



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Matematica

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**Normal Total Variation flow su varietà
2-dimensionali discrete e sua applicazione alla
decomposizione di superfici**

Relatrice

Prof.ssa Serena Morigi

Presentata da

Francesco Costa

Correlatori

Martin Huska

Paolo Zuzolo

Settembre 2025

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Introduzione	2
1 Rappresentazione discreta di una varietà 2-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$	3
1.1 Superfici Continue	3
1.2 Superfici Discrete	7
2 Geometric flows	12
2.1 Funzionale geometrico su superficie e associato Geometric Flow	12
2.2 Flussi geometrici e equazioni di Euler-Lagrange	15
2.3 Funzionale d'area e Mean Curvature flow	16
3 Normal Total Variation flow	19
3.1 Tikhonov flow e TV flow in Imaging	19
3.2 Normal Total Variation flow	21
4 Soluzione Numerica del modello Normal TV flow	23
4.1 Formulazione del modello Normal TV flow + Fidelity (NTV+L2)	23
4.2 Metodo dei volumi finiti	25
4.3 Approssimazione delle Derivate Normali	26
4.4 Approssimazione delle Curvature Principali	28
4.5 Algoritmo per il Normal TV flow	30
5 Decomposizione di superfici tramite Normal TV flow	33
5.1 Il problema della decomposizione di superfici	33
5.2 Processo di acquisizione dati nel contesto tessile	34
5.3 Processo di decomposizione	35
5.4 Esperimenti numerici	39
5.4.1 Studi qualitativi	39
5.4.2 Studio quantitativo	48
Appendice: Normal integration	55

Introduzione

In questa tesi ci proponiamo di implementare un modello in grado di separare i diversi livelli di dettaglio di una superficie data. Effettuiamo una decomposizione della superficie in diverse superfici, ciascuna corrispondente a una specifica scala di dettaglio. Nella nostra applicazione consideriamo tre diverse scale di dettaglio che denominiamo macro, meso e micro. Le superfici oggetto di studio sono varietà 2-dimensionali immerse in $\mathbb{R}^3$ e le discretizziamo mediante mesh a facce quadrilatere definite su griglia rettangolare. Definiamo le varietà 2-dimensionali immerse in $\mathbb{R}^3$ e introduciamo le loro proprietà geometriche fondamentali, come la curvatura media, la curvatura Gaussiana e le curvature principali. Poi introduciamo le mesh a facce quadrilatere e definiamo un corrispettivo nel caso discreto per le proprietà geometriche fondamentali.

Formuliamo il modello di decomposizione come un modello evolutivo della superficie e in maniera tale che l'evoluzione sia guidata dalle proprietà geometriche della superficie stessa. Definiamo sulla superficie alcuni esempi di funzionali d'energia che descrivono le proprietà geometriche della superficie stessa. Definiamo il flusso geometrico come il flusso gradiente che evolve la superficie per minimizzare l'energia associata. Nella nostra applicazione il modello consiste nell'evolvere il campo delle normali della superficie minimizzando l'energia Total Variation applicata al campo delle normali. L'evoluzione tende ad allineare i vettori normali alla superficie preservando i grandi disallineamenti. Indirettamente, l'evoluzione preserva sulla superficie le grandi discontinuità e tende ad appiattire le zone delimitate da esse. Per evitare che la soluzione si discosti eccessivamente dalla superficie iniziale, muniamo il modello evolutivo Normal TV flow di un termine di fedeltà.

Discretizziamo poi il modello, dove per le dimensioni spaziali adottiamo il metodo dei volumi finiti. Il metodo dei volumi finiti consiste nell'approssimare il valore sul singolo vertice con la media su un intorno. Il Teorema della Divergenza conduce il calcolo al bordo dell'intorno, dove siamo in grado di discretizzare le quantità coinvolte. Dalla formulazione numerica otteniamo un sistema algebrico lineare semi-implicito.

Possiamo distinguere i diversi livelli di dettaglio di una superficie evolvendo la superficie stessa. Il modello adottato ha una componente diffusiva descritta dalla curvatura e una componente di fedeltà dipendente dalla distanza. Al procedere dell'evoluzione, la componente diffusiva porta la superficie a perdere prima i dettagli di scala minore e poi i dettagli di scala maggiore. A seconda di quando si arresta il processo e di quanto si pesa il termine di fedeltà, si ottiene la perdita di una certa scala di dettaglio. Tramite le differenze tra la superficie originale e le superfici ottenute durante le evoluzioni si ottengono i diversi livelli di dettaglio, quali macro, meso e micro.

Infine mostriamo il modello applicato a varie superfici campionate a partire da oggetti reali del contesto tessile. Poiché nella pratica spesso non si dispone di un campione con cui confrontare i risultati, la maggior parte degli esperimenti numerici esposti è di natura qualitativa. Nel caso in cui disponiamo del campionamento separato delle diverse scale di dettaglio, effettuiamo uno studio quantitativo. Durante gli esperimenti valutiamo il parametro di fedeltà al variare dell'oggetto reale campionato, della scala di dettaglio da separare e della dimensione del campionamento.

Nel modello adottato l'evoluzione si applica alle normali della superficie, per cui si implementa in parallelo una fase di normal integration che consiste nel ricostruire la superficie a partire dalle nuove normali. Il metodo di ricostruzione implementato fa uso delle trasformate discrete del coseno.

Capitolo 1

Rappresentazione discreta di una varietà 2-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$

In questo capitolo introduciamo le varietà 2-dimensionali immerse, tramite parametrizzazione, nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo nel contesto continuo le principali nozioni di geometria differenziale, quali la curvatura media, la curvatura Gaussiana e le curvature principali. Per questo studio facciamo riferimento al testo di do Carmo [3]. Definiamo, in seguito, i corrispondenti nel contesto discreto, per farne uso poi nella applicazione trattata nei capitoli successivi.

1.1 Superfici Continue

Superficie in forma parametrica. Una superficie parametrica immersa in $\mathbb{R}^3$ è una funzione a valori vettoriali nei parametri $(u, v) \in \Omega$

$$\mathbf{x} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

dove $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ sono funzioni a valori scalari dette componenti o coordinate della superficie. Una superficie è $\mathcal{C}^k$ se lo sono le sue componenti. Di seguito consideriamo superfici di classe almeno $\mathcal{C}^2$. L'immagine $\mathbf{x}(\Omega)$ della parametrizzazione è detta supporto della superficie, che per brevità indichiamo direttamente con S . Una superficie è regolare se per ogni $(u, v) \in \Omega$ si ha che

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

sono vettori linearmente indipendenti.

Superficie ad un sol valore. Un caso particolare di superficie parametrica è la superficie ad un sol valore definita come

$$\mathbf{x} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ z(u, v) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Tale definizione ci torna utile in seguito nelle applicazioni.

Una curva parametrica di parametro $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ di classe almeno $\mathcal{C}^2$ sulla superficie S è una curva in $\mathbb{R}^3$ i cui punti appartengono ad S . Descriviamo la curva tramite composizione con la

parametrizzazione della superficie

$$\gamma : I \rightarrow S \quad (1.4)$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) . \quad (1.5)$$

e il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$ risulta essere

$$\gamma'(t) = \mathbf{x}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t))v'(t) . \quad (1.6)$$

Il piano tangente $T_{\mathbf{x}(u_0, v_0)}S$ alla superficie S nel punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ è il piano formato dalle rette tangenti in $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a tutte le curve su S passanti per $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. In forma parametrica si ha

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) + T_{\mathbf{x}(u_0, v_0)}S = \mathbf{x}(u_0, v_0) + \text{span}\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\} . \quad (1.7)$$

Prima Forma Fondamentale. La restrizione del prodotto canonico di $\mathbb{R}^3$ al piano tangente

$$T_{\mathbf{x}(u_0, v_0)}S = \text{span}\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\} , \quad (1.8)$$

definisce una forma bilineare simmetrica definita positiva che esprime il prodotto tra due vettori tangenti in funzione delle loro coordinate nella base del piano tangente. Siano $X = x_1\mathbf{x}_u + x_2\mathbf{x}_v$ e $Y = y_1\mathbf{x}_u + y_2\mathbf{x}_v$, allora si ha

$$X \cdot Y = (x_1\mathbf{x}_u + x_2\mathbf{x}_v) \cdot (y_1\mathbf{x}_u + y_2\mathbf{x}_v) \quad (1.9)$$

$$= x_1y_1\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + x_2y_2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \quad (1.10)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} , \quad (1.11)$$

dove i coefficienti della matrice sono

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \|\mathbf{x}_u\|^2 , \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v , \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \|\mathbf{x}_v\|^2 , \quad (1.12)$$

Tale matrice

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} , \quad (1.13)$$

è detta Prima Forma Fondamentale della superficie S . Tramite essa si possono calcolare la norma di un vettore tangente

$$\|X\|^2 = X \cdot X = X \mathbf{I} X = Ex_1^2 + 2Fx_1x_2 + Gx_2^2 , \quad (1.14)$$

e il coseno tra due vettori tangenti

$$\cos(\widehat{XY}) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = \frac{x_1y_1E + (x_1y_2 + x_2y_1)F + x_2y_2G}{\sqrt{Ex_1^2 + 2Fx_1x_2 + Gx_2^2} \sqrt{Ey_1^2 + 2Fy_1y_2 + Gy_2^2}} . \quad (1.15)$$

Possiamo calcolare la lunghezza di un arco di curva sulla superficie

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt , \quad (1.16)$$

dove la Prima Forma Fondamentale è in funzione di $(u(t), v(t))$ con $t \in [a, b]$. Tramite la Prima Forma Fondamentale possiamo ricavare l'area della superficie

$$\int_S dA = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv . \quad (1.17)$$

Seconda Forma Fondamentale. Definiamo il versore normale alla superficie S nel punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ come segue

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}(u_0, v_0)) = \frac{\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\|} . \quad (1.18)$$

e, data una curva γ sulla superficie tale che $\gamma(t_0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, definiamo

$$k_n(t_0) := \frac{\gamma''(t_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}(u_0, v_0))}{\|\gamma'(t_0)\|^2} , \quad (1.19)$$

la curvatura normale di γ in $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Si ha

$$k_n(t_0) = \frac{\|\gamma''(t_0)\| \cos \theta}{\|\gamma'(t_0)\|^2} , \quad (1.20)$$

dove θ è l'angolo formato tra il versore normale alla curva e il versore normale alla superficie. Quindi la curvatura normale è minore o uguale alla curvatura standard di γ in $\mathbb{R}^3$ e coincidono solo nel caso in cui il versore normale alla curva coincida con il versore normale alla superficie. Tutte le curve su una superficie S passanti per un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ ed aventi in tal punto lo stesso vettore tangente, hanno la stessa curvatura normale in $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Tale curvatura normale coincide con la curvatura di una sezione normale ottenuta tagliando S con un piano passante per $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ e generato dal vettore tangente alla curva e dal versore normale alla superficie. Calcolando esplicitamente le derivate si ha

$$\gamma''(t_0) = \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0)(u'(t_0))^2 + \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u''(t_0) + 2\mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0)u'(t_0)v'(t_0) \quad (1.21)$$

$$+ \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0)(v'(t_0))^2 + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v''(t_0) , \quad (1.22)$$

da cui si ottiene

$$k_n(t_0) = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} , \quad (1.23)$$

dove

$$e = \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n} , \quad f = \mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n} , \quad g = \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n} , \quad (1.24)$$

sono i coefficienti in funzione di $\sigma(u, v)$ della matrice

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} , \quad (1.25)$$

chiamata Seconda Forma Fondamentale della superficie S . Notiamo che, sia $\gamma'(t_0)$ un vettore unitario sul piano tangente alla superficie,

$$k_n(t_0) = \frac{\gamma'(t_0) \mathbf{II} \gamma'(t_0)}{\gamma'(t_0) \mathbf{I} \gamma'(t_0)} . \quad (1.26)$$

Dato che la Prima Forma Fondamentale è definita positiva, il segno della curvatura normale è determinato dalla Seconda Forma Fondamentale. Un punto di S si dice ellittico, iperbolico o parabolico se la Seconda Forma Fondamentale in tal punto è rispettivamente definita, indefinita o semidefinita.

Curvature principali. La curvatura normale in (1.26) non dipende né dalla velocità né dal verso con cui la curva percorre la superficie, infatti si ha

$$k_n(u', v') = k_n(\lambda u', \lambda v') , \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} , \quad (1.27)$$

Tutti i valori di k_n sono ottenibili variando (u', v') sulla sfera unitaria. Per compattezza della sfera e per la continuità della curvatura normale, ne consegue che k_n , calcolata su un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ al variare di γ , ha massimo e minimo. Definiamo le curvature principali e le direzioni principali.

- *Prima curvatura principale.* La curvatura normale minima $k_1 := \min_t k_n(t)$ è chiamata prima curvatura principale di S in $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.
- *Seconda curvatura principale.* La curvatura normale massima $k_2 := \max_t k_n(t)$ è chiamata seconda curvatura principale di S in $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.
- *Prima direzione principale.* Il vettore unitario ξ_1 tangente a una curva che ha come curvatura normale la prima curvatura principale è detta prima direzione principale.
- *Seconda direzione principale.* Il vettore unitario ξ_2 tangente a una curva che ha come curvatura normale la seconda curvatura principale è detta seconda direzione principale.

Le due direzioni principali e il versore normale di un punto della superficie formano una base ortonormale in $\mathbb{R}^3$. Le curve le cui tangenti in ogni punto sono direzioni principali sono chiamate linee di curvatura.

Curvatura media e Gaussiana. Definiamo ora la curvatura media della superficie

$$H := \frac{k_1 + k_2}{2} , \quad (1.28)$$

e la curvatura gaussiana

$$K := k_1 k_2 . \quad (1.29)$$

Entrambe le quantità sono proprietà geometriche intrinseche della superficie e si possono calcolare a partire dalla Prima e Seconda Forma Fondamentale

$$H = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} , \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} . \quad (1.30)$$

Operatore di Laplace-Beltrami. Sia S una varietà 2-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$ munita della metrica indotta dal prodotto scalare g definito sullo spazio tangente $T_{\mathbf{x}}S$. Sia $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ una base dello spazio tangente, allora le componenti della matrice (g_{ij}) associata alla metrica sono definite come $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ rispetto alla base data. Data una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a valori scalari definita sulla superficie S , definiamo l'operatore di Laplace-Beltrami $\Delta_S f : S \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$\Delta_S f := \operatorname{div}_S(\nabla_S f) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) , \quad (1.31)$$

dove g^{ij} è la componente di posizione ij della matrice inversa di (g_{ij}) . Nel caso l'operatore di Laplace-Beltrami sia applicato alle funzioni coordinate $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ di S , si ottiene l'operatore di Laplace-Beltrami in funzione della curvatura media e del campo delle normali

$$\Delta_S \mathbf{x} = \operatorname{div}_S \cdot \nabla_S \mathbf{x} = -2H \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 , \quad (1.32)$$

dove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario normale.

1.2 Superfici Discrete

Nelle applicazioni necessitiamo di formulare una versione discretizzata del contesto continuo. Introduciamo le mesh poligonali come approssimazione delle superfici continue. Definiamo una mesh come una particolare struttura di grafo. Per questo studio facciamo riferimento al testo di Botsch [2].

Definizione 1 (Grafo). *Definiamo un grafo come una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, dove V è l'insieme di nodi e E è l'insieme degli spigoli. Gli spigoli in E sono coppie di vertici di V .*

Definizione 2 (Mesh poligonale). *Una mesh poligonale è un grafo $M = (V, E, F)$ a cui si aggiunge l'insieme delle facce piane F . Ogni elemento di F è un insieme ordinato di vertici distinti tale che tutti e soli i vertici consecutivi, contando l'ultimo con il primo, sono collegati da uno spigolo. Uno spigolo si dice che appartiene a una faccia se i vertici dello spigolo appartengono alla faccia. L'insieme degli spigoli E di una mesh è tale per cui ogni spigolo appartiene ad almeno una faccia.*

In Fig. 1.1 sono raffigurati a sinistra un grafico generico (a) e a destra una mesh (b).

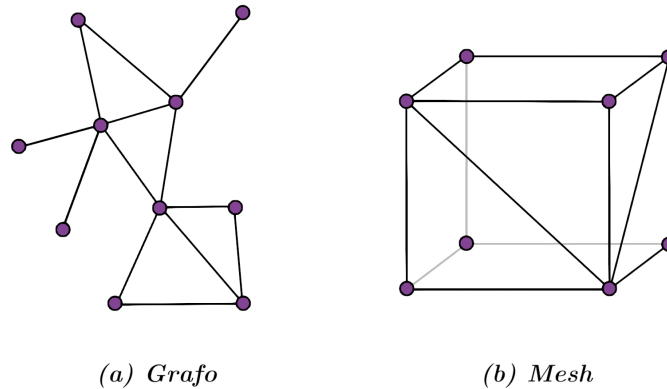


Figura 1.1: A sinistra è raffigurato un grafo, a destra è raffigurata una mesh.

Approssimare una superficie con una mesh poligonale ha i seguenti vantaggi:

- La mesh poligonale consiste in approssimazioni lineari a tratti, quindi facili da definire e calcolare localmente. Inoltre, le zone piatte della superficie sono approssimate fedelmente.
- L'errore è dell'ordine di $O(h^2)$, dove h è la massima lunghezza tra gli spigoli.
- L'errore è inversamente proporzionale al numero di facce, quindi l'aumento dei vertici è un criterio di convergenza alla superficie approssimata.
- C'è un grado di libertà sulle connessioni tra i vertici, la disposizione delle facce e la loro forma. Si può adottare la configurazione più conveniente alla forma.
- La mesh poligonale soddisfa facilmente le condizioni topologiche, come i contorni o la presenza di buchi.
- La mesh poligonale può preservare le informazioni di curvatura della superficie approssimata.

La mesh è immersa in $\mathbb{R}^3$ se ogni suo vertice appartiene a $\mathbb{R}^3$. Le varietà 2-dimensionali sono superfici tali che per ogni suo punto esiste un intorno di tale punto in corrispondenza biettiva e continua con un disco. Una mesh è una varietà 2-dimensionale se per ogni suo vertice la superficie formata dalle facce che circondano tale vertice è in corrispondenza biettiva e continua con un disco. Alcuni esempi di mesh che non siano una varietà 2-dimensionale sono raffigurati in Fig.1.2

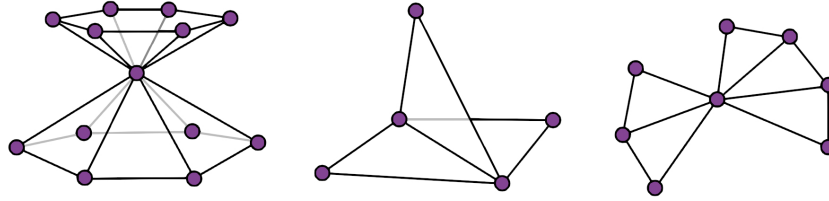


Figura 1.2: Esempi di mesh che non sono varietà 2-dimensionali.

Nella nostra applicazione costruiamo mesh a facce quadrilatera definite su griglie rettangolari interpretate come approssimazioni di varietà 2-dimensionali immerse in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3 (Mesh quadrilatera). *Definiamo una mesh quadrilatera come un insieme $M := (\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n, Q)$, dove $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ è l'insieme dei vertici e $Q = \{Q_j\}_{j=1}^m$ l'insieme delle facce quadrilatera. Ogni faccia $Q_j \in Q$ è un insieme ordinato di quattro vertici distinti tale che tutti e soli i vertici consecutivi, contando l'ultimo con il primo, sono collegati da uno spigolo. L'insieme degli spigoli è definito in funzione delle facce.*

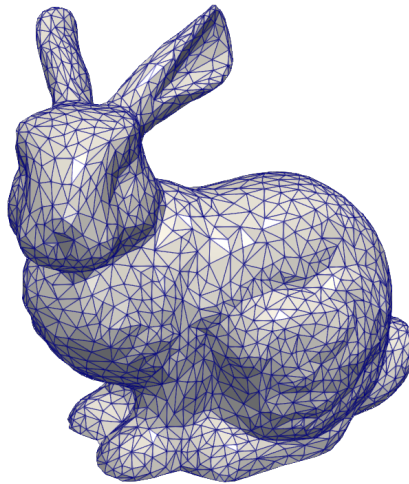


Figura 1.3: Bunny mesh, $\#V = 2502$, $\#E = 7500$, $\#F = 5000$.

Indichiamo con $N_Q(\mathbf{x}_i) = \{Q_j \in Q : \mathbf{x}_i \in Q_j\}$ l'insieme dei quadrati attorno ad un vertice $\mathbf{x}_i$. Localmente in un quadrato Q_j contenente $\mathbf{x}_i$, un vertice è indicato con $\mathbf{x}_j^k$ per $k = 0, \dots, 3$ dove si impone $\mathbf{x}_j^0 = \mathbf{x}_i$. I punti di una faccia Q_j , $j \in N_Q(\mathbf{x}_i)$ possono essere scritti tramite interpolazione bilineare

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - u)(1 - v)\mathbf{x}_j^0 + u(1 - v)\mathbf{x}_j^1 + (1 - u)v\mathbf{x}_j^3 + uv\mathbf{x}_j^2, \quad u \in [0, 1], v \in [0, 1], \quad (1.33)$$

che non produce in generale punti su una faccia piatta, a meno che i quattro vertici originali non siano complanari. Analogamente estendiamo alle facce i valori di una funzione a valori scalari f definita sui vertici della mesh tramite interpolazione bilineare

$$f(u, v) = (1 - u)(1 - v)f_j^0 + u(1 - v)f_j^1 + (1 - u)v f_j^3 + uv f_j^2, \quad u \in [0, 1], v \in [0, 1]. \quad (1.34)$$

Definiamo ora i corrispettivi discreti di ogni quantità geometrica che caratterizza la superficie continua approssimata, come la normale a un vertice, la normale a una faccia, la curvatura media, la curvatura di Gauss, le curvature principali.

Operatori su mesh. Si definisce l'operatore Laplace-Beltrami discreto applicato ad una funzione f definita sulla superficie S e campionata sul vertice $\mathbf{x}_i$ della mesh M come segue

$$\Delta_M f(\mathbf{x}_i) := \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \sum_{j \in N_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)} \omega_{i,j} (f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)), \quad (1.35)$$

dove $N_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)$ è l'insieme dei vertici adiacenti a $\mathbf{x}_i$, $\omega_{i,j} \geq 0$ sono i pesi dell'operatore e $m(\mathcal{V}_i)$ è l'area di un intorno $\mathcal{V}_i$ di $\mathbf{x}_i$.

Elenchiamo di seguito tre metodi principali per la definizione di un intorno di un vertice.

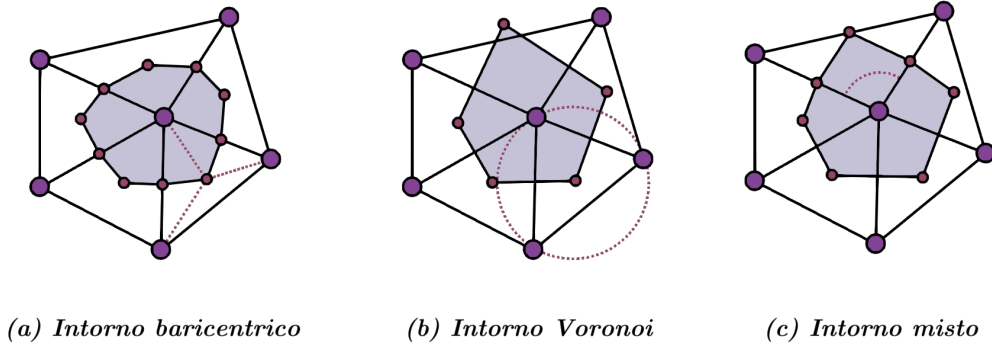


Figura 1.4: Tipologie di intorni.

- *Intorno baricentrico.* In ogni faccia che circonda il vertice si costruisce un quadrato aventi come vertici il baricentro dei quattro vertici della faccia, i punti medi degli spigoli a cui il vertice originale appartiene e il vertice originale stesso. L'intorno $\mathcal{V}_i$ è l'unione di questi quadrati. Tale tipologia di intorno è raffigurata in Fig.1.4 (a)
- *Intorno Voronoi.* Nel caso delle facce a triangolo, per ogni faccia che circonda il vertice si calcola il circocentro dei tre vertici della faccia e $\mathcal{V}_i$ è costruito unendo i circocentri ottenuti. Tale tipologia di intorno è raffigurata in Fig.1.4 (b)
- *Intorno misto.* Si modifica il metodo Voronoi nel contesto in cui un circocentro si trovi al di fuori della faccia su cui è calcolato. In tal caso si prende il punto medio del lato che non contiene il vertice originale. Tale tipologia di intorno è raffigurata in Fig.1.4 (c)

Si ottiene una discretizzazione differente per l'operatore al variare della scelta dei pesi $\omega_{i,j}$. Scegliendo i pesi seguendo la formula delle cotangenti, si ottiene

$$\Delta_M f(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \sum_{j \in N_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)} \frac{\cot \alpha_j + \cot \beta_j}{2} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) , \quad (1.36)$$

dove α_j è l'angolo tra $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}$ e $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j-1}$ e β_j è l'angolo tra $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+1}$ e $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j+1}$, come raffigurato in Fig.1.5.

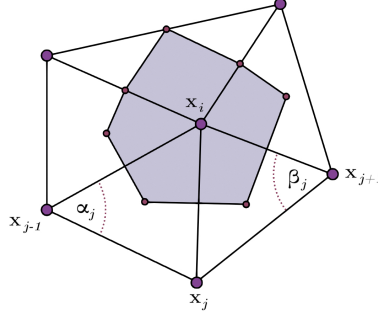


Figura 1.5: Angoli nel metodo delle cotangenti.

Curvatura media. Riconduciamo il calcolo della curvatura media all'operatore di Laplace-Beltrami applicato al vertice $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ della mesh

$$\Delta_M \mathbf{x} = \nabla_M \cdot \nabla_M \mathbf{x} = -2H\mathbf{n}. \quad (1.37)$$

dove $\mathbf{n}$ è il campo delle normali alla superficie. Di conseguenza, $\|H\mathbf{n}\|$ un'approssimazione del modulo della curvatura media, mentre, confrontando la direzione rispetto la normale, si ottiene il segno.

Curvatura Gaussiana. Definiamo la curvatura Gaussiana discreta su un vertice $\mathbf{x}_i$ di una mesh come il deficit angolare in tale vertice

$$K(\mathbf{x}_i) := 2\pi - \sum_{F_j \in N_F(\mathbf{x}_i)} \alpha_{F_j}(\mathbf{x}_i) , \quad (1.38)$$

dove $N_F(\mathbf{x}_i)$ è l'insieme delle facce attorno a $\mathbf{x}_i$ e $\alpha_{F_j}(\mathbf{x}_i)$ è l'angolo formato dai due spigoli della faccia F_j aventi $\mathbf{x}_i$ in comune. Infatti, la curvatura Gaussiana può essere calcolata come il limite della differenza tra la circonferenza di un cerchio sul piano e la circonferenza di un cerchio geodetico sulla superficie. Il teorema di Gauss-Bonnet, che vede la somma delle curvatures di Gauss su tutta la superficie in relazione alla caratteristica di Euler, ha un corrispettivo nel caso discreto

$$\sum_{\mathbf{x}_i \in M} K(\mathbf{x}_i) = 2\pi\chi(M) , \quad (1.39)$$

dove $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero per la superficie M . La curvatura Gaussiana è spesso discretizzata tramite la formula degli arcocoseni

$$K(\mathbf{x}_i) \approx 2\pi - \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \arccos \left(\frac{\mathbf{x}_j^1 - \mathbf{x}_j^0}{\|\mathbf{x}_j^1 - \mathbf{x}_j^0\|} \cdot \frac{\mathbf{x}_j^2 - \mathbf{x}_j^0}{\|\mathbf{x}_j^2 - \mathbf{x}_j^0\|} \right) \quad (1.40)$$

$$+ \arccos \left(\frac{\mathbf{x}_j^2 - \mathbf{x}_j^0}{\|\mathbf{x}_j^2 - \mathbf{x}_j^0\|} \cdot \frac{\mathbf{x}_j^3 - \mathbf{x}_j^0}{\|\mathbf{x}_j^3 - \mathbf{x}_j^0\|} \right) . \quad (1.41)$$

Curvature principali. Ricordando le definizioni di curvatura media (1.28) e di curvatura Gaussiana (1.29), risaliamo alle curvature principali

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} , \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} . \quad (1.42)$$

In Fig.1.6 si mostra l'effetto del calcolo della curvatura media (sinistra) e della curvatura Gaussiana (destra) per la mesh Bunny ($\#V = 2502, \#E = 7500, \#F = 5000$), illustrate con una mappa a falsi colori (blu neg., rosso pos.).

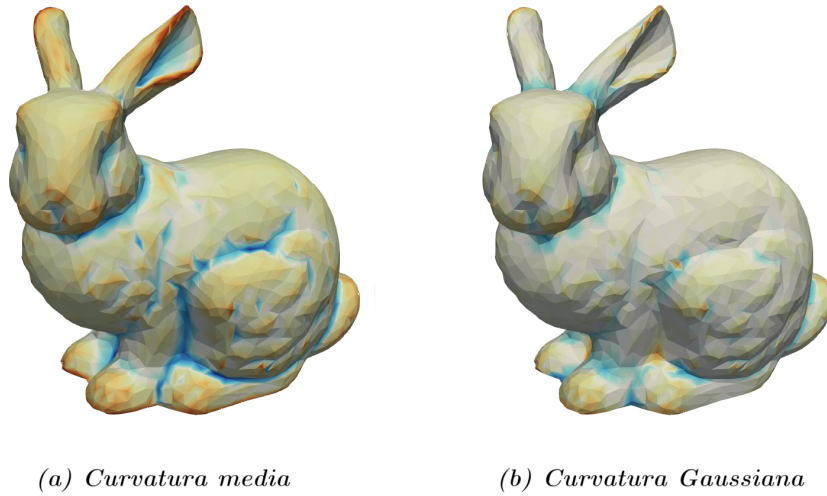


Figura 1.6: Curvatura media e curvatura Gaussiana sulla mesh Bunny.

Capitolo 2

Geometric flows

In questo capitolo introduciamo il concetto di Geometric flow. Definiamo l'evoluzione nel tempo di una superficie in relazione a un problema di minimizzazione di un funzionale di energia definito sulla superficie stessa. Le proprietà geometriche coinvolte nell'evoluzione cambiano a seconda dell'energia adottata. Mostriamo poi come esempio il Mean Curvature flow nel caso particolare di una superficie ad un sol valore.

2.1 Funzionale geometrico su superficie e associato Geometric Flow

Definiamo prima il Gradient flow associato a un funzionale d'energia, riferendoci a [4]. Il Geometric flow è definito come il Gradient flow applicato alle coordinate della superficie stessa su cui l'energia è definita.

Geometric flow. Sia S una superficie ed $\mathcal{F}$ lo spazio dei campi vettoriali definiti su S . Sia $\mathcal{E}$ un funzionale d'energia che misura una certa qualità della superficie. La superficie migliora tale qualità al diminuire dell'energia. Il Gradient flow è l'evoluzione della superficie che segue la direzione di massima pendenza del funzionale. Tramite il calcolo delle variazioni definiamo l'evoluzione di una superficie tramite la nozione debole di derivata di Gâteaux. La derivata di Gâteaux del funzionale d'energia $\mathcal{E}$ su una superficie S lungo la direzione del campo vettoriale $V \in \mathcal{F}$ definito sulla superficie stessa è definita come segue

$$D\mathcal{E}(S)[V] := \left. \frac{d\mathcal{E}(S + \epsilon V)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(S + \epsilon V) - \mathcal{E}(S)}{\epsilon} . \quad (2.1)$$

La nozione di pendenza richiede una metrica, un modo di misurare le distanze e gli angoli. Muniamo lo spazio $\mathcal{F}$ dei campi vettoriali di un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$. Definiamo il gradiente di $\mathcal{E}$ relativo al prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ come il campo vettoriale $\nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S)$ tale che

$$D\mathcal{E}(S)[V] = \langle \nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S), V \rangle_{\mathcal{F}} , \quad \forall V \in \mathcal{F} . \quad (2.2)$$

Definiamo il Gradient flow come l'evoluzione di una superficie iniziale S_0 ottenuta minimizzando il funzionale $\mathcal{E}(S)$ nella direzione del gradiente del funzionale, con segno negativo

$$\frac{dS}{dt} = -\nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S) , \quad S(0) = S_0 . \quad (2.3)$$

Se l'evoluzione esiste, allora l'energia $\mathcal{E}$ decresce durante l'evoluzione

$$\frac{d\mathcal{E}(S)}{dt} = D\mathcal{E}(S)[- \nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S)] = \langle \nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S), -\nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S) \rangle_{\mathcal{F}} = -\|\nabla_{\mathcal{F}}\mathcal{E}(S)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq 0 . \quad (2.4)$$

Il Flusso del Gradiente (Gradient Flow) descrive l'evoluzione di una superficie in una direzione che minimizza un certo funzionale di energia. L'evoluzione non necessariamente dipende dalle proprietà intrinseche della superficie. Il Flusso Geometrico (Geometric Flow) invece descrive l'evoluzione della geometria intrinseca della superficie. L'evoluzione (dinamica del flusso) è guidata da proprietà geometriche locali della superficie stessa, come la curvatura.

Esponiamo di seguito alcuni esempi di energie di interesse, che dipendono dalla forma della superficie, dei flussi per gradiente associati, che in questi casi, sono anche flussi geometrici.

Surface Area - Membrane Energy. Definiamo l'energia d'area su una superficie S come segue

$$\mathcal{E}_1 := \int_S dA . \quad (2.5)$$

Se la superficie è munita di una parametrizzazione $\mathbf{x} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora si ha

$$\mathcal{E}_1 := \int_{\Omega} \|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2 du dv . \quad (2.6)$$

Dal calcolo variazionale si ricava

$$\nabla_S \mathcal{E}_1 = -\Delta_S \mathbf{x} = \nabla_S \cdot \nabla_S \mathbf{x} , \quad (2.7)$$

dove Δ_S è l'operatore di Laplace-Beltrami associato alla superficie S . Quindi il Geometric flow associato all'energia d'area risulta una PDE parabolica

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta_S \mathbf{x} , \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \end{cases} \quad (2.8)$$

dove $\mathbf{x}_0$ è la parametrizzazione della superficie iniziale S_0 . Per il risultato che lega la curvatura media all'operatore di Laplace-Beltrami (1.32) il Geometric flow ottenuto è chiamato Mean Curvature flow.

Total Curvature of a Surface - Thin-Plate Energy. Definiamo l'energia che descrive la curvatura totale su una superficie S come segue

$$\mathcal{E}_2 := \int_S k_1^2 + k_2^2 dA , \quad (2.9)$$

dove k_1, k_2 sono rispettivamente la prima curvatura principale e la seconda curvatura principale. Se la superficie è munita di una parametrizzazione $\mathbf{x} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora si ha

$$\mathcal{E}_2 := \int_{\Omega} \|\mathbf{x}_{uu}\|^2 + 2\|\mathbf{x}_{uv}\|^2 + \|\mathbf{x}_{vv}\|^2 du dv \quad (2.10)$$

Dal calcolo variazionale si ricava

$$\nabla_S \mathcal{E}_2 = -\Delta_S^2 \mathbf{x} = -\Delta_S(\Delta_S \mathbf{x}) , \quad (2.11)$$

dove Δ_S è l'operatore di Laplace-Beltrami associato alla superficie S . Quindi il Geometric flow associato all'energia risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta_S^2 \mathbf{x} , \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \end{cases} \quad (2.12)$$

dove $\mathbf{x}_0$ è la parametrizzazione della superficie iniziale S_0 .

Variation of Curvature. Definiamo l'energia che descrive la variazione di curvatura su una superficie S come segue

$$\mathcal{E}_3 := \int_S \left(\frac{\partial k_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial k_2}{\partial \xi_2} \right)^2 dA , \quad (2.13)$$

dove ξ_1, ξ_2 sono rispettivamente la prima direzione principale e la seconda seconda principale. Dal calcolo variazionale si ricava

$$\nabla_S \mathcal{E}_3 = -\Delta_S^3 \mathbf{x} = -\Delta_S(\Delta_S(\Delta_S \mathbf{x})) . \quad (2.14)$$

Quindi il Geometric flow associato all'energia risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta_S^3 \mathbf{x} , \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \end{cases} \quad (2.15)$$

dove $\mathbf{x}_0$ è la parametrizzazione della superficie iniziale S_0 .

Total Variation del campo delle normali. Sia $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}$ la sfera unitaria. La mappa di Gauss Γ descrive il campo delle normali a una superficie S

$$\begin{aligned} \Gamma : S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{n} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definiamo l'energia che descrive la variazione totale del campo delle normali su una superficie S come segue

$$\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_{TV}(\mathbf{n}) := \int_S (\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\xi_1\|^2 + \|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\xi_2\|^2)^{1/2} dA , \quad (2.17)$$

dove ξ_1, ξ_2 sono rispettivamente la prima e la seconda direzione principale su S e formano una base ortonormale dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}}S$. Come dimostreremo in seguito (3.17), tale energia la possiamo riscrivere in funzione delle curvatures principali

$$\mathcal{E}_{TV}(\mathbf{n}) = \int_S \sqrt{k_1^2 + k_2^2} dA . \quad (2.18)$$

Sia $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale sulla superficie S . La derivata covariante normale $\nabla^N V$ è definita come la proiezione ortogonale delle derivate euclidee del campo vettoriale V sul vettore normale $\mathbf{n}$ alla superficie. $\nabla^N V$ misura la variazione del campo vettoriale che esce dalla superficie S . Dal calcolo variazionale si ricava

$$\nabla_S \mathcal{E}_{TV} = -\mathrm{div}_S \left(\frac{\nabla^N \mathbf{n}}{\|\nabla^N \mathbf{n}\|} \right) , \quad (2.19)$$

dove $\frac{\nabla^N \mathbf{n}}{\|\nabla^N \mathbf{n}\|}$ è la versione normalizzata della derivata covariante normale, come mostrato in [5]. Quindi il Geometric flow associato all'energia risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \mathrm{div}_S \left(\frac{\nabla^N \mathbf{n}}{\|\nabla^N \mathbf{n}\|} \right) , \\ \mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0 , \end{cases} \quad (2.20)$$

dove $\mathbf{n}_0$ è il campo delle normali iniziale. Tale Geometric flow è chiamato Normal TV flow.

2.2 Flussi geometrici e equazioni di Euler-Lagrange

Per una generica energia $\mathcal{E}(f)$, i risultati dell'evoluzione data dal flusso geometrico sono superfici stazionarie ottenute dalle equazioni di Euler-Lagrange.

Equazioni di Euler-Lagrange. Una funzione che sia critica per un funzionale può essere caratterizzata come soluzione di un sistema a equazioni a derivate parziali, conosciute come le equazioni di Euler-Lagrange derivate dal principio variazionale. Ogni soluzione di tali equazioni può essere vista come candidata a essere funzione di minimo per il funzionale. Ricordiamo il calcolo variazionale di un funzionale che coinvolge una funzione scalare a due variabili $f(u, v)$ e le sue derivate parziali prime f_u, f_v . Consideriamo dunque il seguente funzionale energia

$$\mathcal{E}(f) = \iint_{\Omega} L(u, v, f, f_u, f_v) du dv, \quad (2.21)$$

Cerchiamo una funzione f che minimizza tale funzionale e che verifichi le condizioni al bordo date. Poniamoci nel caso di condizioni al bordo miste, di Dirichlet generiche e di Neumann omogenee. Definiamo la seguente funzione scalare

$$h(\epsilon) := \mathcal{E}(f + \epsilon\psi) = \iint_{\Omega} L(u, v, f + \epsilon\psi, f_u + \epsilon\psi_u, f_v + \epsilon\psi_v) du dv, \quad (2.22)$$

dove imponiamo che $\psi(u, v)$ soddisfi le condizioni al bordo di Dirichlet omogenee

$$\psi(u, v) = 0 \quad \text{per } (u, v) \in \Omega, \quad (2.23)$$

affinché $f + \epsilon\psi$ soddisfi le stesse condizioni al bordo di Dirichlet di f dove necessario. Se f è un minimo per J allora $\epsilon = 0$ è un minimo per h . Si ha

$$0 = h'(0) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{E}(f + \epsilon\psi) \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.24)$$

Assumiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente lisce da consentire il passaggio delle derivate sotto il segno di integrale e applichiamo la regola della catena

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{E}(f + \epsilon\psi) \right|_{\epsilon=0} = \iint_{\Omega} \left(\psi \frac{\partial L}{\partial f} + \psi_u \frac{\partial L}{\partial p} + \psi_v \frac{\partial L}{\partial q} \right) du dv, \quad (2.25)$$

dove p e q sono le variabili di posizione f_u e f_v . Per ottenere il gradiente del funzionale riscriviamo l'integrale nella seguente forma di prodotto interno

$$h'(0) = \langle \nabla \mathcal{E}(f), \psi \rangle = \iint_{\Omega} \nabla \mathcal{E}(f) \cdot \psi du dv, \quad (2.26)$$

e, tramite il teorema della divergenza, si ottiene

$$\iint_{\Omega} \left(\psi_u \frac{\partial L}{\partial p} + \psi_v \frac{\partial L}{\partial q} \right) du dv = \int_{\partial\Omega} \psi \left(\frac{\partial L}{\partial p}, \frac{\partial L}{\partial q} \right) \cdot \vec{n} ds - \iint_{\Omega} \psi \left(D_u \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) + D_v \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \right) du dv,$$

dove $\vec{n}$ è il versore normale uscente al bordo $\partial\Omega$. D_u e D_v sono derivate totali. Esse differiscono dalle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$, come mostrato di seguito

$$D_u F(u, v, f, f_u, f_v) = \frac{\partial F}{\partial u} + f_u \frac{\partial F}{\partial f} + f_{uu} \frac{\partial F}{\partial p} + f_{uv} \frac{\partial F}{\partial q}. \quad (2.27)$$

L'integrale lineare sul bordo si annulla se $\psi = 0$. Ciò si verifica nei punti in cui le condizioni al bordo sono di Dirichlet. Dove le condizioni al bordo sono di Neumann naturali

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p}, \frac{\partial L}{\partial q} \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.28)$$

l'integrale lineare sul bordo continua a annullarsi. Si conclude dunque che

$$\langle \nabla \mathcal{E}(f), \psi \rangle = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial f} - D_u \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) - D_v \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \right) \psi \, du \, dv, \quad (2.29)$$

cioè

$$\nabla \mathcal{E}(f) = \frac{\partial L}{\partial f} - D_u \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) - D_v \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right). \quad (2.30)$$

Dato che il gradiente si deve annullare nelle funzioni di minimo, cerchiamo le funzioni critiche che risolvono le equazioni di Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial f}(u, v, f, f_u, f_v) - D_u \left(\frac{\partial L}{\partial p}(u, v, f, f_u, f_v) \right) - D_v \left(\frac{\partial L}{\partial q}(u, v, f, f_u, f_v) \right) = 0. \quad (2.31)$$

Gradient flow. In generale non si risolvono direttamente le equazioni di Euler-Lagrange, ma si approssima la soluzione tramite la discesa del gradiente. La direzione di massima discesa in un punto è data dal gradiente della funzione calcolato in quel punto con il segno negativo. Evolvendo nel tempo lungo la direzione di massima discesa $-\nabla \mathcal{E}$, si ottiene il Gradient flow

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\nabla \mathcal{E}(S), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Dalla (2.30) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = D_u \frac{\partial L}{\partial p} + D_v \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial S}, \\ S(0) = S_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

2.3 Funzionale d'area e Mean Curvature flow

Ora consideriamo l'energia definita in (2.5) e calcoliamo il modello evolutivo associato al funzionale d'area nel caso specifico in cui la superficie S è una varietà 2-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$ con parametrizzazione $\mathbf{x}$ tale che S risulta una superficie ad un sol valore definite in (1.3). Tale superficie ha la seguente area

$$\mathcal{E}_1 = \int_S dA = \iint_{\Omega} \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| \, du \, dv. \quad (2.34)$$

Nel caso particolare di una superficie ad un sol valore, si ha

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_u(u, v) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_v(u, v) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} -z_u(u, v) \\ -z_v(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

L'integrale d'area (2.34) diventa

$$\mathcal{E}_1 = \int_S dA = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} \, du \, dv. \quad (2.37)$$

Il problema di superficie minima consiste nel minimizzare la quantità precedente al variare di z . Ponendo $z_u = p$ e $z_v = q$ e studiando le derivate della funzione lagrangiana $L = \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2}$, si ha

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad (2.38)$$

da cui, ponendo $\nabla \mathcal{E}_1 S = 0$, si ottiene

$$0 = -D_u \frac{z_u}{\sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2}} - D_v \frac{z_v}{\sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2}} = \frac{-(1 + z_v^2)z_{uu} + 2z_u z_v z_{uv} - (1 + z_u^2)z_{vv}}{(1 + z_u^2 + z_v^2)^{3/2}}. \quad (2.39)$$

La curvatura media di una superficie parametrica in un punto è data da

$$H = \frac{\|\mathbf{x}_v\|^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} - 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}) + \|\mathbf{x}_u\|^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}}{2(\|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2)}, \quad (2.40)$$

e segue che la curvatura media per una superficie ad un sol valore ha la forma

$$H = \frac{(1 + z_v^2)z_{uu} - 2z_u z_v z_{uv} + (1 + z_u^2)z_{vv}}{2(1 + z_u^2 + z_v^2)^{3/2}}. \quad (2.41)$$

Da (2.39) si ha che l'equazione di Euler-Lagrange è

$$-2H = 0, \quad (2.42)$$

Dalla (1.32) otteniamo le seguenti equazioni differenziali in termini dell'operatore di Laplace-Beltrami

$$-\nabla_S \cdot \nabla_S \mathbf{x} = 0, \quad (2.43)$$

e, applicando il Gradient flow, si ottiene il modello evolutivo Mean Curvature flow, vedi (2.8),

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta_S \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0, u, v) = \mathbf{x}_0(u, v). \end{cases} \quad (2.44)$$

Tale modello evolutivo consiste nell'evolvere la superficie in modo da minimizzare la curvatura media e, nel farlo, si minimizza anche l'area di superficie. Quindi l'evoluzione tende a lisciare la superficie, rimuovendo i dettagli. Alcune fasi dell'evoluzione della mesh Bunny tramite Mean Curvature flow sono raffigurate in Fig.2.1 che si restringe fino ad un punto. L'eventuale aggiunta di un termine di fedeltà impedisce l'evoluzione di collassare in un punto, come mostrato in [6]. Nonostante l'effetto di smussatura, il Mean Curvature flow può presentare singolarità in tempo finito.

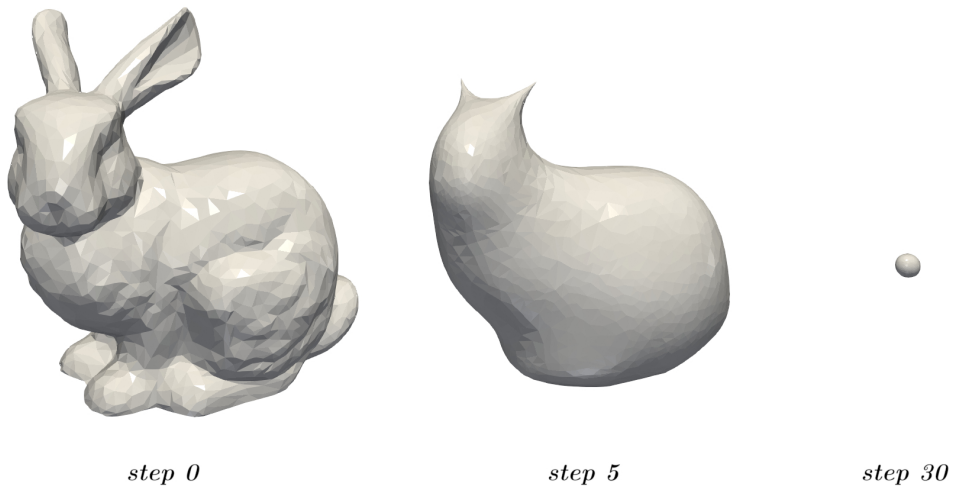


Figura 2.1: Mean Curvature flow applicato alla mesh Bunny.

Capitolo 3

Normal Total Variation flow

In questo capitolo esploriamo il concetto di Total Variation. Introduciamo l'energia nel contesto delle immagini e facciamo un confronto con il metodo di regolarizzazione alla Tikhonov. Poi ritorniamo al contesto delle varietà 2-dimensionali immerse in $\mathbb{R}^3$, dove definiamo il Normal Total Variation flow, il Geometric flow alla base delle nostre applicazioni.

3.1 Tikhonov flow e TV flow in Imaging

Nell'ambito dell'immagine processing, la Total Variation è uno strumento noto per regolarizzare un segnale unidimensionale o un'immagine bidimensionale che può essere interpretata come una superficie ad un sol valore definita su una griglia. È un metodo che preserva le alte discontinuità e rende costanti le aree con poca varianza. Lo mettiamo in relazione con l'altrettanto noto metodo di regolarizzazione alla Tikhonov. Il metodo di Tikhonov tende a diminuire i contrasti e rendere le variazioni morbide. Dato che il Gradient flow ricavato a partire dal metodo di Tikhonov ricorda il Mean Curvature flow, il confronto nel contesto delle immagini aiuta a interpretare un confronto nel contesto delle superfici tra il Mean Curvature Flow e il Total Variation flow. Introduciamo, rispetto all'energia considerata nel Capitolo 2, un termine di fedeltà ai dati, ovvero vogliamo che nella minimizzazione non ci si discosti troppo dal dato iniziale f_0 .

Funzionale di Dirichlet e metodo di Tikhonov. Sia $f(u, v)$ una funzione definita su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo il seguente problema di minimo per il funzionale di Dirichlet

$$f \in \arg \min_f \left\{ \mathcal{E}(f) = \iint_{\Omega} \|\nabla f\|^2 + \lambda(f - f_0)^2 du dv \right\} . \quad (3.1)$$

Da cui si deriva la seguente funzione lagrangiana

$$L(u, v, f, f_u, f_v) = f_u^2 + f_v^2 + \lambda(f - f_0)^2 = p^2 + q^2 + \lambda(f - f_0)^2 , \quad (3.2)$$

con derivate parziali

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 2\lambda(f - f_0) , \quad \frac{\partial L}{\partial p} = 2p = 2f_u , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = 2q = 2f_v . \quad (3.3)$$

Quindi si ha la seguente equazione di Euler-Lagrange

$$\lambda(f - f_0) - \nabla \cdot (\nabla f) = 0 , \quad (3.4)$$

ovvero

$$\lambda(f - f_0) - f_{uu} - f_{vv} = 0 . \quad (3.5)$$

Applicando il Gradient flow si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - \lambda(f - f_0) , \\ f(0, u, v) = f_0(u, v) . \end{cases} \quad (3.6)$$

Funzionale Total Variation. Sviluppiamo il calcolo variazionale a partire dal funzionale della Total Variation, definendo il problema di minimo come segue

$$f \in \arg \min_f \left\{ \mathcal{E}(f) = \iint_{\Omega} \|\nabla f\| + \frac{\lambda}{2}(f - f_0)^2 du dv \right\} . \quad (3.7)$$

Si ha la funzione lagrangiana

$$L = \sqrt{f_u^2 + f_v^2} + \frac{\lambda}{2}(f - f_0)^2 = \sqrt{p^2 + q^2} + \frac{\lambda}{2}(f - f_0)^2 , \quad (3.8)$$

con le seguenti derivate parziali

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \lambda(f - f_0) , \quad \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{f_u}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2}} , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{2q}{2\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{f_v}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2}} , \quad (3.9)$$

che portano all'equazione di Euler-Lagrange

$$\lambda(f - f_0) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) = 0 . \quad (3.10)$$

Applicando il Gradient flow si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) - \lambda(f - f_0) , \\ f(0, x, y) = f_0(x, y) . \end{cases} \quad (3.11)$$

Un confronto tra il metodo di Tikhonov (3.1) e il metodo Total Variation (3.7) è raffigurato in Fig.3.1. L'immagine originale $\bar{f}$ è corrotta con Gaussian Blur ($r = 2$, $\sigma = 2$) e con Additive White Gaussian Noise ($\mu = 0$, $\sigma = 15$) secondo il modello $f_0 = \bar{f} + \eta$, con η rumore additivo bianco.

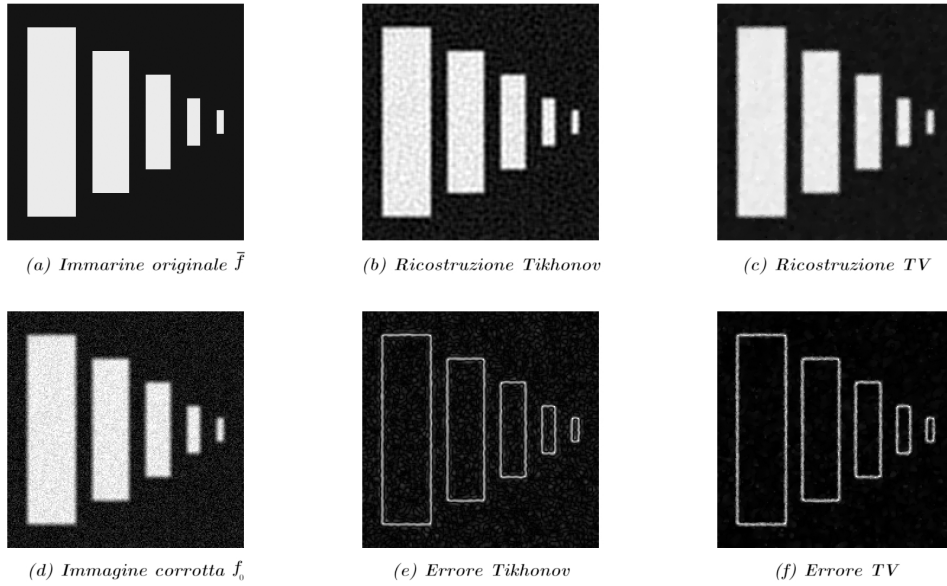


Figura 3.1: Confronto Tikhonov e TV.

3.2 Normal Total Variation flow

Esploriamo ora l'applicabilità della Total Variation a una varietà 2-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$. La prima opzione è implementare un Geometric TV Flow applicato alla parametrizzazione $\mathbf{x}$ della superficie, evolvendo direttamente i punti della superficie. Questo comporta dover definire adeguatamente la norma tensoriale $\|\nabla \mathbf{x}\|$. Nel caso delle coordinate di una superficie, la scelta della definizione è arbitraria. Inoltre, si verificano contesti di anisotropia dove la quantità non è invariante per rotazione, come spiegato in [5]. Quindi la dipendenza dal sistema di riferimento adottato vanifica un'applicabilità consistente del metodo nella pratica.

Consideriamo, in alternativa, il Total Variational Flow applicato alla mappa di Gauss, il campo delle normali alla superficie S .

$$\begin{aligned}\Gamma : S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{n},\end{aligned}\tag{3.12}$$

con associato il seguente differenziale (o derivata di Fréchet)

$$\begin{aligned}d_{\mathbf{x}}\Gamma : T_{\mathbf{x}}S &\rightarrow T_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbb{S}^2 \\ \xi &\mapsto d_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi),\end{aligned}\tag{3.13}$$

con ξ vettore tangente. Lo spazio tangente sulla sfera $\mathbb{S}^2$ è preso in corrispondenza di un versore normale $\Gamma(\mathbf{x})$ e, essendo ortogonale a tale versore in $\mathbb{S}^2$, è identificabile con lo spazio tangente alla superficie sul punto $\mathbf{x}$ su cui è calcolata tale normale, che risulta anch'esso ortogonale al versore normale. Quindi, d'ora in poi, non faremo distinzione tra lo spazio tangente a $\mathbb{S}^2$ in $\Gamma(\mathbf{x})$ e lo spazio tangente a S in $\mathbf{x}$. La corrispondenza tra spazi tangenti è raffigurata in Fig.3.2.

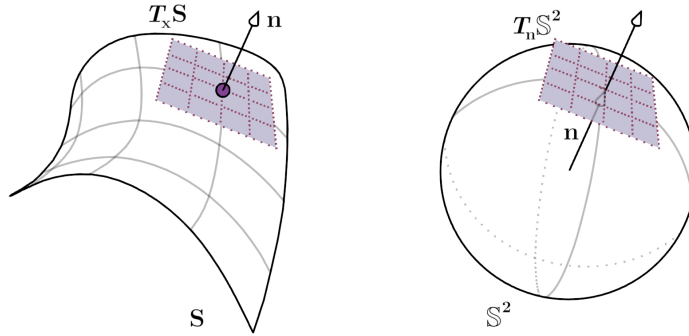


Figura 3.2: Corrispondenza tra gli spazi tangenti.

La Total Variation applicata alle normali pone una nuova prospettiva nell'interpretazione fisica dell'evoluzione. Nel caso delle coordinate, la regolarizzazione va a appiattire direttamente le zone delimitate da grandi salti di discontinuità. Invece i grandi salti vengono preservati. Nel caso delle normali, si preservano i grandi disallineamenti tra le normali, così da individuare le zone ad alta curvatura. Mentre nelle zone a bassa varianza di curvatura le normali vengono allineate e ciò porta le coordinate a essere anch'esse allineate.

Normal Total Variation flow. Il funzionale d'energia definito sulla varietà 2-dimensionale S immersa in $\mathbb{R}^3$ chiamato Normal Total Variation è definito in (2.17). Definiamo la seguente norma tensoriale

$$\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma\| := (\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_1)\|^2 + \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_2)\|^2)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Dimostriamo, seguendo [1], che tale norma è ben definita e non dipende dalla scelta della base $\{\xi_1, \xi_2\}$. Sia $\{\eta_1, \eta_2\}$ un'altra base ortonormale dello spazio tangente. Allora esiste una matrice $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonale tale che $\eta_i = Q\xi_i$ e, ponendo

$$J = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_1), \mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_2)], \quad (3.15)$$

si ha

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_1)\|^2 + \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_2)\|^2 &= \mathrm{Tr}(J^\top J) = \mathrm{Tr}(J^\top J Q Q^\top) = \mathrm{Tr}(Q^\top J^\top J Q) \\ &= \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(Q\xi_1)\|^2 + \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(Q\xi_2)\|^2 \\ &= \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\eta_1)\|^2 + \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\eta_2)\|^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dunque la norma è ben definita. Nello specifico possiamo prendere come base dello spazio tangente le direzioni delle curvature principali che risultano essere ortogonali. Inoltre le direzioni delle curvature principali coincidono con gli autovettori del tensore. Siano ξ_1 e ξ_2 le direzioni delle due curvature principali, allora si ha

$$\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_1)\|^2 + \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma(\xi_2)\|^2 = \|k_1(\xi_1)\|^2 + \|k_2(\xi_2)\|^2 = k_1^2\|(\xi_1)\|^2 + k_2^2\|(\xi_2)\|^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad (3.17)$$

dove k_1 e k_2 sono le curvature principali nel punto $\mathbf{x}$ e allo stesso tempo sono gli autovalori di $\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})$. Lavorando con la mappa di Gauss, sorge una scelta naturale della norma tensoriale che possiamo ridefinire come segue

$$\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma\| := \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad (3.18)$$

e tale valore è indipendente dall'orientamento della superficie rispetto al sistema di riferimento globale in $\mathbb{R}^3$. Riscriviamo quindi l'energia (2.17) in termini delle curvature principali

$$\mathcal{E}_{TV}(\mathbf{n}) = \int_S \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \, \mathrm{d}A. \quad (3.19)$$

Il calcolo variazionale conduce al Normal Total Variation Flow associato

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x})}{\partial t} = \mathrm{div}_S \left(\frac{\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma}{\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\Gamma\|} \right), \\ \Gamma(0, \mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}_0), \end{cases} \quad (3.20)$$

dove abbiamo riscritto la (2.20) in termini della mappa di Gauss $\Gamma(\mathbf{x})$. Tale Geometric flow è alla base del modello che implementiamo nella nostra applicazione.

Capitolo 4

Soluzione Numerica del modello Normal TV flow

In questo capitolo definiamo il modello (3.20) adottato nella nostra applicazione e ne effettuiamo una sua discretizzazione, utilizzando il metodo dei volumi finiti per la componente spaziale. Approssimiamo quindi le quantità coinvolte nel modello, riscrivendole nei termini del metodo utilizzato.

4.1 Formulazione del modello Normal TV flow + Fidelity (NTV+L2)

Scriviamo il modello che andiamo a implementare nelle nostre applicazioni che definiamo in breve NTV+L2. Definiamo il modello Normal Total Variation Flow munito di un termine di fedeltà

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x})}{\partial t} = \operatorname{div}_S \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x})}{\|d\Gamma(\mathbf{x})\|} \right) - \lambda(\Gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}, t_0)) , \\ \Gamma(\mathbf{x}, t_0) = \Gamma(\mathbf{x}(t_0)) , \end{cases} \quad (4.1)$$

dove $\Gamma(\mathbf{x})$ è il campo delle normali alla superficie che evolve, mentre λ pesa il termine di fedeltà e $\Gamma(\mathbf{x}(t_0))$ è il campo delle normali della superficie iniziale. Il modello ha una componente diffusiva descritta dalla divergenza del differenziale dalla mappa di Gauss e una componente di fedeltà dipendente dalla distanza dalle condizioni iniziali. Operiamo una semi-discretizzazione nel tempo

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1}) - \Gamma(\mathbf{x}, t_\ell)}{t_{\ell+1} - t_\ell} = \operatorname{div}_S \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})}{\|d\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})\|} \right) - \lambda(\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1}) - \Gamma(\mathbf{x}, t_0)) , \\ \Gamma(\mathbf{x}, t_0) = \Gamma(\mathbf{x}(t_0)) , \end{cases} \quad (4.2)$$

dove abbiamo discretizzato la derivata temporale con differenze finite in avanti. La discretizzazione nello spazio avviene tramite il metodo dei volumi finiti

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1}) - \Gamma(\mathbf{x}_i, t_\ell)}{t_{\ell+1} - t_\ell} = \operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1})}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1})\|} \right) - \lambda(\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1}) - \Gamma(\mathbf{x}_i, t_0)) , \\ \Gamma(\mathbf{x}_i, t_0) = \Gamma(\mathbf{x}_i(t_0)) , \end{cases} \quad (4.3)$$

dove $M := (\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n, Q)$ è una mesh quadrilatera campionata sulla superficie S . Approssimiamo la divergenza con una media integrale sul volume di controllo $\mathcal{V}_i$ associato al vertice $\mathbf{x}_i$ e poi applichiamo il teorema della divergenza

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1})}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1})\|} \right) = \frac{1}{m(\mathcal{V}_i(t_{\ell+1}))} \int_{\mathcal{V}_i(t_{\ell+1})} \operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})}{\|d\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})\|} \right) dA \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{m(\mathcal{V}_i(t_{\ell+1}))} \int_{\partial \mathcal{V}_i(t_{\ell+1})} \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1}) \cdot \vec{n}}{\|d\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})\|} ds , \quad (4.5)$$

così da ottenere la seguente formulazione

$$\begin{cases} m(\mathcal{V}_i(t_{\ell+1}))\left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right)\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1}) - \int_{\partial\mathcal{V}_i(t_{\ell+1})} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1}) \cdot \vec{n}}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1})\|} \mathrm{d}s = m(\mathcal{V}_i(t_{\ell} + 1)) \left(\frac{\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell})}{\tau} + \lambda\Gamma(\mathbf{x}_i, t_0) \right), \\ \Gamma(\mathbf{x}_i, t_0) = \Gamma(\mathbf{x}_i(t_0)). \end{cases} \quad (4.6)$$

Poiché il modello ottenuto è implicito e di difficile risoluzione, ne proponiamo una variante semi-implicita. Consideriamo il volume di controllo $\mathcal{V}_i$ e la norma tensoriale $\|\mathrm{d}\Gamma\|$ al passo precedente anziché al passo corrente

$$\begin{cases} m(\mathcal{V}_i(t_{\ell}))\left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right)\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell+1}) - \int_{\partial\mathcal{V}_i(t_{\ell})} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell+1}) \cdot \vec{n}}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}, t_{\ell})\|} \mathrm{d}s = m(\mathcal{V}_i(t_{\ell})) \left(\frac{\Gamma(\mathbf{x}_i, t_{\ell})}{\tau} + \lambda\Gamma(\mathbf{x}_i, t_0) \right), \\ \Gamma(\mathbf{x}_i, t_0) = \Gamma(\mathbf{x}_i(t_0)). \end{cases} \quad (4.7)$$

Come esposto più approfonditamente in seguito, proponiamo la seguente discretizzazione dell'integrale coinvolto

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{V}_i} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Gamma \cdot \vec{n}}{\|\mathrm{d}\Gamma\|} \mathrm{d}s \approx & \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \frac{m(e_j^1)}{|\mathbf{N}_j^1|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 + 3\mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^1}{2} (-\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right] \\ & + \frac{m(e_j^3)}{|\mathbf{N}_j^3|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + 3\mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^3}{2} (-\mathbf{n}_j^0 + \mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right]. \end{aligned}$$

La somma è rispetto alle facce quadrilatere a cui $\mathbf{x}_i$ appartiene. $\mathbf{n}_j^0, \mathbf{n}_j^1, \mathbf{n}_j^2, \mathbf{n}_j^3$ sono rispettivamente i vettori normali ai quattro vertici $\mathbf{x}_j^0, \mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2, \mathbf{x}_j^3$ della faccia al tempo corrente $t_{\ell+1}$. Mentre $k_1^0, k_1^1, k_1^2, k_1^3$ e $k_2^0, k_2^1, k_2^2, k_2^3$ sono rispettivamente le curvature principali nei vertici $\mathbf{x}_j^0, \mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2, \mathbf{x}_j^3$ al tempo precedente t_{ℓ} . Con $\mathbf{N}_j^1$ e $\mathbf{N}_j^3$ sono indicate le normali uscenti dai lati e_j^1 e e_j^3 del bordo del volume di controllo $\mathcal{V}_i$ al tempo precedente t_{ℓ} .

Sistema Lineare. La discretizzazione semi-implicita adottata porta il modello iniziale nella forma di un sistema algebrico lineare $Ax = b$. L'incognita x consiste nelle componenti dei vettori normali $\Gamma(\mathbf{x}_i) = \mathbf{n}_i$ al tempo $t_{\ell} + 1$. I coefficienti della matrice A alla riga i -esima sono nulli al di fuori delle posizioni relative ai vertici del volume di controllo $\mathcal{V}_i$. L'entrata i -esima del termine noto b dipende dal vettore normale $\Gamma(\mathbf{x}_i) = \mathbf{n}_i$ al tempo t_{ℓ} e t_0 e dall'area del volume di controllo $\mathcal{V}_i$ al tempo t_{ℓ} . L'area di $\mathcal{V}_i$ è calcolata tramite i vertici del volume di controllo stesso (4.11). La matrice A dei coefficienti del sistema risulta simmetrica, definita positiva e sparsa, quindi ci affidiamo al risolutore PCG (Preconditioned Conjugate Gradient).

Condizioni al bordo. L'unicità della soluzione del sistema ottenuto è data ponendo delle condizioni al bordo di Dirichlet. Imponiamo che il campo delle normali lungo il bordo rimanga inalterato rispetto al passo precedente. Dato che i dettagli da decomporre sono presenti pure al bordo, il bordo non rimane invariato per tutta l'evoluzione. A ogni passo, il bordo evolve separatamente, poi viene fissato e si evolve l'interno della superficie. Le normali al bordo evolvono sempre secondo il modello del Normal TV flow, con condizioni al bordo di Dirichlet che vedono fisse le normali ai quattro angoli della mesh.

Separazione delle componenti. Le equazioni trattate sono a valori vettoriali, infatti, nella pratica evolviamo le tre componenti delle normali separatamente. La divergenza è applicata separatamente sulle singole entrate delle normali, mentre al denominatore la quantità è la medesima per tutte e tre le entrate. La norma tensoriale in comune al denominatore consente di pesare localmente l'evoluzione allo stesso modo su tutte e tre le entrate, evitando fenomeni di anisotropia.

4.2 Metodo dei volumi finiti

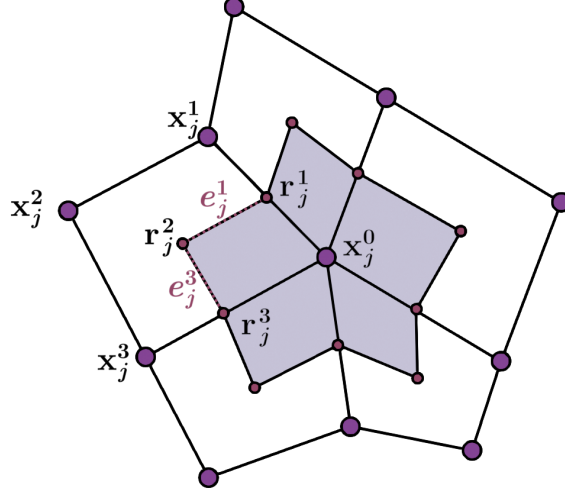


Figura 4.1: Volume di controllo $\mathcal{V}_i$ indicato con l'area colorata, indici locali dei quadrati, vertici e spigoli.

La superficie su cui operiamo è una mesh quadrilatera $M := (\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n, Q)$, dove $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ è l'insieme dei vertici e Q l'insieme delle facce quadrilatere, e chiamiamo $N_Q(\mathbf{x}_i) = \{Q_j \in Q : \mathbf{x}_i \in Q_j\}$ l'insieme dei quadrati attorno ad un vertice $\mathbf{x}_i$. Localmente, in un quadrato Q_j contenente $\mathbf{x}_i$, un vertice è indicato con $\mathbf{x}_j^k$ per $k = 0, \dots, 3$ dove si impone $\mathbf{x}_j^0 = \mathbf{x}_i$.

Metodo dei volumi finiti. Per discretizzare spazialmente il modello adottiamo il metodo dei volumi finiti, seguendo [6]. Il metodo dei volumi finiti approssima una superficie continua con l'unione disgiunta di insiemi $\mathcal{V}_i$ chiamati volumi di controllo. Nel caso della mesh poligonale M , i volumi di controllo $\mathcal{V}_i$ sono costruiti attorno ad ogni vertice $\mathbf{x}_i \in M$. Nelle nostre applicazioni il volume di controllo $\mathcal{V}_i$ è costruito tramite combinazione baricentrica dei vertici delle facce quadrilatere vicine al vertice $\mathbf{x}_i$. In ogni faccia che circonda il vertice si costruisce una faccia quadrilatera aventi come vertici il baricentro dei quattro vertici della faccia, i punti medi degli spigoli a cui il vertice originale appartiene e il vertice originale stesso. L'intorno $\mathcal{V}_i$ è l'unione di delle facce quadrilatere ottenute con il metodo baricentrico. I vertici delle facce ottenute si possono scrivere come segue

$$\mathbf{r}_j^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_j^0 + \mathbf{x}_j^1), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{r}_j^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_j^0 + \mathbf{x}_j^1 + \mathbf{x}_j^2 + \mathbf{x}_j^3), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{r}_j^3 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_j^0 + \mathbf{x}_j^3), \quad (4.10)$$

mentre l'area dell'intero volume di controllo è data da

$$m(\mathcal{V}_i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \|(\mathbf{r}_j^1 - \mathbf{x}_j^0) \times (\mathbf{r}_j^2 - \mathbf{x}_j^0)\| + \|(\mathbf{r}_j^2 - \mathbf{x}_j^0) \times (\mathbf{r}_j^3 - \mathbf{x}_j^0)\|. \quad (4.11)$$

Un esempio di volume di controllo è raffigurato in Fig.4.1

Media integrale. Approssimiamo la quantità

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i)}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i)\|} \right), \quad (4.12)$$

calcolandone il valore medio sul volume di controllo V_i centrato in $\mathbf{x}_i$. Si ha dunque

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i)}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i)\|} \right) \approx \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\mathcal{V}_i} \operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x})}{\|d\Gamma(\mathbf{x})\|} \right) dA, \quad (4.13)$$

e applicando il Teorema della Divergenza si ottiene

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i)}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i)\|} \right) \approx \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \frac{d\Gamma(\mathbf{x})(\vec{n})}{\|d\Gamma(\mathbf{x})\|} ds = \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \frac{\nabla_M \Gamma(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|d\Gamma(\mathbf{x})\|} ds, \quad (4.14)$$

dove $\vec{n}$ è il versore normale uscente dal bordo ∂V_i del volume di controllo. Adottando la norma tensoriale (3.18) si ottiene infine

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{d\Gamma(\mathbf{x}_i)}{\|d\Gamma(\mathbf{x}_i)\|} \right) \approx \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \frac{\nabla_M \Gamma(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds, \quad (4.15)$$

dove k_1 e k_2 sono le curvature principali definite sui punti del bordo. Quindi è nostro intento discretizzare le curvature principali e le derivate direzionali lungo le normali uscenti sui bordi dei volumi di controllo.

4.3 Approssimazione delle Derivate Normali

Di seguito descriviamo l'interpolazione bilineare utilizzata per approssimare le derivate direzionali lungo le normali uscenti dal bordo del volume di controllo di una generica funzione f a valori scalari. Poi estendiamo il risultato alle componenti della mappa di Gauss. Le quantità che vengono trattate in seguito sono raffigurate in Fig.4.2

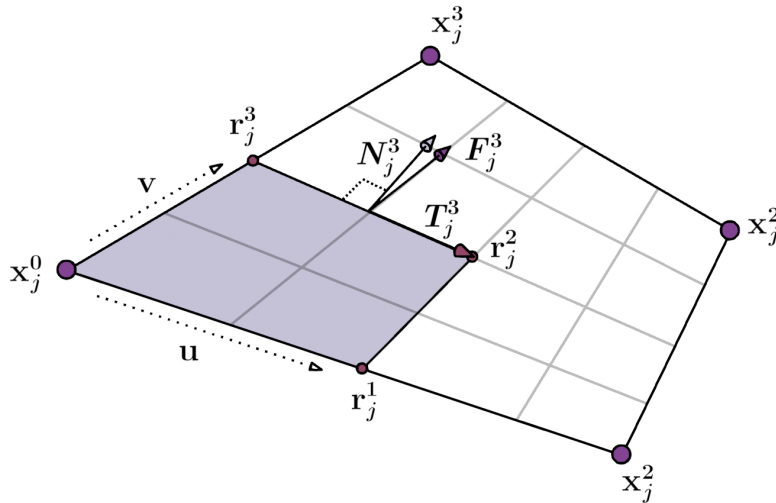


Figura 4.2: Interpolazione bilineare in Q_j e approssimazione del vettore normale uscente $\mathbf{N}_j^3$.

Dal Teorema di Green otteniamo un integrando definito secondo le derivate direzionali lungo le normali uscenti dai bordi

$$\int_{\mathcal{V}_i} \Delta_M f \, dS = \int_{\partial \mathcal{V}_i} \nabla_M f \cdot \vec{n} \, ds = \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \int_{e_j^1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_j^1} \, ds + \int_{e_j^3} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_j^3} \, ds. \quad (4.16)$$

Scriviamo i punti su una faccia quadrilatera $Q_j \in N_Q(\mathbf{x}_i)$ tramite interpolazione bilineare

$$\mathbf{x}(u, v) = (1-u)(1-v)\mathbf{x}_j^0 + u(1-v)\mathbf{x}_j^1 + (1-u)v\mathbf{x}_j^3 + uv\mathbf{x}_j^2, \quad u \in [0, 1], \, v \in [0, 1], \quad (4.17)$$

e analogamente anche i valori di una funzione f a valori scalari definita sui vertici della mesh

$$f(u, v) = (1-u)(1-v)f_j^0 + u(1-v)f_j^1 + (1-u)v f_j^3 + uv f_j^2, \quad u \in [0, 1], \, v \in [0, 1]. \quad (4.18)$$

Le derivate di $\mathbf{x}(u, v)$ sono

$$\begin{aligned} \partial_u \mathbf{x}(u, v) &= -(1-v)\mathbf{x}_j^0 + (1-v)\mathbf{x}_j^1 - v\mathbf{x}_j^3 + v\mathbf{x}_j^2, \\ \partial_v \mathbf{x}(u, v) &= -(1-u)\mathbf{x}_j^0 - u\mathbf{x}_j^1 + (1-u)\mathbf{x}_j^3 + u\mathbf{x}_j^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

I vettori tangenti agli spigoli e_j^1 ed e_j^3 sono definiti tramite le derivate di $\mathbf{x}$ lungo tali spigoli. Approssimiamo i vettori tangenti lungo tutto lo spigolo con il vettore tangente nel punto medio dello spigolo

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_j^3 &= \partial_u \mathbf{x}(1/4, 1/2) = -1/2\mathbf{x}_j^0 + 1/2\mathbf{x}_j^1 - 1/2\mathbf{x}_j^3 + 1/2\mathbf{x}_j^2, \\ \mathbf{T}_j^1 &= \partial_v \mathbf{x}(1/2, 1/4) = -1/2\mathbf{x}_j^0 - 1/2\mathbf{x}_j^1 + 1/2\mathbf{x}_j^3 + 1/2\mathbf{x}_j^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tramite le derivate di $\mathbf{x}$ definiamo i vettori che indicano la direzione uscente dai due spigoli

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j^1 &= \partial_u \mathbf{x}(1/2, 1/4) = -3/4\mathbf{x}_j^0 + 3/4\mathbf{x}_j^1 - 1/4\mathbf{x}_j^3 + 1/4\mathbf{x}_j^2, \\ \mathbf{F}_j^3 &= \partial_v \mathbf{x}(1/4, 1/2) = -3/4\mathbf{x}_j^0 - 1/4\mathbf{x}_j^1 + 3/4\mathbf{x}_j^3 + 1/4\mathbf{x}_j^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Utilizzando i vettori definiti in precedenza, calcoliamo la normale uscente dallo spigolo e_j^1 nel punto medio tramite il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_j^1 &= \mathbf{F}_j^1 - \frac{\mathbf{F}_j^1 \cdot \mathbf{T}_j^1}{\mathbf{T}_j^1 \cdot \mathbf{T}_j^1} \mathbf{T}_j^1 \\ &= -\frac{3}{4}\mathbf{x}_j^0 + \frac{3}{4}\mathbf{x}_j^1 - \frac{1}{4}\mathbf{x}_j^3 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_j^2 - a_j^1 \left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_j^0 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^3 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^2 \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove $a_j^1 = (\mathbf{F}_j^1 \cdot \mathbf{T}_j^1) / (\mathbf{T}_j^1 \cdot \mathbf{T}_j^1)$. Analogamente sullo spigolo e_j^3 si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_j^3 &= \mathbf{F}_j^3 - \frac{\mathbf{F}_j^3 \cdot \mathbf{T}_j^3}{\mathbf{T}_j^3 \cdot \mathbf{T}_j^3} \mathbf{T}_j^3 \\ &= -\frac{3}{4}\mathbf{x}_j^0 - \frac{1}{4}\mathbf{x}_j^1 + \frac{3}{4}\mathbf{x}_j^3 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_j^2 - a_j^3 \left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_j^0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^3 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^2 \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

dove $a_j^3 = (\mathbf{F}_j^3 \cdot \mathbf{T}_j^3) / (\mathbf{T}_j^3 \cdot \mathbf{T}_j^3)$. Infine, la derivata di f nella direzione normale allo spigolo e_j^1 è approssimata come segue

$$\frac{\partial f}{\partial n_j^1} \approx \left(-\frac{3}{4}f_j^0 + \frac{3}{4}f_j^1 - \frac{1}{4}f_j^3 + \frac{1}{4}f_j^2 - \frac{a_j^1}{2}(-f_j^0 - f_j^1 + f_j^3 + f_j^2) \right) / |\mathbf{N}_j^1|, \quad (4.24)$$

e analogamente sullo spigolo e_j^3 si ha

$$\frac{\partial f}{\partial n_j^3} \approx \left(-\frac{3}{4}f_j^0 - \frac{1}{4}f_j^1 + \frac{3}{4}f_j^3 + \frac{1}{4}f_j^2 - \frac{a_j^1}{2}(-f_j^0 + f_j^1 - f_j^3 + f_j^2) \right) / |\mathbf{N}_j^1|. \quad (4.25)$$

L'approssimazione sui punti medi degli spigoli ci consente di portare le derivazioni fuori dal segno di integrale. L'integrale su un volume di controllo $\mathcal{V}_i$ dell'operatore di Laplace-Beltrami applicato ad una generica funzione f risulta

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \nabla_M f \cdot \vec{n} \, ds \approx & \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \frac{m(e_j^1)}{|\mathbf{N}_j^1|} \left[\frac{1}{4} (-3f_j^0 + 3f_j^1 - f_j^3 + f_j^2) - \frac{a_j^1}{2} (-f_j^0 - f_j^1 + f_j^3 + f_j^2) \right] \\ & + \frac{m(e_j^3)}{|\mathbf{N}_j^3|} \left[\frac{1}{4} (-3f_j^0 - f_j^1 + 3f_j^3 + f_j^2) - \frac{a_j^3}{2} (-f_j^0 + f_j^1 - f_j^3 + f_j^2) \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

Consideriamo le componenti della mappa di Gauss Γ separatamente e interpretando f come il valore della singola coordinata della normale alla superficie. L'applicazione del metodo volumi finiti al Normal Total Variation flow prende la seguente formulazione

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \frac{\nabla_M \Gamma(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\|} \, ds \approx & \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \frac{\int_{e_j^1} \frac{ds}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\|}}{|\mathbf{N}_j^1|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 + 3\mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^1}{2} (-\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right] \\ & + \frac{\int_{e_j^3} \frac{ds}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\|}}{|\mathbf{N}_j^3|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + 3\mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^3}{2} (-\mathbf{n}_j^0 + \mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right], \end{aligned}$$

dove $\mathbf{n}_j^0, \mathbf{n}_j^1, \mathbf{n}_j^2, \mathbf{n}_j^3$ sono le normali alla superficie rispettivamente sui vertici $\mathbf{x}_j^0, \mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2, \mathbf{x}_j^3$.

4.4 Approssimazione delle Curvature Principali

Norma tensoriale. Dai precedenti calcoli rimane da gestire

$$\int_{e_i^h} \frac{ds}{\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\|}. \quad (4.27)$$

Abbiamo definito precedentemente una norma tensoriale che preserva le informazioni di curvatura della superficie

$$\|\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x})\| := \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad (4.28)$$

dove k_1 e k_2 sono le curvature principali calcolate in $\mathbf{x}$. Risaliamo al valore delle curvature principali tramite la curvatura media e la curvatura gaussiana come mostrato in (1.42).

Curvatura media. Si riconduce il calcolo della curvatura media all'operatore di Laplace-Beltrami applicato ai punti della superficie

$$-2H\mathbf{n} = \Delta_M \mathbf{x} = \nabla_M \cdot \nabla_M \mathbf{x}. \quad (4.29)$$

dove $\mathbf{n}$ è la normale alla superficie. Nel caso di una mesh a facce quadralatere, approssimiamo la curvatura media sempre tramite il metodo dei volumi finiti

$$-2H(\mathbf{x}_i)\mathbf{n}_i \approx \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\mathcal{V}_i} \Delta_M \mathbf{x} \, dA = \frac{1}{m(\mathcal{V}_i)} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \nabla_M \mathbf{x} \cdot \vec{n} \, ds. \quad (4.30)$$

Considerando le coordinate della superficie separatamente, interpretiamo f in (4.26) come il valore della singola componente della parametrizzazione $\mathbf{x}$. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \nabla_M \mathbf{x} \cdot \vec{n} \, ds \approx & \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \frac{m(e_j^1)}{|\mathbf{N}_j^1|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{x}_j^0 + 3\mathbf{x}_j^1 - \mathbf{x}_j^3 + \mathbf{x}_j^2) - \frac{a_j^1}{2} (-\mathbf{x}_j^0 - \mathbf{x}_j^1 + \mathbf{x}_j^3 + \mathbf{x}_j^2) \right] \\ & + \frac{m(e_j^3)}{|\mathbf{N}_j^3|} \left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{x}_j^0 - \mathbf{x}_j^1 + 3\mathbf{x}_j^3 + \mathbf{x}_j^2) - \frac{a_j^3}{2} (-\mathbf{x}_j^0 + \mathbf{x}_j^1 - \mathbf{x}_j^3 + \mathbf{x}_j^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Calcolando la norma del risultato si ottiene un'approssimazione del modulo della curvatura media, mentre confrontando la direzione rispetto il vettore normale si ottiene il segno della curvatura media.

Rimandiamo il calcolo della curvatura Gaussiana a (1.41).

Curvature principali. Le curvature principali lungo lo spigolo e_j^1 sono approssimate prendendone il valore nel punto medio dello spigolo tramite interpolazione bilineare

$$k_1(1/2, 1/4) = \frac{3}{8}k_1^0 + \frac{3}{8}k_1^1 + \frac{1}{8}k_1^3 + \frac{1}{8}k_1^2, \quad (4.32)$$

$$k_2(1/2, 1/4) = \frac{3}{8}k_2^0 + \frac{3}{8}k_2^1 + \frac{1}{8}k_2^3 + \frac{1}{8}k_2^2, \quad (4.33)$$

da cui si ha

$$\|d\Gamma(\mathbf{x})\| \approx \frac{1}{8} \sqrt{(3k_1^0 + 3k_1^1 + k_1^3 + k_1^2)^2 + (3k_2^0 + 3k_2^1 + k_2^3 + k_2^2)^2}. \quad (4.34)$$

Analogamente sullo spigolo e_j^3 si hanno

$$k_1(e_j^3) := k_1(1/4, 1/2) = \frac{3}{8}k_1^0 + \frac{1}{8}k_1^1 + \frac{3}{8}k_1^3 + \frac{1}{8}k_1^2, \quad (4.35)$$

$$k_2(e_j^3) := k_2(1/4, 1/2) = \frac{3}{8}k_2^0 + \frac{1}{8}k_2^1 + \frac{3}{8}k_2^3 + \frac{1}{8}k_2^2, \quad (4.36)$$

e si ottiene la seguente approssimazione della norma tensoriale

$$\|d\Gamma(\mathbf{x})\| \approx \frac{1}{8} \sqrt{(3k_1^0 + k_1^1 + 3k_1^3 + k_1^2)^2 + (3k_2^0 + k_2^1 + 3k_2^3 + k_2^2)^2}. \quad (4.37)$$

In conclusione, la discretizzazione spaziale della divergenza su un volume di controllo $\mathcal{V}_i$ è

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}_i} \frac{\nabla_M \Gamma(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|d\Gamma(\mathbf{x})\|} \, ds \approx & \sum_{j \in N_Q(\mathbf{x}_i)} \frac{m(e_j^1)}{|\mathbf{N}_j^1|} \frac{\left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 + 3\mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^1}{2} (-\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right]}{\frac{1}{8} \sqrt{(3k_1^0 + 3k_1^1 + k_1^3 + k_1^2)^2 + (3k_2^0 + 3k_2^1 + k_2^3 + k_2^2)^2}} \\ & + \frac{m(e_j^3)}{|\mathbf{N}_j^3|} \frac{\left[\frac{1}{4} (-3\mathbf{n}_j^0 - \mathbf{n}_j^1 + 3\mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) - \frac{a_j^3}{2} (-\mathbf{n}_j^0 + \mathbf{n}_j^1 - \mathbf{n}_j^3 + \mathbf{n}_j^2) \right]}{\frac{1}{8} \sqrt{(3k_1^0 + k_1^1 + 3k_1^3 + k_1^2)^2 + (3k_2^0 + k_2^1 + 3k_2^3 + k_2^2)^2}}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{n}_j^0, \mathbf{n}_j^1, \mathbf{n}_j^2, \mathbf{n}_j^3$ sono le normali alla superficie rispettivamente sui punti $\mathbf{x}_j^0, \mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2, \mathbf{x}_j^3$.

4.5 Algoritmo per il Normal TV flow

Descriviamo di seguito la struttura dell'algoritmo DEC che implementa l'evoluzione di una superficie. In input si ha una mesh a facce quadrilatera definita su un dominio rettangolare e in output una mesh a facce quadrilatera sempre definita sullo stesso dominio rettangolare. Per differenza si ottiene una seconda mesh in output. Tramite i valori locali della mesh iniziale, viene discretizzata la mappa di Gauss che ritorna i vettori normali iniziali ai vertici della mesh. Dato che l'evoluzione è applicata alle normali, esse non dovranno più essere riscalcolate in funzione della mesh. D'altra parte, la metrica definita sulla mesh, essenziale per risolvere il modello con il metodo dei volumi finiti, deve essere aggiornata a ogni passo. Per cui i vertici vengono ricalcolati ogni volta tramite la normal integration. Per uno studio approfondito del modello di normal integration adottato rimandiamo all'Appendice.

Criteri di arresto. Il processo è iterativo e si arresta quando si raggiunge un criterio di arresto che valuta la stazionarietà dell'evoluzione. Adottiamo diversi criteri di arresto. Il primo è porre un limite massimo di iterazioni possibili. Il secondo consiste nella differenza relativa sulle coordinate dei vertici tra la mesh appena ottenuta e quella del passo precedente in norma L^2

$$\frac{\|\mathbf{x}_{\ell+1} - \mathbf{x}_\ell\|_{L^2}}{\|\mathbf{x}_\ell\|_{L^2}} = \frac{\left(\sum_{j=1} \|\mathbf{x}_{j,\ell+1} - \mathbf{x}_{j,\ell}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1} \|\mathbf{x}_{j,\ell}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.38)$$

e, dato che la mesh evolve solamente lungo la direzione delle z , nella pratica andiamo a calcolare

$$\frac{\|z_{\ell+1} - z_\ell\|_{L^2}}{\|z_\ell\|_{L^2}} = \frac{\left(\sum_{j=1} |z_{j,\ell+1} - z_{j,\ell}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1} |z_{j,\ell}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.39)$$

Il terzo criterio di arresto è la differenza relativa sul campo delle normali in norma L^2

$$\frac{\|\mathbf{n}_{\ell+1} - \mathbf{n}_\ell\|_{L^2}}{\|\mathbf{n}_\ell\|_{L^2}} = \frac{\left(\sum_{j=1} \|\mathbf{n}_{j,\ell+1} - \mathbf{n}_{j,\ell}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1} \|\mathbf{n}_{j,\ell}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.40)$$

Il quarto criterio è la differenza relativa in norma L^2 del valore assunto dalla norma tensoriale definita sul differenziale della mappa di Gauss

$$\begin{aligned} \frac{\|(\|d\Gamma_{\ell+1}\| - \|d\Gamma_\ell\|)\|_{L^2}}{\|(\|d\Gamma_\ell\|)\|_{L^2}} &= \frac{\|\sqrt{k_{1,\ell+1}^2 + k_{2,\ell+1}^2} - \sqrt{k_{1,\ell}^2 + k_{2,\ell}^2}\|_{L^2}}{\|\sqrt{k_{1,\ell}^2 + k_{2,\ell}^2}\|_{L^2}} \\ &= \frac{\left(\sum_{j=1} |\sqrt{k_{1,j,\ell+1}^2 + k_{2,j,\ell+1}^2} - \sqrt{k_{1,j,\ell}^2 + k_{2,j,\ell}^2}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1} |\sqrt{k_{1,j,\ell}^2 + k_{2,j,\ell}^2}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

che arresta il processo quando la curvatura non evolve significativamente.

Codice DEC. Di seguito mostriamo la struttura estesa del codice DEC. Il `Metric_setup` consiste nel calcolare la curvatura media (4.31), la curvatura Gaussiana (1.41), da cui si derivano la prima e la seconda curvatura principale (1.42). In `Boundary_TV_flow()` si effettua sul bordo un'evoluzione simile per curve. Ciò permette di avere delle condizioni al bordo di Dirichlet fisse quando si evolve l'interno. Mentre sul bordo si hanno delle condizioni di Dirichlet sui vertici ai quattro angoli della superficie.

Algorithm: DEC

Input : Mesh quadrilatera $M_{iniziale}$ **Output** : Mesh quadrilatera $M_{evoluzione}$
Mesh quadrilatera $M_{residuo}$ **Parameters:** passo temporale τ ,
parametro di fedeltà λ ,
soglie di tolleranza $max_iter, toll_coords, toll_normals, toll_curvature$

```
 $\mathbf{x}_0 \leftarrow M_{iniziale}$ 
 $\mathbf{n}_0 \leftarrow \text{Gauss\_Map}(\mathbf{x}_0)$ 
while stopping critiria do:
1  Metric_setup:
     $H_\ell \leftarrow \text{Mean\_Curvature}(\mathbf{x}_\ell)$ 
     $K_\ell \leftarrow \text{Gauss\_Curvature}(\mathbf{x}_\ell)$ 
     $\{k_1, k_2\}_\ell \leftarrow \text{Principal\_Curvatures}(H_\ell, K_\ell)$ 
2  Total_Variation_flow:
     $(\mathbf{n}_{|\partial M})_{\ell+1} \leftarrow \text{Boundary\_TV\_flow}(\mathbf{n}_\ell, \mathbf{x}_\ell, \{k_1, k_2\}_\ell, \tau, \lambda)$ 
     $\mathbf{n}_{\ell+1} \leftarrow \text{TV\_flow}(\mathbf{n}_\ell, \mathbf{x}_\ell, \{k_1, k_2\}_\ell, (\mathbf{n}_{|\partial M})_{\ell+1}, \tau, \lambda)$ 
3  Normal_integration:
     $\mathbf{x}_{\ell+1} \leftarrow \text{Normal\_integration}(\Gamma_{\ell+1})$ 
end while
 $M_{evoluzione} \leftarrow \mathbf{x}_{\ell+1}$ 
 $M_{residuo} \leftarrow \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{\ell+1}$ 
```

Codice TV_flow. Di seguito mostriamo per esteso il codice che descrive il singolo passo temporale del `TV_flow()`. Consiste in un ciclo sui vertici della mesh. A ogni vertice si calcola l'area del volume di controllo associato (4.11), si aggiorna il termine noto e si inizia un ciclo sulle facce quadrilatera a cui il vertice appartiene. Si calcolano le normali uscenti dai bordi. Si applicano le interpolazioni bilineari definite nella risoluzione numerica del modello. Si aggiornano i coefficienti del sistema lineare da risolvere. Infine si risolve il sistema tenendo conto delle condizioni al bordo date dalle normali al bordo tenute provvisoriamente fisse.

Algorithm: TV_flow

Input : Campo delle normali $\mathbf{n}$,
vertici della superficie $\mathbf{x}$,
curvature principali $\{k_1, k_2\}$,
condizioni al bordo di Dirichlet $\mathbf{n}|_{\partial M}$,
passo temporale τ ,
parametro di fedeltà λ

Output: Campo delle normali $\mathbf{n}^*$ aggiornato

for $\mathbf{x}_i \in M$ **do**:

```
1       $m(\mathcal{V}_i)$            $\leftarrow$  Area del volume di controllo
2      Derivata temporale  $\leftarrow$  Differenze finite in avanti
3       $\lambda(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i,0})$   $\leftarrow$  Termine di fedeltà
4      Aggiornamento dei coefficienti del sistema

      for  $Q_j \in N_Q(\mathbf{x}_i)$  do:
5           $\mathbf{T}_j^1, \mathbf{T}_j^3$   $\leftarrow$  Vettori tangenti ai bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
6           $\mathbf{F}_j^1, \mathbf{F}_j^3$   $\leftarrow$  Vettori uscenti dai bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
7           $a_j^1, a_j^3$   $\leftarrow$  Gram Schmidt
8           $\mathbf{N}_j^1, \mathbf{N}_j^3$   $\leftarrow$  Vettori normali ai bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
9          Interpolazione bilineare delle normali alla superficie
10         Derivate direzionali lungo le normali ai bordi sui punti medi dei bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
11         Interpolazione bilineare delle curvature principali sui punti medi dei bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
12         Norma tensoriale sui punti medi dei bordi  $e_j^1, e_j^3$ 
13         Aggiornamento dei coefficienti del sistema lineare
```

end for

end for

```
14     Condizioni al bordo di Dirichlet
15      $\mathbf{n}^* \leftarrow$  Risoluzione del sistema lineare
```

Capitolo 5

Decomposizione di superfici tramite Normal TV flow

In questo capitolo affrontiamo l'aspetto applicativo della tesi. Descriveremo come si ottiene la mesh iniziale a partire da una superficie fisica, di quali siano i metodi e le strategie per decomporre tale superficie e infine esponiamo i risultati di decomposizione ottenuti su campioni acquisiti.

5.1 Il problema della decomposizione di superfici

Obiettivo. Data una superficie rappresentata tramite mesh poligonale, l'obiettivo è individuarne i diversi livelli di dettaglio a varie scale, effettuare una decomposizione a livelli di dettaglio crescente che nominiamo come macro, meso e micro. Formuliamo un processo di acquisizione che si basa su criteri gestibili che riescono a distinguere le diverse dimensioni di dettaglio e che, allo stesso tempo, mantengono le informazioni originali. Le superfici che analizziamo sono state acquisite nel contesto tessile tramite un processo di raccolta dati.

Metodologia. Per distinguere diversi livelli di dettaglio su una superficie, applichiamo un metodo evolutivo sulla superficie stessa. Il modello che adottiamo ha una componente diffusiva descritta dalla curvatura e una componente di fedeltà dipendente dalla distanza dai dati acquisiti. Al procedere dell'evoluzione, la superficie perde i dettagli della micro e assimila la forma riconducibile alla macro. A seconda di quando si arresta il processo e di quanto si pesa il termine di fedeltà, si ottiene una certa perdita dei dettagli a bassa varianza. Tramite le differenze tra la superficie originale e le superfici ottenute durante le evoluzioni, si ottengono i diversi livelli di dettaglio, quali macro, meso e micro. Adottiamo un metodo evolutivo, Normal Total Variation flow, che consiste in un sistema di equazioni alle derivate parziali, ricavato dalla Total Variation applicata alla mappa di Gauss della superficie. La Total Variation preserva gli sbalzi di grande ampiezza e tende ad appiattire le zone caratterizzate da basse ampiezze. L'evoluzione si applica al campo delle normali alla superficie, per cui viene integrata una fase di normal integration che consiste nel ricostruire la superficie a partire dalle nuove normali.

Soluzione Numerica. La discretizzazione del modello è ottenuta per differenze finite in avanti rispetto al tempo, mentre la componente spaziale rende la formulazione del problema semi-implicita e si adotta il metodo dei volumi finiti. Il Teorema della Divergenza consente di operare sul bordo dell'intorno dove siamo in grado di discretizzare le quantità coinvolte. Nella fase di normal integration, ricostruiamo la superficie a partire dal campo delle normali tramite una proiezione ortografica. Si ottiene un'equazione di Poisson, che risolviamo numericamente tramite una variante delle trasformate di Fourier, le trasformate discrete del coseno.

5.2 Processo di acquisizione dati nel contesto tessile

Il processo porta alla creazione di un modello virtuale descritto a mesh poligonale di un oggetto fisico. Nel concreto si utilizzano le seguenti strumentazioni di fotogrammetria

- fotocamera per acquisire le immagini
- luce mobile, oppure multiple luci fisse per poter illuminare lungo diverse direzioni la superficie da campionare
- color checker per impostare correttamente i colori della fotocamera
- sfera riflettente
- riferimenti graduati per effettuare una correzione colore in postproduzione

Si raccoglie una collezione di fotografie della superficie da diverse prospettive e con diverse illuminazioni. Poi le immagini vengono date in input al software Relight di CNR Pisa per la ricostruzione della normal map. La normal map è un'immagine a colori RGB che contiene le informazioni riguardanti i versori normali alla superficie campionata.

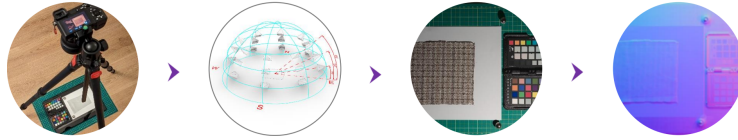


Figura 5.1: Processo di acquisizione.

Essendo la normal map un'immagine, il processo adottato porta a definire la mesh su un dominio Ω discretizzato da una griglia regolare con risoluzione definita dalla risoluzione dell'immagine normal map. Per tale motivo, nella nostra applicazione possiamo restringerci ai soli casi in cui la superficie è definita su un dominio rettangolare. Nello specifico, ci consente di adottare un metodo di normal integration che agisce lungo la sola dimensione delle z . Infatti, dalla normal map possiamo applicare un modello di normal integration e costruire la mesh iniziale ottenuta a partire dalla superficie fisica. Per uno studio approfondito del modello di normal integration adottato rimandiamo all'Appendice. La normal map e la relativa ricostruzione della mesh di un palmo di una mano sono raffigurate in Fig.5.2. La normal map e la ricostruzione della mesh di una trama di tessuto sono raffigurate in Fig.5.3.

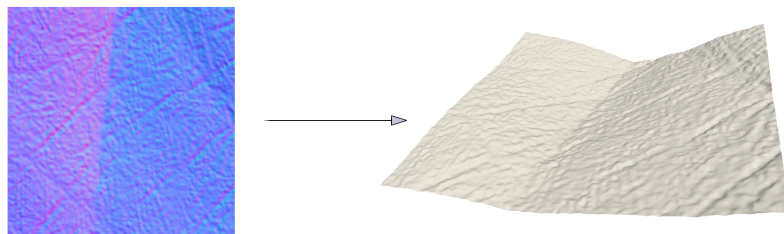


Figura 5.2: Normal map e ricostruzione tramite normal integration di un palmo di mano.

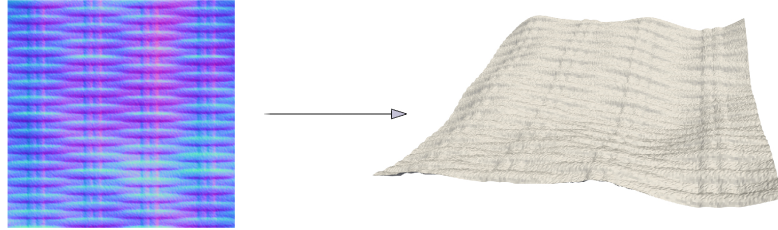


Figura 5.3: Normal map e ricostruzione tramite normal integration di una trama di tessuto.

5.3 Processo di decomposizione

L'obiettivo è individuare i diversi livelli di dettaglio della superficie campionata. Nell'ambito dell'immagine processing la Total Variation è nota per la regolarizzazione di un segnale unidimensionale o di un'immagine bidimensionale. È un metodo che preserva le alte discontinuità e rende costanti le aree con poca varianza. Adottiamo la medesima strategia alle superfici. Il metodo che esponiamo di seguito non agisce direttamente sulle coordinate della superficie, ma trasforma il campo delle normali. Sulle superfici l'applicabilità della Total Variation si presta meglio ai vettori normali piuttosto che ai vertici. La Total Variation applicata alle normali pone una diversa interpretazione fisica dell'evoluzione. Nel caso delle coordinate i grandi salti vengono preservati e la regolarizzazione appiattisce direttamente le zone delimitate dai grandi salti. Nel caso delle normali vengono preservati i grandi disallineamenti tra le normali, così da individuare le zone delimitate da un'alta curvatura. All'interno di tali zone le normali vengono allineate e, di conseguenza, le coordinate si appiattiscono. Il modello TV Flow applicato al campo delle normali è munito di un termine di fedeltà è il modello differenziale (4.1) descritto nel Capitolo 4. Appliciamo tale metodo evolutivo per distinguere i diversi livelli di frequenza di una superficie. Ponendo come superficie iniziale la superficie originale, al procedere dell'evoluzione la superficie perde i dettagli della micro e assimila la forma riconducibile alla macro. A seconda di quando si arresta il processo e di quanto si pesa il termine di fedeltà, si ottiene una certa perdita dei dettagli. Tramite le differenze tra la superficie originale e le superfici ottenute durante le evoluzioni si ottengono i diversi livelli di dettaglio, quali macro, meso e micro. Una decomposizione in micro, meso e macro del palmo di mano è raffigurata in Fig.5.4

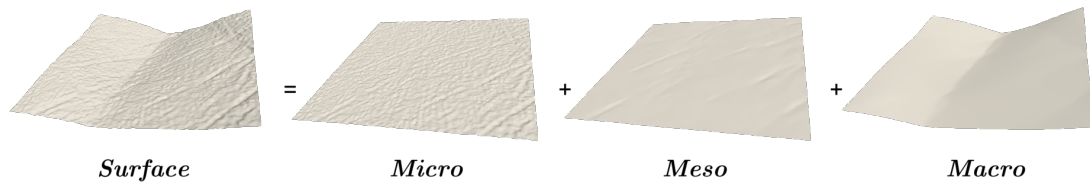


Figura 5.4: Decomposizione del palmo di mano.

Nel dettaglio proponiamo due processi di decomposizione su più livelli di dettaglio.

- *Prima variante del processo di decomposizione.* Si arresta l'evoluzione una volta che è stata rimossa la micro, ottenendo una superficie che descrive la meso e la macro. Per differenza con la superficie iniziale, si ottiene la micro rimossa. Poi si fa ripartire l'evoluzione dalla nuova superficie. Ottenuta la macro, si arresta il processo. Sempre per differenza si risale alla meso. Di seguito mostriamo l'algoritmo **MultiDEC - prima variante** che implementa la prima variante del processo di decomposizione su più livelli. Inoltre, tale processo è raffigurato in Fig.5.5.
- *Seconda variante del processo di decomposizione.* Si evolve fino ad acquisire la macro. Per differenza con la superficie originale si ottiene una superficie residua che contiene le informazioni di meso e micro. La superficie residua è l'input di un ulteriore processo evolutivo. La nuova evoluzione decompone la superficie in meso e micro. Di seguito mostriamo l'algoritmo **MultiDEC - seconda variante** che implementa la seconda variante del processo di decomposizione su più livelli. Inoltre, tale processo è raffigurato in Fig.5.6.

Algorithm: MultiDEC - prima variante

Input : Mesh quadrilatera $M_{iniziale}$
 Livelli di dettaglio $L = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$
Output : Mesh quadrilatere $M_{\ell_1}, \dots, M_{\ell_m}$
Parameters: passi temporali $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$,
 parametri di fedeltà $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$,
 soglie di tolleranza $\{toll_1, \dots, toll_m\}$

$M_{\ell_0,evoluzione} \leftarrow M_{iniziale}$

for $\ell \in L$ **do:**

$M_{\ell,evoluzione}, M_{\ell,residuo} \leftarrow \text{DEC}(M_{\ell-1,evoluzione}, \tau_\ell, \lambda_\ell, toll_\ell)$
 $M_\ell \leftarrow M_{\ell,residuo}$

end

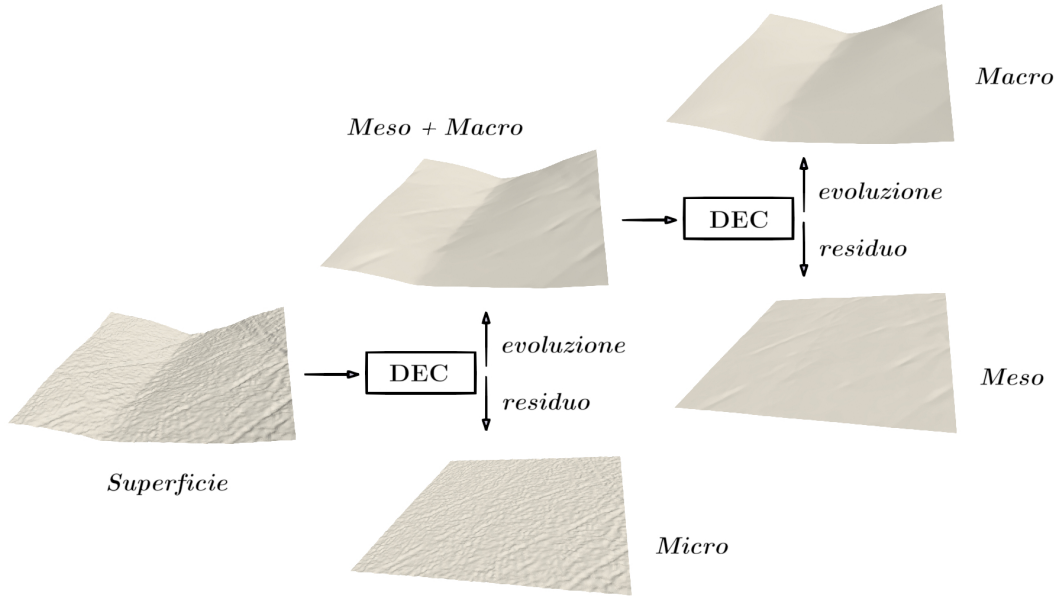


Figura 5.5: Prima variante del processo di decomposizione.

Algorithm: MultiDEC - seconda variante

Input : Mesh quadrilatera $M_{iniziale}$
Livelli di dettaglio $L = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$
Output : Mesh quadrilatere $M_{\ell_1}, \dots, M_{\ell_m}$
Parameters: passi temporali $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$,
parametri di fedeltà $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$,
soglie di tolleranza $\{toll_1, \dots, toll_m\}$

$M_{l_0, residuo} \leftarrow M_{iniziale}$

for $\ell \in L$ **do:**

$M_{\ell, evoluzione}, M_{\ell, residuo} \leftarrow \text{DEC}(M_{\ell-1, residuo}, \tau_\ell, \lambda_\ell, toll_\ell)$
 $M_\ell \leftarrow M_{\ell, evoluzione}$

end

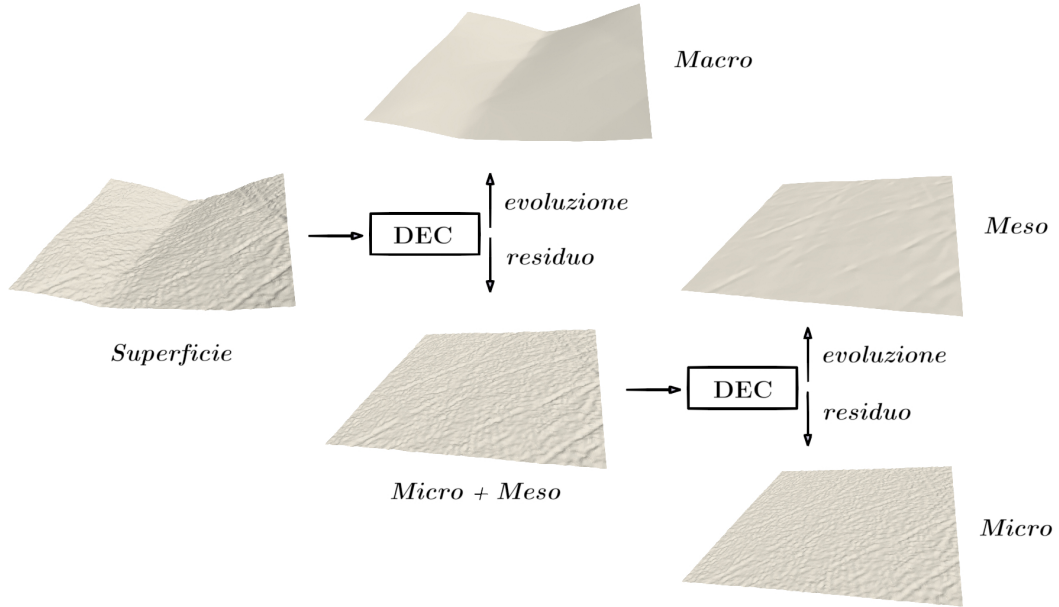


Figura 5.6: Seconda variante del processo di decomposizione.

5.4 Esperimenti numerici

In questa sessione applichiamo il codice DEC a quattro casi particolari nel contesto tessile. Effettuiamo tre studi qualitativi e uno quantitativo.

5.4.1 Studi qualitativi

Nelle applicazioni spesso non si dispone di un campione con cui confrontare i risultati. Di seguito studiamo tre superfici di natura diversa campionate a partire da oggetti reali del contesto tessile.

Palmo di mano. Studiamo il caso di una superficie proveniente da un oggetto in pelle. La mesh quadrilatera *Palmo di mano* è raffigurata in Fig.5.7.

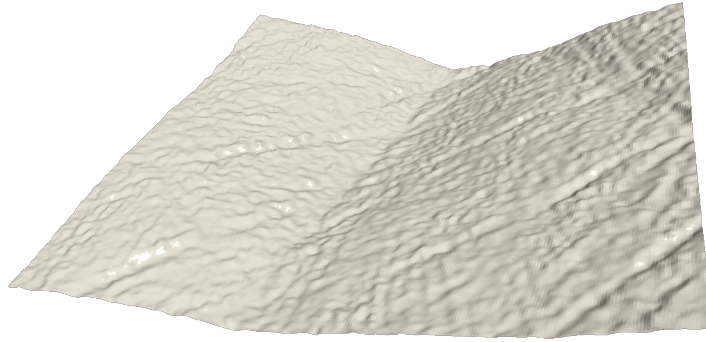


Figura 5.7: Mesh *Palmo di mano*.

La mesh è ottenuta da una normal map di risoluzione 256×256 pixel, quindi $\#V = 65536$, $\#E = 130560$, $\#F = 65025$.

Applichiamo su *Palmo di mano* la decomposizione variando il termine di fedeltà λ . In Fig.5.8 sono raffigurate le normal maps delle evoluzioni ottenute. Per λ alti parte dei dettagli si conserva, mentre per λ bassi l'evoluzione porta a un livello di dettaglio riconducibile alla macro. In Fig.5.9 è raffigurata la decomposizione di *Palmo di mano* con $\lambda = 5$. L'evoluzione è la somma tra la meso e la macro, mentre il residuo è la micro.

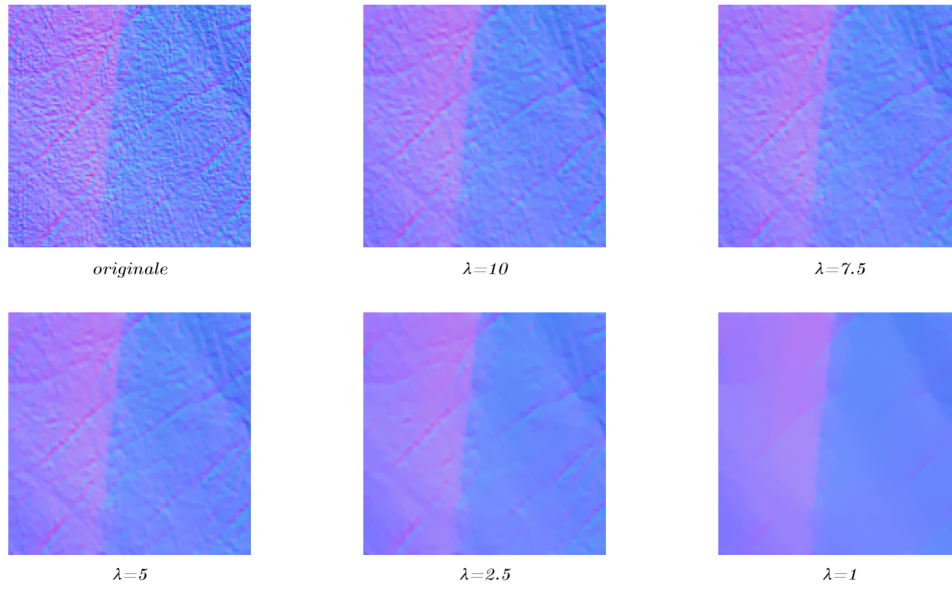


Figura 5.8: Normal maps delle evoluzioni di *Palmo di mano*.

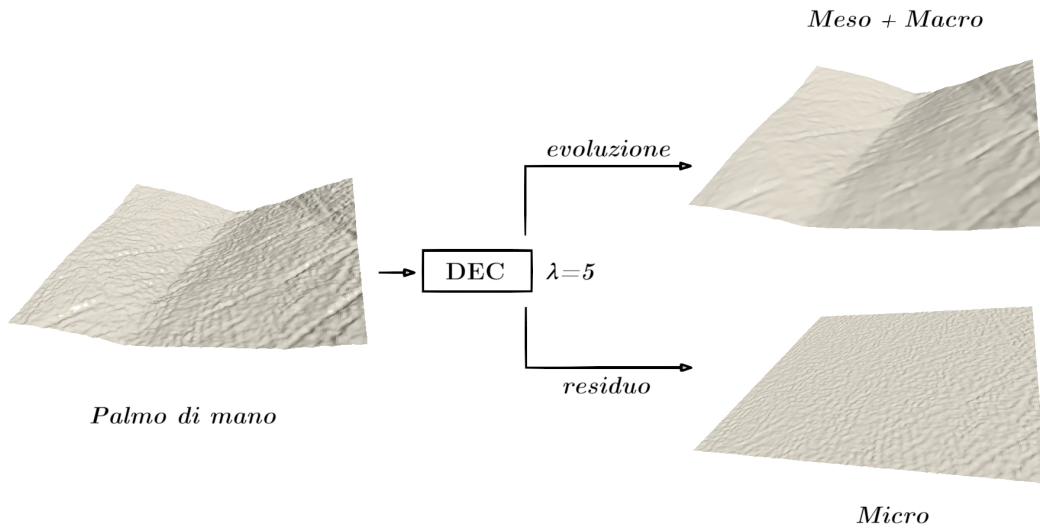


Figura 5.9: Decomposizione di *Palmo di mano* con $\lambda = 5$.

Effettuiamo una decomposizione della superficie ottenuta ponendo $\lambda = 5$. Studiamo il risultato al variare del parametro di fedeltà λ . In Fig.5.10 sono raffigurate le normal maps al variare di λ . La decomposizione per $\lambda = 1$ è raffigurata in Fig.5.11. L'evoluzione ottenuta è la macro del *Palmo di mano*, mentre il residuo è la meso. Mostriamo in Fig.5.12 il processo di decomposizione su più livelli di *Palmo di mano*.

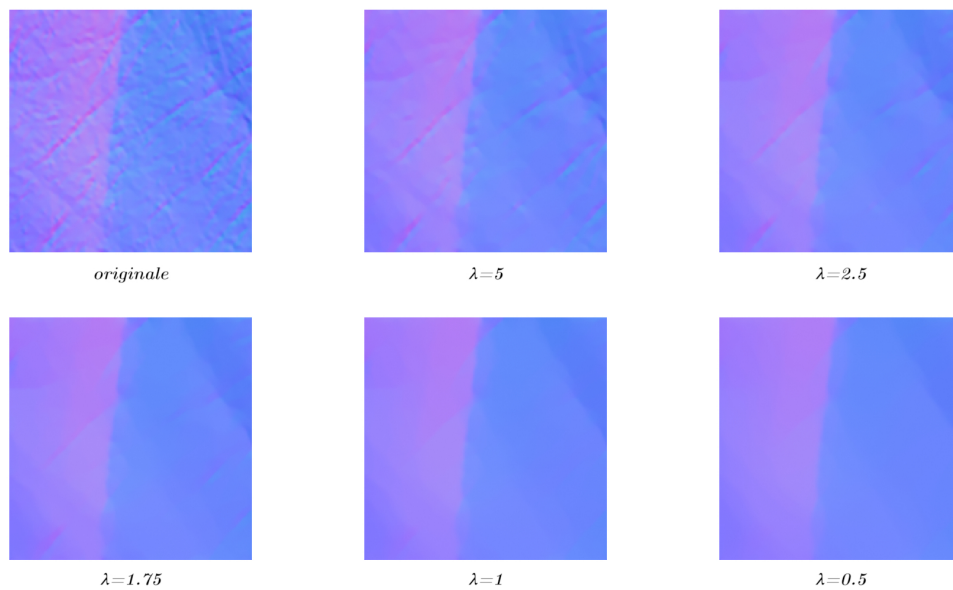


Figura 5.10: Normal maps delle evoluzioni della superficie ottenuta precedentemente.

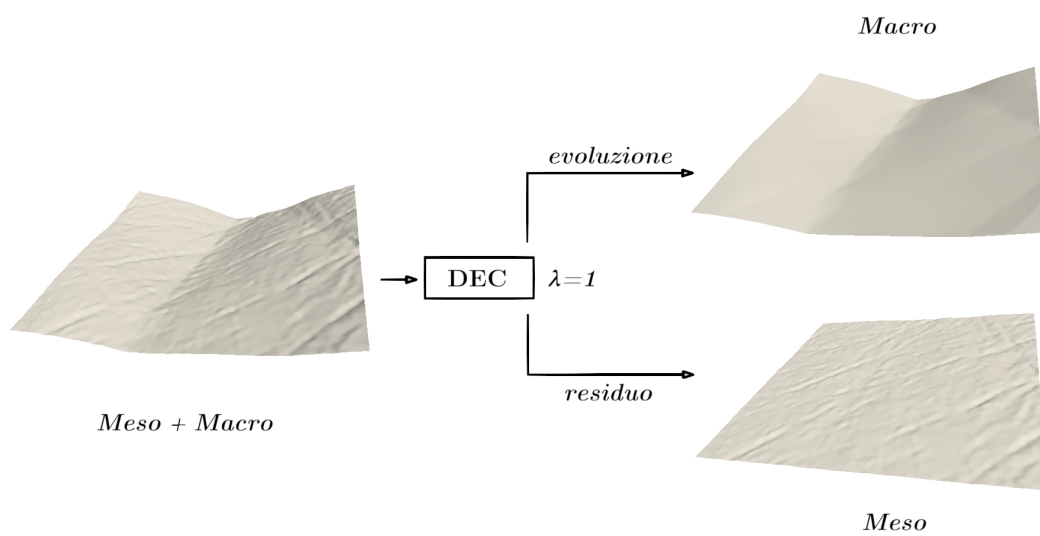


Figura 5.11: Decomposizione in macro e meso con $\lambda = 1$.

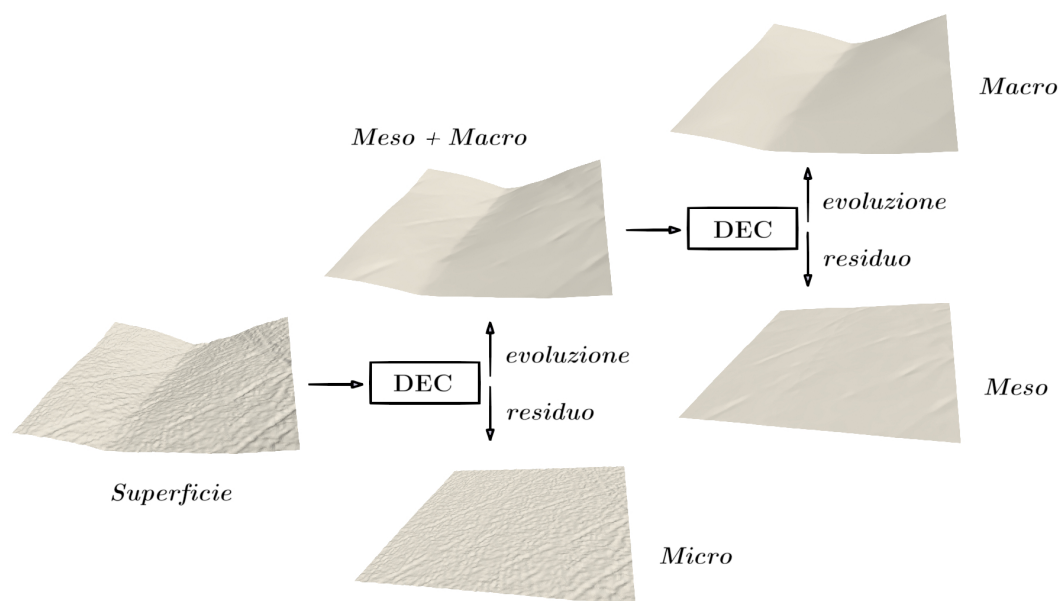


Figura 5.12: *Processo di decomposizione di Palmo di mano.*

Tessuto grande. Studiamo il caso di una superficie campionata da un oggetto tessile artigianale caratterizzato dalla presenza di aree lisce separate da alte discontinuità. La mesh quadrilatera *Tessuto grande* è raffigurata in Fig.5.13.

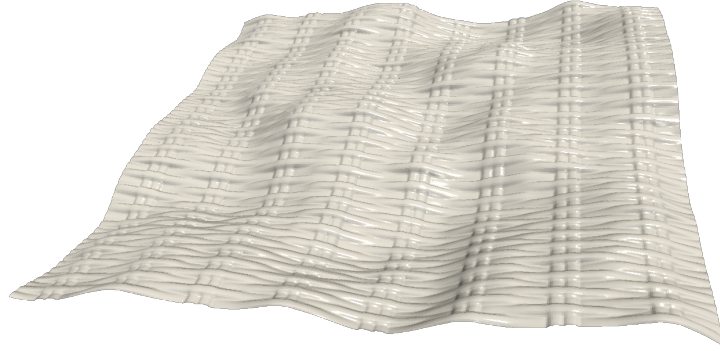


Figura 5.13: Mesh *Tessuto grande*.

La mesh è ottenuta da una normal map di risoluzione 512×512 pixel, quindi $\#V = 262144$, $\#E = 523264$, $\#F = 261121$.

Applichiamo su *Tessuto grande* la decomposizione variando il termine di fedeltà λ . In Fig.5.14 sono raffigurate le normal maps delle evoluzioni ottenute. In Fig.5.15 è raffigurata la decomposizione di *Tessuto grande* con $\lambda = 0.25$. L'evoluzione rappresenta la macro, mentre il residuo è la somma tra la micro e la meso.

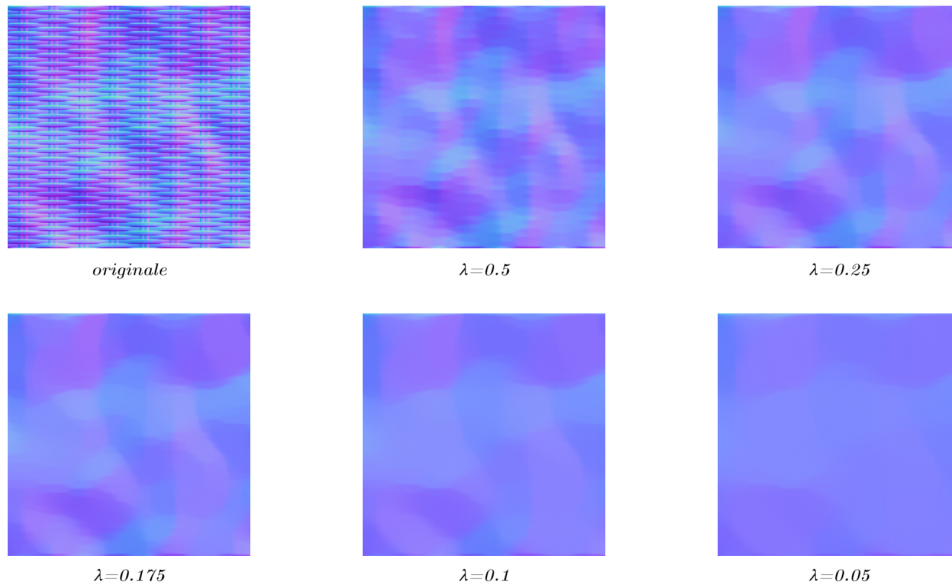


Figura 5.14: Normal maps delle evoluzioni di *Tessuto grande*.

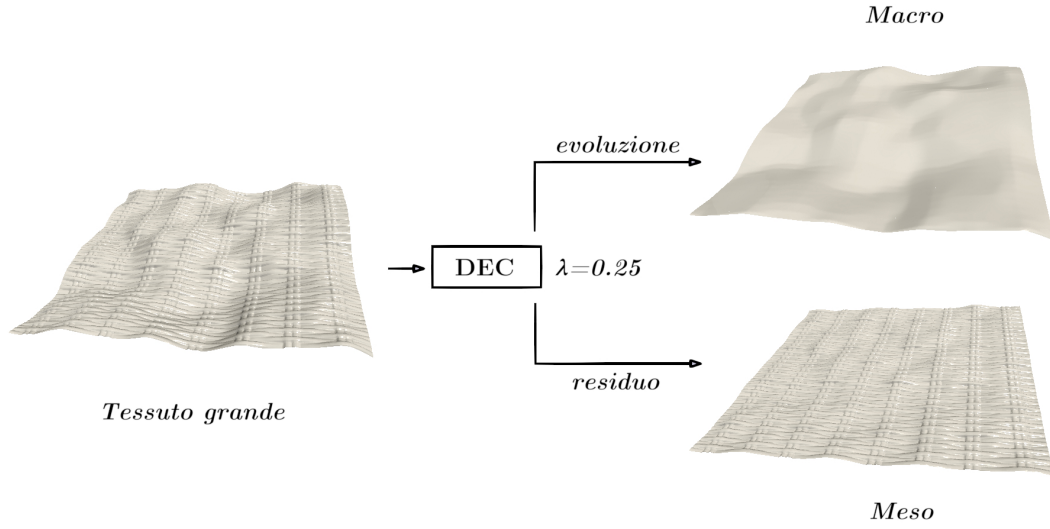


Figura 5.15: Decomposizione di *Tessuto grande* con $\lambda = 0.25$.

Tessuto piccolo. Mostriamo che la scelta di λ può dipendere dalle dimensioni del campionamento. Prendiamo un sottoinsieme della mesh *Tessuto grande*. La mesh quadrilatera *Tessuto piccolo* è raffigurata in Fig.5.16.

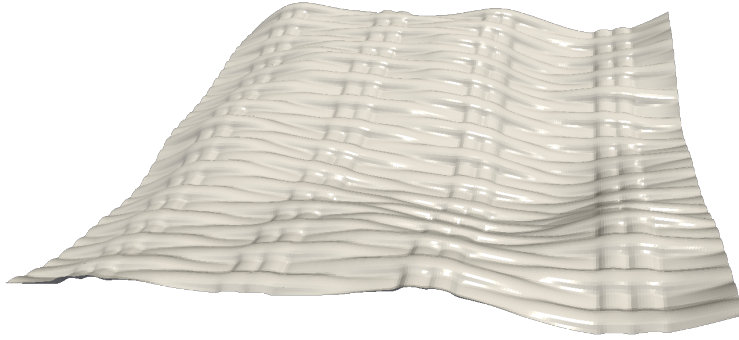


Figura 5.16: Mesh *Tessuto piccolo*.

La mesh è ottenuta da una porzione di risoluzione 256×256 pixel della normal map di *Tessuto grande*, quindi $\#V = 65536$, $\#E = 130560$, $\#F = 65025$.

Applichiamo su *Tessuto piccolo* la decomposizione variando il termine di fedeltà λ . In Fig.5.17 sono raffigurate le normal maps delle evoluzioni ottenute. Confrontando i λ con i parametri di fedeltà del caso *Tessuto grande*, si nota la dipendenza di λ dalla dimensione del campionamento. In Fig.5.18 è raffigurata la decomposizione di *Tessuto piccolo* con $\lambda = 5$. L'evoluzione rappresenta la macro, mentre il residuo è la somma tra la micro e la meso.

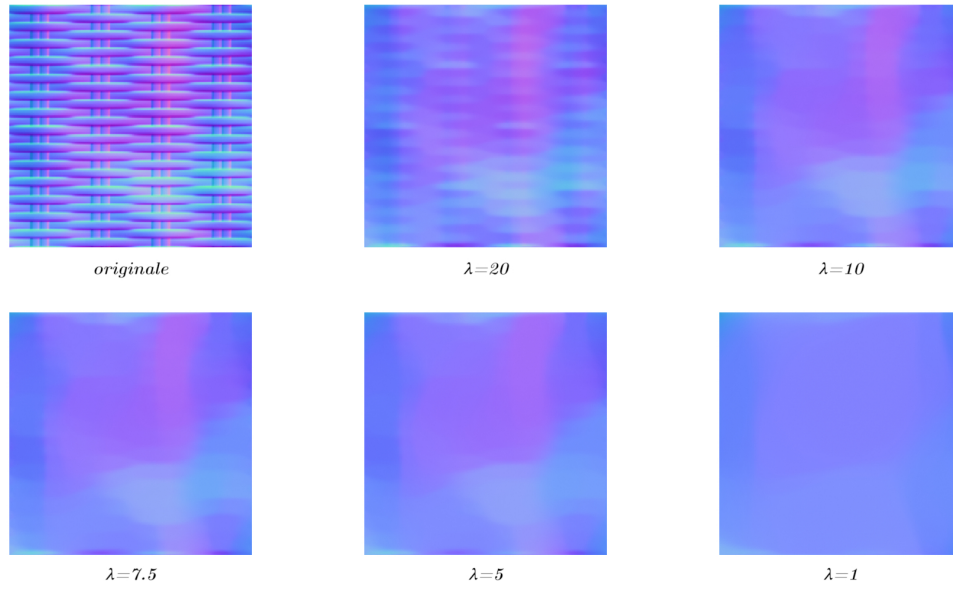


Figura 5.17: Normal maps delle evoluzioni di *Tessuto piccolo*.

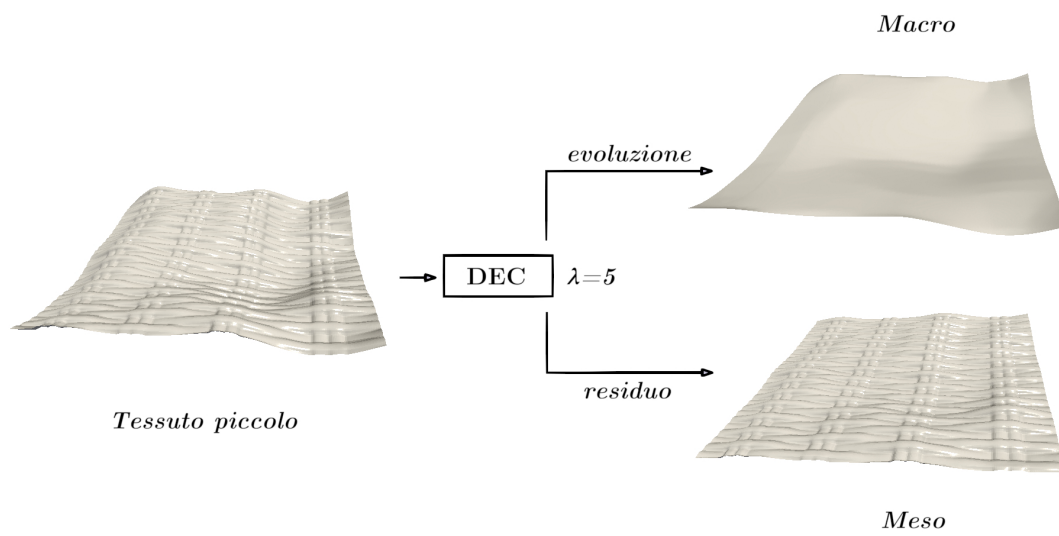


Figura 5.18: Decomposizione di *Tessuto piccolo* con $\lambda = 5$.

Yuta. La mesh quadrilatera *Yuta* è raffigurata in Fig.5.19.

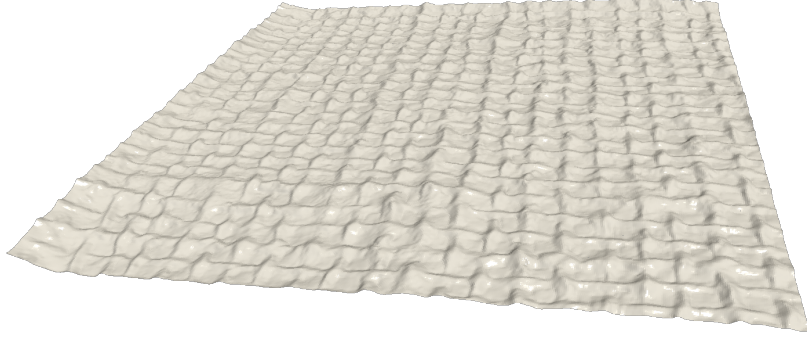


Figura 5.19: Mesh *Yuta*.

La mesh è ottenuta da una normal map di risoluzione 512×512 pixel, quindi $\#V = 262144$, $\#E = 523264$, $\#F = 261121$.

Nel caso della superficie *Yuta*, il livello macro è rappresentato da un artefatto di acquisizione. Cerchiamo il parametro λ adatto a separare la micro dalla meso. Appliciamo su *Yuta* la decomposizione variando il termine di fedeltà λ . In Fig.5.20 sono raffigurate le normal maps delle evoluzioni ottenute. In Fig.5.21 è raffigurata la decomposizione di *Yuta* con $\lambda = 175$. L'evoluzione è la somma tra la meso e la macro, mentre il residuo è la micro.

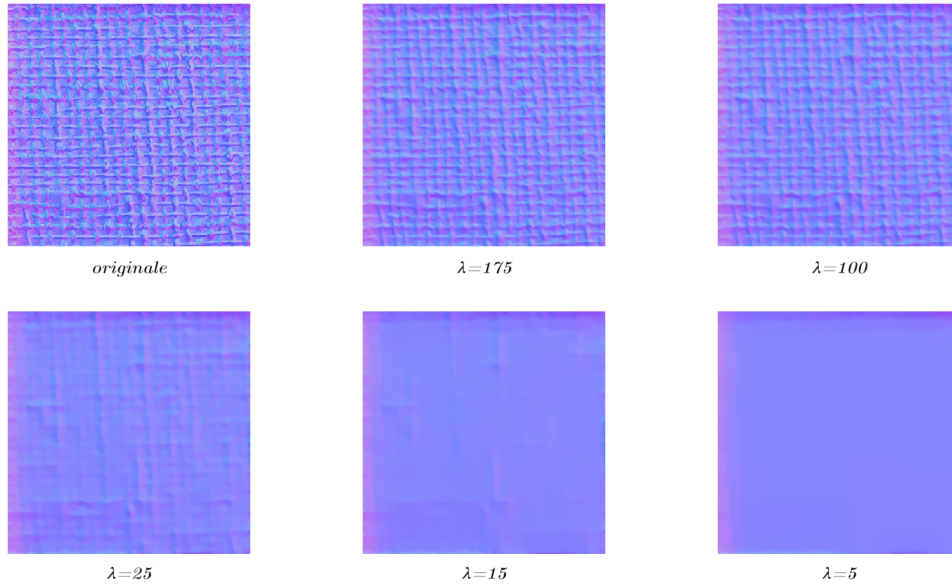


Figura 5.20: Normal maps delle evoluzioni di *Yuta*.

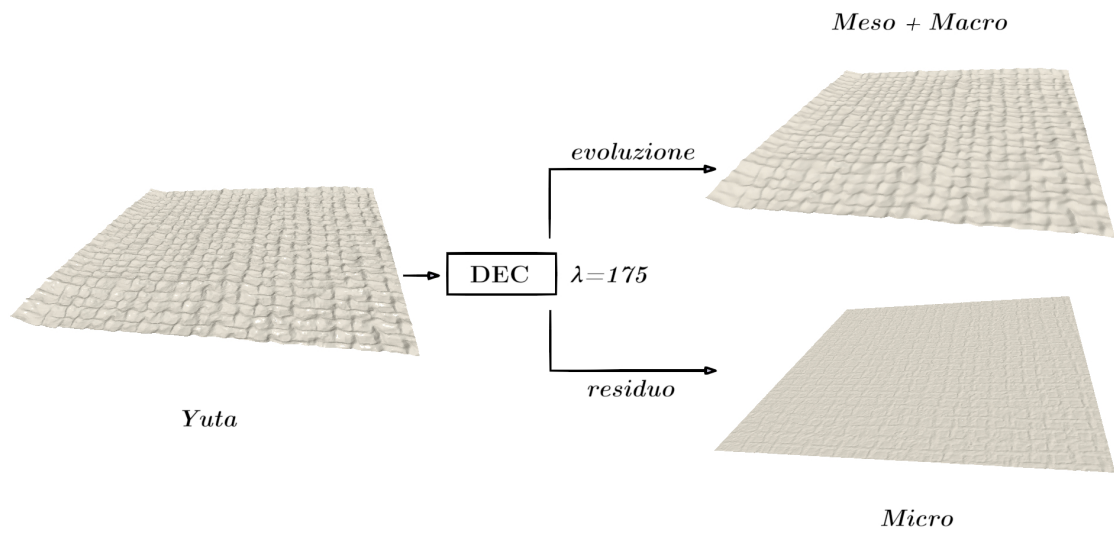


Figura 5.21: Decomposizione di *Yuta* con $\lambda = 175$.

5.4.2 Studio quantitativo

Sia S una varietà 2-dimensionali immersa in $\mathbb{R}^3$, definiamo la distanza di Hausdorff tra S e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ come

$$dist_H(\mathbf{p}, S) := \min_{\mathbf{x} \in S} \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^3} . \quad (5.1)$$

Siano M_1, M_2 due mesh immerse in $\mathbb{R}^3$, definiamo la distanza tra M_1 e M_2 come la massima distanza di Hausdorff tra M_1 e M_2

$$d(M_1, M_2) := \max \left\{ \max_{\mathbf{x}_1 \in M_1} \{dist_H(\mathbf{x}_1, M_2)\}, \max_{\mathbf{x}_2 \in M_2} \{dist_H(\mathbf{x}_2, M_1)\} \right\} \quad (5.2)$$

Di seguito studiamo il caso in cui possediamo, oltre alla superficie somma di meso e macro, anche il campionamento della superficie che rappresenta il solo livello di dettaglio meso. Inoltre aggiungiamo sinteticamente il livello di dettaglio micro. Cerchiamo i parametri di fedeltà λ che minimizzano i massimi della distanza di Hausdorff (5.2) tra i risultati ottenuti dalle decomposizioni e le superfici che rappresentano i livelli di dettaglio campionati.

Filamento. La mesh quadrilatera *Filamento* ($M = M_0 + M_1$) è raffigurata in Fig.5.22 (a), mentre la mesh *Meso originale* (M_1) rappresenta il livello di dettaglio meso campionato ed è raffigurata in Fig.5.22 (b).

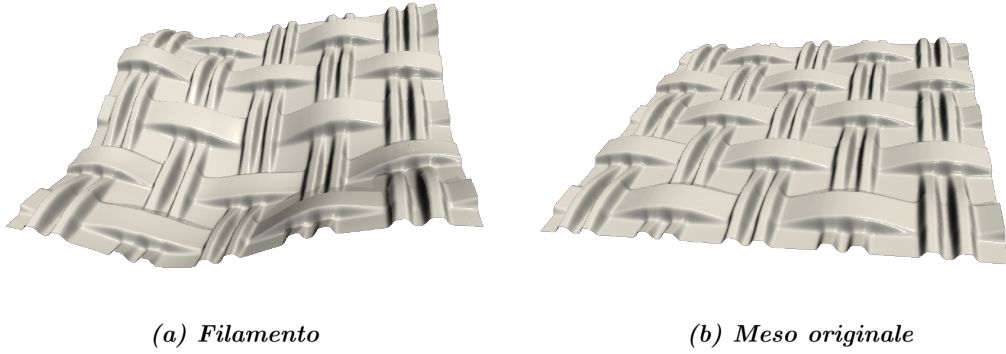


Figura 5.22: Mesh *Filamento* a sinistra e mesh *Meso originale* a destra.

Le mesh sono ottenute da normal maps di risoluzione 1024×1024 pixel, quindi $\#V = 1048576$, $\#E = 2095104$, $\#F = 1046529$.

In assenza del campionamento di un livello di dettaglio è possibile ampliare lo studio quantitativo simulando sinteticamente il livello mancante. Approfondiamo lo studio della superficie *Filamento* aggiungendo artificialmente un livello di micro. La mesh *Filamento sintetico* ($M_s = M_0 + M_1 + M_2$) è raffigurata in Fig.5.22 come somma tra la mesh *Filamento* ($M = M_0 + M_1$) e la mesh *Micro sintetica* (M_2).

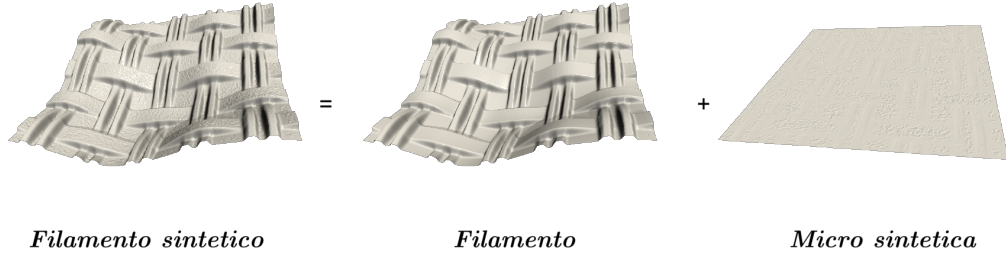


Figura 5.23: Mesh *Filamento sintetico* come somma della mesh *Filamento* e la mesh *Micro sintetica*.

Applichiamo su *Filamento sintetico* (M_s) la decomposizione variando il termine di fedeltà λ . Di seguito mostriamo gli errori secondo la massima distanza di Hausdorff (5.2) rispetto a *Filamento* (M) ottenuti sulla superficie *Meso + Macro* (M^*) evoluzione di *Filamento sintetico*.

λ	$d(M, M^*)$
∞	1.520
64	1.588
32	1.608
16	1.666
8	1.836
4	2.183
3	2.382
2	2.946
1	4.378
0.5	7.088
0.25	11.847

In Fig.5.24 sono raffigurate le normal maps delle evoluzioni ottenute. Confrontiamo gli errori ottenuti con le normal maps associate. La distanza (5.2) suggerisce un parametro di fedeltà λ grande che preserva eccessivamente il dettaglio micro durante l'evoluzione, senza effettuare un'effettiva decomposizione. Al diminuire di λ , la decomposizione inizia a catturare pure i dettagli inerenti al livello della meso, vanificando il criterio quantitativo della distanza. Non troviamo un λ che riesca a separare l'intero livello di dettaglio micro senza coinvolgere il livello di dettaglio meso. Preferiamo affidarci al criterio qualitativo. In Fig.5.25 è raffigurata la decomposizione di *Filamento sintetico* con $\lambda = 1$. In Fig.5.26 sono raffigurate la *Micro sintetica* (M_1) a sinistra e la superficie *Micro* (M_1^*) ottenuta come residuo dell'evoluzione con $\lambda = 1$ di *Filamento sintetico* a destra. In Fig.5.27 sono raffigurate il *Filamento* (a) e la superficie *Meso + Macro* ottenuta dall'evoluzione con $\lambda = 1$ di *Filamento sintetico* (b).

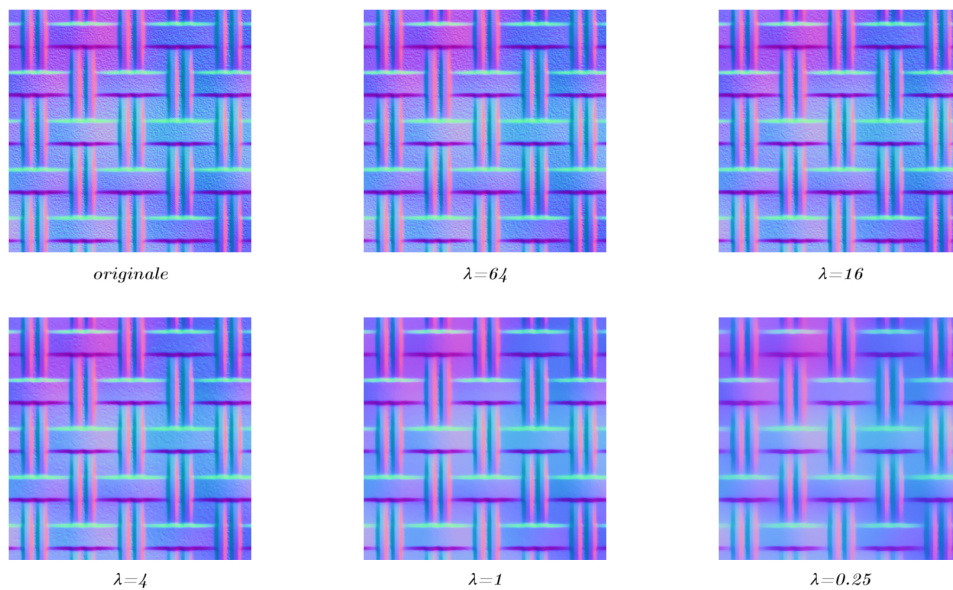


Figura 5.24: Normal maps delle evoluzioni di *Filamento con micro*.

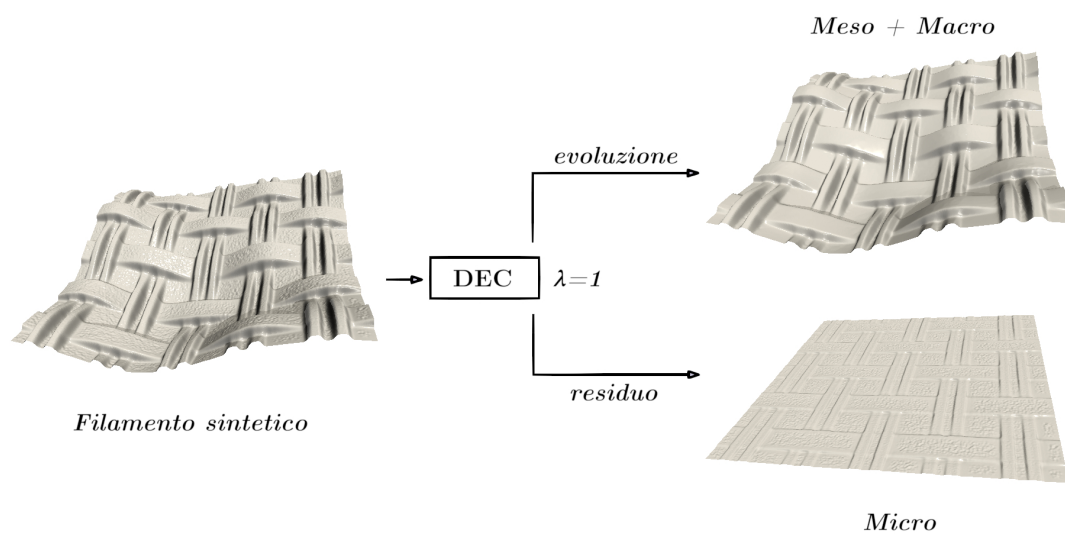
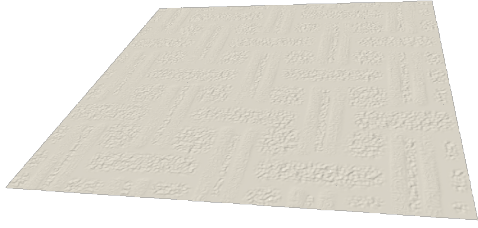


Figura 5.25: Decomposizione di *Filamento sintetico* con $\lambda = 1$.

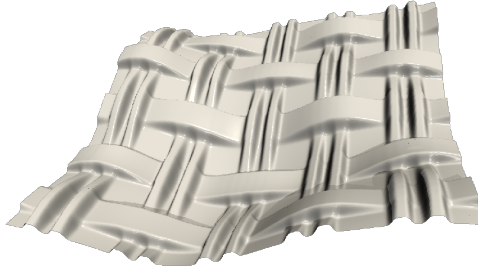


(a) *Micro sintetica*

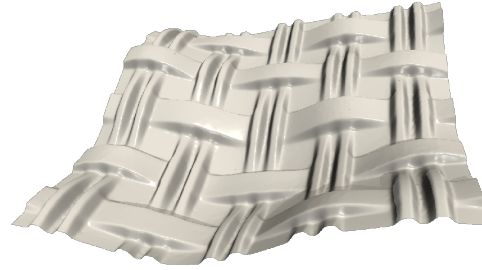


(b) *Residuo con $\lambda=1$*

Figura 5.26: *Micro sintetica* a sinistra. Confronto con il residuo dell'evoluzione di *Filamento sintetico* per $\lambda = 1$.



(a) *Filamento*



(b) *Evoluzione con $\lambda=1$*

Figura 5.27: *Filamento* a sinistra. Confronto con l'evoluzione di *Filamento sintetico* per $\lambda = 1$.

Effettuiamo una decomposizione della superficie *Meso + Macro* (M^*) ottenuta ponendo $\lambda = 1$. Studiamo il risultato al variare del parametro di fedeltà λ . Di seguito mostriamo gli errori secondo la massima distanza di Hausdorff (5.2) rispetto a *Meso originale* (M_1) ottenuti sulla mesh *Meso* (M_1^*) residuo dell'evoluzione.

λ	$d(M_1, M_1^*)$
∞	131.450
1	23.237
0.1	21.948
0.075	21.519
0.05	21.419
0.03	42.734
0.01	26.744
0.005	85.917

In Fig.5.28 sono raffigurate le normal maps al variare di λ . La decomposizione per $\lambda = 0.05$ è raffigurata in Fig.5.29. L'evoluzione ottenuta è la macro di *Filamento sintetico*, mentre il residuo è la meso. In Fig.5.30 sono raffigurate la mesh *Meso originale* (a) e la superficie residua ottenuta dall'evoluzione con $\lambda = 0.05$ di *Meso + Macro* (b). Mostriamo in Fig.5.31 il processo di decomposizione su più livelli di *Filamento sintetico*.

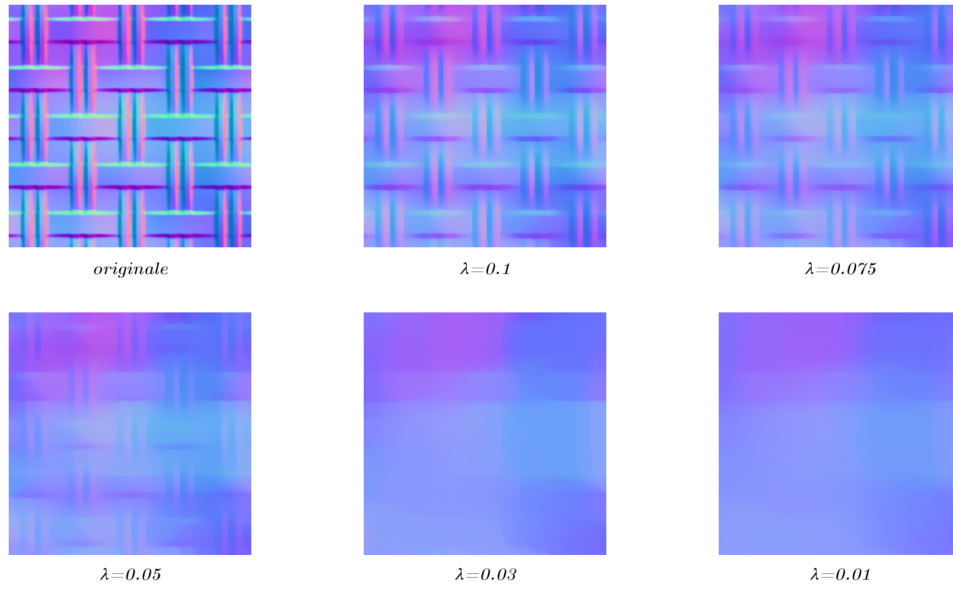


Figura 5.28: Normal maps delle evoluzioni della superficie *Meso + Macro* ottenuta precedentemente.

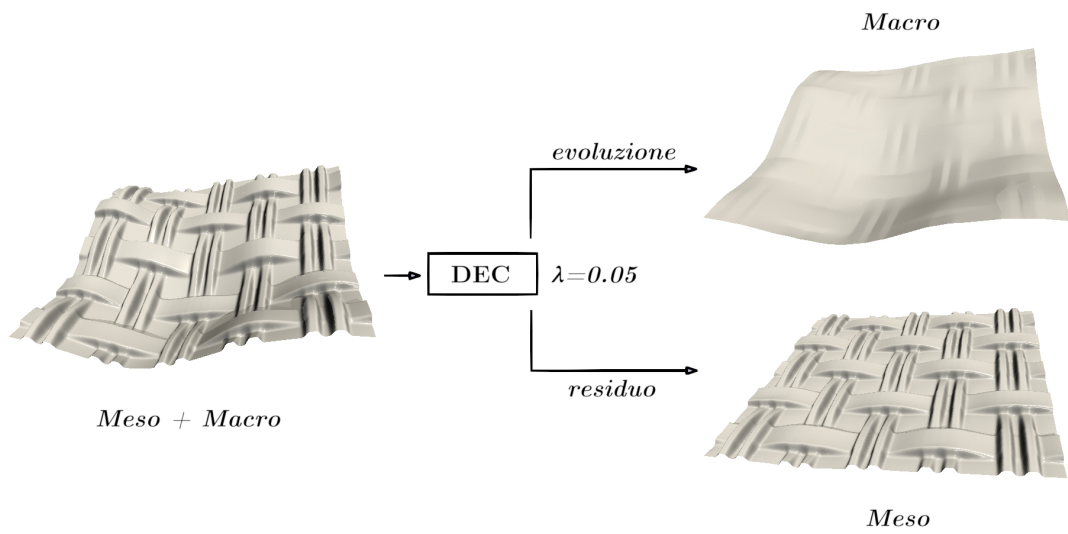


Figura 5.29: Decomposizione in macro e meso con $\lambda = 0.05$.

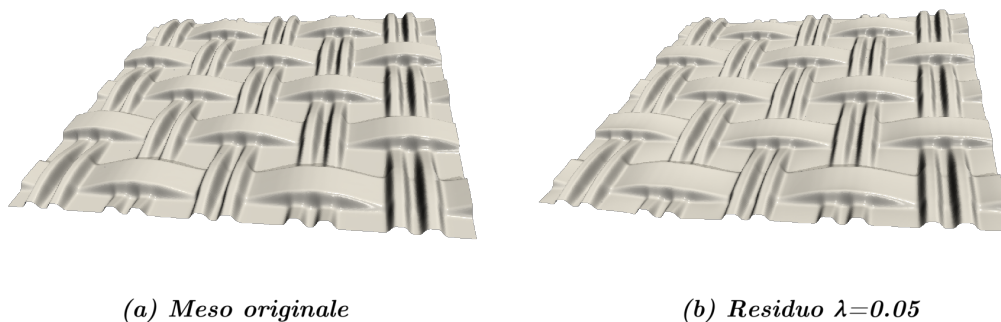


Figura 5.30: *Meso originale* a sinistra. Confronto con il residuo dell'evoluzione di *Meso + Macro* per $\lambda = 0.05$.

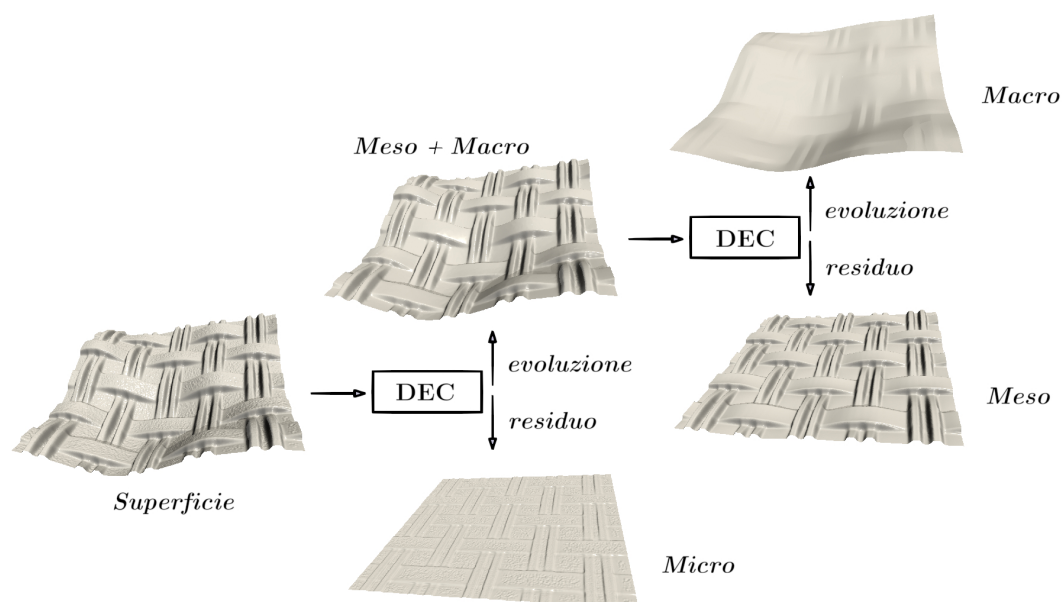


Figura 5.31: *Processo di decomposizione di Filamento sintetico.*

Bibliografia

- [1] Ronny Bergmann, Marc Herrmann, Roland Herzog, Stephan Schmidt, and José Vidal-Núñez. Total variation of the normal vector field as shape prior. *Inverse Problems*, 36(5):054004, 2020.
- [2] Mario Botsch, Leif Kobbelt, Mark Pauly, Pierre Alliez, and Bruno Lévy. *Polygon Mesh Processing*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2010.
- [3] Manoel P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [4] Ilya Eckstein, Jean-Philippe Pons, Yiyi Tong, C.-C. Jay Kuo, and Mathieu Desbrun. Generalized surface flows for mesh processing. In *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing (SGP 2007)*, pages 183–192, Barcelona, Spain, 2007. Eurographics Association.
- [5] Marco Fumero, Michael Möller, and Emanuele Rodolà. Nonlinear spectral geometry processing via the TV transform. *ACM Transactions on Graphics*, 39(6):199:1–199:16, 2020.
- [6] Martin Húska, Matej Medřa, Karol Mikula, and Serena Morigi. Lagrangian evolution approach to surface-patch quadrangulation. *Applications of Mathematics*, 66(4):509–551, 2021.
- [7] Yvain Quéau, Jean-Denis Durou, and Jean-François Aujol. Normal integration: A survey. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 60(4):576–593, 2018.

Appendice

Normal Integration

In questa appendice introduciamo il problema della normal integration che consiste nel ricavare le coordinate di una superficie a partire dal suo campo delle normali. Il metodo che adottiamo per decomporre una superficie consiste nell'evolvere il campo delle normali di tale superficie. Quindi modifichiamo la superficie indirettamente e, ottenuto il nuovo campo delle normali, risaliamo alle nuove coordinate tramite la normal integration. Nella nostra applicazione, la superficie che decomponiamo è una mesh definita su un dominio rettangolare e perciò l'evoluzione delle coordinate è considerata lungo la sola dimensione delle z . Adottiamo una normal integration definita a partire da una proiezione ortografica. Dai valori delle normali si definiscono delle equazioni a derivate parziali di Poisson che descrivono la coordinata z dei vertici della superficie. La risoluzione di tali equazioni si avvale della Trasformata del coseno discreta nello spazio delle frequenze. Per questo studio facciamo riferimento a [7].

Proiezione Ortografica

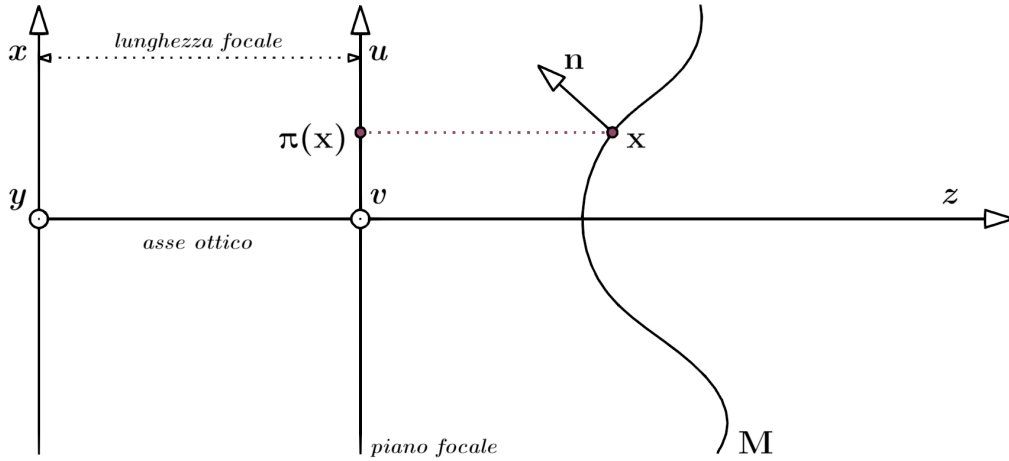


Figura 5.32: Proiezione ortografica.

Nelle nostre applicazioni, la mesh è definita su una griglia rettangolare sul piano xy . Riconduciamo il calcolo delle nuove coordinate alla sola ricerca della variazione lungo la z della nuova mesh.

Lasciamo inalterate le coordinate della x e della y rispetto alla mesh precedente. Il modello proiettivo che utilizziamo per risolvere la Normal Integration è il modello proiettivo ortografico, raffigurato in Fig.5.32.

Sia la superficie parametrizzata definita nel seguente modo

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) . \quad (5.3)$$

Un vertice è proiettato ortogonalmente dal piano focale lungo la direzione dell'asse ottico e si ha

$$x(u, v) = u , \quad (5.4)$$

$$y(u, v) = v . \quad (5.5)$$

Ricordiamo la definizione di normale a una superficie

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} . \quad (5.6)$$

Assumiamo che i vettori normali non siano mai ortogonali all'asse ottico. Quindi la terza componente delle normali non si annulla. Sviluppiamo la definizione di normale seguendo la parametrizzazione data

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} \partial_u x(u, v) \\ \partial_u y(u, v) \\ \partial_u z(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_v x(u, v) \\ \partial_v y(u, v) \\ \partial_v z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u u \\ \partial_u v \\ \partial_u z(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_v u \\ \partial_v v \\ \partial_v z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u z(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_u z \\ -\partial_v z \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (5.9)$$

con norma

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{1 + (\partial_u z)^2 + (\partial_v z)^2} . \quad (5.10)$$

Infine si ottiene

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_u z \\ -\partial_v z \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (5.11)$$

dove

$$\nabla z := (\partial_u z, \partial_v z) \quad (5.12)$$

è il gradiente della mappa di profondità $z(u, v)$. Dividendo la prima e la seconda componente per la terza, si ricavano le seguenti equazioni a derivate parziali

$$\begin{cases} \partial_u z = p , \\ \partial_v z = q , \end{cases} \quad (5.13)$$

dove

$$p = -\frac{n_1}{n_3} , \quad q = -\frac{n_2}{n_3} . \quad (5.14)$$

Equazioni di Poisson

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$\nabla z = (p, q) , \quad (5.15)$$

con p, q definiti in (5.14). Si converte il problema (5.15) in un problema di ottimizzazione ai minimi quadrati

$$z \in \arg \min_z \left\{ F(z) = \iint_{(u,v) \in \Omega} \|\nabla z(u, v) - (p(u, v), q(u, v))\|^2 du dv \right\} . \quad (5.16)$$

dove il funzionale $F(z)$ è convesso, ma non ammette un unico minimo dato che

$$F(z + c) = F(z) , \quad (5.17)$$

per ogni $c \in \mathbb{R}$. Le condizioni di ottimalità di (5.16)

$$\nabla F(z) = 0 \implies \operatorname{div}(\nabla z - (p, q)) = 0 , \quad (5.18)$$

si possono riscrivere come equazione di Poisson

$$\Delta z = \partial_u p + \partial_v q . \quad (5.19)$$

Non conoscendo a priori nessun vertice della superficie da ricostruire, non è possibile ottenere l'unicità imponendo delle condizioni di Dirichlet al bordo. In alternativa si associa a (5.19) una condizione al bordo naturale del tipo Neumann che consiste in

$$(\nabla z - (p, q)) \cdot \eta = 0 , \quad (5.20)$$

dove η è la normale al bordo. Si ottiene pertanto una soluzione unica a meno di una costante.

Metodo delle Trasformate di Fourier

Una possibile risoluzione dell'equazione di Poisson (5.19)-(5.20) è ottenuta nello spazio delle fasi dopo aver applicato la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\omega_u, \omega_v) = \iint_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} f(u, v) e^{-i(\omega_u u + \omega_v v)} du dv , \quad (5.21)$$

dove si ha

$$\widehat{f_u} = i\omega_u \hat{f} , \quad (5.22)$$

$$\widehat{f_v} = i\omega_v \hat{f} . \quad (5.23)$$

L'equazione diventa

$$-(\omega_u^2 + \omega_v^2) \hat{z}(\omega_u, \omega_v) = i\omega_u \hat{p}(\omega_u, \omega_v) + i\omega_v \hat{q}(\omega_u, \omega_v) , \quad (5.24)$$

e per $(\omega_u, \omega_v) \neq (0, 0)$ si ottiene

$$\hat{z} = \frac{\omega_u \hat{p} + \omega_v \hat{q}}{i(\omega_u^2 + \omega_v^2)} , \quad (5.25)$$

e si conclude applicando l'inversa della trasformata di Fourier. Operando nello spazio delle frequenze, tale metodo è più veloce numericamente rispetto alle alternative. Il metodo delle trasformate di Fourier richiede che la soluzione sia periodica e risulta una condizione eccessivamente stretta nelle applicazioni.

Metodo delle Trasformate del Coseno

In alternativa alla trasformata di Fourier adottiamo la trasformata discreta dei coseni. Essa conserva i vantaggi di operare nello spazio delle frequenze. Inoltre è applicabile a contesti non periodici con condizioni al bordo di Neumann naturali. Definiamo la trasformata di Fourier dei coseni come segue

$$\hat{f}^c(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi \xi t) dt . \quad (5.26)$$

Essa è una funzione pari a valori reali. Se f è una funzione pari, allora si ha

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^c(\xi) \cos(2\pi \xi t) d\xi . \quad (5.27)$$

Discretizziamo con le differenze finite centrate

$$\Delta z(u, v) \approx z_{u+1, v} + z_{u-1, v} + z_{u, v+1} + z_{u, v-1} - 4z_{u, v} , \quad (5.28)$$

$$\partial_u p(u, v) + \partial_v q(v, u) \approx \frac{p_{u+1, v} - p_{u-1, v}}{2} + \frac{q_{u, v+1} - q_{u, v-1}}{2} , \quad (5.29)$$

e sostituiamo ogni componente con l'inversa della trasformata discreta dei coseni.

$$f(u, v) = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{f}(k, l) \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) , \quad (5.30)$$

dove abbiamo considerato un dominio rettangolare $\Omega = [0, d_u] \times [0, d_v]$ uniformemente suddiviso lungo l'asse delle u con $m + 1$ punti e lungo l'asse delle v con $n + 1$ punti. Otteniamo le seguenti quantità

$$z_{u+1, v} = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \cos\left(\frac{\pi k(u+1)}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \quad (5.31)$$

$$= \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \left(\cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) - \sin\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{m}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) , \quad (5.32)$$

$$z_{u-1, v} = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \left(\cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{m}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) , \quad (5.33)$$

$$z_{u, v+1} = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{n}\right) \right) , \quad (5.34)$$

$$z_{u, v-1} = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{n}\right) \right) . \quad (5.35)$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \Delta z(u, v) &\approx \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} \left(2 \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right) - 4 \right) \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \\ &= \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} 2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right) - 2 \right) \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) \\ &= \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{k, l} 4 \left(-\sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Per poter introdurre nell'implementazione le condizioni al bordo di Neumann

$$\nabla z \cdot \eta = (p, q) \cdot \eta , \quad (5.37)$$

risolviamo un problema associato con le condizioni al bordo omogenee definendo una funzione ζ tale che

$$\begin{cases} \zeta = z & \text{in } \Omega , \\ \nabla \zeta \cdot \eta = 0 & \text{su } \partial\Omega , \end{cases} \quad (5.38)$$

e imponendo la seguente condizione

$$\nabla \zeta = \nabla z - (p, q) \quad \text{su } \partial\Omega , \quad (5.39)$$

da cui si ha

$$\nabla \zeta \cdot \eta = \nabla z \cdot \eta - (p, q) \cdot \eta . \quad (5.40)$$

Discretizzando con differenze finite del primo ordine otteniamo sul lato $\{0\} \times (0, d_v)$ la seguente condizione

$$(\zeta_{0,v} - \zeta_{-1,v}) \cdot (-1) = (z_{0,v} - z_{-1,v}) \cdot (-1) - (p, q) \cdot (-1, 0) , \quad (5.41)$$

e, dato che $\zeta_{0,v} = z_{0,v}$, segue

$$\zeta_{-1,v} = z_{-1,v} + p . \quad (5.42)$$

Nella pratica andiamo a modificare il secondo membro nelle entrate che descrivono il bordo

$$b_{0,v} = \frac{p_{1,v} - p_{-1,v}}{2} + \frac{q_{0,v+1} - q_{0,v-1}}{2} - p_{0,v} , \quad (5.43)$$

e, dato che $p_{-1,v}$ è sconosciuto, lo si approssima con $p_{0,v}$

$$b_{0,v} = \frac{p_{1,v} - p_{0,v}}{2} + \frac{q_{0,v+1} - q_{0,v-1}}{2} - p_{0,v} . \quad (5.44)$$

Per gli angoli mostriamo il caso di $(0,0)$. Si ha $\eta = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ perciò otteniamo

$$b_{0,v} = \frac{p_{1,0} - p_{0,0}}{2} + \frac{q_{0,1} - q_{0,-1}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0,0} + q_{0,0}) . \quad (5.45)$$

Scriviamo il secondo membro come inverso della trasformata dei coseni

$$b_{u,v} = \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{g}_{k,l} \cos\left(\frac{\pi k u}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi l v}{n}\right) , \quad (5.46)$$

e dato che

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi k}{m} \cdot u\right) \cos\left(\frac{\pi l}{n} \cdot v\right) \middle| k = 0, \dots, m-1, l = 0, \dots, n-1 \right\} , \quad (5.47)$$

è una base di elementi indipendenti possiamo confrontare la (5.36) e la (5.46) componente per componente

$$\bar{\bar{\zeta}}_{k,l} = - \frac{\bar{\bar{b}}_{k,l}}{4 \left(\sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right) \right)} , \quad (5.48)$$

invertendo la trasformata dei coseni, si conclude.