

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEORIA DI MORSE E DECOMPOSIZIONE IN MANICI

Tesi di Laurea in Geometria e Topologia Differenziale

Relatore:
Dott.
MARCO MORASCHINI

Presentata da:
MATILDE FORNONI

Anno Accademico 2024-2025

Indice

Introduzione	3
Capitolo 1. Varietà differenziabili e campi vettoriali	7
1.1. Le varietà topologiche	7
1.2. Le struttura lisce sulle varietà topologiche	9
1.3. Le mappe lisce	12
1.4. Le partizioni dell'unità	14
1.5. I vettori tangenti e i differenziali	15
1.6. I campi vettoriali e i flussi	22
Capitolo 2. Teoria di Morse	31
2.1. Punti critici e Lemma di Morse	31
2.2. Classi di omotopia in termini dei valori critici	36
2.3. Esempi	42
2.4. Uno sguardo alle sfere di dimensione alta	46
Capitolo 3. Teoria di Morse e decomposizione in manici	49
3.1. Decomposizione in manici: un approccio alternativo alla Teoria di Morse	49
3.2. Una breve introduzione ad una teoria omologica con i manici	53
3.3. Applicazioni della decomposizione in manici al calcolo della caratteristica di Eulero	55
Bibliografia	61

Introduzione

La Teoria di Morse, nucleo centrale di questa tesi, è una tecnica di topologia differenziale, elaborata dal matematico statunitense Marston Morse (1892-1977) da cui prende il nome. Il lavoro di Morse si concentra sullo studio di varietà lisce tramite particolari funzioni differenziabili a valori reali, chiamate *funzioni di Morse*, che consentono, grazie all'analisi dei loro punti critici, di dedurre la struttura di complesso CW della varietà considerata e dunque del suo tipo di omotopia. Le funzioni di Morse sono funzioni che presentano punti critici esclusivamente non degeneri, la cui esistenza è garantita su varietà lisce. Prima di Morse, altri due matematici, Arthur Cayley (1821-1895) e James Clerk Maxwell (1831-1879) svilupparono idee simili a quelle di Morse. Morse applicò inizialmente la sua teoria allo studio delle geodetiche, tecniche che furono usate nella dimostrazione del Teorema di periodicità di Raoul Bott (1923-2005). Esiste anche un analogo della Teoria di Morse per le varietà complesse, esplicitato dal Teorema di Picard-Lefschetz. In questa tesi seguiremo il libro di John Willard Milnor, *Morse Theory* [Mil63]. Accenneremo anche al lavoro svolto da Milnor riguardante le 7-sfere *esotiche* nel Capitolo 2.4, che gli valse la Medaglia Fields nel 1962, concentrandoci principalmente sul Teorema di Reeb 2.17 di cui, grazie agli strumenti forniti dalla Teoria di Morse, riusciremo a darne una dimostrazione. Il Teorema di Reeb 2.17 è lo strumento chiave per dimostrare che le varietà 7-dimensionali costruite *ad hoc* da Milnor sono omeomorfe alla 7-sfera. Il lavoro del matematico statunitense nel mostrare l'esistenza delle sfere esotiche poi si concentra nel provare che però esse ammettano una struttura liscia che non sia equivalente a livello differenziale a quella della sfera standard.

Data una varietà differenziabile M , studieremo il comportamento di funzioni lisce definite su di essa. In particolare ci concentreremo sullo studio dei loro punti critici, essi infatti rivestiranno un ruolo chiave per la costruzione del complesso cellulare rappresentante M . Il teorema principale della teoria di Morse, che dimostreremo, è il seguente:

TEOREMA A (Teorema 2.12). Se M è una varietà liscia e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con punti critici non degeneri, e se ogni M^a è compatta, allora M ha lo stesso tipo di omotopia di un complesso CW , con una cella di dimensione λ per ogni punto critico di indice λ .

Al fine di dimostrare questo teorema, per prima cosa enunceremo e dimostreremo il Lemma di Morse 2.7, che garantirà una riscrittura in coordinate della funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)$$

dove $p \in M$ è il punto critico per la funzione f e l'intero non negativo λ è l'indice della funzione nel punto. Da questa scrittura potremo dedurre facilmente diverse proprietà riguardanti i punti critici della funzione. Infatti, dedurremo il Teorema 2.9 che tratterà delle regioni prive di punti critici, garantendo che, dati due numeri reali $a < b$, se la regione $f^{-1}([a, b])$ non contiene punti critici per f , gli insiemi di livello $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ e $M^b = f^{-1}((-\infty, b])$ siano diffeomorfi tra loro. Questo ci consentirà di concentrare il nostro studio solo su intorni dei punti critici. Successivamente, il Teorema 2.10 analizzerà nello specifico proprio i punti critici, mettendo in relazione l'indice della funzione f in quel punto (l'intero λ di cui parlavamo poche righe sopra) con il cambiamento del tipo di omotopia degli insiemi di livello rispettivamente prima e dopo il valore critico. Infine, il Teorema 2.12 concluderà i risultati raggiunti in precedenza e darà informazioni sulla costruzione del complesso cellulare.

Considerando successivamente una varietà liscia dotata di una sua *decomposizione in manici*, riusciremo a riscrivere la Teoria di Morse nel linguaggio dei *manici*, ad esempio riformuleremo il Teorema 2.10 (che tratta dell'attaccamento di celle) nella forma del Teorema 3.9 (che utilizza invece l'attaccamento di manici). Grazie alle proprietà della decomposizione in manici e della *decomposizione in manici duale* (Osservazione 3.7) daremo anche la dimostrazione del seguente risultato classico di topologia algebrica:

TEOREMA B (Corollario 3.18). La caratteristica di Eulero χ di una varietà chiusa liscia di dimensione dispari è 0.

Riusciremo a raggiungere questo risultato sfruttando la *simmetria* di una decomposizione in manici e della sua duale.

Nel Capitolo 1 la lettrice o il lettore possono trovare tutti gli strumenti e i risultati necessari per approcciarsi ai capitoli successivi. In particolare in esso sono trattate le *varietà topologiche*, le *strutture lisce* sulle varietà che, associate ad esse, determinano le *varietà differenziabili*; sono poi introdotti i *vettori tangenti* di cui vengono enunciate diverse proprietà che li legano alle *derivazioni*, gli *spazi tangenti alla varietà* concludendo infine con la nozione di *fibrato tangente*. L'ultimo argomento trattato sono i *campi vettoriali* e i *flussi*, messi in relazione tra loro dal Lemma 1.69. La sezione sulle *partizioni dell'unità* (Sezione 1.4) contiene risultati tecnici utili per diverse dimostrazioni; vengono citati in essa solo i risultati strettamente necessari per questo elaborato.

Il Capitolo 2 segue il Capitolo 1 del libro di Milnor [Mil63], in cui viene sviscerata la Teoria di Morse. Nella prima sezione trattiamo di risultati tecnici sullo studio di funzioni a valori reali, definite su varietà lisce, tra cui il Lemma di Morse (Lemma 2.7) che ci permetteranno di affrontare i teoremi della seconda sezione (Teorema 2.9, Teorema 2.10 e Teorema A), in cui dimostriamo esplicitamente i dettagli della costruzione del complesso CW con lo stesso tipo di omotopia della varietà di partenza. Successivamente nella terza sezione forniremo esempi espliciti della costruzione del complesso cellulare, in particolare della sfera 2-dimensionale (Esempio 2.15) e del toro con 3 buchi, ossia della varietà liscia 2-dimensionale di genere 3 (Esempio 2.16). Infine nell'ultima sezione del capitolo, parliamo di un'applicazione famosa della Teoria di Morse: il Teorema di Reeb 2.17. Questo teorema è uno strumento utile per mostrare quando una n -varietà liscia sia omeomorfa alla n -sfera.

Nel Capitolo 3 introduciamo lo strumento matematico del *manico* e, tramite esso, la definizione di *decomposizione in manici* di una varietà liscia. Successivamente diamo una breve introduzione al calcolo dei gruppi di omologia della varietà considerata tramite la sua decomposizione in manici. Questo lavoro sarà propedeutico per la terza sezione conclusiva, nella quale affrontiamo diversi metodi per il calcolo della caratteristica di Eulero, utilizzando, ad esempio, la decomposizione in manici (Corollario 3.17) oppure, richiamando quanto fatto nel capitolo precedente, i punti critici di una funzione liscia (Corollario 3.20). La sezione si conclude con la dimostrazione del Corollario B sull'annullarsi della caratteristica di Eulero per varietà chiuse lisce di dimensione dispari.

CAPITOLO 1

Varietà differenziabili e campi vettoriali

In questo primo capitolo introdurremo e tratteremo brevemente i concetti e gli strumenti necessari allo sviluppo della teoria nel prossimo capitolo. Non sarà una trattazione completa ed esauriente degli argomenti citati ma verranno forniti solo i concetti necessari alla comprensione dei fondamenti matematici della Teoria di Morse. (Verranno comunque riportate le referenze a cui lettrici o lettori più curiosi potranno rivolgersi, se desiderose o desiderosi di ampliare le proprie conoscenze in materia.)

Alcuni argomenti saranno necessari come preliminari della teoria che svilupperemo, ad esempio le Sezioni 1.1, 1.2 e 1.3 riguardanti le *varietà topologiche* e la *struttura liscia* di cui possono essere dotate. Le Sezioni 1.5 e 1.6 invece costituiranno la teoria di base degli strumenti matematici utilizzati nell'arco della tesi.

1.1. Le varietà topologiche

Innanzitutto, diamo la definizione di uno degli oggetti chiave della teoria di cui tratteremo, ovvero le *varietà topologiche*.

DEFINIZIONE 1.1. (Varietà topologica) Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico M di *Hausdorff* e *secondo numerabile* tale che ogni punto $p \in M$ abbia un intorno aperto $U \subseteq M$ omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, cioè esista un omeomorfismo

$$\Phi: U \rightarrow V$$

con $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Il seguente è un importante risultato riguardante le varietà e la loro dimensione:

TEOREMA 1.2 (Invarianza topologica della dimensione [Lee13, Teorema 1.2]). Una varietà n -dimensionale non vuota non è omeomorfa ad una varietà m -dimensionale a meno che $m = n$.

DEFINIZIONE 1.3. (Carta) Sia M una n -varietà topologica. Una *carta delle coordinate*, o semplicemente *carta*, su M è una coppia (U, φ) dove U è un aperto di M e $\varphi: U \rightarrow \hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo.

Dalla definizione di varietà segue che ogni punto $p \in M$ è contenuto nel dominio U di qualche carta (U, φ) . Se $\varphi(p) = 0$ si dice che la carta è *centrata in p* .

Data una carta (U, φ) la mappa φ è chiamata *mappa locale delle coordinate* e le funzioni componenti di φ , $(x^1, \dots, x^n)$, definite da

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

sono dette *coordinate locali su U* .

ESEMPIO 1.4. (Spazi Euclidei) Sia $\mathbb{R}^d$ lo spazio Euclideo d -dimensionale. Esso è una varietà topologica d -dimensionale. Infatti è uno spazio topologico di *Hausdorff* perchè prodotto di copie di $\mathbb{R}^n$ che sono spazi di *Hausdorff*; è *secondo numerabile* perchè palle della forma $B_r(q)$ con raggio $r \in \mathbb{Q}$ e centrate nel punto $q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$, sono una base per lo spazio. Inoltre ogni punto p ha un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^d$, ad esempio la palla $B_\varepsilon(p)$ centrata in p e con raggio $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 1.5. (Sfera n -dimensionale) Per ogni intero $n \geq 0$, la sfera n -dimensionale è una varietà topologica, infatti è *secondo numerabile* e di *Hausdorff* poichè è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Per mostrare che è localmente n -Euclidea, possiamo considerare gli emisferi aperti

$$U_i^+ = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$$

per ogni $i = 1, \dots, n+1$. L'idea è di schiacciare gli emisferi su dischi aperti n -dimensionali dimenticando l' i -esima coordinata.

L'omeomorfismo che consideriamo quindi è dato da

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

dove $\hat{x}_i$ indica che la i -esima coordinata è stata rimossa, per ogni $i = 1, \dots, n+1$ ed equivalentemente per gli $n+1$ emisferi indicizzati con il segno meno. Possiamo dunque costruire un atlante con carte della forma $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$.

ESEMPIO 1.6. (Varietà prodotto) Siano $M_1, \dots, M_k$ varietà topologiche di dimensioni $n_1, \dots, n_k$ rispettivamente. Lo spazio prodotto $M_1 \times \dots \times M_k$ è una varietà topologica di dimensione $n_1 + \dots + n_k$. Infatti:

- (1) è uno spazio di *Hausdorff*, poichè prodotto di spazi di *Hausdorff*;
- (2) è a base numerabile;
- (3) è localmente Euclideo, ovvero localmente omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$.

Infatti dato $(p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$, possiamo scegliere, per ogni $i = 1, \dots, k$, una carta delle coordinate (U_i, φ_i) per M_i , con $p_i \in U_i$. La mappa prodotto

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k : U_1 \times \dots \times U_k \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$$

è un omeomorfismo sull'immagine costituita da prodotto di aperti in $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$.

Quindi $M_1 \times \dots \times M_k$ è una varietà topologica di dimensione $n_1 + \dots + n_k$ con carte della forma $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$.

Diamo ora un concetto che generalizza quello di varietà topologica, ossia la nozione di *varietà topologica con bordo*. Sarà chiaro dalle caratterizzazioni delle varietà con bordo, che una varietà topologica è sempre una varietà con bordo (in questo caso vuoto), mentre il viceversa non vale.

Definiamo $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ come semispazio chiuso n -dimensionale

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Inoltre denotiamo con $\text{Int } \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$ l'interno del semispazio $\mathbb{H}^n$ e con $\partial \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$ il bordo del semispazio.

DEFINIZIONE 1.7. (Varietà con bordo) Una *varietà con bordo* di dimensione n è uno spazio topologico M di *Hausdorff*, *secondo numerabile*, in cui ogni punto ha un intorno omeomorfo o ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, o ad un aperto (relativamente alla topologia di sottospazio) di $\mathbb{H}^n$.

Il dato di un aperto $U \subseteq M$ e di un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{H}^n$ è chiamato *carta per M* . Chiameremo (U, φ) *carta interna per M* se $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e diremo che è una *carta di bordo* se $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{H}^n$ tale che $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq \emptyset$. Un punto p è chiamato *punto interno di M* se è nel dominio di qualche carta interna, diremo invece che p è un *punto di bordo* se è nel dominio di qualche carta di bordo che lo mappa in $\partial \mathbb{H}^n$. Il *bordo* di M è indicato come ∂M e consiste nell'unione dei punti di bordo di M , mentre l'interno di M è denotato come $\text{int}(M) = M \setminus \partial M$.

Enunciamo ora la seguente proposizione, che mette in relazione le *varietà topologiche* e le *varietà topologiche con bordo*.

PROPOSIZIONE 1.8. [Lee13, Proposizione 1.11] Sia M una n -varietà topologica con bordo. Allora valgono:

- (1) $\text{int}(M)$ è un aperto di M ed è una n -varietà senza bordo;
- (2) ∂M è un chiuso di M ed è una $n - 1$ -varietà senza bordo;
- (3) M è una varietà topologica $\Leftrightarrow \partial M = \emptyset$;
- (4) se $n = 0$, allora $\partial M = \emptyset$ e M è una 0-varietà.

1.2. Le struttura lisce sulle varietà topologiche

Introduciamo ora, per poter lavorare con gli strumenti della geometria differenziale, una *struttura liscia* su una varietà topologica. Prima di tutto chiariamo cosa significhi il concetto di *funzione liscia*.

DEFINIZIONE 1.9. (Funzione liscia) Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti. Una funzione $F: U \rightarrow V$ si dice *funzione liscia*, o equivalentemente *differenziabile* o C^∞ , se ognuna delle sue componenti ha derivate parziali continue di ogni ordine. Inoltre se F è bigettiva e ha inversa liscia, F è detta *diffeomorfismo*.

DEFINIZIONE 1.10. (Carte compatibili C^∞) Due carte (U, φ) e (V, ψ) sono dette *compatibili in senso differenziale* se vale una tra le seguenti condizioni:

- (1) $U \cap V = \emptyset$;
- (2) $U \cap V \neq \emptyset$ e la *mappa di transizione* $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ è un diffeomorfismo.

Per alleggerire la notazione, in ambito differenziale, diremo che due carte compatibili in senso differenziale sono, semplicemente, *compatibili*.

DEFINIZIONE 1.11. (Atlante) Si definisce *atlante su M* una collezione di carte $\mathcal{A}$ il cui dominio ricopre tutto M . Un atlante è detto *liscio* se ogni coppia di carte è compatibile in senso differenziale.

OSSERVAZIONE 1.12. Per mostrare che un atlante $\mathcal{A}$ è liscio dobbiamo verificare che la mappa di transizione sia un diffeomorfismo per ogni coppia di carte in $\mathcal{A}$ con intersezione non nulla.

Un atlante liscio $\mathcal{A}$ si dice *massimale* se non è propriamente contenuto in nessun altro atlante liscio. Se $\mathcal{A}$ è un atlante liscio massimale, ogni carta compatibile con ogni carta di $\mathcal{A}$, è già contenuta in $\mathcal{A}$. Tale atlante si dice anche *completo*.

DEFINIZIONE 1.13. (Varietà liscia) Sia M una varietà topologica. Una *struttura liscia*, o *struttura C^∞* , su M è il dato di un atlante liscio massimale $\mathcal{A}$ su M . Una *varietà liscia*, C^∞ o *differenziabile*, è una coppia $(M, \mathcal{A})$, con M varietà topologica e $\mathcal{A}$ struttura liscia su M .

PROPOSIZIONE 1.14. [Lee13, Proposizione 1.17] Sia M una varietà topologica.

- (1) Ogni atlante liscio $\mathcal{A}$ di M è contenuto in un unico atlante liscio massimale, chiamato *struttura liscia determinata da $\mathcal{A}$* ;
- (2) Due atlanti lisci per M determinano la stessa struttura liscia se e solo se la loro unione è un atlante liscio.

Introduciamo ora alcuni esempi di varietà lisce:

ESEMPIO 1.15. (Sottovarietà aperta) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora U è una varietà topologica di dimensione n e la carta (U, id_U) definisce una struttura liscia su U . Più in generale, sia M una varietà liscia n -dimensionale e sia $U \subseteq M$ un aperto. Definiamo un atlante su U come l'insieme $\mathcal{A}_U$ delle carte lisce (V, ψ) di M tali che $V \subseteq U$. Ogni punto $p \in U$ è contenuto nel dominio di qualche carta liscia (W, φ) di M , allora ponendo $V = W \cap U$, $(V, \varphi|_V)$ è una carta liscia in $\mathcal{A}_U$ il cui dominio contiene p . Dunque esiste un ricoprimento di U formato da domini di carte in $\mathcal{A}_U$ e questo è un atlante liscio per U . Dotata di questa struttura liscia, chiamiamo ogni aperto U , *sottovarietà aperta* di M .

ESEMPIO 1.16. (Varietà prodotto liscia) Se $M_1, \dots, M_k$ sono varietà lisce di dimensioni rispettivamente $n_1, \dots, n_k$, come mostrato nell'Esempio 1.6, lo spazio prodotto $M_1 \times \dots \times M_k$ è una varietà topologica di dimensione $n_1, \dots, n_k$, con carte della forma $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$. Ogni coppia di carte $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$, $(V_1 \times \dots \times V_k, \psi_1 \times \dots \times \psi_k)$ è compatibile in senso differenziale poiché la mappa di transizione tra queste è $(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times \dots \times (\psi_k \circ \varphi_k^{-1})$ che è una mappa liscia. Questo definisce una struttura liscia naturale sulla varietà prodotto. Ad esempio, questo permette di dare una struttura liscia al toro n -dimensionale

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1.$$

ESEMPIO 1.17. (Sfera n -dimensionale) Consideriamo la sfera n -dimensionale S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$, che abbiamo mostrato essere una varietà nell'Esempio 1.5. Costruiamo una struttura differenziale per la sfera come segue:

Prendiamo le carte della forma $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ con $U_i^\pm \subseteq S^n$ e $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ definite nell'Esempio 1.5. La funzione di transizione, per ogni coppia di indici $i < j$ è della forma:

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}: \varphi_j^\pm(U_j^\pm \cap U_i^\pm) &\rightarrow \varphi_i^\pm(U_i^\pm \cap U_j^\pm) \\ (u^1, \dots, u^n) &\mapsto (u^1, \dots, \hat{u}^i, \dots, \pm \sqrt{1 - |u|^2}, \dots, u^n) \end{aligned}$$

dove la radice quadrata è posizionata nella j -esima entrata del vettore immagine.

Quando invece abbiamo $i = j$, la funzione di transizione, indipendentemente dal segno più o meno, è l'identità sulla palla $B^n = \varphi_i^\pm(U_i^\pm)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque ogni funzione di transizione è liscia per ogni coppia di indici $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

La collezione delle carte $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1, \dots, n}$ risulta essere un atlante liscio, e questo definisce una struttura liscia sulla n -sfera. La struttura così definita si chiama anche *struttura liscia standard*.

C'è un modo alternativo per dimostrare che un oggetto è una varietà liscia senza dimostrare prima che è una varietà topologica e poi determinarne una struttura liscia.

LEMMA 1.18. (Carte della varietà liscia) Sia M un insieme e sia $\{U_\alpha\}_\alpha$ una collezione di sottoinsiemi di M con mappe $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che siano verificate le seguenti proprietà:

- (1) Per ogni α , φ_α è una biezione tra U_α e un aperto di $\mathbb{R}^n$;
- (2) Per ogni α, β gli insiemi $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$;
- (3) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la mappa $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è liscia;
- (4) Un'unione numerabile di U_α ricopre M ;
- (5) Per ogni $p, q \in M$ con $p \neq q$, abbiamo due casi: o esiste un insieme U_α contenente p e q , oppure esistono due insiemi disgiunti U_α, U_β , con $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$.

Allora M ha una struttura di varietà liscia unica tale che ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è una carta liscia.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su M una topologia prendendo tutti gli insiemi della forma $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, con $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, come base della topologia. Per provare che questa è effettivamente una base, dobbiamo mostrare che per ogni p punto nell'intersezione di due elementi della base $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, $\varphi_\beta^{-1}(W)$, esista un terzo elemento della base contenente p e che sia contenuto in $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$. Per farlo basta mostrare che $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$ è anch'esso un elemento della base. Ora, (3) implica che $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ è un aperto in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e (2) che questo è anche un aperto di $\mathbb{R}^n$. Segue che:

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W))$$

è ancora un elemento della base, come ipotizzato. Per costruzione, ogni mappa φ_α è quindi un omeomorfismo sulla sua immagine, quindi M è localmente euclideo di dimensione n . Verifichiamo che sia uno spazio di *Hausdorff*: se $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ e vale $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ abbiamo finito; se $p, q \in U_\alpha$ allora $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto che contiene $\varphi_\alpha(p), \varphi_\alpha(q)$, dal momento che $\mathbb{R}^n$ è di *Hausdorff*, esistono due aperti $V, W \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$ tali che $p \in V$, $q \in W$ e $V \cap W = \emptyset$, allora $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ e $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ sono gli aperti cercati. La richiesta di avere base numerabile segue direttamente da (4) e insieme al fatto che ogni U_α è a base numerabile. Infine, (3) garantisce che la collezione $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ sia un atlante liscio. Questa topologia e questa struttura liscia sono le uniche che rendono $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta liscia. $\square$

Definiamo ora una struttura liscia per le varietà con bordo. Innanzitutto diamo un analogo della differenziabilità per mappe definite su aperti di $\mathbb{H}^n$.

Se U è un aperto di $\mathbb{H}^n$, una mappa $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ è *liscia* se per ogni $x \in U$, esiste un aperto $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ contenente x e una funzione liscia $\hat{F}: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ che coincide con F su $\hat{U} \cap \mathbb{H}^n$. Se F è una tale mappa, la restrizione di F ad $U \cap \text{int}(\mathbb{H}^n)$ è liscia nel senso classico.

Per continuità, tutte le derivate parziali di F nei punti di $U \cap \partial \mathbb{H}^n$ sono determinate dai loro valori in $\text{int}(\mathbb{H}^n)$ e sono dunque indipendenti dalla scelta dell'estensione.

Si ha inoltre questo risultato:

LEMMA 1.19. [Lee13, Pag. 27] $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ è liscia se e solo se F è continua, $F|_{U \cap \text{int}(\mathbb{H}^n)}$ è liscia e le derivate parziali di $F|_{U \cap \text{int}(\mathbb{H}^n)}$ di ogni ordine hanno estensioni continue a tutto U .

DEFINIZIONE 1.20. (Varietà liscia con bordo) Sia M una varietà topologica con bordo. Una *struttura liscia su M* è definita come un atlante liscio massimale. Un *atlante liscio* è una collezione di carte il cui dominio ricopre M e le cui mappe di transizione sono lisce nel senso descritto sopra.

Con questa struttura M è chiamata *varietà liscia con bordo*.

Questa struttura ci permette di dare una formulazione equivalente del Teorema di invarianza del bordo (si veda [Lee13]) e di conseguenza una dimostrazione con gli strumenti della geometria differenziale.

TEOREMA 1.21. (Invarianza liscia del bordo) Sia M una varietà liscia con bordo e $p \in M$. Se esiste una carta (U, φ) di M tale che $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ e $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$, allora questo vale per ogni carta liscia il cui dominio contenga p .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che p sia nel dominio di una carta liscia interna (V, ψ) e anche nel dominio di una carta liscia di bordo (U, φ) tale che $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$. Sia $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$ la mappa di transizione, omeomorfismo tra $\psi(U \cap V)$ e $\varphi(U \cap V)$. La compatibilità in senso differenziale delle carte assicura che τ e τ^{-1} sono lisce, nel senso che localmente possono essere estese, se necessario, a mappe lisce definite su aperti di $\mathbb{R}^n$. Siano $x_0 = \psi(p)$ e $y_0 = \varphi(p) = \tau(x_0)$. Esiste un intorno W di y_0 in $\mathbb{R}^n$ e una funzione liscia $\eta: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ che coincide con τ^{-1} in $W \cap \varphi(U \cap V)$. Assumendo che ψ sia una carta interna, esiste una palla aperta B centrata in x_0 contenuta in $\varphi(U \cap V)$, tale che τ è liscia su B nel senso classico. Restrungendo, se necessario, B in modo che $B \subseteq \tau^{-1}(W)$, allora $\eta \circ \tau|_B = \tau^{-1} \circ \tau|_B = \text{id}_B$, quindi, segue dalla regola della catena che $D\eta(\tau(x)) \circ D\tau(x)$ è la mappa identica per ogni $x \in B$. Dal momento che $D\tau(x)$ è una matrice quadrata, in particolare non è singolare. Segue che $\tau: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una mappa aperta, dunque $\tau(B)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ che contiene $y_0 = \varphi(p)$ ed è contenuto in $\varphi(U)$. Questo contraddice l'ipotesi che $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ e $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$. $\square$

1.3. Le mappe lisce

Introduciamo ora brevemente le funzioni *lisce*, anche dette *differenziabili* o C^∞ . Esse saranno un tassello fondamentale della Teoria di Morse.

DEFINIZIONE 1.22. (Mappa liscia) Sia M una n -varietà liscia, k un intero non negativo e $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione. Diciamo che f è *liscia* se per ogni $p \in M$ esiste una carta liscia (U, φ) per M il cui dominio contenga p e tale che la funzione $f \circ \varphi^{-1}$ sia liscia sull'aperto $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 1.23. La differenziabilità della funzione $f \circ \varphi^{-1}$ è intesa nel senso classico da aperti di spazi euclidei, ovvero che esistono, di ogni ordine, le derivate parziali.

Nella precedente definizione è possibile sostituire la richiesta di M varietà liscia con M varietà liscia con bordo, includendo il caso che $\varphi(U)$ sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ oppure di $\mathbb{H}^n$, e nell'ultimo caso la differenziabilità di $f \circ \varphi^{-1}$ è da intendersi nel senso delle varietà con bordo. Analogamente, quello che verrà descritto in seguito per varietà lisce potrà essere generalizzato per varietà lisce con bordo.

Data una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e una carta (U, φ) per M , la funzione $\hat{f}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ definita da $\hat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$ è chiamata *rappresentazione in coordinate* di f .

Generalizziamo ora il concetto di funzione liscia da una varietà ad uno spazio euclideo a funzioni tra varietà lisce.

DEFINIZIONE 1.24. (Funzione liscia) Siano M e N due varietà lisce e sia $F: M \rightarrow N$ una mappa. Diciamo che F è una *mappa liscia* se per ogni $p \in M$ esiste una carta liscia (U, φ) contenente p e una carta liscia (V, ψ) contenente $F(p)$ tale che $F(U) \subseteq V$ e la funzione composta

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

è liscia come mappa tra aperti di $\mathbb{R}^n$.

Abbiamo il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.25. Ogni mappa liscia è continua.

DIMOSTRAZIONE. Siano M e N due varietà lisce con o senza bordo e sia $F: M \rightarrow N$ una funzione liscia. Dato $p \in M$, la differenziabilità di F implica che esistano carte lisce (U, φ) contenente p e (V, ψ) contenente $F(p)$ tale che $F(U) \subseteq V$ e la funzione $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ è liscia, in particolare continua. Dal momento che le due carte $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ e $\psi: V \rightarrow \psi(V)$ sono omeomorfismi, si ha che

$$F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi: U \rightarrow V$$

è composizione di funzioni continue. Quindi F è continua in un intorno di ogni punto, il che implica la continuità di F su tutta M . $\square$

Risulterà anche importante il concetto di *diffeomorfismo*, che generalizza il concetto di omeomorfismo nel contesto differenziale.

DEFINIZIONE 1.26. (Diffeomorfismo) Siano M e N due varietà lisce entrambe con o senza bordo. Un *diffeomorfismo* tra M e N è una mappa $F: M \rightarrow N$ bigettiva, liscia e con inversa liscia.

Diciamo che M e N sono *diffeomorfe* se esiste un diffeomorfismo tra di esse.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei diffeomorfismi [Lee13, Prop. 2.15]:

- (1) Ogni composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo;
- (2) Ogni prodotto finito di diffeomorfismi tra varietà lisce è un diffeomorfismo;
- (3) Ogni diffeomorfismo è un omeomorfismo ed una mappa aperta;
- (4) La restrizione di un diffeomorfismo ad una sottovarietà aperta con o senza bordo è un diffeomorfismo sull'immagine;
- (5) *Essere diffeomorfi* è una relazione d'equivalenza sulla classe di tutte le varietà lisce con o senza bordo.

1.4. Le partizioni dell'unità

Introduciamo brevemente le *partizioni dell'unità*, uno strumento matematico che ci sarà utile in seguito. Prima di darne la definizione, ricordiamo la nozione di *supporto* di una funzione.

DEFINIZIONE 1.27. (Supporto) Sia M uno spazio topologico e $f: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funzione continua a valori vettoriali. Definiamo il *supporto di f* , denotato $\text{supp}(f)$, come la chiusura dell'insieme dei punti in cui f non è nulla:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M: f(p) \neq 0_{\mathbb{R}^d}\}}.$$

Se $\text{supp}(f)$ è contenuto in qualche sottoinsieme $U \subseteq M$, diciamo che f è *supportata in U* . Una funzione f è detta *a supporto compatto* se $\text{supp}(f) \subseteq M$ è compatto.

DEFINIZIONE 1.28. (Partizioni dell'unità) Sia M uno spazio topologico e consideriamo $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di M arbitrario, indizzato dall'insieme A . Una *partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{X}$* è una famiglia indicizzata $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ di funzioni continue $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in A$, con le seguenti proprietà:

- (1) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$ per ogni $\alpha \in A$ e per ogni $x \in M$;
- (2) $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$;
- (3) La famiglia dei supporti è localmente finita, ossia per ogni punto esiste un intorno che interseca $\text{supp } \psi_\alpha$ non banalmente solo per un numero finito di $\alpha \in A$.
- (4) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ per ogni $x \in M$.

Se M è una varietà liscia con o senza bordo, una *partizione liscia dell'unità* è una partizione dell'unità con aggiunta la richiesta che le mappe $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ siano lisce.

TEOREMA 1.29. (Esistenza delle partizioni dell'unità) [Lee13, Teorema 2.23] Sia M una varietà liscia con o senza bordo e sia $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto indicizzato di M . Allora esiste una partizione dell'unità liscia subordinata di $\mathcal{X}$.

Usiamo ora le partizioni dell'unità per estendere il concetto di *funzioni bump* a sottoinsiemi arbitrari di una varietà M .

DEFINIZIONE 1.30. (Funzioni bump) Sia M uno spazio topologico, sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme chiuso di M e $U \subseteq M$ un sottoinsieme aperto contenente A . Una funzione continua $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *funzioni bump per A supportata in U* se:

- (1) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ per ogni $x \in M$;
- (2) $\psi \equiv 1$ su A ;
- (3) $\text{supp}(\psi) \subseteq U$.

Usando le partizioni dell'unità si può dimostrare che esistono funzioni bump su varietà.

TEOREMA 1.31. (Esistenza di funzioni bump) [Lee13, Proposizione 2.25] Sia M una varietà liscia con o senza bordo. Per ogni sottoinsieme chiuso $A \subseteq M$ e per ogni aperto U contenente A , esiste una funzione bump per A supportata in U .

Concludiamo ora la sezione con un lemma di *estensioni lisce* di funzioni da sottoinsiemi arbitrari. Tale lemma, di cui omettiamo la dimostrazione, utilizza gli enunciati precedenti sull'esistenza di partizioni dell'unità e di funzioni bump.

Iniziamo dando un concetto equivalente alla differenziabilità, per funzioni definite su insiemi arbitrari.

DEFINIZIONE 1.32. Siano M e N due varietà lisce con o senza bordo, e sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme arbitrario. Diciamo che una mappa $F: A \rightarrow N$ è *liscia su A* se ha un'estensione liscia in un aperto di ogni punto, ossia se per ogni punto $p \in A$ esiste un sottoinsieme aperto $W \subseteq M$ contenente p e una mappa liscia $\tilde{F}: W \rightarrow N$ la cui restrizione a $W \cap A$ coincide con F .

LEMMA 1.33. (Lemma di estensione per funzioni lisce [Lee13, Lemma 2.26]) Sia M una varietà liscia con o senza bordo, sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme chiuso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione liscia. Per ogni aperto U contenente A , esiste una funzione differenziabile $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $\tilde{f}|_A = f$ e $\text{supp } f \subseteq U$.

1.5. I vettori tangenti e i differenziali

In questa sezione approfondiremo concetti naturalmente legati alla *struttura liscia* su di una varietà topologica. Tratteremo inizialmente delle nozioni di *vettore tangente* e di *derivazione*, studieremo le proprietà di questi oggetti matematici; infine concluderemo introducendo il *fibrato tangente* ad una varietà liscia. Gli argomenti trattati in questa sezione saranno fortemente propedeutici alla sezione 1.6.

Per approfondimenti ulteriori riguardanti quanto tratteremo, si consiglia la lettura del Capitolo 3 del libro [Lee13].

DEFINIZIONE 1.34. (Spazio geometrico tangente) Dato un punto $a \in \mathbb{R}^n$, definiamo lo *spazio tangente geometrico* di $\mathbb{R}^n$ in a , denotato $\mathbb{R}_a^n$, come l'insieme

$$\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

Un *vettore tangente geometrico* in $\mathbb{R}^n$ è un elemento di $\mathbb{R}_a^n$ per qualche $a \in \mathbb{R}^n$.

Per semplificare la notazione, (a, v) indicheremo il vettore tangente geometrico come v_a oppure $v|_a$. Si può pensare il vettore v_a come il vettore v con punto iniziale a .

L'insieme $\mathbb{R}_a^n$ è uno spazio vettoriale reale con le seguenti operazioni naturali:

$$\begin{aligned} (v + w)_a &= v_a + w_a \\ (\lambda v)_a &= \lambda(v_a) \end{aligned}$$

per $v_a, w_a \in \mathbb{R}_a^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_a^n$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$ stesso. L'aggiunta degli indici al pedice è per ricordare che gli spazi $\mathbb{R}_a^n$ e $\mathbb{R}_b^n$ sono disgiunti per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$.

La definizione appena data vale però solo per gli spazi euclidei, bisogna quindi introdurre una caratterizzazione dello spazio tangente che abbia senso su una varietà liscia qualsiasi.

OSSERVAZIONE 1.35. Ogni vettore tangente geometrico $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ induce una mappa $D_v|_a: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ che calcola la derivata direzionale lungo la direzione v in a :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv).$$

Questa operazione è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa la regola del prodotto:

$$(1) \quad D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a(g) + g(a)D_v|_a(f).$$

Considerando la base standard di $\mathbb{R}_a^n$, data da $\{e_1|_a, \dots, e_n|_a\}$, possiamo scrivere $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ come $v_a = \sum_{i=1}^n v^i e_i|_a$, con $v^i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, rispetto alla base standard e otteniamo così per la regola della catena la seguente espressione

$$D_v|_a f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

DEFINIZIONE 1.36. (Derivazione) Sia $a \in \mathbb{R}^n$ un punto. Diremo che una mappa $\omega: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata *derivazione* in a se è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa la regola del prodotto (1).

Sia $T_a \mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le derivazioni di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in a . Esso è uno spazio vettoriale con le operazioni

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)f &= \omega_1 f + \omega_2 f \\ (\lambda \omega)f &= \lambda(\omega f) \end{aligned}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e ω, ω_1 e ω_2 sono derivazioni in $T_a \mathbb{R}^n$.

LEMMA 1.37. (Proprietà delle derivazioni) Siano $a \in \mathbb{R}^n$ un punto, $\omega \in T_a \mathbb{R}^n$ una derivazione e $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mappe lisce.

- (1) Se f è una funzione costante allora $\omega f = 0$;
- (2) Se $f(a) = g(a) = 0$ allora $\omega(fg) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Dimostriamolo per $f_1(x) \equiv 1$ (per $\mathbb{R}$ -linearità vale, per ogni $c \in \mathbb{R}$, per $f(x) \equiv c$). La regola del prodotto ci dà

$$\omega f_1 = \omega(f_1 f_1) = f_1(a)\omega f_1 + f_1(a)\omega f_1 = 2\omega f_1$$

da cui $\omega f_1 = 0$.

Dimostriamo (2) applicando la nuovamente la regola del prodotto:

$$\omega(fg) = f(a)\omega g + g(a)\omega f = 0 + 0 = 0.$$

□

PROPOSIZIONE 1.38. Sia $a \in \mathbb{R}^n$ un punto.

- (1) Per ogni vettore tangente geometrico $v_a \in \mathbb{R}_a^n$, la mappa

$$D_v|_a: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv)$$

è una derivazione in a ;

- (2) La mappa $v_a \mapsto D_v|_a$ è un isomorfismo tra $\mathbb{R}_a^n$ e $T_a \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che $D_v|_a$ sia una derivazione segue dall'Osservazione 1.35. Per provare che la mappa $v_a \mapsto D_v|_a$ è un isomorfismo, notiamo prima che è lineare. Questo segue da:

$$\begin{aligned} D_w|_a f + D_v|_a f &= \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (w^i + v^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \\ &= D_{(w+v)}|_a f \end{aligned}$$

e

$$D_{\lambda v}|_a f = \sum_{i=1}^n (\lambda v^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lambda \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lambda D_v|_a f$$

per ogni $v, w \in \mathbb{R}_a^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per provare l'iniettività, supponiamo che $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ sia tale che la derivazione associata $D_v|_a$ sia nulla. Scriviamo v_a in coordinate rispetto alla base canonica, $v_a = \sum_{i=1}^n v^i e_i|_a$ e consideriamo la j -esima funzione coordinata $x^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ come funzione liscia su $\mathbb{R}^n$. Allora abbiamo:

$$0 = D_v|_a(x^j) = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = v^j$$

poichè $\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = 0$ per ogni $i \neq j$, mentre è uguale ad 1 per $i = j$. Dall'arbitrarietà di $j = 1, \dots, n$ segue che v_a è il vettore nullo.

Dimostriamone ora la suriettività. Sia $w \in T_a \mathbb{R}^n$ una derivazione arbitraria, definiamo $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ con $v^1, \dots, v^n$ numeri reali tali che $v^i = w(x^i)$. Mostriamo ora $w = D_v|_a$. Sia f una funzione liscia a valori in $\mathbb{R}^n$. Per il Teorema di Taylor, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n (x^i - a^i)(x^j - a^j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + t(x-a)) dt. \end{aligned}$$

Si noti che nell'ultima sommatoria compaiono, moltiplicate tra loro, due funzioni lisce che si annullano in a . Dunque per il Lemma 1.37 la derivata di questa sommatoria è nulla. Quindi per linearità e notando che $f(a)$ è una funzione costante, abbiamo che:

$$wf = wf(a) + \sum_{i=1}^n w\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i)\right) = 0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(w(x^i) - w(a^i))$$

Inltre $a^i \in \mathbb{R}$, da cui $w(a^i) = 0$, perciò l'espressione sopra diventa

$$wf = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)w(x^i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i = D_v|_a f.$$

Dunque la mappa $v_a \mapsto D_v|_a$ è una mappa tra spazi vettoriali, lineare, iniettiva e suriettiva, ossia un isomorfismo. $\square$

COROLLARIO 1.39. Per ogni punto $a \in \mathbb{R}^n$, le n derivazioni $\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_a$ definite da $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ formano una base per $T_a \mathbb{R}^n$, che ha dunque dimensione n .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue direttamente dal Lemma precedente e notando che $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a = D_{e_i}|_a$. $\square$

Possiamo finalmente introdurre i *vettori tangenti ad una varietà*. Prima di tutto, se M è una varietà liscia con o senza bordo e $p \in M$ un punto, una funzione lineare $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata *derivazione* in p se soddisfa la regola del prodotto

$$(2) \quad v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

per ogni $f, g \in C^\infty(M)$.

DEFINIZIONE 1.40. (Vettori tangenti ad una varietà) Sia M una varietà liscia con o senza bordo e sia $p \in M$ un punto. L'insieme di tutte le derivazioni di $C^\infty(M)$ in p , denotato $T_p M$, è uno spazio vettoriale, chiamato *spazio tangente* a M in p . Un elemento di $T_p M$ è chiamato *vettore tangente* a M in p .

Riformuliamo ora le proprietà enunciate in precedenza nel caso di vettori tangenti alle varietà.

LEMMA 1.41. (Proprietà dei vettori tangenti ad una varietà) Sia M una varietà liscia con o senza bordo, $p \in M$ un punto, $v \in T_p M$ un vettore tangente e $f, g \in C^\infty(M)$ due funzioni lisce.

- (1) Se f è una funzione costante allora $vf = 0$;
- (2) Se $f(p) = g(p) = 0$ allora $v(fg) = 0$.

Omettiamo la dimostrazione in quanto è analoga a quella del Lemma 1.37.

DEFINIZIONE 1.42. (Differenziale) Data $F: M \rightarrow N$ una funzione differenziabile tra due varietà lisce, per ogni punto $p \in M$ definiamo una mappa $dF: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ chiamata *differenziale* di F in p , come segue: dato $v \in T_p M$, $dF_p(v)$ è la derivazione in $F(p)$ che agisce su $f \in C^\infty(N)$ come $dF_p(v)f = v(f \circ F)$.

Notiamo che se $f \in C^\infty(N)$ allora $f \circ F \in C^\infty(M)$, dunque ha senso calcolare $v(f \circ F)$.

OSSERVAZIONE 1.43. L'operatore $dF_p: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare poichè lo è la derivazione v , ed è esso stesso una derivazione in $F(p)$ poichè per ogni $f, g \in C^\infty(N)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= (f \circ F)(p)v(g \circ F) + (g \circ F)(p)v(f \circ F) \\ &= f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f) \end{aligned}$$

Dunque vale la regola del prodotto (2).

Elenchiamo ora qualche proprietà del differenziale.

PROPOSIZIONE 1.44. (Proprietà del differenziale) Siano M, N e P varietà lisce con o senza bordo, siano $F: M \rightarrow N$ e $G: N \rightarrow P$ mappe lisce e $p \in M$ un punto.

- (1) $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è lineare;
- (2) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p: T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$;
- (3) $d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}: T_p M \rightarrow T_p M$;
- (4) Se F è un diffeomorfismo, allora $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che (1) segue direttamente dalla linearità delle derivazioni nell'Osservazione 1.43.

Dimostriamo che vale (2). Sia $w \in T_p M$, $f \in C^\infty(P)$:

$$d(G \circ F)_p(w)f = w(f \circ (G \circ F)) = w((f \circ G) \circ F) = dF_p(w)(f \circ G)$$

Inoltre notando che $dF_p(w) \in T_{F(p)}N$ otteniamo

$$dF_p(w)(f \circ G) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w)f.$$

Per mostrare il punto (3) usiamo il punto precedente sapendo che $F \circ \text{id}_M = F$ per ogni $F: M \rightarrow N$, dunque si ha $dF_p = d(F \circ \text{id}_M)_p = dF_p \circ d(\text{id}_M)_p$, da cui $d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$.

Il punto (4) è conseguenza dei due punti precedenti, infatti se F è un diffeomorfismo, questo significa che esiste $F^{-1}: N \rightarrow M$ liscia, e $F^{-1} \circ F = \text{id}_M$ da cui

$$(3) \quad \text{id}_{T_p M} = d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p: T_p M \rightarrow T_p M$$

che assicura, essendo $\text{id}_{T_p M}$ un isomorfismo, che dF_p sia iniettiva, mentre dall'identità $\text{id}_{T_{F(p)}N} = dF_p \circ d(F^{-1})_p: T_{F(p)}N \rightarrow T_{F(p)}N$ deduciamo la suriettività. Dunque dF_p è un isomorfismo (di spazi vettoriali), pertanto esiste $(dF_p)^{-1}: T_{F(p)}N \rightarrow T_p M$ e la sua espressione è data da (3), ossia $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$. $\square$

Enunciamo ora due proposizioni preliminari al risultato sulla dimensione dello spazio tangente, che enunceremo in seguito.

PROPOSIZIONE 1.45. Sia M una varietà con o senza bordo, $p \in M$ un punto e $v \in T_p M$ un vettore tangente. Se due funzioni lisce f e $g \in C^\infty(M)$ coincidono in un qualche intorno di p , allora $vf = vg$.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $h := f - g$. Per costruzione h è una funzione liscia definita su M a valori reali, inoltre esiste un intorno del punto $p \in M$ in cui h è nulla. Sia $\psi \in C^\infty(M)$ una *funzione bump* tale che $\psi \equiv 1$ in $\text{supp } h$ e tale che $\text{supp } \psi \subseteq M \setminus \{p\}$. Poichè ψ è identicamente 1 nei punti in cui h è non nulla, il prodotto ψh è identicamente uguale ad h . Dato che $h(p) = \psi(p) = 0$ il Lemma 1.41.(b) implica che $vh = v(\psi h) = 0$. Per linearità delle derivazioni, segue che $vf = vg$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.46. (Piano tangente su una sottovarietà aperta) Sia M una varietà liscia con o senza bordo, sia $U \subseteq M$ un aperto e sia $i: U \hookrightarrow M$ l'inclusione. Per ogni punto $p \in U$, il differenziale $di_p: T_p U \rightarrow T_p M$ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare che di_p sia un isomorfismo, dimostriamone innanzitutto l'injectività. Sia $v \in T_p U$ un vettore tangente tale che $di_p(v) = 0 \in T_p M$. Sia B un intorno di p tale che $\overline{B} \subseteq U$. Sia $f \in C^\infty(M)$ una funzione liscia arbitraria. Il Lemma 1.33 garantisce l'esistenza di un'estensione liscia $\tilde{f}$ di f tale che $\tilde{f} \equiv f$ su $\overline{B}$. Otteniamo quindi che f e $\tilde{f}|_U$ sono due funzioni lisce definite in U che coincidono in un intorno del punto p . Per la Proposizione 1.45 abbiamo che:

$$vf = v(\tilde{f}|_U) = v(f \circ i) = di(v)_p \tilde{f} = 0.$$

Dal momento che vale $vf = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$, segue che $v = 0$ e questo prova l'injectività di di_p .

Per dimostrare la suriettività di di_p , consideriamo un vettore tangente arbitrario $w \in T_p M$. Definiamo un operatore $v: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $vf = w\tilde{f}$, dove $\tilde{f}$ è una qualsiasi funzione liscia che coincide con f su $\overline{B}$. Dalla Proposizione 1.45 segue che vf è

indipendente dalla scelta di tale $\tilde{f}$, dunque v è ben definito. Inoltre l'operatore v risulta essere una derivazione in $C^\infty(U)$ in p : infatti è una funzione liscia definita su $C^\infty(U)$ a valori reali ed eredita le proprietà di derivazione da w . Per una qualsiasi funzione $g \in C^\infty(U)$,

$$di_p(v)g = v(g \circ i) = w(\widetilde{g \circ i}) = wg$$

dal momento che tutte e tre le funzioni $g \circ i$, $\widetilde{g \circ i}$ e g coincidono su $\overline{B}$. Dunque di_p è suriettiva. $\square$

Per la Proposizione 1.45 si ha che, dato un aperto U , l'isomorfismo $di_p: T_p U \rightarrow T_p M$ è canonicamente determinato e di_p può essere pensata sia come derivazione agente su funzioni definite su tutta la varietà o solo su U . Le proposizioni precedenti permettono di identificare gli spazi tangenti $T_p U$ e $T_p M$ per ogni punto $p \in U$. Infatti per ogni $p \in U$ esiste un intorno aperto V di p contenuto in U e si ha che se $f \in C^\infty(M)$, $f_U = f|_U \in C^\infty(U)$ per la proprietà 4 delle funzioni lisce, l'identità $f|_V = f_U|_V$ vale su tutto V .

In particolare, questo implica che ogni vettore tangente $v \in T_p M$ può essere applicato senza ambiguità a funzioni definite su intorni di p , non necessariamente su tutto M .

Abbiamo anche un risultato geometrico sullo spazio tangente:

PROPOSIZIONE 1.47. (Dimensione dello spazio tangente) Se M è una varietà di dimensione n liscia, allora, per ogni punto $p \in M$, lo spazio tangente $T_p M$ è uno spazio vettoriale di dimensione n .

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$ un punto e sia (U, φ) una carta liscia delle coordinate contenente p . Poichè φ è un diffeomorfismo da U ad un aperto $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, segue dalla Proposizione 1.44 che $d\varphi_p: T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} \hat{U}$ sia un isomorfismo. Dal momento che la Proposizione 1.46 garantisce che $T_p U \cong T_p M$ e sappiamo che $T_{\varphi(p)} \hat{U} \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$, segue che

$$\dim T_p M = \dim T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = n. \quad \square$$

Completiamo la sezione definendo ora lo spazio tangente su una varietà liscia con bordo (non nullo). Enunciamo il seguente lemma che mette in relazione $T_a \mathbb{H}^n$ e $T_a \mathbb{R}^n$, per ogni punto $a \in \partial \mathbb{H}^n$.

LEMMA 1.48. Sia $i: \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione. Per ogni punto $a \in \partial \mathbb{H}^n$, il differenziale $di_a: T_a \mathbb{H}^n \rightarrow T_a \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in \mathbb{H}^n$ un punto. Mostriamo l'iniettività di di_a . Sia v in $T_a \mathbb{H}^n$ un vettore tangente, supponiamo che $di_a(v) = 0$, e sia $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia. Consideriamo $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un'estensione liscia di f , definita su tutto $\mathbb{R}^n$, la cui esistenza è garantita dal Lemma 1.33. Allora si ha che vale $\tilde{f} \circ i = f$ da cui:

$$vf = v(\tilde{f} \circ i) = di_a(v)\tilde{f} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di f segue che v è la derivazione nulla. Questo prova l'iniettività di di_a .

Proviamone ora la suriettività. Per farlo, consideriamo $w \in T_a \mathbb{R}^n$ un vettore tangente arbitrario. Definiamo il vettore $v \in T_a \mathbb{H}^n$ come il vettore tangente che soddisfa

la condizione $vf = w\tilde{f}$, dove $\tilde{f}$ è una qualsiasi estensione liscia di f . Scrivendo w in coordinate rispetto alla base canonica di $T_a \mathbb{H}^n$,

$$w = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a$$

dove $w^i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha che

$$vf = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(a).$$

Questa scrittura è indipendente dalla scelta dell'estensione $\tilde{f}$ di f , poichè per continuità i valori delle derivate di $\tilde{f}$ in a sono determinati da quelli di f in $\mathbb{H}^n$. Inoltre v risulta essere una derivazione in a e $di_a(v) = w$, dunque di_a è suriettiva. $\square$

Concludiamo dando un risultato analogo sulla dimensione per le varietà con bordo.

PROPOSIZIONE 1.49. (Dimensione dello spazio tangente per varietà con bordo) Sia M una varietà liscia n -dimensionale con bordo. Per ogni punto $p \in M$, $T_p M$ è uno spazio vettoriale di dimensione n .

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$ arbitrario. Se p è un punto interno, poichè $\text{int} M$ è una sottovarietà aperta di M , la Proposizione 1.46 implica che $T_p(\text{int} M) \cong T_p M$. Dato che $\text{int} M$ è una varietà liscia n -dimensionale, senza bordo, il piano tangente ad ogni suo punto ha dimensione n .

D'altra parte, se $p \in \partial \mathbb{H}^n$, sia (U, φ) una carta liscia di bordo contenente p e sia $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$. Sempre per la Proposizione 1.46 ci sono isomorfismi $T_p U \cong T_p M$ e $T_{\varphi(p)} \hat{U} \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{H}^n$, mentre $T_p U \cong T_{\varphi(p)} \hat{U}$ per la Proposizione 1.44 poichè φ è un diffeomorfismo. La tesi segue direttamente dal fatto che $T_{\varphi(p)} \mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ per il Lemma 1.48. $\square$

L'ultimo concetto importante da introdurre in questa sezione è quello di *fibrato tangente*.

DEFINIZIONE 1.50. Sia M una varietà topologica con o senza bordo. Il *fibrato tangente* di M , denotato come TM , è l'unione disgiunta per ogni punto $p \in M$ dello spazio tangente ad M in p :

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Indichiamo un elemento del fibrato tangente come una coppia (p, v) dove p è un punto in M e v è un vettore in $T_p M$.

Inoltre il fibrato tangente è anche associato naturalmente ad una *mappa di proiezione* $\pi: TM \rightarrow M$, che manda un vettore $v \in T_p M$ nel suo punto di tangenza p , ossia $\pi(p, v) = p$. Il seguente risultato assicura che TM sia una varietà liscia:

PROPOSIZIONE 1.51. [Lee13, Proposizione 3.18] Sia M una varietà liscia di dimensione n . Il fibrato tangente di M ha una naturale struttura di varietà liscia di dimensione $2n$. Rispetto a questa struttura liscia, la mappa di proiezione $\pi: TM \rightarrow M$ è liscia.

1.6. I campi vettoriali e i flussi

DEFINIZIONE 1.52. (Campi vettoriali su varietà) Sia M una varietà liscia con o senza bordo. Un *campo vettoriale* su M è una sezione $X: M \rightarrow TM$ della mappa di proiezione $\pi: TM \rightarrow M$, solitamente indicata come $p \mapsto X_p$, con la proprietà

$$\pi \circ X_p = \text{id}_M.$$

Equivalentemente, X_p appartiene a T_pM per ogni punto $p \in M$.

In particolare, tratteremo di *campi vettoriali lisci*, ossia di campi vettoriali richiedendo che la funzione X dalla varietà M nel fibrato tangente TM sia liscia, dove la struttura liscia di TM è quella descritta nella Proposizione 1.51.

Come per le funzioni, possiamo definire il *supporto* anche per i campi vettoriali.

DEFINIZIONE 1.53. Sia X un campo vettoriale sulla varietà liscia M , definiamo il *supporto* di X come la chiusura dell'insieme dei punti di M in cui X non sia nullo, ossia

$$\text{supp } X = \overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}.$$

Un campo vettoriale X è detto *a supporto compatto* se il suo supporto $\text{supp } X$ è un sottoinsieme compatto di M .

Se $U \subseteq M$ è un sottoinsieme aperto, il fatto che, per ogni punto $p \in U$, lo spazio tangente T_pU è identificato naturalmente con T_pM , ci permette di identificare il fibrato tangente TU e il sottoinsieme aperto $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$. Dunque, un campo vettoriale definito su U può essere pensato equivalentemente come una funzione da U in TU oppure in TM . Se X è un campo vettoriale su M e $U \subseteq M$ è un sottoinsieme aperto, la restrizione $X|_U$ è un campo vettoriale su U . Inoltre il campo vettoriale $X|_U$ è liscio se X lo è.

Se M è una varietà liscia con o senza bordo e $A \subseteq M$ è un sottoinsieme arbitrario, un *campo vettoriale lungo* A è una funzione continua $X: A \rightarrow TM$ che soddisfa l'identità $\pi \circ X = \text{id}_A$, ossia per ogni punto $p \in A$, X_p appartiene a T_pM . Diciamo che un campo vettoriale lungo A è *liscio* se per ogni punto $p \in A$, esistono un intorno V di p in M e un campo vettoriale $\tilde{X}$ su V che coincida con X su $V \cap A$.

Il seguente risultato che enunceremo è una formulazione analoga del Lemma di estensione per funzioni lisce 1.33.

LEMMA 1.54. (Lemma di estensione per campi vettoriali) [Lee13, Lemma 8.6] Sia M una varietà liscia con o senza bordo, e sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme chiuso. Sia X un campo vettoriale liscio lungo A . Dato un aperto U contenente A , esiste un campo vettoriale liscio globale $\tilde{X}$ su M tale che $\tilde{X}|_A = X$ e $\text{supp } \tilde{X} \subseteq U$.

Come caso speciale del lemma precedente, ogni vettore applicato a un punto p in M può essere esteso ad un campo vettoriale liscio sull'intera varietà M . Questo è il contenuto della seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.55. Sia M una varietà liscia con o senza bordo, sia $p \in M$ un punto e sia $v \in T_pM$ un vettore tangente applicato in p . Allora esiste un campo vettoriale liscio globale X definito su M tale che $X_p = v$.

DIMOSTRAZIONE. L'assegnamento $p \mapsto v$ è un esempio di campo vettoriale lungo il sottoinsieme $\{p\} \subseteq M$. Inoltre può essere esteso ad un campo vettoriale liscio a coefficienti costanti su un intorno di p , dunque è liscio. La tesi segue dal Lemma 1.54 ponendo $A = \{p\}$ e $U = M$. $\square$

In generale, se M è una varietà con o senza bordo, si usa la notazione $\mathfrak{X}(M)$ per denotare l'insieme di tutti i campi vettoriali lisci su M . Inoltre $\mathfrak{X}(M)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto per scalare definite puntualmente:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e X e Y campi vettoriali su M . L'elemento nullo dello spazio vettoriale è il campo vettoriale nullo, ossia il campo vettoriale che assegna ad ogni punto $p \in M$ il vettore nullo $0 \in T_p M$.

Inoltre, i campi vettoriali lisci possono essere moltiplicati per funzioni lisce a valori reali: se $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo $fX: M \rightarrow TM$ come

$$(fX)_p = f(p)X_p$$

dove l'operazione a destra dell'uguale è il prodotto per scalare definito sopra, essendo $f(p) \in \mathbb{R}$. Questa operazione genera campi vettoriali lisci:

PROPOSIZIONE 1.56. [Lee13, Proposizione 8.8] Sia M una varietà liscia con o senza bordo. Sia $f, g \in C^\infty(M)$ due funzioni lisce a valori reali e siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ due campi vettoriali lisci. Allora $fX + gY$ è un campo vettoriale liscio.

Risulta interessante guardare ai campi vettoriali come derivazioni di $C^\infty(M)$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è un campo vettoriale liscio su M e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia a valori reali definita su un sottoinsieme aperto $U \subseteq M$, possiamo ottenere una nuova funzione $Xf: U \rightarrow \mathbb{R}$ definita puntualmente come $(Xf)_p = X_p f$. Dal momento che l'applicazione del vettore $X_p \in T_p M$ alla funzione f è univocamente determinata dai valori che la funzione assume in un intorno arbitrariamente piccolo del punto $p \in M$, la funzione

$$p \mapsto (Xf)(p) = X_p f$$

è determinata localmente, in particolare si ha che, per ogni sottoinsieme aperto $V \subseteq U$, $(Xf)|_V = X(f|_V)$.

Enunciamo ora un criterio utile per determinare la differenziabilità di un campo vettoriale.

PROPOSIZIONE 1.57. [Lee13, Proposizione 8.14] Sia M una varietà liscia con o senza bordo, e sia $X: M \rightarrow T_p M$ un campo vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) Il campo vettoriale X è liscio;
- (2) Per ogni funzione liscia a valori reali $f \in C^\infty(M)$, la funzione Xf è liscia in un sottoinsieme aperto $U \subseteq M$;
- (3) Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq M$ e ogni funzione liscia a valori reali f in $C^\infty(M)$, la funzione Xf è liscia in U .

Una conseguenza della Proposizione 1.57 è che dato un campo vettoriale liscio X in $\mathfrak{X}(M)$, esso definisce una mappa da $C^\infty(M)$ in se stesso, come mappa lineare su $\mathbb{R}$

$f \mapsto Xf$. Inoltre, la legge del prodotto per vettori tangenti (2), si traduce per i campi vettoriali in un'analoga regola del prodotto:

$$(4) \quad X(fg) = f(Xg) + g(Xf)$$

per ogni coppia di funzioni $f, g \in C^\infty(M)$. Infatti, valutando $X(fg)$ in un punto arbitrario $p \in M$ otteniamo:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = f(p)(X_pg) + g(p)(X_pf) = f(p)(Xg)(p) + g(p)(Xf)(p).$$

In generale, una mappa $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è chiamata *derivazione* se è lineare su $\mathbb{R}$ e se soddisfa la regola (4) per ogni $f, g \in C^\infty(M)$.

Si possono identificare le derivazioni di $C^\infty(M)$ con i campi vettoriali lisci in $\mathfrak{X}(M)$, come enunciato dalla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.58. Sia M una varietà liscia con o senza bordo. Una mappa $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è una derivazione di $C^\infty(M)$ se e solo se è della forma $Df = Xf$ per qualche campo vettoriale liscio $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo mostrato che ogni campo vettoriale liscio induce una derivazione. Viceversa, supponiamo dunque che $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ sia una derivazione. Dobbiamo determinare un campo vettoriale liscio X tale $Xf = Df$ per ogni funzione liscia $f \in C^\infty(M)$. Se esiste tale campo vettoriale liscio, allora, valutata in ogni punto $p \in M$ deve essere la derivazione in p il cui valore quando applicata ad una funzione $f \in C^\infty(M)$ è dato da $X_pf = (Df)(p)$. La linearità di D garantisce che l'espressione dipenda linearmente da f , e che D sia una derivazione implica che X_p debba soddisfare la regola del prodotto per vettori tangenti (2). Dunque la mappa $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita è un vettore tangente a M , ossia, una derivazione di $C^\infty(M)$ in p . Abbiamo quindi ottenuto che X sia un campo vettoriale definito su M . La differenziabilità di X segue dal fatto che $Xf = Df$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ sia liscio, dunque la tesi segue dalla Proposizione 1.57. $\square$

La seguente osservazione tecnica sui campi vettoriali sarà molto utile in seguito:

OSSERVAZIONE 1.59. Sia M una varietà liscia e $p \in M$ un punto. Siano $v, w \in T_pM$ due vettori tangenti in p e $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ le loro estensioni a campi vettoriali continui (Lemma 1.55), cioè $\mathcal{V}_p = v$ e $\mathcal{W}_p = w$. Scegliendo la base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

del piano tangente ad M in p , si ha:

$$\mathcal{V}_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \mathcal{W}_p = \sum_{i=1}^n b^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Dove le $a^i(p), b^i(p)$ sono funzioni lisce a valori reali. Dimostriamo che $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ parentesi di Poisson di $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, è un campo vettoriale. Le *parentesi di Poisson* di $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ sono un operatore $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definito come

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}](f) = \mathcal{V}\mathcal{W}(f) - \mathcal{W}\mathcal{V}(f)$$

con $f \in C^\infty(M)$ funzione liscia a valori reali.

Sia quindi $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$ (basta anche f definita in un intorno di p).

$$\begin{aligned}
[\mathcal{V}, \mathcal{W}]_p(f) &= \mathcal{V}_p(q \mapsto \mathcal{W}_q(f)) - \mathcal{W}_p(q \mapsto \mathcal{V}_q(f)) \\
&= \mathcal{V}_p\left(\sum_{i=1}^n b^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)\right) - \mathcal{W}_p\left(\sum_{i=1}^n a^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)\right) \\
&= \sum_{j=1}^n a^j(p) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b^i(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n b^j(p) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + a^i(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(a^j(p) \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(p) - b^j(p) \frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p)\right)\right) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.
\end{aligned}$$

Notiamo che il termine tra parentesi è una scrittura esplicita delle coordinate del vettore $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]_p$ rispetto alla base scelta.

Risulta utile introdurre anche il concetto di *flusso* o *gruppo ad un parametro di diffeomorfismi*, strettamente legato al campo vettoriale. Preliminarmente, parleremo delle *curve integrali*.

Sia $\gamma: I \rightarrow M$ una curva definita da un intervallo reale I ad una varietà liscia con o senza bordo M . Allora per ogni $t \in I$, il vettore $\gamma'(t)$ è un vettore tangente in $\gamma(t)$, ossia $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Risulta interessante anche procedere al contrario: dato un vettore tangente in ogni punto, determinare una curva per cui i vettori tangenti scelti e i vettori velocità coincidano in ogni punto.

DEFINIZIONE 1.60. (Curva integrale) Sia M una varietà liscia con o senza bordo, sia $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vettoriale su M . Una *curva integrale* di V è una curva differenziabile $\gamma: J \rightarrow M$ il cui vettore velocità in ogni istante è uguale al valore di V in quel punto:

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$$

per ogni istante $t \in J$.

Se $0 \in J$, $\gamma(0)$ è chiamato *punto iniziale* di γ .

ESEMPIO 1.61. Sia (x, y) le coordinate standard di $\mathbb{R}^2$, e sia $V = \frac{\partial}{\partial x}$ il campo vettoriale dato dalla derivazione lungo la prima coordinata. Le curve integrali di V sono linee dritte parallele all'asse x , con parametrizzazioni della forma $\gamma(t) = (a + t, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti. Dunque per ogni punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ del piano reale esiste un'unica curva integrale che ha il punto (a, b) come punto iniziale.

ESEMPIO 1.62. Sia $W = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$. Se $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nelle coordinate standard, è una curva liscia, la condizione di essere una curva integrale, ossia $\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$ si traduce come:

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} = W_{\gamma(t)}.$$

Uguagliando le componenti dei due vettori, il problema diventa equivalente al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(t) - b \sin(t) \\ y(t) &= a \sin(t) + b \cos(t) \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Dunque ogni curva della forma

$$(5) \quad \gamma(t) = (a \cos(t) - b \sin(t), a \sin(t) + b \cos(t))$$

è una curva integrale per W . Notiamo che se $a = b = 0$, allora la curva che otteniamo è la curva costante nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, altrimenti le curve che otteniamo sono circonferenze con centro nell'origine percorse in senso antiorario. Dal momento che, per una curva del tipo (5), $\gamma(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, notiamo che esiste una unica curva integrale con punto iniziale (a, b) .

Come mostra l'Esempio 1.62, trovare le curve integrali si traduce in risolvere un sistema di equazioni differenziali ordinarie in una carta liscia.

Supponiamo che V sia un campo vettoriale liscio su una varietà liscia M , e che $\gamma: J \rightarrow M$ sia una curva liscia da un intervallo reale $J \subseteq \mathbb{R}$. In un dominio $U \subseteq M$ di una carta possiamo scrivere la curva γ in coordinate locali come $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. Allora la condizione $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ perchè γ sia una curva integrale di V può essere riscritta come

$$\dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} = V^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Risolvere questa equazione corrisponde a risolvere un sistema autonomo di n equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^1(t) = V^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) = V^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)). \end{cases}$$

L'esistenza, l'unicità e la differenziabilità della soluzione di questo sistema sono garantite da un teorema classico [Lee13, Teorema D.1].

Enunciamo ora un risultato sull'esistenza locale di curve integrali.

PROPOSIZIONE 1.63. [Lee13, Proposizione 9.2] Sia V un campo vettoriale liscio su una varietà differenziabile con o senza bordo M . Per ogni punto $p \in M$, esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ ed esiste una curva liscia $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ che sia una curva integrale per V con punto iniziale p .

Mostriamo ora come si comportano le curve integrali con riparametrizzazioni affini.

LEMMA 1.64. (Lemma di riscaldamento) Sia V un campo vettoriale liscio su una varietà differenziabile M , sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale e sia $\gamma: J \rightarrow M$ una curva integrale per V . Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, la curva $\tilde{\gamma}: \tilde{J} \rightarrow M$, definita come $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$ è una curva integrale per il campo vettoriale aV , dove $\tilde{J} = \{t: at \in J\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia f una funzione liscia a valori reali definita in un intorno del punto $\tilde{\gamma}(t_0) \in M$, dove $t_0 \in J$. Allora si ha

$$\tilde{\gamma}'(t_0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at)$$

e per la regola della catena:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at) = a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0)f.$$

Inoltre, essendo γ una curva integrale per il campo vettoriale V si ha

$$a\gamma'(at_0)f = aV_{\gamma(at_0)}f = aV_{\tilde{\gamma}(t_0)}f.$$

Dunque anche $\tilde{\gamma}$ è una curva integrale per il campo vettoriale aV . $\square$

LEMMA 1.65. (Lemma di traslazione) Sia V un campo vettoriale liscio su una varietà differenziabile M , sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale e sia $\gamma: J \rightarrow M$ una curva integrale per V . Per ogni numero reale $b \in \mathbb{R}$ la curva $\hat{\gamma}: \hat{J} \rightarrow M$, definita come $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t+b)$, è anch'essa una curva integrale per il campo vettoriale V , dove $\hat{J} = \{t: t+b \in J\}$.

DIMOSTRAZIONE. Come per il lemma precedente, valutiamo $\hat{\gamma}'(t_0)$ in f , dove f è una funzione liscia a valori reali definita in un intorno del punto $\hat{\gamma}(t_0) \in M$. Abbiamo così:

$$\hat{\gamma}'(t_0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \hat{\gamma})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t+b).$$

Per la regola della catena, otteniamo

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t+b) = (f \circ \gamma)'(t_0+b) = \gamma'(t_0+b)f$$

ed essendo γ una curva integrale per il campo vettoriale V abbiamo che anche la curva $\hat{\gamma}$ lo è, infatti:

$$\gamma'(t_0+b)f = V_{\gamma(t_0+b)}f = V_{\hat{\gamma}(t_0)}f. \quad \square$$

Possiamo introdurre ora il concetto di *flusso*. Sia M una varietà liscia e $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vettoriale liscio su M . Supponiamo che per ogni punto $p \in M$, esista un'unica curva integrale per V con punto iniziale p definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, che denotiamo come $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, possiamo quindi definire una mappa $\theta_t: M \rightarrow M$ mandando ogni punto $p \in M$ nel punto che si ottiene seguendo la curva integrale al tempo t , ossia

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Il Lemma di traslazione (Lemma 1.65) implica che la mappa $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$ è anch'essa una curva integrale per V con punto iniziale $q = \theta^{(p)}(s)$ e, dal momento che abbiamo assunto l'unicità di tali curve integrali, si ha l'uguaglianza

$$\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s).$$

Tradotto come identità per le mappe θ_t , per $t \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Poichè per definizione abbiamo $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, questo implica che la mappa $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ è un'azione del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ sulla varietà liscia M .

DEFINIZIONE 1.66. (Flusso) Un *flusso globale (liscio)* o *un'azione di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi* su una varietà liscia M è una mappa differenziabile $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tale che valgano le seguenti proprietà:

- (1) $\theta(0, p) = p$ per ogni $p \in M$;
- (2) $\theta(s + t, p) = \theta(s, \theta(t, p))$ per ogni $p \in M$ e per ogni $s, t \in \mathbb{R}$.

Dato un flusso globale θ , possiamo definire due collezioni di mappe:

- (1) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo una mappa continua $\theta_t: M \rightarrow M$ puntualmente come $\theta_t(p) = \theta(t, p)$. Le proprietà richieste nella Definizione 1.66 rende la collezione delle θ_t con l'operazione di composizione un gruppo. Si hanno infatti le relazioni

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \theta_0 = \text{id}_M.$$

Inoltre, essendo un'azione di gruppo continua, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo che $\theta_t: M \rightarrow M$ è un omeomorfismo. Poichè l'azione è anche liscia, le θ_t risultando essere diffeomorfismi.

- (2) Per ogni punto $p \in M$, definiamo una curva liscia $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$ ponendo $\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p)$. Notiamo che l'immagine di questa curva è l'orbita del punto p sotto l'azione del gruppo definito prima.

Parleremo ora della relazione tra flussi, campi vettoriali e curve integrali. Prima introduciamo i *generatori infinitesimali*, nozione utile per il prossimo risultato che enunceremo.

DEFINIZIONE 1.67. (Generatore infinitesimale) Sia M una varietà liscia e consideriamo $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flusso globale liscio. Chiamiamo *generatore infinitesimo di θ* il campo vettoriale definito, per ogni punto $p \in M$, dall'assegnamento $p \mapsto V_p$ dove $V_p \in T_p M$ è definito come $V_p = \dot{\theta}^{(p)}(0)$.

PROPOSIZIONE 1.68. Sia M una varietà liscia, $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flusso globale liscio. Allora il generatore infinitesimo V di θ è un campo vettoriale liscio su M e ogni curva $\theta^{(p)}$ è una curva integrale per V .

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la differenziabilità del campo vettoriale V , mostriamo equivalentemente per la Proposizione 1.57 la differenziabilità della funzione a valori reali Vf , per ogni funzione differenziabile $f \in C^\infty(U)$ definita su un sottoinsieme aperto U di M . Sia dunque una funzione $f \in C^\infty(U)$ e un punto $p \in U$, allora

$$Vf(p) = V_p f = \dot{\theta}^{(p)} f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p)).$$

Dal momento che θ e f sono due funzioni differenziabili, la funzione $(t, p) \mapsto f(\theta(t, p))$ è liscia perchè composizione di funzioni lisce, e lo è anche la sua derivata parziale rispetto al tempo

$$(t, p) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p)) = Vf(p).$$

Dunque $Vf(p)$ dipende in modo liscio da p , quindi V è differenziabile.

Mostriamo ora che ogni curva $\theta^{(p)}$, dove $p \in M$ è un punto, è una curva integrale per V , ossia $\dot{\theta}^{(p)}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$ per ogni punto $p \in M$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, denotiamo il punto $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$ e mostriamo $\dot{\theta}^{(p)}(t_0) = V_q$. Dalle proprietà di gruppo segue che

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t + t_0).$$

Da ciò si ottiene che, per ogni funzione f a valori reali definita in un intorno di del punto q

$$V_q f = \dot{\theta}^{(q)}(0)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t+t_0)) = \dot{\theta}^{(p)}(t_0)f$$

da cui otteniamo la tesi. $\square$

Per concludere enunciamo un risultato che ci consente di ottenere un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi a partire da un campo vettoriale.

LEMMA 1.69. [Mil63, Lemma 2.4] Un campo vettoriale liscio su una varietà liscia M che si annulla fuori da un sottoinsieme compatto $K \subset M$ genera un unico gruppo di diffeomorfismi ad un parametro su M .

DIMOSTRAZIONE. Data una curva liscia $t \rightarrow c(t) \in M$, definiamo il vettore velocità $\frac{d}{dt}c \in T_{c(t)}M$ dato dall'identità

$$\frac{d}{dt}c(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}.$$

Sia ora φ il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro generato dal campo vettoriale ξ . Allora, per ogni punto $q \in M$ fissato, la curva $t \rightarrow \varphi(t, q) = \varphi_t(q)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_t(q) = \xi_{\varphi_t(q)} \\ \varphi_0(q) = q \end{cases}$$

infatti si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_t(q)(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = \xi_p(f) \end{aligned}$$

dal momento che $\varphi_t(q) = p \in M$. Localmente, la soluzione dell'equazione differenziale è unica, e dipende in modo liscio dalla condizione iniziale. Dunque, per ogni punto di M esiste un intorno U e un numero reale $\varepsilon > 0$ tali che l'equazione differenziale (6) ha un'unica soluzione per ogni punto $q \in M$ e per $|t| < \varepsilon$.

Per la compattezza del sottoinsieme K , esso può essere ricoperto da un numero finito di tali intorni U . Sia $\varepsilon_0 > 0$ il più piccolo dei numeri reali corrispondenti agli intorni del ricoprimento finito scelto. Imponendo la condizione $\varphi_t(q) = q$ per ogni punto $q \notin K$ segue che l'equazione differenziale ha $\varphi_t(q)$ come soluzione unica per $|t| < \varepsilon_0$ e per ogni punto $q \in M$. Questa soluzione è liscia rispetto ad entrambe le variabili. Inoltre, supponendo che $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$ si ha che $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Dunque ognuna delle mappe φ_t è un diffeomorfismo. Rimane solo da definire φ_t per $|t| > \varepsilon_0$. Notiamo che ogni numero reale può essere scritto come multiplo di $\varepsilon_0/2$ sommato ad un resto r con $|r| < \varepsilon_0/2$. Allora, se $t = k\varepsilon_0/2 + r$ con $k \geq 0$ numero intero, poniamo

$$\varphi_t = \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \cdots \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_r$$

dove la trasformazione $\varphi_{\varepsilon_0/2}$ è iterata k volte. Se $k < 0$, basta sostituire nell'espressione $\varphi_{\varepsilon_0/2}$ con $\varphi_{-\varepsilon_0/2}$. Dunque abbiamo definito φ_t per ogni $t \in \mathbb{R}$. Le φ_t così ottenute sono ben definite, lisce e soddisfano la relazione $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Questo completa la dimostrazione del Lemma. $\square$

CAPITOLO 2

Teoria di Morse

2.1. Punti critici e Lemma di Morse

DEFINIZIONE 2.1. (Punti critici) Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia e sia M una varietà differenziabile. Un punto $p \in M$ si dice *punto critico per f* se la mappa indotta $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ è nulla.

Se scegliamo un sistema locale di coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ in un intorno U di p questo significa che

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

Il numero reale $f(p)$ è chiamato *valore critico per f* . Denotiamo come M^a l'insieme delle $x \in M$ tali che $f(x) \leq a$. Se a non è un valore critico per f , allora segue dal Teorema della funzione implicita o Teorema di Dini ([Bre97, Teorema 1.5]) che M^a è una *varietà con bordo*. Il bordo $f^{-1}(a)$ è una *sottovarietà* di M .

Un punto critico si dice *non degenero* se e solo se la matrice

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

è non singolare, ossia il suo determinante è non nullo. Si può verificare che l'essere degenero o non degenero non dipende dal sistema di coordinate scelto.

Sia p un punto critico per f , possiamo definire una forma bilineare simmetrica $\mathcal{H}(f)$ su $T_p M$, chiamato *Hessiano di f in p* . Se $v, w \in T_p M$ allora v e w hanno due estensioni $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ a campi vettoriali, la cui esistenza è assicurata dalla Proposizione 1.55. Poniamo:

$$\mathcal{H}(f)(v, w) = \mathcal{V}_p(\mathcal{W}(f))$$

dove $\mathcal{W}(f)$ è la derivazione di f lungo la direzione w e $\mathcal{V}_p$ è semplicemente v .

OSSERVAZIONE 2.2. La simmetria è verificata notando che

$$\mathcal{V}_p(\mathcal{W}(f)) - \mathcal{W}_p(\mathcal{V}(f)) = [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_p(f) = 0$$

dove $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ è la *parentesi di Poisson* di $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, inoltre $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]_p(f) = 0$ dal momento che p è un punto critico per f e per l'Osservazione 1.59. Dunque $\mathcal{H}(f)$ è simmetrica.

OSSERVAZIONE 2.3. La forma bilineare $\mathcal{H}(f)$ è ben definita perché l'espressione $\mathcal{V}_p(\mathcal{W}(f)) = v(\mathcal{W}(f))$ è indipendente dall'estensione $\mathcal{V}$ di v , analogamente l'espressione $\mathcal{W}_p(\mathcal{V}(f)) = w(\mathcal{V}(f))$ è indipendente dall'estensione di w .

Se $(x^1, \dots, x^n)$ è un sistema di coordinate locali e $v, w \in T_p M$ sono due vettori tangenti che hanno la seguente scrittura in coordinate

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p, \quad w = \sum_{j=1}^n b_j \left. \frac{\partial f}{\partial x^j} \right|_p$$

possiamo prendere

$$\mathcal{W} = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

dove i b_j sono funzioni continue. Allora si ha:

$$\mathcal{H}(f)(v, w) = v(\mathcal{W}(f))(p) = v \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$$

quindi la matrice (7) rappresenta la forma bilineare $\mathcal{H}(f)$ rispetto alle basi

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p.$$

DEFINIZIONE 2.4. (Indice) L'*indice* di una forma bilineare $\mathcal{H}(f)$ su uno spazio vettoriale V è definito come la massima dimensione di un sottospazio di V su cui $\mathcal{H}(f)$ è definita negativa.

Similmente si definisce l'*indice di nullità* di $\mathcal{H}(f)$ come la massima dimensione del *radicale*, ossia il sottospazio consistente dei vettori $v \in V$ tali che $\mathcal{H}(f)(v, w) = 0$, per ogni $w \in V$.

OSSERVAZIONE 2.5. Il punto p è un punto non degenero per f se e solo se la forma bilineare $\mathcal{H}(f)$ definita su $T_p M$ ha indice di nullità uguale a zero.

Chiameremo *indice di f in p* l'indice della forma bilineare $\mathcal{H}(f)$ in p .

LEMMA 2.6. Sia f una funzione C^∞ in un intorno convesso U di $0_{\mathbb{R}^n}$, con $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$. Allora:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

per qualche funzione $g \in C^\infty$ definita in U , con $g_i(0_{\mathbb{R}^n}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0_{\mathbb{R}^n})$.

DIMOSTRAZIONE. Riscrivendo l'espressione di f :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt$$

poiché $f(0, \dots, 0) = 0$. Inoltre, essendo f una funzione che prende come argomento vettori, si ha

$$\frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} = \langle \nabla f(tx_1, \dots, tx_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_i.$$

Dunque

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Prendendo come

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$$

si ha la tesi. $\square$

LEMMA 2.7. (Lemma di Morse) Sia p un punto critico non degenerare per f . Allora esiste un sistema locale di coordinate $(y^1, \dots, y^n)$ in un intorno U di p con $y^i(p) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e tale che valga l'identità:

$$(8) \quad f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

su tutto U , dove λ è l'indice di f in p .

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che se tale espressione per f esiste, λ deve essere l'indice di f . Per ogni sistema di coordinate $(z^1, \dots, z^n)$, se

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2$$

allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{se } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{se } i = j > \lambda \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il che mostra che la matrice di $\mathcal{H}(f)$ rispetto alla base

$$\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$$

si rappresenta come la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque esiste un sottospazio di $T_p M$ di dimensione λ su cui $\mathcal{H}(f)$ è definita negativa, ed un sottospazio V di dimensione $n - \lambda$ su cui $\mathcal{H}(f)$ è definita positiva. Se esistesse un sottospazio di $T_p M$ di dimensione maggiore di λ su cui $\mathcal{H}(f)$ è definita negativa, questo intersecherebbe V , ma ciò è impossibile. Dunque λ deve essere l'indice di f .

Mostriamo ora che esiste un sistema di coordinate $(y^1, \dots, y^n)$ opportuno, ovvero un sistema di coordinate in cui f può essere scritta, in un intorno di p come nell'Equazione (8). Possiamo assumere p come origine di $\mathbb{R}^n$, cioè che $f(p) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$. Per il Lemma 2.6 possiamo scrivere

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1, \dots, x_n)$$

per ogni $(x_1, \dots, x_n)$ in qualche intorno di 0. Dal momento che $0_{\mathbb{R}^n}$ è un punto critico per f si ha

$$g_j(0_{\mathbb{R}^n}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0.$$

Applicando nuovamente il Lemma 2.6 alle funzioni lisce g_j , abbiamo

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

dove le h_{ij} sono opportune funzioni lisce. Possiamo quindi riscrivere la nostra funzione f come:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

Inoltre possiamo assumere che per ogni i e j $h_{ij} = h_{ji}$, infatti è possibile definire $\widetilde{h_{ij}} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ e riscrivere f come:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \widetilde{h_{ij}}(x_1, \dots, x_n).$$

Per costruzione $\widetilde{h_{ij}} = \widetilde{h_{ji}}$. Inoltre notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{k=1}^n x^k \frac{\partial g_k}{\partial x^j} + g_j \right) \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{k=1}^n x^k h_{jk} + g_j \right) \Big|_{x=0} = h_{ji} + \sum_{k=1}^n x^k \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \Big|_{x=0} \\ &= h_{ji}(0) + h_{ij}(0) \end{aligned}$$

quindi la matrice $(\widetilde{h_{ij}}(0))_{i,j=1,\dots,n}$ è un multiplo scalare della matrice Hessiana di f (7) calcolata in $p = 0$, dunque è non singolare per ipotesi.

Mostriamo che esiste una trasformazione lineare invertibile delle funzioni coordinate che ci permetta di ottenere la scrittura desiderata per f , eventualmente restringendoci ad un intorno più piccolo di $0_{\mathbb{R}^n}$. Dimostriamolo per induzione. Supponiamo che esistano delle coordinate $u_1, \dots, u_n$ di U_1 intorno di $0_{\mathbb{R}^n}$ tali che l'espressione

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

valga su tutto U_1 , in cui le matrici $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))_{i,j=r,\dots,n}$ sono simmetriche. A meno di una trasformazione lineare delle ultime $n - r + 1$ coordinate, possiamo supporre $H_{rr} \neq 0$. Poniamo $g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|}$. Questa è una funzione liscia definita su un intorno $U_2 \subseteq U_1$ intorno di 0 poichè $H_{rr} \neq 0$ è liscia in U_2 . Introduciamo ora un nuovo sistema di coordinate $v_1, \dots, v_n$ ponendo $v_i = u_i$ per ogni $i \neq r$ e

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left(u_r + \sum_{i > r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right).$$

Per il Teorema della funzione inversa, si ha che i v_i possono essere usati come funzioni delle coordinate in un intorno $U_3 \subseteq U_2$ di $0_{\mathbb{R}^n}$. Inoltre, è possibile scrivere un'espressione per f , valida su tutto U_3 , come:

$$(9) \quad f = \sum_{i \leq r} \pm(v_i) + \sum_{i,j \geq r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
v_r^2 &= \left(g \left(u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}}{H_{rr}} \right) \right)^2 \\
&= u_r^2 |H_{rr}| + 2 \sum_{i>r} g^2 u_i u_r \frac{H_{ir}}{H_{rr}} + \left(\sum_{i>r} g u_i \frac{H_{ir}}{H_{rr}} \right)^2 \\
&= u_r^2 |H_{rr}| + 2 \sum_{i>r} u_i u_r \frac{|H_{rr}| H_{ir}}{H_{rr}} + \left(\sum_{i>r} u_i \frac{\sqrt{|H_{rr}|} H_{ir}}{H_{rr}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Riscrivendo $u_r^2 |H_{rr}|$ come

$$\pm \left(\sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij} - \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij} \right) - 2 \sum_{i>r} u_i u_r H_{ir} = u_r^2 H_{rr}$$

dato che la matrice è a valori reali otteniamo:

$$v_r^2 \pm \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij} - \left(\sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir} \sqrt{|H_{rr}|}}{H_{rr}} \right)^2 = \pm \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}.$$

Per ipotesi induttiva si ha

$$f = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{r-1}^2 \pm \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}.$$

Dunque sostituendo nell'equazione troviamo

$$v_r^2 \pm \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij} - \left(\sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir} \sqrt{|H_{rr}|}}{H_{rr}} \right)^2 = f \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{r-1}^2$$

da cui

$$\begin{aligned}
f &= \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{r-1}^2 \pm v_r^2 \pm \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij} \pm \left(\sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir} \sqrt{|H_{rr}|}}{H_{rr}} \right)^2 \\
&= \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 \pm \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij} \pm 2 \sum_{i,j > r} u_i u_j \frac{H_{ir} H_{jr}}{|H_{rr}|} \\
&= \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 \pm \sum_{i,j > r} u_i u_j \left(H_{ij} \pm \frac{H_{ir} H_{jr}}{|H_{rr}|} \right).
\end{aligned}$$

Il termine $H_{ij} \pm \frac{H_{ir} H_{jr}}{|H_{rr}|}$ è somma e prodotto di funzioni lisce, inoltre è simmetrico rispetto a i, j , dunque rinominandolo H'_{ij} otteniamo la scrittura dell'Equazione (9). Abbiamo così concluso l'induzione.

Si ha quindi che f può essere scritta nella forma dell'Equazione (8) nell'intorno U_3 di $0_{\mathbb{R}^n}$, per quanto mostrato prima inoltre l'indice di f in 0 sarà pari al numero di meno che comparirà nell'espressione. Questo conclude la dimostrazione del lemma. $\square$

Possiamo inoltre dedurre, grazie alla scrittura per f ottenuta tramite il Lemma 2.7, un risultato riguardante i punti critici:

COROLLARIO 2.8. I punti critici non degeneri sono isolati.

2.2. Classi di omotopia in termini dei valori critici

Per mostrare che una varietà liscia è omotopicamente equivalente ad un dato complesso CW , daremo una dimostrazione costruttiva.

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia, denotiamo con

$$M^a := f^{-1}((-\infty, a]) = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$$

l'insieme di livello per f .

TEOREMA 2.9. Sia M una varietà liscia e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Supponiamo che l'insieme

$$f^{-1}([a, b]) = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$$

sia compatto e non contenga punti critici per f . Allora M^a è diffeomorfo a M^b . Inoltre M^a è un retratto per deformazione di M^b , dunque l'inclusione $M^a \xrightarrow{i} M^b$ è un'equivalenza omotopica.

DIMOSTRAZIONE. L'idea di questa dimostrazione è schiacciare l'insieme di livello M^b su M^a lungo direzioni ortogonali punto per punto al bordo (di dimensione $n - 1$) su cui f è costante. Scegliamo, per farlo, una metrica Riemanniana.

Ricordiamo brevemente che una *metrica Riemanniana* su una varietà differenziabile M è un assegnamento C^∞ in ogni punto $p \in M$ di un prodotto scalare definito sul piano tangente $T_p M$ in p . (Non essendo le metriche Riemanniane un argomento di cui questo elaborato si occupa, ne daremo solo un'idea, rimandando la lettrice o il lettore o al libro di Lee [Lee18] per ulteriori dettagli.)

Denotiamo dunque con $g(X, Y)$ il prodotto scalare indotto dalla metrica scelta. Per definizione abbiamo che, per tutti i campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ su M e per ogni punto $p \in M$, vale

$$g(X, Y)|_p = \langle X_p, Y_p \rangle_p.$$

Nel membro di destra X_p, Y_p sono vettori tangenti a M in p e il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ è quello determinato, sul piano tangente $T_p M$, dalla metrica scelta nel punto p .

Il *gradiente* di f è il campo vettoriale $\text{grad } f$ definito su M caratterizzato dall'identità $g(\text{grad } f, X) = X(f)$ per ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$. Osserviamo che, calcolando $X(f)$ in un punto $p \in M$, si determina il valore della derivata direzionale di f in p lungo il campo vettoriale X (analogamente nella direzione del vettore tangente X_p). Da ciò segue che esso si annulla in corrispondenza dei punti critici per f .

Sia ora $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva il cui vettore velocità, ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$, è dato da dc/dt . Allora vale l'identità

$$g\left(\frac{dc}{dt}, \text{grad } f\right) = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

Infatti, verificando l'uguaglianza punto per punto lungo l'immagine della curva c abbiamo:

$$g\left(\frac{dc}{dt}, \text{grad } f\right) = \frac{dc}{dt}(f) = \frac{df}{dt} \frac{dc}{dt} = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

dove la prima uguaglianza segue dalla definizione di gradiente e l'ultima dalla regola della catena.

Sia $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia definita puntualmente come

$$\rho(p) = \frac{1}{g(\text{grad } f, \text{grad } f)|_p}$$

per ogni punto $p \in f^{-1}([a, b])$, e che si annulla fuori da un intorno compatto di questo insieme (la costruzione di questa funzione è possibile grazie al Lemma 1.31). La funzione è ben posta poichè per ipotesi $f^{-1}([a, b])$ non contiene punti critici.

Dunque il campo vettoriale liscio X , definito in un punto $q \in M$ come

$$X_q = \rho(q) \text{grad } f_p$$

soddisfa le condizioni del Lemma 1.69. Esso genera un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi che indichiamo come $\varphi_t: M \rightarrow M$.

Sia ora un punto $p \in M$ fissato. Consideriamo la funzione $t \mapsto f(\varphi_t(q))$. Se $\varphi_t(q)$ appartiene all'insieme $f^{-1}([a, b])$, allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{df(\varphi_t(q))}{dt} &= \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \text{grad } f_q \right\rangle_q = \langle X_q, \text{grad } f_q \rangle_q \\ &= \langle \rho(q) \text{grad } f_q, \text{grad } f_q \rangle_q \\ &= \frac{1}{\langle \text{grad } f_q, \text{grad } f_q \rangle_q} \langle \text{grad } f_q, \text{grad } f_q \rangle_q \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dunque l'applicazione definita dall'assegnamento $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ è lineare con derivata costante 1 per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$ per cui $f(\varphi_t(q))$ sta in $[a, b]$, cioè è crescente in questo intervallo.

Consideriamo ora il diffeomorfismo $\varphi_{b-a}: M \rightarrow M$. Vogliamo mostrare che vale $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$. Innanzitutto, notiamo che, preso un punto $q \in M^a$, abbiamo che $f(\varphi_{b-a}(q)) \leq f(q) + b - a \leq b$, dunque $M^a \subset M^b$. Per l'inclusione $M^b \subset M^a$, invece, consideriamo un punto $p \in M^b$. Se $p \in M^a \subseteq M^b$, allora $\varphi_{a-b}(p)$ appartiene ad M^a , infatti $f(\varphi_{a-b}(p)) \leq f(p) + a - b \leq a$. Consideriamo ora invece $p \in M^b \setminus M^a$, allora $f(\varphi_{a-b}(p)) \leq f(p) + a - b = a$ implica che $\varphi_{a-b}(p)$ sta in M^a . Quindi

$$\varphi_{a-b}(p) = \varphi_{f(p)-b+(a-f(p))}(p) = \varphi_{f(p)-b} \circ \varphi_{a-f(p)}(p) \in M^a.$$

Per definizione, si ha che $\varphi_{a-b} = (\varphi_{b-a})^{-1}$, e per quanto mostrato prima

$$(\varphi_{b-a})^{-1}(M^b) \subset M^a,$$

da cui $M^b \subset \varphi_{b-a}(M^a)$. Questo dimostra che gli insiemi di livello M^a e M^b sono diffeomorfi.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, definiamo una famiglia di mappe ad un parametro $\{r_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, tale che $r_t: M^b \rightarrow M^b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ponendo

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{se } f(q) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{se } a < f(q) \leq b. \end{cases}$$

Dunque, per come le abbiamo definite, segue che r_0 è la funzione identità e r_1 è la retrazione da M^b in M^a . Otteniamo che M^a è un retratto per deformazione di M^b e che l'inclusione $M^a \xrightarrow{i} M^b$ è un'equivalenza omotopica. Questo conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Il secondo risultato di questo capitolo riguarda invece cosa succede quando la funzione incontra punti critici, e come cambia il tipo di omotopia tra insiemi di livello se la funzione deve passare per essi.

TEOREMA 2.10. Sia M una varietà liscia e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e sia p un punto critico non degenere per f di indice λ . Ponendo $f(p) = c$, supponiamo che l'insieme $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto e non contenga altri punti critici per f oltre a p , per qualche $\varepsilon > 0$. Dunque, per ogni ε sufficientemente piccolo, l'insieme $M^{c+\varepsilon}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $M^{c-\varepsilon}$ con attaccata una λ -cella.

DIMOSTRAZIONE. L'idea della dimostrazione consisterà nel definire una nuova funzione $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ che coincida con la funzione f a meno di un intorno del punto critico $p \in M$, in cui sarà minore. Dunque se $p \in M$ è un punto critico per f , posto $f(p) = c$ e $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ è tale da non contenere altri punti critici per f (tale $\varepsilon > 0$ esiste sempre per il Corollario 2.8), allora $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$ consisterà di $M^{c-\varepsilon}$ unito ad un'altra regione H attorno a p . Nella seconda parte della dimostrazione, proveremo che, scelta una λ -cella e^λ adatta, l'insieme $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto per deformazione di $M^{c-\varepsilon} \cup H$. Infine applicando il Teorema 2.9 alla funzione F e alla regione $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ vedremo che $M^{c-\varepsilon} \cup H$ è un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$, ciò concluderà la dimostrazione.

Scegliamo un sistema locale di coordinate $u^1, \dots, u^n$ in un intorno U del punto p , tale per cui valga l'identità

$$(10) \quad f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$$

su tutto U . L'esistenza di tale sistema di coordinate è assicurata dal Lemma 2.7. Per questa scelta del sistema di coordinate, il punto critico p per f ha coordinate

$$u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo affinché la regione $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatta e non contenga altri punti critici oltre a p . Inoltre chiediamo anche che l'immagine dell'intorno U tramite il diffeomorfismo dato dall'immersione $(u^1, \dots, u^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenga la palla chiusa B

$$B = \left\{ (u^1, \dots, u^n) : \sum_{i=1}^n (u^i)^2 \leq 2\varepsilon \right\}.$$

Definiamo ora la λ -cella e^λ come l'insieme dei punti $x = (x_1, \dots, x_n)$ di U tali che

$$(u^1(x))^2 + \dots + (u^\lambda(x))^2 \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad u^{\lambda+1}(x) = \dots = u^n(x) = 0.$$

Notiamo inoltre dalla formule (10) otteniamo

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \left\{ x \in U : \sum_{i=1}^{\lambda} (u^i(x))^2 \leq \varepsilon, u^{\lambda+1}(x) = \dots = u^n(x) = 0 \right\}, \\ M^{c-\varepsilon} &= \{x \in M : f(x) \leq c - \varepsilon\} \\ &= \left\{ x \in M : c - \sum_{i=1}^{\lambda} (u^i(x))^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n (u^i(x))^2 \leq c - \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

da cui segue direttamente che l'intersezione $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ è data dalle equazioni

$$e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon} = \left\{ x \in U : \sum_{i=1}^{\lambda} (u^i(x))^2 = \varepsilon, u^{\lambda+1}(x) = \dots = u^n(x) = 0 \right\} = \partial e^\lambda$$

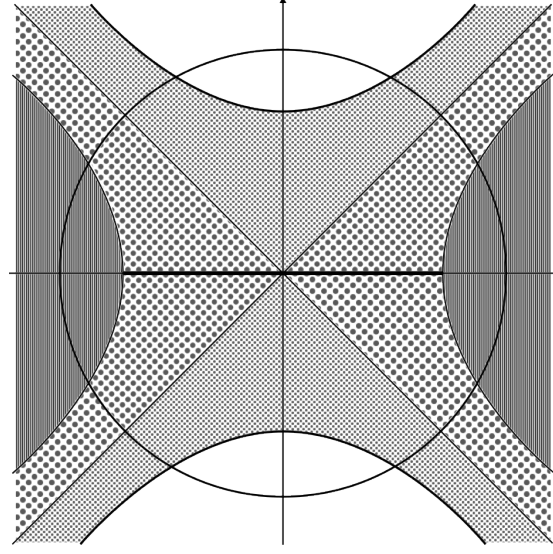


FIGURA 1. Rappresentazione della λ -cella attaccata al bordo dell'insieme di livello $M^{c-\varepsilon}$.

che definiscono il bordo ∂e^λ della cella e^λ . Questo dimostra che e^λ è attaccata a $M^{c-\varepsilon}$ come richiesto.

Nella Figura (1) è rappresentato il grafico delle curve di livello di f con asse orizzontale $(u^1, \dots, u^\lambda)$ e asse verticale $(u^{\lambda+1}, \dots, u^n)$. La circonferenza indica il bordo della palla B di raggio $\sqrt{2\varepsilon}$; l'iperbole orizzontale indica l'ipersuperficie $f^{-1}(c - \varepsilon)$, quella verticale l'ipersuperficie $f^{-1}(c + \varepsilon)$. La regione scura, delimitata dai rami dell'iperbole orizzontale, rappresenta la regione $M^{c-\varepsilon}$; la regione $f^{-1}([c - \varepsilon, c])$ è rappresentata dai pallini grandi, $f^{-1}([c, c + \varepsilon])$ da pallini più piccoli e fitti. Il segmento scuro orizzontale sull'asse $(u^1, \dots, u^\lambda)$ indica la λ -cella e^λ .

Dobbiamo dimostrare ora che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ sia un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$.

Per fare ciò consideriamo una funzione $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liscia che soddisfa le seguenti condizioni:

- (1) $\mu(0) > \varepsilon$;
- (2) $\mu(r) = 0$ per ogni $r \geq 2\varepsilon$;
- (3) $-1 < \mu'(r) \leq 0$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Dove con $\mu'(r)$ indichiamo la derivata prima di μ rispetto alla variabile r , ovvero $\mu'(r) = d\mu(r)/dr$.

Definiamo ora una nuova funzione differenziabile $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ che coincida con f fuori da un intorno delle coordinate U di p , e sia definita come

$$F = f - \mu \left(\sum_{i=1}^{\lambda} (u^i)^2 + 2 \sum_{i=\lambda}^n (u^i)^2 \right)$$

all'interno di questo intorno delle coordinate.

La funzione F è ben definita ed è liscia su tutto M , infatti è definita a tratti su due aperti, ossia $M \setminus \overline{E}$ e U , dove E è un ellissoide aperto contenuto in U definito come:

$$E = \left\{ p \in M : \sum_{i=1}^{\lambda} (u^i(p))^2 + 2 \sum_{i=\lambda}^n (u^i(p))^2 < 2\varepsilon \right\}.$$

Inoltre le due definizioni, entrambe differenziabili, coincidono sull'intersezione.

A questo punto è conveniente definire due funzioni lisce $\xi, \eta: U \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$\begin{aligned} \xi &= (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2, \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2. \end{aligned}$$

Otteniamo così una nuova scrittura per le funzioni f e F , per ogni punto $p \in M$ e per ogni punto $q \in U$ si ha

$$\begin{aligned} f(p) &= c - \xi(p) + \eta(p) \\ F(q) &= c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)). \end{aligned}$$

Notiamo anche che la regione $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) \subseteq M$ coincide con la regione $M^{c+\varepsilon}$. Per dimostrarlo consideriamo separatamente le due regioni delimitate dal bordo dell'ellissoide E . Per ogni punto $q \in M$ che soddisfa la relazione

$$\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon,$$

ossia per ogni punto interno all'ellissoide, vale

$$F(q) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon.$$

All'esterno dell'ellissoide, le funzioni f ed F coincidono poichè abbiamo $\mu(r) = 0$ per ogni $r \geq 2\varepsilon$.

Un ulteriore punto chiave nella dimostrazione, consiste nel notare che i punti critici per la nuova funzione F coicidano con quelli di f . Innanzitutto notiamo che, dalle proprietà della funzione μ prima definita, segue direttamente che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1. \end{aligned}$$

Poichè il differenziale di F si scrive come

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

e $d\xi$ e $d\eta$ si annullano simultaneamente unicamente nell'origine, possiamo concludere che F non ha altri punti critici oltre che l'origine in U , ossia $p \in M$.

Consideriamo ora la disuguaglianza $F \leq f$, da essa segue direttamente che vale l'inclusione $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subseteq f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Dunque la regione $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ è compatta perchè è un chiusa in un compatto. Non può contenere punti critici per F tranne che eventualmente in p . Tuttavia, $p \notin F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ perchè

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon.$$

Possiamo quindi escludere anche il punto $p \in M$ e possiamo concludere che la regione $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ non contiene punti critici per la funzione F .

Grazie al Teorema 2.9 abbiamo così dimostrato che la regione $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ è un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. concentriamoci ora su $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Poichè $F \leq f$ si ha che $M^{c-\varepsilon} \subseteq F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Denotiamo con

$$H = \overline{F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}},$$

da cui $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c-\varepsilon} \cup H$.

Consideriamo ora la λ -cella e^λ definita in precedenza, ossia l'insieme dei punti $q \in M$ che soddisfano le rdisuguaglianze $\xi(q) \leq \varepsilon$, $\eta(q) = 0$. Essa è contenuta nell'insieme H , infatti, dal momento che $\partial F / \partial \xi < 0$, abbiamo che per ogni $q \in e^\lambda$ $F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$, e $f(q) \geq c - \varepsilon$, ossia $q \in H$.

La dimostrazione del Teorema si conclude notando che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto per deformazione di $M^{c-\varepsilon} \cup H$. La dimostrazione di questo fatto è dettagliatamente riportata nel libro di Milnor [Mil63]. Abbiamo dunque ottenuto, per transitività, che la regione $M^{c+\varepsilon}$ si retrae per deformazione su $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$. $\square$

OSSERVAZIONE 2.11. Più in generale, se supponiamo di avere k punti critici non degeneri $p_1, \dots, p_k$ con indici rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, nell'insieme $f^{-1}(c)$. Allora, similmente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 2.10, possiamo dimostrare che l'insieme $M^{c+\varepsilon}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$.

Il terzo ed ultimo risultato, che concluderà la costruzione del complesso CW , utilizza ciò che abbiamo ottenuto nei Teoremi 2.9 e 2.10 per dimostrare l'equivalenza omotopica tra la varietà liscia che stiamo studiando e il complesso cellulare ottenuto tramite lo studio dei punti critici della funzione.

TEOREMA 2.12. Se M è una varietà liscia e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con punti critici non degeneri¹, e se ogni M^a è compatta, allora M ha lo stesso tipo di omotopia di un complesso CW , con una cella di dimensione λ per ogni punto critico di indice λ .

Preliminarmente alla dimostrazione del Teorema, enunciamo due lemmi tecnici riguardanti spazi topologici e attaccamenti di celle, di cui omettiamo la dimostrazione.

LEMMA 2.13 (Lemma di Whitehead [Mil63, Lemma 3.6]). Sia X uno spazio topologico e siano φ_0 e φ_1 due mappe omotope definite dalla sfera ∂e^λ ad X . Allora la mappa identità di X si estende ad una equivalenza omotopica

$$k: X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} e^\lambda.$$

LEMMA 2.14 ([Mil63, Lemma 3.7]). Siano X e Y due spazi topologici e consideriamo $\varphi: \partial e^\lambda \rightarrow X$ una mappa di attaccamento della λ -cella e^λ . Ogni equivalenza omotopica $f: X \rightarrow Y$ si estende ad una equivalenza omotopica

$$F: X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f \circ \varphi} e^\lambda.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.12. Consideriamo innanzitutto i valori critici per la funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \dots$$

¹Queste funzioni sono anche dette *funzioni di Morse*. Non tratteremo nello specifico della dimostrazione della loro esistenza, le lettrici e i lettori possono trovare questo risultato nel libro di Milnor [Mil63, Capitolo 1.6] oppure nel libro di Benedetti [Ben21, Corollario 5.36]

La successione dei valori critici $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ non ha punti di accumulazione poichè essi sono isolati (per il Corollario 2.8) e gli insiemi M^a sono compatti per ogni $a \in \mathbb{R}$. Inoltre l'insieme M^a è vuoto per ogni $a < c_1$.

Sia ora $a \in \mathbb{R}$ e supponiamo che esso non sia un valore critico per f , e che M^a sia omotopicamente equivalente ad un dato complesso CW . Sia $c \in \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ il più piccolo tra i valori critici maggiori di a . Per i precedenti Teoremi 2.9 e 2.10, e per l'Osservazione 2.11 l'insieme $M^{c+\varepsilon}$, per ε abbastanza piccolo, ha lo stesso tipo di omotopia di

$$M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{\bar{n}}} e^{\lambda_{\bar{n}}}$$

dove $\bar{n}$ dipende dal valore critico c considerato e le $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, \bar{n}}$ sono mappe di attaccamento rispettivamente delle celle $\{e^{\lambda_j}\}_{j=1, \dots, \bar{n}}$ corrispondenti ai punti critici in $f^{-1}(c)$. Inoltre abbiamo un'equivalenza omotopica $h: M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$.

Abbiamo assunto per ipotesi induttiva che esiste un'equivalenza omotopica h' tra un complesso CW K e l'insieme di livello M^a . Allora ogni composizione $h' \circ h \circ \varphi_j$, per ogni $j = 1, \dots, \bar{n}$, è omotopa ad una mappa cellulare (rimandiamo a [Hat02, Teorema 4.8])

$$\psi_j: \partial e^{\lambda_j} \rightarrow K^{\lambda_j-1}$$

dove con K^{λ_j-1} indichiamo, per ogni j , il $(\lambda_j - 1)$ -scheletro di K .

Dunque otteniamo, grazie ai Lemmi 2.13 e 2.14 che

$$K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_{\bar{n}}} e^{\lambda_{\bar{n}}}$$

è un complesso CW con lo stesso tipo di omotopia di $M^{c+\varepsilon}$.

Per induzione, segue che ogni insieme di livello M^a , ha lo stesso tipo di omotopia di un complesso cellulare. Se M è una varietà compatta questo basta per concludere la dimostrazione. Se M non è compatta, ma tutti i punti critici della funzione f risiedono in uno degli insiemi di livello, che avevamo supposto essere compatti, allora l'insieme M^a è un retratto per deformazione di M , risultato che nuovamente completa la dimostrazione.

Nel caso in cui f abbia numerabili punti critici, rivedremo definire sequenze infinite di equivalenze omotopiche, ma non tratteremo i dettagli tecnici, rimandando la lettrice o il lettore al libro di Milnor [Mil63, Teorema 3.5]. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

2.3. Esempi

In questa sezione esibiamo alcune esempi dell'applicazione del Teorema 2.12.

ESEMPIO 2.15. (Sfera n -dimensionale) Trattiamo esplicitamente il caso $n = 2$, per un intero $n \geq 0$ generico il procedimento è analogo. Consideriamo quindi $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ con carte delle coordinate della forma $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$, come nell'Esempio 1.5. Dall'Esempio 1.17 sappiamo che una collezione di tali carte è un atlante liscio per la sfera 2-dimensionale.

Consideriamo la funzione altezza $h: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ossia la funzione che manda un qualsiasi punto della sfera $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ nella sua terza coordinata $x_3 \in \mathbb{R}$. Leggiamo

ora questa funzione in carte locali. Sia $q = (x_1, x_2) \in \varphi_3^-(U_3^-) = \widehat{U}_3^- \subseteq \mathbb{R}^2$ un punto nell'immagine dell'emisfero sud tramite la carta φ_3^- , abbiamo:

$$\begin{aligned}\hat{h}^- : \widehat{U}_3^- &\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \hat{h}^-(q) &= h \circ (\varphi_3^-)^{-1}(q) = h\left(x_1, x_2, -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right) = -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}.\end{aligned}$$

Dunque il gradiente della funzione $\hat{h}^-$ è dato da

$$\nabla \hat{h}^-(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right)$$

che si annulla solo per $q = (0, 0)$. Studiamo ora l'Hessiano della funzione $\hat{h}$ nel punto critico $q = (0, 0)$:

$$\mathcal{H}(\hat{h}^-)(x_1, x_2) \Big|_{(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1-x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}} & \frac{x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}} \\ \frac{x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}} & \frac{1-x_1^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla segnatura dell'Hessiano di $\hat{h}$ sappiamo che l'indice della funzione nel punto critico $(0, 0)$ è uguale a 0. Questo risultato lo avremmo potuto dedurre già in precedenza poichè il punto $(0, 0, -1) = (\varphi_3^-)^{-1}(0, 0)$ è proprio il polo sud della sfera, dunque un minimo per la funzione altezza.

Analogamente, sia ora $q = (x_1, x_2) \in \varphi_3^+(U_3^+) = \widehat{U}_3^+$ un punto nell'emisfero nord. Il gradiente di $\hat{h}^+ = h \circ (\varphi_3^+)^{-1}$ nel punto $q = (x_1, x_2)$ è

$$\nabla \hat{h}^+(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right)$$

che si annulla solo per $q = (0, 0)$ che è l'immagine del polo nord tramite la carta scelta $\varphi_3^+ : U_3^+ \rightarrow \widehat{U}_3^+$. Tramite conti simili a prima si mostra che l'Hessiano della funzione altezza è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dunque l'indice della funzione $\hat{h}$ nel punto $(0, 0)$ è 2, ossia il polo nord è un punto di massimo per la funzione altezza.

Sia ora $p \in U_{1,2}^\pm$ un punto che non sia il polo nord o il polo sud della sfera. Notiamo che, posto $(x, y) = \varphi_{1,2}^\pm(p)$, abbiamo

$$\hat{h}(x, y) = h \circ (\varphi_{1,2}^\pm)^{-1}(x, y) = y.$$

Da cui segue che

$$\nabla \hat{h}(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$$

per ogni $(x, y) \in \varphi_{1,2}^\pm(U_{1,2}^\pm)$, ossia non ci sono punti critici per la funzione altezza nella regione $S^2 \setminus \{(0, 0, -1), (0, 0, 1)\} = U_1^+ \cup U_1^- \cup U_2^+ \cup U_2^-$.

Riassumendo, abbiamo trovato:

- un punto di minimo di indice 0, corrispondente al polo sud;
- un punto di massimo di indice 2, corrispondente al polo nord.

Il Teorema 2.12 assicura che la sfera 2-dimensionale è omotopa ad un complesso cellulare ottenuto incollando il bordo di una 2-cella ad una 0-cella, come illustrato nella Figura (2).

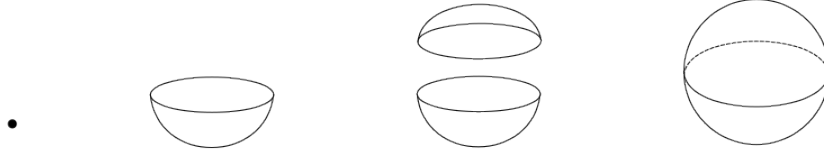


FIGURA 2. Costruzione di un complesso cellulare omotopo ad una sfera tramite la Teoria di Morse.

ESEMPIO 2.16. (Toro con g buchi) Consideriamo $\Sigma_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ un toro con 3 buchi, ossia una varietà chiusa 2-dimensionale di genere 3.

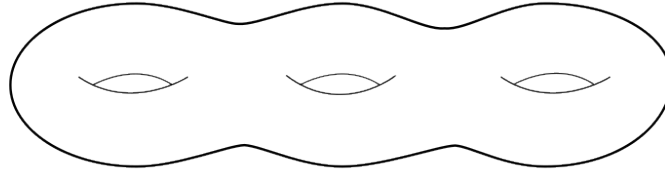


FIGURA 3. Toro con 3 buchi.

Posizionandolo in verticale appoggiato sul piano $\{x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, con i buchi allineati uno sopra all'altro, e considerando la funzione altezza a valori reali che manda ogni punto $(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_3$ nella sua terza coordinate $x_3 \in \mathbb{R}$. Notiamo che il punto alla base è un punto minimo per la funzione, dunque l'indice della funzione nel punto critico alla base del toro è 0.

Successivamente troviamo come punto critico il punto di sella, caratterizzato da una direzione decrescente (parallela l'asse x) e una crescente (parallela all'asse y), pertanto l'indice della funzione in questo punto sarà 1. Per un qualche sistema di coordinate, la cui esistenza è garantita dal Lemma di Morse 2.7 l'Hessiano della funzione altezza letta tramite una carta delle coordinate centrata nel punto critico, si rappresenta come

la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analogamente, una volta superato il primo buco è presente un altro punto critico del tipo sella con direzioni crescente e decrescente scambiate rispetto a prima, in ogni caso anche per questo punto l'indice è 1. L'Hessiano calcolato nel punto di sella risulta quindi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Procedendo in modo analogo troviamo altri quattro punti di sella con direzioni crescente e decrescente alternate, ma con indice costantemente 1. Infine, il punto di massimo ha indice 2, difatti entrambe le direzioni sono di decrescita.

Riassumendo, abbiamo trovato:

- un punto di minimo di indice 0;
- sei punti di sella di indice 1;
- un punto di massimo di indice 2.

Per il Teorema 2.12 la nostra varietà liscia Σ_3 è dunque omotopa ad un complesso CW con una 0-cella, sei 1-celle e una 2-cella. Nella Figura (4) sono illustrati i sei attaccamenti successivi delle 1-celle lungo le direzioni parallele agli assi x e y alternate durante la costruzione del complesso cellulare.

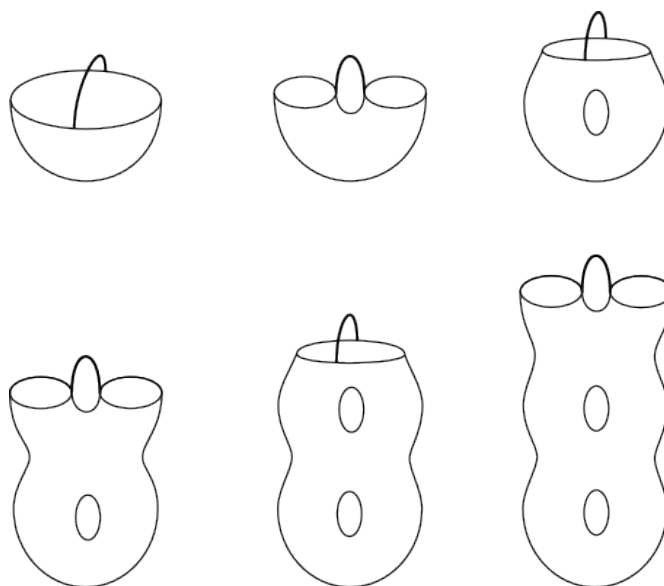


FIGURA 4. Attaccamento delle sei 1-celle nella costruzione di un complesso cellulare omotopo ad un toro con 3 buchi.

2.4. Uno sguardo alle sfere di dimensione alta

La Teoria di Morse è stata sfruttata da Milnor per dimostrare l'esistenza delle sfere *esotiche*, ossia sfere 7-dimensionali che ammettono strutture differenziali distinte e non diffeomorfe.

In questo elaborato non tratteremo dettagliatamente del lavoro di Milnor a riguardo², ma possiamo darne un'intuizione generale. L'idea di dimostrazione che consideriamo è suddivisa in due parti. La prima parte consiste nel costruire particolari varietà lisce di dimensione 7, successivamente dimostrare che queste varietà appena costruite sono omeomorfe alla sfera 7-dimensionale tramite il Teorema di Reeb, che enunciamo di seguito.

TEOREMA 2.17. (Teorema di Reeb) Sia M una varietà liscia compatta di dimensione n , e sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con solo due punti critici, entrambi non degeneri. Allora la varietà M è omeomorfa alla sfera n -dimensionale.

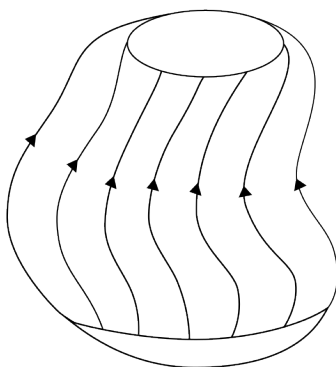


FIGURA 5. Sfera di Reeb.

La dimostrazione del Teorema 2.17 segue direttamente dall'applicazione della Teoria di Morse, in particolare dal Teorema 2.9 e dal Lemma di Morse 2.7.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i due punti critici per la funzione differenziabile $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Poichè M è una varietà topologica compatta, e f è una funzione continua, segue che l'immagine di M tramite f deve essere un intervallo compatto della retta reale, i cui estremi sono i valori critici per f , ossia il massimo e il minimo.

Senza perdere di generalità, supponiamo che, dati p e q punti critici per la funzione f , si abbia $f(p) = 0$ minimo e $f(q) = 1$ massimo. Scegliendo un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, gli insiemi $M^\varepsilon = f^{-1}([0, \varepsilon])$ e $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$ sono n -celle chiuse. Nella Figura (5) esse sono rappresentate dalle due calotte.

²L'articolo originario di Milnor è *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics, 1956, [Mil56]

Inoltre per il Teorema 2.9 gli insiemi M^ε e $M^{1-\varepsilon}$ sono omeomorfi. Questo omeomorfismo è rappresentato nella Figura (5) dalle frecce che *allungano* l'insieme M^ε sull'insieme $M^{1-\varepsilon}$. Dunque la varietà M risulta essere l'unione di due n -celle chiuse, ossia $M^{1-\varepsilon} \cong M^\varepsilon$ e $f^{-1}([1-\varepsilon, 1])$, unite lungo il loro bordo comune. Possiamo facilmente costruire un omeomorfismo tra la varietà M e la sfera n -dimensionale, ad esempio mandando l'interno delle due celle nell'interno degli emisferi nord e sud della sfera, e i punti sul bordo nell'equatore. Da ciò segue direttamente che la varietà M è omeomorfa ad una n -sfera. $\square$

La seconda parte della dimostrazione si concentra invece nel mostrare che non tutte le varietà lisce costruite in precedenza sono diffeomorfe alla 7-sfera. Questo risultato prova dunque l'esistenza delle 7-sfere *esotiche*.

Per una trattazione più dettagliata consigliamo alla lettrice o al lettore di leggere l'articolo pubblicato da Milnor [Mil56].

CAPITOLO 3

Teoria di Morse e decomposizione in manici

Lo scopo di questo capitolo consiste nel dare una versione alternativa della Teoria di Morse, nella quale siano conservati i risultati ottenuti in precedenza, con la differenza che non si costruirà passo passo un complesso cellulare ma una *decomposizione in manici* della varietà liscia studiata. Nella prima sezione, introdurremo innanzitutto l'oggetto matematico chiamato *manico* e alcune sue caratteristiche, successivamente sfrutteremo l'attaccamento di manici per dare questa nuova formulazione alla teoria. Nel corso di questo capitolo richiederemo spesso la compattezza della varietà liscia con cui lavoriamo; questa ipotesi non è stata necessaria per raggiungere i risultati del Capitolo 2.

Nella seconda sezione, parleremo brevemente di risultati di topologia algebrica che riusciamo ad ottenere facilmente dallo studio della decomposizione in manici di una varietà.

La terza ed ultima sezione si concentrerà sul calcolo della caratteristica di Eulero per una varietà liscia chiusa, utilizzando sia i *manici* che lo studio di funzioni lisce a valori reali, riconducendosi e concludendo il lavoro svolto nei precedenti capitoli.

Per una trattazione più completa ed approfondita, rimandiamo la lettrice o il lettore al libro di Riccardo Benedetti [Ben21] e al lavoro di Stefan Friedl [Fri24].

3.1. Decomposizione in manici: un approccio alternativo alla Teoria di Morse

Denotiamo con B^i la palla aperta di dimensione i , con $\overline{B}^i$ il disco chiuso di dimensione i e chiamiamo S^{i-1} il suo bordo.

DEFINIZIONE 3.1. (Manico) Sia $m \geq 0$ un numero intero, per ogni intero q tale che $0 \leq q \leq m$, definiamo il q -manico standard di dimensione m come

$$H^q = H^{q,m} = \overline{B}^{m-q} \times \overline{B}^q.$$

Chiameremo l'intero q *indice* del manico H^q .

Un manico H^q è una *varietà con angoli*, più precisamente il suo bordo è dato da

$$\partial H^q = (\overline{B}^{m-q} \times S^{q-1}) \cup (S^{m-q-1} \times \overline{B}^q).$$

Ricordiamo la definizione di *varietà con angoli*:

DEFINIZIONE 3.2. (Varietà con angoli) Siano m e n due interi con $0 \leq m \leq n$. Un sottospazio topologico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice m -varietà embedded liscia con angoli se per ogni

punto $p \in M$ esiste un intorno aperto $W \subseteq M$ di p e un aperto U dello spazio modello

$$\mathbf{C}^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0, x_{m-1} \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

e un diffeomorfismo $\varphi: W \rightarrow U$.

Le nozioni di *carta delle coordinate*, *parametrizzazione* e *atlante* si definiscono in modo naturale a partire da quelle definite per le varietà topologiche (con bordo).

Il bordo di M è l'insieme dei punti $p \in M$ tali per cui esiste una carta (W, φ) in p tale che

$$\varphi(p) \in \partial \mathbf{C}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m : x_{m-1} = 0\}.$$

Invece, gli angoli di M sono i punti che ammettono intorni diffeomorfi ad aperti centrati in $\{x_m = x_{m-1} = 0\}$.

Una varietà angolosa M non è una varietà liscia, ma esiste una procedura per *smussare gli angoli* ed ottenere una varietà liscia $\widetilde{M}$ unica a meno di diffeomorfismo. Si veda la Proposizione 2.31 del libro di Benedetti [Ben21].

L'ultima definizione che ci serve è la seguente:

DEFINIZIONE 3.3. (Sfera inspessita) Sia M una varietà liscia m -dimensionale. Chiamiamo *l -sfera inspessita* un *embedding*¹ liscio definito da $\overline{B}^{m-l} \times S^l \rightarrow M$.

Possiamo ora introdurre la definizione di *attaccamento di manici*.

DEFINIZIONE 3.4. (Attaccamento di manici) Sia M una varietà liscia compatta n -dimensionale con bordo non vuoto. Sia

$$\varphi: \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \rightarrow \partial M$$

una $(k-1)$ -sfera inspessita. Diciamo che

$$M \cup_{\varphi} h^k := M \cup_{\varphi} (\overline{B}^{n-k} \times \overline{B}^k)$$

è ottenuto da M attaccando il k -manico $\overline{B}^{n-k} \times \overline{B}^k$ lungo φ . In particolare ci riferiamo all'immagine di $\overline{B}^{n-k} \times \overline{B}^k$ in $M \cup_{\varphi} h^k$ come k -manico. Inoltre,

- (1) Chiamiamo l'immagine di $\{0\} \times S^{k-1}$ in ∂M *sfera di attaccamento* del manico;
- (2) Chiamiamo l'immagine di $\{0\} \times \overline{B}^k$ in $M \cup_{\varphi} h^k$ *cuore* del manico;
- (3) Chiamiamo l'immagine di $S^{n-k} \times \{0\}$ in $\partial(M \cup_{\varphi} h^k)$ *cintura sferica* del manico.

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per definire la *decomposizione in manici* per una varietà liscia M .

DEFINIZIONE 3.5. (Decomposizione in manici) Sia M una varietà liscia compatta n -dimensionale. Una *decomposizione in manici* per M è un diffeomorfismo

$$\Theta: M \rightarrow \emptyset \cup_{\varphi_1} h^{k_1} \cup \dots \cup_{\varphi_m} h^{k_m}$$

dove per ogni $i = 1, \dots, m$ la mappa φ_i è una $(k_i - 1)$ -sfera inspessita nel bordo della varietà liscia $\emptyset \cup_{\varphi_1} h^{k_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{i-1}} h^{k_{i-1}}$.

Risulta anche utile introdurre due concetti strettamente legati alla decomposizione in manici: l' *i -scheletro* e la *decomposizione in manici standard*.

¹Ricordiamo che un *embedding topologico* è una funzione che è un omeomorfismo sulla sua immagine considerata come sottospazio topologico del codominio.

DEFINIZIONE 3.6. (*i*-scheletro e decomposizione standard) Sia M una varietà liscia compatta n -dimensionale. Supponiamo di avere una decomposizione in manici attaccati nell'ordine degli indici crescenti, ossia:

$$(11) \quad M = \emptyset \cup_{\varphi_{0,1}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{0,r_0}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{n,1}} h^n \cup \dots \cup_{\varphi_{n,r_n}} h^n$$

Per ogni $k = 0, \dots, n$ chiamiamo *i*-scheletro della decomposizione in manici l'insieme

$$M^i := \emptyset \cup_{\varphi_{0,1}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{0,r_0}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{i,1}} h^i \cup \dots \cup_{\varphi_{i,r_i}} h^i.$$

Diciamo che la decomposizione in manici è *standard* se è della forma (11) e se per ogni $i = 0, \dots, n$ le mappe di attaccamento $\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,r_i}$ hanno valori in ∂M^{i-1} .

Se M è una varietà liscia compatta che ammette una decomposizione in manici, allora ne ammette anche una standard con lo stesso numero di manici per ogni indice.

OSSERVAZIONE 3.7. Data una varietà liscia chiusa M di dimensione n dotata di una decomposizione in manici indicizzati dall'insieme $\{1, \dots, m\}$, ad essa è possibile associare una decomposizione in manici *duale*, con le seguenti proprietà:

- (1) La decomposizione duale è composta dallo stesso numero di manici, ossia m ;
- (2) Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ il manico i -esimo della decomposizione duale corrisponde, come sottoinsieme della varietà M , al manico $(m - i)$ -esimo della decomposizione in manici originariamente considerata;
- (3) Gli indici *vanno al contrario*, cioè, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, ponendo $\tilde{k}_i$ l'indice dell' i -esimo manico della decomposizione duale e k_{m-i} l'indice dell' $(m-i)$ -esimo manico della decomposizione originaria, vale la relazione:

$$\tilde{k}_i = n - k_{m-i}.$$

Dunque il numero di k -manici nella decomposizione duale è pari al numero di $(n - k)$ -manici nella decomposizione originaria, per ogni intero $k \in \{0, \dots, n\}$.

Inoltre se la decomposizione considerata è standard, allora lo è anche la sua duale. La decomposizione duale della decomposizione duale è la decomposizione considerata in origine.

Consideriamo, ad esempio, i manici di dimensione 3, i possibili indici sono dunque $k = 0, 1, 2, 3$, come riportato nella Figura 1.

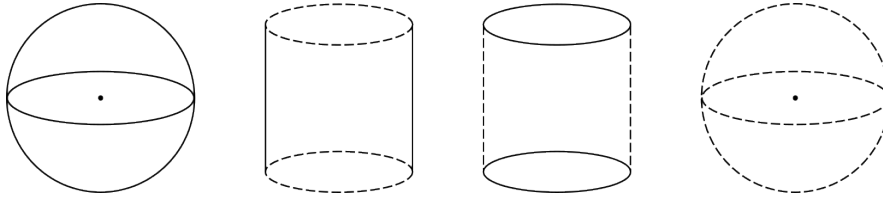


FIGURA 1. Manici di dimensione 3.

Da sinistra verso destra troviamo dunque lo 0-manico $\overline{B}^3 \times \overline{B}^0$, l'1-manico $\overline{B}^2 \times \overline{B}^1$, il 2-manico $\overline{B}^1 \times \overline{B}^2$ e il 3-manico $\overline{B}^0 \times \overline{B}^3$. Le linee tratteggiate circoscrivono la parte del

k -manico da attaccare al $(k-1)$ -scheletro (lo 0-manico, poichè il punto $\bar{B}^0$ ha bordo nullo, può essere semplicemente immerso nello spazio $\mathbb{R}^3$). Notiamo dunque che lo 0-manico e il 3-manico, considerati come sottoinsiemi dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$, sono omeomorfi. Lo stesso vale per i manici di indice 1 e 2.

Osserviamo inoltre che, mettendo in corrispondenza gli 0 con i 3-manici e i manici di indice 1 con i 2-manici, la parte da attaccare (delimitata da linee tratteggiate) e la parte su cui attaccare altri manici (delimitata da linee continue) sono esattamente opposte. Dunque, una volta ottenuta una decomposizione in manici di una varietà di dimensione 3, possiamo leggere la sua decomposizione *al contrario*, cioè, considerando i k -manici presenti, possiamo leggerli come $(3-k)$ -manici per ogni indice $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Notiamo inoltre che procedendo in questo modo, ad esempio, i 2-manici risultano attaccati ai manici di indice 3 esattamente come se fossero 0 e 1-manici poichè le linee tratteggiate e continue, ossia le parti da attaccare e su cui attaccare, risultano scambiate.

Proseguendo in questo modo otteniamo una seconda decomposizione in manici in cui il numero di manici totale non cambia, ma per ogni intero $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, il numero di k manici sarà pari al numero di $(3-k)$ -manici della decomposizione scelta in partenza. Abbiamo dunque ottenuto la decomposizione duale della composizione originaria.

PROPOSIZIONE 3.8. (Celle-manici) Ogni varietà liscia compatta n -dimensionale M che ammetta una decomposizione in manici, è omotopicamente equivalente ad un complesso CW X tale che per ogni numero $k \in \mathbb{N}$, il numero di k -manici in M è uguale al numero di k -celle in X .

Possiamo quindi riscrivere, nei termini dell'attaccamento di manici, i risultati ottenuti nella Teoria di Morse. Enunciamo i Teoremi 2.10 e 2.12 nel nuovo linguaggio.

TEOREMA 3.9. (Aggiunta di un manico) Sia M una varietà liscia compatta e sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Inoltre, siano $a, b \in \mathbb{R}$ due numeri reali tali che a e b non siano valori critici per la funzione f e che l'insieme $f^{-1}([a, b])$ intersechi banalmente il bordo della varietà M .

- (1) Supponiamo esista un unico punto critico $p \in f^{-1}([a, b]) \subseteq M$ per f e sia $k \in \mathbb{N}$ l'indice della funzione nel punto. Se p è un punto critico non degeneri, allora M^b è diffeomorfa ad M^a con l'attaccamento di un k -manico;
- (2) Supponiamo che esista un unico valore critico $c \in \mathbb{R}$ e siano i punti distinti $p_1, \dots, p_n \in f^{-1}([a, b]) \subseteq M$ le preimmagini di c , punti critici non degeneri, di indici rispettivamente $k_1, \dots, k_n$. Allora M^b è diffeomorfa ad M^a con l'attaccamento degli n manici di indici $k_1, \dots, k_n$ lungo sfere inspessite con immagini a due a due disgiunte.

In entrambi i casi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un diffeomorfismo che coincida con l'identità sul sottoinsieme $M^{a-\varepsilon}$.

TEOREMA 3.10. (Morse con i manici) Sia M una varietà liscia chiusa. Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una *funzione di Morse* (ossia una funzione che presenta punti critici unicamente non degeneri). Allora esiste una decomposizione in manici di M tale che per ogni intero non negativo k il numero di k -manici corrisponde al numero di punti critici per la funzione f di indice k .

DIMOSTRAZIONE. Sia M una varietà liscia chiusa e sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una *funzione di Morse*. Dal Corollario 2.8 segue che i punti critici sono in numero finito. Siano

dunque $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ i valori critici per f . Consideriamo ora i numeri reali $\mu_0, \dots, \mu_s$ che soddisfano la disuguaglianza

$$\mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{s-1} < \lambda_s < \mu_s.$$

Notiamo innanzitutto che $M^{\mu_0} = \emptyset$ e, da momento che $\lambda_s = \max_{p \in M} f(p)$, otteniamo che $M^{\mu_s} = M$.

Per il Teorema 3.9, per ogni $i = 1, \dots, s$, M^{μ_i} è diffeomorfo a $M^{\mu_{i-1}}$ con l'attaccamento di un numero finito di manici. Inoltre il Teorema afferma anche che esiste una corrispondenza tra gli indici dei manici attaccati e gli indici di f nei punti critici. Possiamo concludere che $M^{\mu_s} = M$ ammette una decomposizione in manici, e dunque una decomposizione in manici standard. $\square$

Da ciò otteniamo:

TEOREMA 3.11. (Decomposizione in manici) Ogni varietà chiusa liscia ammette una decomposizione in manici.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo teorema è un'immediata conseguenza dell'esistenza di *funzioni di Morse*² per varietà lisce chiuse e l'applicazione del Teorema 3.10. $\square$

3.2. Una breve introduzione ad una teoria omologica con i manici

Possiamo ora introdurre un complesso di catene derivante dalla decomposizione in manici di una varietà liscia compatta. Questo complesso è l'analogo del complesso cellulare per un complesso CW . Inoltre dimostreremo che i gruppi di omologia derivanti dalla decomposizione in manici sono isomorfi ai gruppi di omologia singolare³.

Lavoreremo in modo analogo a quanto si fa per i complessi CW su varietà lisce dotate di una decomposizione in manici.

LEMMA 3.12. Sia M una varietà liscia compatta n -dimensionale e la sua decomposizione in manici standard:

$$M \cong \emptyset \cup_{\varphi_{0,1}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{0,r_0}} h^0 \cup \dots \cup_{\varphi_{n,1}} h^n \cup \dots \cup_{\varphi_{n,r_n}} h^n.$$

- (1) Sia un intero $k \in \{1, \dots, n\}$. Dato un indice $i \in \{1, \dots, r_i\}$ denotiamo come $\Phi_{k,i}: \bar{B}_i^k \rightarrow \{0\} \times \bar{B}_i^k \rightarrow M^k$ la mappa data dall'inclusione del cuore dell' i -esimo manico di indice k . Per ogni $k, j \in \mathbb{N}$ la seguente mappa è un isomorfismo:

$$\bigoplus_{i=1}^{r_i} \Phi_{k,i*}: \bigoplus_{i=1}^{r_i} H_j(\bar{B}_i^k, \partial \bar{B}_i^k) \rightarrow H_j(M^k, M^{k-1}).$$

In particolare otteniamo che per ogni $i \neq k$, abbiamo $H_i(M^k, M^{k-1}) = 0$ e che il gruppo $H_k(M^k, M^{k-1})$ è un gruppo abeliano libero di rango pari al numero di k -manici presenti nella decomposizione.

- (2) Per ogni $i > k$ abbiamo $H_i(M^k) = 0$.

²Rimandiamo le lettrici e i lettori alla dimostrazione sul libro di Benedetti [Ben21, Corollario 5.36]

³Per tutta la sezione lavoreremo con gruppi di omologia con coefficienti in $\mathbb{Z}$.

(3) Per ogni $i < k$ l'inclusione $j: M^k \hookrightarrow M$ induce un isomorfismo

$$j_*: H_i(M^k) \rightarrow H_i(M).$$

LEMMA 3.13. (Mappa di bordo) Sia M una varietà liscia compatta dotata di una decomposizione in manici standard. Dato un intero non negativo $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $d = d_k$ la mappa

$$\begin{array}{ccccc} H_k(M^k, M^{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(M^{k-1}) & \xrightarrow{j_{k-1}} & H_{k-1}(M^{k-1}, M^{k-2}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & d=d_k & & \end{array}$$

dove ∂_k è la mappa di connessione nella sequenza esatta lunga della coppia (M^k, M^{k-1}) e dove j_{k-1} è la mappa indotta dalla proiezione $C_{k-1}(M^{k-1}) \rightarrow C_{k-1}(M^{k-1}, M^{k-2})$. Per queste mappe per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale la proprietà che $d_k \circ d_{k-1} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & H_k(M^k) & & & & & \\ & \uparrow \partial_{k+1} & \searrow j_k & & & & \\ H_{k+1}(M^{k+1}, M^k) & \xrightarrow{d_{k+1}} & H_k(M^k, M^{k-1}) & \xrightarrow{d_k} & H_{k-1}(M^{k-1}, M^{k-2}) & & \\ & & \searrow \partial_k & & \uparrow j_{k-1} & & \\ & & & & H_{k-1}(M^{k-1}) & & \end{array}$$

La mappa $\partial_k \circ j_k: H_k(M^k) \rightarrow H_{k-1}(M^{k-1})$ è la composizione di due mappe consecutive nella sequenza esatta lunga in omologia della coppia (M^k, M^{k-1}) dunque è la mappa nulla. Poichè, per definizione di d_k , il diagramma commuta otteniamo che

$$d_k \circ d_{k-1} = (j_{k-1} \circ \partial_k) \circ (j_k \circ \partial_{k+1}) = j_{k-1} \circ (\partial_k \circ j_k) \circ \partial_{k+1} = 0. \quad \square$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire i gruppi di omologia derivanti dalla decomposizione in manici.

DEFINIZIONE 3.14. (Omologia con i manici) Sia M una varietà liscia compatta dotata di una decomposizione in manici standard. Chiamiamo la mappa d_k definita nel Lemma 3.13 *mappa di bordo*. Scriviamo $C_k^{\text{han}}(M) := H_k(M^k, M^{k-1})$ e indichiamo il complesso di catene derivante dalla decomposizione in manici come $(C_*^{\text{han}}(M), d_*)$. Infine denotiamo i gruppi di omologia del complesso di catene derivante dalla decomposizione in manici della varietà liscia M come $H_k^{\text{han}}(M)$.

Dimostriamo ora che i gruppi di omologia così definiti sono isomorfi ai gruppi di omologia singolare.

PROPOSIZIONE 3.15. (Omologia singolare e omologia con i manici) [Fri24, Proposizione 212.3] Sia M una varietà liscia compatta dotata di una decomposizione in manici standard. Dato un intero non negativo $k \in \mathbb{N}$ esiste un unico isomorfismo naturale

$$\Phi_M: H_k(M) \rightarrow H_k^{\text{han}}(M)$$

che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & H_k(M) & \\
 \nearrow & & \searrow \Phi_M \\
 H_k(M^k) & & H_k^{\text{han}}(M). \\
 \searrow j_k & & \nearrow \\
 & \ker(d_k) &
 \end{array}$$

In particolare, la classe di isomorfismo dei gruppi di omologia derivanti dalla decomposizione in manici dipendono solo dal tipo di omotopia di M .

3.3. Applicazioni della decomposizione in manici al calcolo della caratteristica di Eulero

Dopo aver definito i gruppi di omologia $H_*^{\text{han}}(M)$ ottenuti tramite la decomposizione in manici di una varietà liscia e visto che essi sono isomorfi ai gruppi di omologia singolare, possiamo ora elencare qualche risultato riguardante la *caratteristica di Eulero* della varietà M . Ricordiamo che la caratteristica di Eulero di M è definita come la somma alternata del rango dei gruppi di omologia cellulare, ossia

$$(12) \quad \chi(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot \text{rk}(H_k(M)).$$

Enunciamo e dimostriamo innanzitutto un risultato generale sui complessi di catene, che ci servirà in seguito.

PROPOSIZIONE 3.16. ($\text{rk } C_n$ versus $\text{rk } H_n$) Dato un complesso di catene qualsiasi

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

di gruppi abeliani finitamente generati, vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n \cdot \text{rk}(C_n) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \cdot \text{rk}(H_n(C_*)).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il complesso di catene (C_*, ∂_*) come sopra. Per ogni intero non negativo $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$Z_n := \ker(\partial_n), \quad B_n := \text{im}(\partial_{n+1}) \quad \text{e} \quad H_n = Z_n / B_n.$$

In questo modo possiamo definire due sequenze esatte corte:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0$$

da cui otteniamo

$$\text{rk } C_n = \text{rk } Z_n + \text{rk } B_{n-1} \quad \text{e} \quad \text{rk } Z_n = \text{rk } B_n + \text{rk } H_n.$$

Ora, sostituendo $\text{rk } B_n + \text{rk } H_n$ nella prima equazione e moltiplicando il risultato ottenuto per $(-1)^n$, otteniamo:

$$(-1)^n \text{rk } C_n = (-1)^n (\text{rk } B_n + \text{rk } H_n + \text{rk } B_{n-1}).$$

Sommando su $n \in \mathbb{N}$ abbiamo quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot \text{rk}(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot \text{rk}(H_n) + (-1)^k \text{rk } B_k + \text{rk } B_{-1}.$$

Tuttavia, gli ultimi due addendi sono entrambi nulli perchè B_k è immagine di 0, mentre B_{-1} è l'immagine di C_0 tramite la mappa nulla $\partial_0 \equiv 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

COROLLARIO 3.17. (Caratteristica di Eulero con i manici) Sia M una varietà liscia compatta. Data una qualunque decomposizione in manici per M vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot (\text{numero di } k\text{-manici}) = \chi(M)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia M una varietà liscia compatta dotata di una decomposizione in manici. Dato un intero non negativo $k \in \mathbb{N}$ denotiamo come c_k il numero di manici di indice k nella decomposizione. Possiamo quindi trovare una decomposizione in manici *standard* per M tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ il numero di k -manici sia esattamente c_k . Usando la decomposizione in manici standard, otteniamo:

$$\begin{aligned} \chi(M) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot \text{rk}(H_k(M)) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot \text{rk}(H_k^{\text{han}}(M)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot \text{rk}(C_k^{\text{han}}(M)) \stackrel{(4)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot c_k. \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (1) segue dalla definizione della caratteristica di Eulero dell'Equazione (12), la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione 3.15, l'uguaglianza (3) segue dalla Proposizione 3.16 e l'uguaglianza (4) dal Lemma 3.12. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Grazie a quanto fatto finora, possiamo dare una dimostrazione di un risultato classico riguardante la caratteristica di Eulero, ossia:

COROLLARIO 3.18. (Caratteristica di Eulero di una varietà di dimensione dispari) La caratteristica di Eulero χ di una varietà chiusa liscia di dimensione dispari è 0.

DIMOSTRAZIONE. Sia M una varietà liscia $(2n+1)$ -dimensionale. Per il Teorema 3.11 possiamo dotare la varietà M di una sua decomposizione in manici. Per l'Osservazione 3.7 possiamo considerare la corrispondente decomposizione in manici duale, in particolare essa è una decomposizione in manici della varietà M che presenta, per ogni intero non negativo $k \in \{0, \dots, 2n+1\}$, tanti manici di indice $(2n+1-k)$ quanti manici di indice k sono presenti nella decomposizione originariamente considerata. Da ciò segue

direttamente che

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot (\text{numero di } k\text{-manici nella decomposizione}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot (\text{numero di } (2n+1-k)\text{-manici nella decomposizione duale})\end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue dal Corollario 3.17.

Applicando la sostituzione $m = 2n + k - 1$ negli indici della sommatoria otteniamo:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= - \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot (\text{numero di } m\text{-manici nella decomposizione duale}) \\ &= -\chi(M).\end{aligned}$$

Dunque deve essere $\chi(M) = 0$, per ogni varietà chiusa di dimensione dispari. $\square$

ESEMPIO 3.19. (Sfere dispari) Consideriamo un intero dispari non negativo n . Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera n -dimensionale. Essa è una varietà chiusa liscia di dimensione n (si veda l'Esempio 1.17). Per il Corollario 3.18 ci aspettiamo che la sua caratteristica di Eulero sia nulla.

Grazie a quanto visto nel Teorema di Reeb 2.17, sappiamo che la n -sfera è omeomorfa a due n -celle attaccate lungo il loro bordo. Considerando le n -celle come sottospazi dello spazio Euclideo n -dimensionale, sappiamo che esse sono omeomorfe sia allo 0-manico che all' n -manico (di dimensione n). Inoltre, considerando che alla n -cella viene attaccato tutto il bordo della seconda n -cella, possiamo immaginare queste proprio come una decomposizione in manici della sfera S^n .

Possiamo quindi calcolare esplicitamente la sua caratteristica di Eulero tramite la decomposizione in manici (Corollario 3.17) come:

$$\chi(M) = (-1)^0 \cdot (\# \text{ 0-manici}) + (-1)^n \cdot (\# \text{ } n\text{-manici}) = 1 - 1 = 0.$$

Un'ulteriore considerazione che possiamo fare riguarda la decomposizione duale della decomposizione considerata, ossia un n -manico attaccato ad uno 0-manico. Immaginare la sua decomposizione duale è abbastanza facile, infatti basta leggere scambiati l' n -manico e lo 0-manico. Risulta anche immediato notare che l'attaccamento completo dei due bordi può essere considerato simmetricamente come il primo manico che si incolla sull'altro e viceversa.

Infine, riprendendo lo studio che abbiamo fatto sulle funzioni lisce e i loro punti critici, possiamo enunciare e dimostrare quest'ultimo corollario conclusivo.

COROLLARIO 3.20. (Caratteristica di Eulero con punti critici) Sia M una varietà liscia chiusa. Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una *funzione di Morse*. Allora, la caratteristica di Eulero si può calcolare come segue:

$$\chi(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot (\text{numero di punti critici di } f \text{ di indice } k).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una *funzione di Morse* su una varietà liscia chiusa. Segue dalla Proposizione 3.10 che la varietà M ammette una decomposizione in manici tale che per ogni intero non negativo $k \in \mathbb{N}$ il numero di manici di indice k equivale al numero di punti critici per f di indice k .

Possiamo concludere la dimostrazione grazie al Corollario 3.17 che permette di calcolare la caratteristica di Eulero tramite la somma alternata del numero di manici:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot (\text{numero di } k\text{-manici}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot (\text{numero di punti critici di } f \text{ di indice } k) \quad \square\end{aligned}$$

Diamo infine un esempio esplicito del calcolo della caratteristica di Eulero per il toro.

ESEMPIO 3.21. (Toro) Consideriamo il toro $\Sigma_1 = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^3$. Costruiamo una decomposizione in manici per Σ_3 . Immergiamo in $\mathbb{R}^3$ lo 0-manico $\bar{B}^0$ e lungo il suo bordo attacchiamo due 1-manici $\bar{B}^1$ in modo che le due componenti connesse delle sfere di attaccamento del manico siano alternate, come raffigurato nella Figura (2). A questo punto notiamo che il bordo dell'1-scheletro appena costruito è costituito da una sola componente connessa omeomorfa ad S^1 . Lungo essa attacchiamo il bordo del 2-manico $\bar{B}^2$. Lo spazio topologico così ottenuto è omeomorfo al toro Σ_1 .

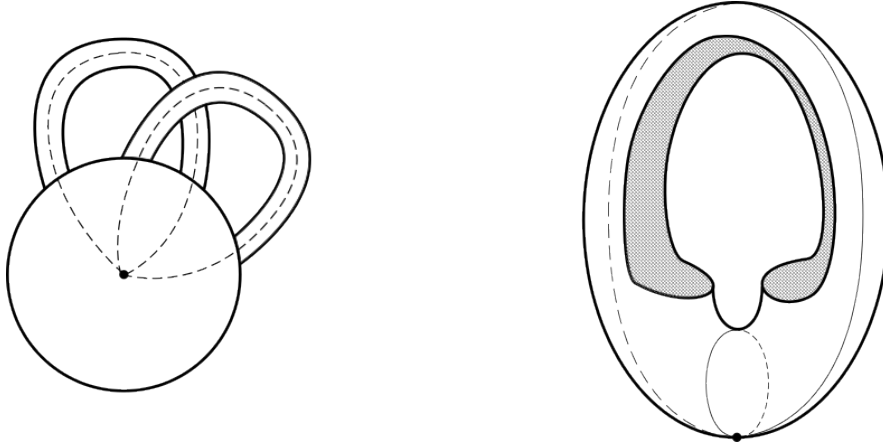


FIGURA 2. Costruzione del toro tramite l'attaccamento di manici. Le due figure rappresentate sono omeomorfe tra loro, la prima rappresenta in modo schematico l'attaccamento degli 1-manici allo 0-manico, la seconda mette in evidenza il bordo lungo cui attaccare il 2-manico che coincide con il bordo dell'area grigia in figura.

Considerando questa decomposizione abbiamo quindi che la caratteristica di Eulero della varietà liscia Σ_1 , calcolata tramite una sua decomposizione in manici è, per il Corollario 3.17:

$$(13) \quad \chi(\Sigma_1) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \cdot (\# \text{manici di indice } i) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Il genere di Σ_1 , risulta quindi essere $g(\Sigma_1) = (2 - \chi(M))/2 = 1$.

Calcoliamo ora la caratteristica di Eulero tramite lo studio dei punti critici dell'Esempio 2.16 e il Corollario 3.20. Dall'Esempio 1.16 sappiamo che esso è una varietà liscia 2-dimensionale. Inoltre i punti critici della funzione altezza sono:

- un punto di minimo alla base del toro di indice 0;
- due punti di sella di indice 1;
- un punto di massimo alla sommità del toro di indice 2.

Il Corollario 3.20 ci permette di calcolare dunque la caratteristica del toro Σ_1 come

$$(14) \quad \chi(\Sigma_1) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \cdot (\# \text{punti critici di indice } i) = 1 - 2 + 1 = 0$$

da cui segue che il suo genere è $g(\Sigma_1) = 1$.

I due risultati sono equivalenti, ma dimostrano come il calcolo della caratteristica di Eulero possa essere svolto in maniera alternativa tramite una decomposizione in manici qualsiasi (13) o di una funzione di Morse qualsiasi (14).

Bibliografia

- [Ben21] Riccardo Benedetti. *Lectures on differential topology*, volume 218 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2021] ©2021.
- [Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.
- [Fri24] Stefan Friedl. Topology. <https://friedl.app.uni-regensburg.de/papers/1t-total-public-october-7-2024.pdf>, 2024.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition, 2018.
- [Mil56] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)*, 64:399–405, 1956.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse theory*, volume No. 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.