettori colonna. Ancora, è facile verificare che lo stabilizzatore dell'origine è

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL_3^+(\mathbb{R}) \mid A \in GL_2^+(\mathbb{R}) \right\} \cong GL_2^+(\mathbb{R})$$

e $Aff_2^+ \cong H \rtimes \mathbb{R}^2$ (prodotto semidiretto).

Esempio 23 (Piano Iperbolico). Siano $M = \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ e $G = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ il gruppo delle trasformazioni di Möbius che agisce su M come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Preso come punto base $z = i \in M$, il suo stabilizzatore è

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1, AA^T = I\}$$

dunque $\mathcal{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

Le trasformazioni di Möbius preservano la metrica di Poincaré (iperbolica) in quanto esse sono isometrie di questa metrica, dunque preservano distanze e angoli iperbolici. Inoltre dato che per definizione di $SL_2(\mathbb{R})$ si richiede che $\det(A) = 1$, esse preservano anche l'orientazione.

Esempio 24 (Spazio proiettivo). Sia $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ lo spazio proiettivo reale. L'azione di \mathbb{R}^* su \mathbb{RP}^n è chiaramente liscia, e si restringe a un'azione libera su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dunque come vedremo successivamente, la proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ è un \mathbb{R}^* -fibrato principale.

L'azione naturale del gruppo delle trasformazioni di Möbius $SL(n+1, \mathbb{R})$ su \mathbb{R}^{n+1} si restringe a un'azione su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, e dato che l'azione è lineare, induce un'azione su \mathbb{RP}^n , che è ovviamente transitiva. I risultanti diffeomorfismi di \mathbb{RP}^n sono esattamente le trasformazioni proiettive. Lo stabilizzatore della retta passante per il primo vettore della base standard di \mathbb{R}^{n+1} è dato da

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} \det(A)^{-1} & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

P è un esempio di *sottogruppo parabolico* del gruppo di Lie $SL(n+1, \mathbb{R})$. P ha due componenti connesse, caratterizzate dal segno del determinante di A . Se consideriamo P_0 , componente连通的 di P contenente l'identità, otteniamo un diverso spazio omogeneo corrispondente, infatti $\mathbb{RP}^n \cong SL(n+1, \mathbb{R})/P_0$, mentre $S^n \cong SL(n+1, \mathbb{R})$.

Per vedere la struttura geometrica di \mathbb{RP}^n invariante rispetto all'azione di $SL(n+1, \mathbb{R})$, osserviamo che ogni trasformazione proiettiva mappa rette proiettive in rette proiettive. Infatti, le rette proiettive sono esattamente le immagini tramite π dell'intersezione di piani passanti per l'origine con $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Da questa descrizione segue che l'azione di $SL(n+1, \mathbb{R})$ su \mathbb{RP}^n mappa rette proiettive in rette proiettive. Il teorema fondamentale della geometria proiettiva afferma che ogni biezione di \mathbb{RP}^n mappa rette proiettive in rette proiettive. Dunque, la struttura geometrica appropriata è data dalla famiglia di tutte le rette proiettive di \mathbb{RP}^n .

Sulla sfera S^n , uno può similmente ottenere la famiglia di geodetiche della metrica sferica su S^n , e i diffeomorfismi di S^n che mappano geodetiche in geodetiche sono esattamente le azioni degli elementi di $SL(n+1, \mathbb{R})$.

4.2 Caratterizzazione di Fibrati Principali

Cerchiamo ora di capire perché una geometria, nel senso di Klein, può essere vista come una varietà differenziabile e mostriamo che la mappa $G \rightarrow G/H$ è un fibrato principale con gruppo H .

Proposizione 18. *Sia G un gruppo di Lie e H un suo sottogruppo chiuso. Allora l'azione $G \times H \rightarrow H$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ è libera e propria.*

Dimostrazione. L'azione è banalmente libera, infatti se $gh = g$ allora moltiplicando per g^{-1} si ottiene $h = e$.

Siano ora $A, B \subseteq G$ compatti e consideriamo $K = \{h \in H \mid hA \cap B \neq \emptyset\}$. Mostriamo che K è compatto per successioni.

Sia $\{h_n\}$ una successione a valori in K . Allora esistono $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni rispettivamente in A e in B tali che $a_i h_i = b_i$ per ogni i .

Dato che A è compatto esiste una sottosuccessione $\{a_{n_j}\}_{j \in J}$ che converge ad $a \in A$, e a meno di restringerci ulteriormente a $L \subseteq J$ esiste $\{b_{n_l}\}_{l \in L}$ che converge a $b \in B$. Dunque abbiamo $\{h_l = (a_l)^{-1}b_l\}_{l \in L}$ converge a $a^{-1}b \in K$ \square

Proposizione 19. *Sia $\xi = (P, B, \pi, F)$ un H -fibrato principale destro
Allora l'azione $P \times H \rightarrow H$ è libera e propria*

Dimostrazione. Il fatto che il fibrato sia localmente un prodotto $U \times H$, con l'azione canonica destra di H , mostra che l'azione è libera. Dalla proposizione precedente si ha che per ogni successione $\{h_j\}$ in $K = \{h \in H \mid Ah \cap B \neq \emptyset\}$, esistono successioni $\{a_j\}$ in A e $\{b_j\}$ in B convergenti rispettivamente ad a e b , e tali che $a_j h_j = b_j$ per ogni j . Ora dato che per definizione di fibrato principale, l'azione destra di H preserva la fibra, si ha $\pi(a_j) = \pi(a_j h_j) = \pi(b_j)$ per ogni j , e dunque dato che π continua, $\pi(a) = \pi(b)$. Ora, sempre per definizione di fibrato principale, su ogni fibra $\pi^{-1}(x)$ il gruppo agisce in modo semplicemente transitivo, dunque $a = hb$ per qualche $h \in H$. Dimostriamo ora che $h_j \rightarrow h$.

Per farlo, notiamo che preso \bar{j} sufficientemente grande si ha $\forall j > \bar{j}$, $h_j \in U$, dove U è una carta del fibrato.

Questo ci permette di restringerci al caso del fibrato banale $P = M \times H$. Proiettando lungo H tramite ρ si ottiene $\rho(a_j)h_j = \rho(a_j h_j) = \rho(b_j)$. Dunque $\{h_j = \rho(a_j)^{-1}\rho(b_j)\}$ converge a $\rho(a)^{-1}\rho(b)$. Abbiamo così mostrato che ogni successione in K ammette sottosuccessione convergente in K , cioè che K è compatto. \square

Concludiamo enunciando un risultato fondamentale che mostra come queste proprietà caratterizzino un fibrato principale su una varietà differenziabile. La dimostrazione, essendo particolarmente tecnica, è stata omessa con l'intento di snellire la trattazione.

Teorema 3. Sia P una varietà differenziabile, H un gruppo di Lie, $\mu : P \times H \rightarrow P$ una azione destra, liscia, libera e propria. Allora

- (i) P/H con la topologia quoziente è una varietà topologica (con $\dim(P/H) = \dim(P) - \dim(H)$).
- (ii) P/H ammette un'unica struttura differenziabile per cui la proiezione $\pi : P \rightarrow P/H$ è una sommersione.
- (iii) $\xi = (P, \pi, P/H, H)$ è un H -fibrato principale liscio destro.

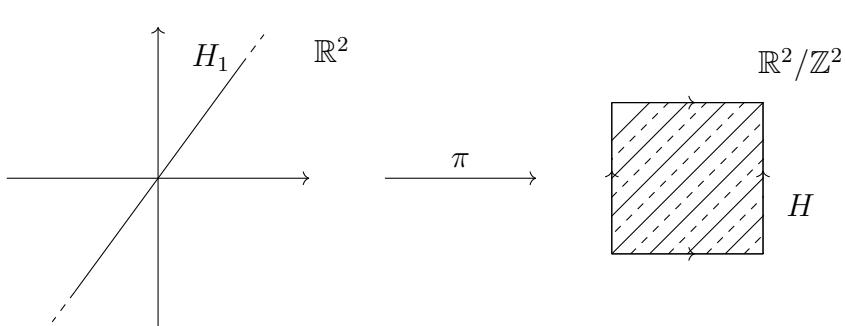
Corollario 5. Sia G un gruppo di Lie, $H \subseteq G$ sottogruppo chiuso.

Allora la mappa $\pi : G \rightarrow G/H$ è un H -fibrato principale destro.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 18 abbiamo che l'azione destra di H su G è libera e propria e per il Teorema 3 abbiamo la tesi. \square

È importante che l'azione sia propria. Infatti, se per esempio nel caso di un'azione destra $G \times H \rightarrow G$ di un sottogruppo $H \subseteq G$, il sottogruppo non è chiuso, allora l'azione non è propria e il quoziente G/H non è necessariamente una varietà.

Esempio 25. Consideriamo il toro $G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e un sottogruppo "irrazionale" di G . Per capire meglio, passiamo al rivestimento universale $G_1 = \mathbb{R}^2$ con corrispondente reticolo $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ visto come nucleo della mappa di proiezione $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sia $H_1 = \{(t, t\sqrt{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$. In G_1 , il sottogruppo H_1 è una linea retta, e dunque è chiuso (rispetto alla topologia euclidea). Tuttavia, dal momento che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, $H = \pi(H_1)$ è denso in G , e in particolare non è chiuso.



Sia $f : G/H \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\tilde{f} = f \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ G/H & & \end{array}$$

Ora $\tilde{f}(H) = f([h]) = x \in \mathbb{R}$, dunque \tilde{f} è costante su un denso di G , e dunque è costante su tutto il dominio. Inoltre dalla commutatività del diagramma, si ha che f è costante. Non esistono dunque funzioni continue non costanti $G/H \rightarrow \mathbb{R}$, in particolare non è possibile costruire delle carte e dunque G/H non è una varietà.

4.3 Geometrie di Klein

Definizione 57. Siano X, Y due insieme non vuoti e G un gruppo che agisce su di essi. Una mappa $f : X \rightarrow Y$ si dice **equivariante** se $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$

Proposizione 20. *Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un suo sottogruppo chiuso.*

Allora esiste un unico sottogruppo massimale normale K di G contenuto in H . Inoltre, K è un sottogruppo di Lie chiuso di H , l'azione sinistra di G su G/H induce un'azione sinistra di G/K su G/H , ed esiste un diffeomorfismo $\varphi : (G/K)/(H/K) \rightarrow G/H$ tale che φ è equivariante rispetto all'azione canonica sinistra di G/K .

$$\begin{array}{ccc} (G/K)/(H/K) & \xrightarrow{\varphi} & G/H \\ \downarrow G/K \curvearrowright & & \downarrow G/K \curvearrowright \\ (G/K)/(H/K) & \xrightarrow{\varphi} & G/H \end{array}$$

Dimostrazione. Sia K il gruppo generato da tutti i sottogruppi normali di G contenuti in H . Allora K è chiaramente un sottogruppo normale di G contenuto in H ed è, inoltre, l'unico sottogruppo normale massimale di G contenuto in H . Dato che la chiusura di K è ancora un sottogruppo normale di G contenuto in H , K è esso stesso chiuso.

Ora K è un gruppo di Lie in quanto sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie. Infine, dal Teorema 3, la proiezione canonica $\pi : G/K \rightarrow G/H$ è un fibrato principale con fibra H/K . Dunque π induce un diffeomorfismo $(G/K)/(H/K) \rightarrow G/H$ che commuta con l'azione canonica sinistra G/K .

□

Siamo ora pronti per dare una definizione formale di Geometria di Klein.

Definizione 58. Una **geometria di Klein** è una coppia (G, H) , dove G è un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso tale che G/H è connesso. G si chiama **gruppo principale** della geometria. Il **nucleo** di una geometria di Klein (G, H) è il più grande sottogruppo K di H normale in G .

Una geometria di Klein (G, H) si dice **fedele** se $K = \{e\}$, mentre si dice **localmente fedele** se K è discreto.

Una geometria di Klein si dice **geometricamente orientata** se G è connesso. Lo spazio delle classi laterali connesse G/H si chiama **spazio della geometria di Klein** oppure con un abuso di notazione, semplicemente **geometria di Klein**. Una geometria di Klein si dice **primitiva** se la componente contenente l'identità $H_e \subseteq H$ è massimale tra i sottogruppi propri, chiusi e connessi di G .

Osservazione 27. Lo spazio della geometria di Klein G/H è in particolare uno spazio omogeneo.

Se (G, H) è una geometria di Klein con nucleo K , allora dato un sottogruppo chiuso $N \subseteq K$ normale in G , dalla Proposizione 20 si ha che la coppia $(G/N, H/N)$ è anch'essa una geometria di Klein con spazio $(G/N, H/N) \cong G/H$. Ovviamente, queste geometrie non sono fedeli, a meno che $N = K$. Questo fatto ci porta alla seguente definizione.

Definizione 59. Sia (G, H) una geometria di Klein con nucleo K .

Chiamiamo **geometria di Klein fedele associata** a (G, H) la geometria di Klein $(G/K, H/K)$.

Osservazione 28. Dalla Proposizione 20 sembra che se si è interessati allo spazio G/H sia sufficiente considerare il caso fedele. Perché allora non chiamiamo geometrie di Klein solo quelle fedeli? Una prima risposta è data dal fatto che facendo ciò, elimineremmo il fenomeno di spin. Il secondo punto è che geometrie non fedeli esistono, ed è dunque utile avere un linguaggio per poterne parlare.

Definizione 60. Date due geometrie di Klein (G_1, H_1) e (G_2, H_2) , esse si dicono **geometricamente isomorfe** se esiste un isomorfismo di gruppi di Lie $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ tale che $\varphi(H_1) = H_2$.

Osservazione 29. In particolare, (G, H) e (G, gHg^{-1}) sono geometricamente isomorfe tramite φ automorfismo interno, che agisce tramite la coniugazione per un elemento g .

Lemma 3. *Sia G un gruppo di Lie, allora la componente dell'identità $G_e = \{g \in G \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G, \gamma(0) = g, \gamma(1) = e\}$ è un sottogruppo di G .*

Dimostrazione. Siano $g, h \in G_e$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow G_e$ e $\eta : [0, 1] \rightarrow G_e$ tali che $\gamma(0) = g$, $\gamma(1) = e$, $\eta(0) = h$, $\eta(1) = e$. Sia $\xi : [0, 1] \rightarrow G_e$, $\xi(t) = \gamma(t)\eta(t)$, allora $\xi(0) = gh$ e $\xi(1) = e$, dunque G_e è chiuso rispetto al prodotto.

Sia $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t)g^{-1}$, allora $\bar{\gamma}(0) = gg^{-1} = e$, $\bar{\gamma}(1) = g^{-1}$, quindi $g^{-1} \in G_e$. \square

Proposizione 21. *Sia (G, H) una geometria di Klein e sia G_e la componente dell'identità di G . Sia $H_0 = H \cap G_e$. Allora*

$$(i) \quad G = G_e \cdot H = \{gh \in G \mid g \in G_e, h \in H\}$$

$$(ii) \quad G/H = G_e/H_0$$

Dimostrazione. (i) Chiaramente $G_e \cdot H \subseteq G$. Sia $g \in G$, dato che G/H è connesso, esiste un cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow G/H$ tale che $\gamma(0) = gH$ e $\gamma(1) = eH$. Dato che la proiezione al quoziante $G \rightarrow G/H$ è un fibrato, possiamo sollevare γ a $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow G$ tale che $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(0) = g$ e $\tilde{\gamma}(1) = h \in H$ (perché $\pi(\tilde{\gamma}(1)) \in eH$). Sia ora $\eta : [0, 1] \rightarrow G$, definito da $\eta(t) = \tilde{\gamma}(t)h^{-1}$, allora $\eta(0) = gh^{-1}$ e $\eta(1) = e$, dunque $gh^{-1} \in G_e$. Abbiamo

così trovato $g = (gh^{-1})h$ e quindi $G \subseteq G_e \cdot H$.

(ii) Consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{i} & G \\ \downarrow \pi|_{H_0} & & \downarrow \pi \\ G_e/H_0 & \xrightarrow{j} & G/H \end{array}$$

Allora la mappa $j : G_e/H_0 \rightarrow G/H$ è un'inclusione liscia. Inoltre da (i) si ha che $j \circ \pi|_{H_0}$ è suriettiva, dunque in particolare j è suriettiva.

Siano $g_1, g_2 \in G_e$, allora per il Lemma 3, $g_2^{-1}g_1 \in G_e$, inoltre

$$j(g_1) = j(g_2) \Leftrightarrow g_1 \in g_2H \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$$

In conclusione j è un diffeomorfismo. □

4.4 Geometrie di Klein Locali

Vediamo ora una generalizzazione della nozione di Geometria di Klein

Definizione 61. Sia G un gruppo di Lie, H un suo sottogruppo chiuso e $\Gamma \subseteq G$ un sottogruppo discreto tale che Γ agisce fedelmente per moltiplicazione a sinistra come gruppo delle trasformazioni di rivestimento sullo spazio G/H e il quoziente $(G/H)/\Gamma$ è connesso.

Allora la tripla (Γ, G, H) si chiama **geometria di Klein locale**.

Come nel caso delle geometrie di Klein, le geometrie di Klein locali hanno un fibrato principale associato.

Lemma 4. *Siano Γ e H gruppi di Lie che agiscono con azioni proprie, libere e commutative rispettivamente a sinistra e a destra su X varietà differenziabile. Allora*

$$X/\Gamma \times H \rightarrow X/\Gamma \text{ è propria} \iff \Gamma \times X/H \rightarrow X/H \text{ è propria}$$

Dimostrazione. Per simmetria è sufficiente mostrare \Rightarrow .

Step 1. L'azione

$$\begin{aligned} (\Gamma \times H) \times X &\rightarrow X \\ ((g, h), x) &\mapsto gxh^{-1} \end{aligned}$$

è propria.

Siano $A, B \subseteq X$ compatti e $C = \{(g, h) \in \Gamma \times H \mid gAh \cap B \neq \emptyset\}$.

Sia $(g_n, h_n) \in \Gamma \times H$ una successione in C , A' e B' immagini rispettivamente di A e B in X/Γ . Dato che per ipotesi l'azione di H su X/Γ è propria, si ha che $C' = \{h \in H \mid A'h \cap B' \neq \emptyset\}$, ovvero l'immagine dell'azione di C in X/Γ , è compatto. Dunque la successione di prima (h_n) ammette sottosuccessione convergente ad $h \in C'$.

Dato che $(g_n, h_n) \in C$, possiamo trovare due successioni $(a_n), (b_n)$ rispettivamente in A e in B tali che $g_n a_n h_n = b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre essendo A e B compatti in X , ammettono sottosuccessioni convergenti rispettivamente

ad $a \in A$ e $b \in B$. Restringiamoci ora alle sottosuccessioni, mantenendo con un abuso di notazione, gli stessi indici.

Sia ora $K \subseteq X$ un intorno compatto di ah tale che $\exists \bar{n}$ tale che $\forall n > \bar{n}$, $a_n h_n \in K$. Dato che $\Gamma \times X \rightarrow X$ è propria, l'insieme

$$C'' = \{g \in \Gamma \mid gK \cap \{b\} \neq \emptyset\} = \{g \in \Gamma \mid g^{-1}b \in K\}$$

è compatto. Ora $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}b = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n h_n = ah \in K$. Dunque definitivamente $g_n^{-1}b \in K$ e quindi $g_n \in C''$. Abbiamo così che anche (g_n) ammette una sottosuccessione convergente a $g \in \Gamma$ e quindi la successione da cui eravamo partiti $(g_n, h_n) \in C$ ammette sottosuccessione convergente a $gh \in C$.

Step 2. L'azione $\Gamma \times X/H \rightarrow X/H$ è propria. Siano $A, B \in X/H$ compatti. Vogliamo mostrare che $\{g \in \Gamma \mid gA \cap B \neq \emptyset\}$. $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$, con A_i e B_j compatti. È sufficiente mostrare che $\{g \in \Gamma \mid gA_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ per ogni i, j . Possiamo quindi assumere che A e B siano insieme più "piccoli" (cioè relativi a qualche ricoprimento aperto di X/H). Ora per il Teorema 3, la mappa $X \rightarrow X/H$ è un H -fibrato principale, dunque esiste un ricoprimento aperto di X/H tale che su ogni aperto del ricoprimento, il fibrato $X \rightarrow X/H$ è banale. Assumiamo A e B relativi a tale ricoprimento.

Applicando una sezione locale ad A e B , possiamo ottenere A' e B' compatti in X con immagini A e B in X/H . Dunque $\{(g, h) \in \Gamma \times H \mid gA'h^{-1} \cap B' \neq \emptyset\}$ è compatto, e quindi l'immagine di questo insieme tramite la proiezione canonica $\Gamma \times H \rightarrow \Gamma$ è anch'essa compatta, ma questa immagine è chiaramente $\{g \in \Gamma \mid gA \cap B \neq \emptyset\}$. \square

Teorema 4. *Sia (Γ, G, H) una geometria di Klein locale.*

Allora la mappa $G/\Gamma \rightarrow (G/\Gamma)/H$ è un fibrato H -principale.

Dimostrazione. Dal momento che Γ e H sono sottogruppi chiusi di G , per la Proposizione 18, le loro azioni per moltiplicazione rispettivamente a sinistra e destra sono proprie. Inoltre per lo stesso motivo, l'azione $\Gamma \times (G/H) \rightarrow G/H$,

data dalle definizione di geometria di Klein locale, è libera e propria. Ora per il Lemma 4, si ha che anche l'azione $(G/\Gamma) \times H \rightarrow G/\Gamma$ è libera e propria. Il risultato dunque segue dal Teorema 3. \square

Osservazione 30. Notiamo che se (Γ, G, H) è una geometria di Klein locale, allora la forma di Maurer-Cartan $\omega_G : TG \rightarrow \mathfrak{g}$, siccome è invariante a sinistra, induce una forma $\omega_{G/\Gamma} : T(G/\Gamma) \rightarrow \mathfrak{g}$

4.5 Fibrato Tangente di una Geometria di Klein

Per ogni geometria di Klein (G, H) , come abbiamo visto in 3.3 abbiamo una corrispondente coppia di algebre di Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Se (G, H) è fedele (cioè il nucleo è banale), allora \mathfrak{h} è **irriducibile**, cioè non contiene ideali non banali di \mathfrak{g} .

Definizione 62. Una **geometria di Klein infinitesimale** (o **coppia di Klein**) è una coppia di algebre di Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dove \mathfrak{h} è una sottoalgebra di \mathfrak{g} . Il **nucleo** \mathfrak{k} di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ è il più grande ideale di \mathfrak{g} contenuto in \mathfrak{h} . Se $\mathfrak{k} = \{0\}$, diciamo che $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ è **fedele**.

Osservazione 31. A priori, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ non è un'algebra di Lie, perché \mathfrak{h} non è in generale un ideale.

Consideriamo un H -fibrato principale $\pi : G \rightarrow G/H$ e una carta (U, φ) del fibrato. Abbiamo dunque il diffeomorfismo $\varphi : U \times H \rightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq G$. Questo induce sui fibrati tangentini un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} T(\pi^{-1}(U)) & \xleftarrow{\varphi_*} & T(U \times H) & \xrightarrow{\cong} & TU \times TH \\ & \searrow \pi_* & \downarrow \pi_{U*} & \nearrow p_1 & \\ & & TU & & \end{array}$$

dove $T(U \times H) \cong TU \times TH$ tramite il diffeomorfismo $\pi_{U*} \times \pi_{H*}$.

Dal diagramma precedente, considerando una singola fibra dei fibrati tangentici, si ha che $T_g G \cong T_g(gH) \oplus T_{\pi(g)}U$, inoltre dato che U è un aperto di G/H , si ha $T_{\pi(g)}U = T_{\pi(g)}(G/H)$. Dunque $T_g G / T_g(gH) \cong T_{\pi(g)}(G/H)$. Infine tramite la forma di Maurer-Cartan, $T_g(gH) \cong \mathfrak{h}$ e $T_g G \cong \mathfrak{g}$. Dunque esiste un'unica φ_g tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} T_g(gH) & \xrightarrow{\omega_H} & \mathfrak{h} \\ \downarrow i_* & & \downarrow \\ T_g(G) & \xrightarrow{\omega_G} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \\ T_{\pi(g)}(G/H) & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \end{array}$$

dove con abuso di notazione chiamiamo ω_H la mappa ottenuta dalla composizione $T_g(gH) \xrightarrow{L_{(gh)^{-1}}^*} T_h(hH) = T_h(H) \xrightarrow{\omega_H} \mathfrak{h}$ con $gh \in gH$.

Dato che $\pi R_h(g) = \pi(gh) = \pi(g)$, e che per 17, $R_h^* \omega_H = ad(h^{-1}) \omega_H$, abbiamo che $\varphi_{gh} = ad(h^{-1}) \varphi_g$, infatti dati $v \in T_{\pi(g)}G/H$ e $X \in T_g G$ tale che $\pi_{g*}(X) = v$ si ha

$$\varphi_g(v) = [\omega_H(X)] \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \quad \text{e} \quad \varphi_{gh}(v) = [\omega_H(R_{h*}X)] \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

$$\varphi_{gh}(v) = [\omega_H(R_{h*}X)] = [ad(h^{-1})\omega_H(X)] = ad(h^{-1})[\omega_H(X)] = ad(h^{-1})\varphi_g$$

Dunque l'identificazione tra $T_{\pi(g)}(G/H)$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è univocamente determinata a meno dell'azione aggiunta di H su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Definizione 63. Chiamiamo G -spazio sinistro (destro) uno spazio topologico X dotato di un'azione sinistra (destra) di un gruppo topologico G su di esso (i gruppi di Lie sono in particolare gruppi topologici).

Dato X G -spazio sinistro, Y G -spazio destro, si definisce il **prodotto bilanciato** tra X e Y come $X \times_G Y = (X \times Y)/G$ con azione destra di G su $X \times Y$ data da $(x, y) \cdot g = (g^{-1}x, yg)$ dove si è trasformata l'azione sinistra di G su X in un'azione destra, ponendo per ogni $x \in X$, $xg = g^{-1}x$.

Teorema 5. $T(G/H) \cong G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ come fibrati vettoriali.

Bibliografia

- [1] R. W. Sharpe, *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 166, Springer, New York, 1997
- [2] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2013
- [3] A. Čap and J. Slovák, *Parabolic geometries. I*, Mathematical Surveys and Monographs, 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009; MR2532439
- [4] E. Abbena, S. Console, S. Garbiero. Appunti del corso "Gruppi di Lie" presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino
<https://www.matematica.unito.it/didattica/att/b38e.6252file.pdf>
- [5] E. Latini. Appunti del corso di "Riemannian Geometry" presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Bologna
- [6] P. Etingof. Dal corso "Lie Groups and Lie Algebras" presso il MIT.
https://ocw.mit.edu/courses/18-755-lie-groups-and-lie-algebras-ii-spring-2024/mit18_755_s24_lec_full.pdf
- [7] M. Kerin and D. Wraith, *Homogeneous metrics on spheres*, Published report, 2025, pp. 59–71. <https://durham-repository.worktribe.com/output/1603602>.