Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Flussi di Campi

Vettoriali e Gruppi

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Mattia Simone Pietro Mazzonna

Anno Accademico 2024/2025

Ad Angela

Introduzione

È sciagura propria del matematico, più che d'ogni altro uomo di scienza, che la sua opera non possa essere presentata, né chiarita al pubblico colto, neppure ad un'assemblea di scienziati. Occorre essere matematici per poter discernere la singolare bellezza che un teorema ha da offrire, o per ammirare le purissime linee delle parti compiute di questa scienza.

L. Sylow su S. Lie

La teoria dei gruppi di Lie ha avuto origine nella seconda metà dell'Ottocento dall'opera del matematico norvegese Sophus Lie sui gruppi continui di trasformazioni. Tra il 1869 e il 1873 l'attività di ricerca di Lie ebbe come oggetto i gruppi continui, spinto dal suo interesse per le equazioni differenziali. Lo scopo del matematico norvegese era quello di uniformare la teoria delle equazioni differenziali, nel tentativo di emulare la teoria di Galois. Portare l'attenzione della comunità matematica su questi argomenti tormentò Lie per svariati anni, e la strada verso questo obiettivo fu tortuosa, come testimonia la corrispondenza dello stesso Lie con il matematico tedesco A. Mayer: *"Se solo fossi in grado di portare l'attenzione dei matematici sui gruppi di trasformazioni e alle loro applicazioni alle equazioni differenziali... Sono certo, nel mio caso assolutamente certo, che in futuro queste teorie saranno ritenute fondamentali."* Nonostante la storia si rivelò favorevole nei confronti di Lie, la diffidenza della comunità matematica verso i gruppi continui perdurò per svariati anni. Tra il 1896 e il 1903 Frobenius sviluppò la teoria della rappresentazione dei gruppi finiti, un lavoro straordinario che fu inizialmente ignorato, ritenuto non interessante e non familiare dai matematici di fine Ottocento, fatta eccezione per Poincaré. Ma anche quest'ultimo non nutriva fiducia nella fattibilità di un'ipotetica estensione dei risultati di Frobenius ai gruppi continui. Bisognerà aspettare il 1925, data in cui Hermann Weyl pubblicò i suoi celebri articoli sui gruppi semisemplici, per veder nascere i tanto attesi frutti del lavoro di Lie. Gli articoli di Weyl catturarono l'attenzione di molti e furono sufficienti a convincere la comunità matematica che la rappresentazione di algebre e gruppi di Lie fosse una strada fertile e percorribile, tanto che l'attività di ricerca in questo settore prosegue ininterrottamente sino ai giorni nostri.

Venedo ora ai temi trattati in questa Tesi, è da [3] che trae ispirazione la parte più interessante di questo elaborato; infatti, l'obiettivo principale di questa Tesi sarà di dare, sotto opportune ipotesi, una risposta esaustiva alla seguente domanda:

(Q): *Data una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali lisci su $\mathbb{R}^N$, è possibile trovare un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ tale che $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$?*

Il primo capitolo contiene alcuni concetti preliminari riguardanti i campi vettoriali, fondamentali per tutta la trattazione successiva. Viene introdotto il concetto di flusso di un campo vettoriale X, definito come la (unica) soluzione massimale al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Vengono poi esposte alcune proprietà interessanti, nello specifico la proprietà di semigruppo di cui gode il flusso di un campo vettoriale e alcune regole di derivazione.

Il secondo capitolo consiste in una breve esposizione relativa ai gruppi di trasformazioni, l'interesse originale di Lie che ha portato allo sviluppo della moderna teoria dei gruppi che oggi porta il suo nome.

Infine, il terzo capitolo rappresenta il vero nocciolo duro di tutto l'elaborato. Questa sarà la strada seguita per rispondere alla domanda (Q): *in primis* vengono forniti i preliminari su algebre e gruppi di Lie, fondamentali per la trattazione. Vengono poi introdotte le ipotesi che vanno assunte su $\mathfrak{g}$ affinché (Q) abbia risposta affermativa. Sotto queste ipotesi infatti sarà possibile dotare $\mathbb{R}^N$ di una struttura locale di gruppo di Lie in modo che i campi vettoriali in $\mathfrak{g}$ siano (localmente) invarianti a sinistra. La costruzione di tale struttura sarà possibile grazie all'introduzione della mappa esponenziale Exp e della mappa logaritmica Log, sulle quali si basa la definizione della moltiplicazione m del gruppo di Lie locale e della mappa ι che fungerà da inverso moltiplicativo locale. Verrà mostrata quindi la buona positura e la regolarità di m e ι. In conclusione si scoprirà che questa struttura locale può essere unicamente estesa ad una struttura globale.

Indice

Capitolo 1

Preliminari su flussi di campi vettoriali

1.1 Notazioni per i campi vettoriali nello spazio

Nel seguito, Ω denoterà sempre un sottoinsieme aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$, senza bisogno di ripeterlo. Se $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty, \omega\}$, denotiamo con $C^k(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali di classe C^k su Ω; quando $u \in C^\infty(\Omega)$, diciamo che u è liscia; come d'uso, $C^\omega(\Omega)$ denota la classe delle funzioni reali analitiche su Ω.

I punti di $\mathbb{R}^n$ saranno denotati da $x = (x_1, \dots, x_N)$ (con $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$). Per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, uno qualsiasi dei simboli

$$\partial_i, \quad \partial_{x_i}, \quad \partial/\partial x_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}$$

indicherà l'operatore di derivata parziale rispetto alla variabile x_i. Notazioni analoghe valgono per le derivate di ordine superiore. Nel seguito, se $f \in C^1(\Omega)$, denoteremo sempre il suo gradiente come un *vettore riga* $1 \times N$:

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x) \ \cdots \ \partial_N f(x)), \qquad x \in \Omega.$$

Quando f è a valori vettoriali, cioè $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e $f_1, \dots, f_m$ sono le sue componenti (a valori reali), la notazione per il gradiente in forma di vettore riga è utile per scrivere la matrice Jacobiana $\mathcal{J}_f(x)$ di f nel punto $x \in \Omega$ nel modo seguente:

$$\mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

In presenza di operazioni che coinvolgono matrici, questa notazione suggerisce implicitamente di scrivere le funzioni vettoriali come vettori colonna, e sarà questa la nostra convenzione d'ora in poi.

Chiameremo **campo vettoriale** (abbreviato c.v.) su Ω ogni operatore differenziale lineare alle derivate parziali (PDO, per brevità) X della forma:

$$X = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove $a_1, \dots, a_N$ sono funzioni reali su Ω. Quindi, se $f \in C^1(\Omega)$, con Xf indichiamo la funzione

$$Xf : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto Xf(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Diciamo che il c.v. X è di classe C^k ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$) se le funzioni a_i sono di classe C^k in Ω; X è un **campo vettoriale liscio** se le funzioni a_i sono di classe C^∞. Dato $x \in \Omega$, il vettore in $\mathbb{R}^n$

$$X(x) := (a_1(x), \dots, a_N(x))$$

è detto **vettore dei coefficienti** di X in x. Spesso, in letteratura, X viene identificato con l'applicazione $x \mapsto X(x)$, ma in questa fase introduttiva faremo uno sforzo per distinguere tra X (un operatore), $X(x)$ (un vettore), e $x \mapsto X(x)$ (una funzione). In seguito, useremo la stessa notazione X per tutti questi concetti, quando non sussisterà rischio di ambiguità.

L'unica libertà notazionale che prendiamo da subito è l'identificazione del vettore N-dimensionale $X(x)$ con la matrice colonna $N \times 1$:

$$X(x) \equiv \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Poiché $\nabla f(x)$ è una matrice riga, questa notazione consente di scrivere in modo compatto:

$$Xf(x) = \nabla f(x) \cdot X(x), \qquad \forall\ f \in C^1(\Omega),\ x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Se X è liscio, possiamo (e lo faremo sistematicamente) pensare a X come a un'applicazione lineare da $C^\infty(\Omega)$ in sé:

$$X : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega), \qquad f \mapsto Xf.$$

Quindi, un campo vettoriale liscio X può essere visto come un *endomorfismo di* $C^\infty(\Omega)$. Denoteremo con $\mathrm{End}(C^\infty(\Omega))$ lo spazio vettoriale di tutti gli endomorfismi di $C^\infty(\Omega)$.

Notazione. Lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali lisci su Ω sarà denotato con $\mathcal{X}(\Omega)$. Si noti che $\mathcal{X}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(C^\infty(\Omega))$.

Osservazione 1.1. *$\mathcal{X}(\Omega)$ è implicitamente dotato della struttura di spazio vettoriale di* $\mathrm{End}(C^\infty(\Omega))$. Attenzione: con questa struttura, i c.v. lisci $X_1, \dots, X_m$ sono linearmente dipendenti se e solo se esistono $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^m c_i\, X_i$ è il campo nullo, cioè tutti i suoi coefficienti sono identicamente nulli. Ad esempio, i c.v. su $\mathbb{R}^2$

$$X_1 = \partial_{x_1} \quad \text{e} \quad X_2 = x_1\, \partial_{x_2}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$, anche se i vettori $X_1(x) = (1, 0)$ e $X_2(x) = (0, x_1)$ sono linearmente dipendenti quando $x_1 = 0$, *come vettori di* $\mathbb{R}^2$.

Nel seguito, risulterà presto comodo permettere a un c.v. X di agire non solo su funzioni a valori reali, ma anche su funzioni a valori vettoriali. Pertanto, permetteremo a qualsiasi c.v. di *agire componente per componente su funzioni a valori vettoriali*: cioè, se $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^1, con Xf intendiamo la funzione

$$Xf : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad x \mapsto (Xf_1(x), \dots, Xf_m(x)).$$

Convenzione. *Quando $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e X è un c.v. su Ω, se $Xf(x)$ compare in calcoli matriciali* (*per esempio dopo una matrice $m \times m$*), *adottiamo la convenzione che $Xf(x)$ sia scritto come un vettore* *colonna*

$$Xf(x) \equiv \begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_m(x) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Questa notazione risulta coerente con (1.1) e (1.3), poiché abbiamo

$$Xf(x) = \mathcal{J}_f(x) \cdot X(x), \qquad \forall\ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m),\ x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Questa è un'identità tra le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}.$$

Questo è coerente con (1.3) poiché, per funzioni a valori reali, la matrice jacobiana è semplicemente il vettore riga gradiente. Occasionalmente e per chiarezza, potremmo voler indicare con

$$I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad I(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

la funzione identità di $\mathbb{R}^n$, identificata con un vettore colonna $N \times 1$, così che

$$XI(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

non è altro che $X(x)$ nella sua notazione colonna (1.2). Questa notazione è particolarmente utile quando si vuole omettere la notazione del punto x e si ha bisogno di considerare $X(\cdot)$ come funzione a valori vettoriali. Per esempio, useremo la notazione $\mathcal{J}_{XI}$ invece dell'ambigua* $\mathcal{J}_X$, per indicare la matrice jacobiana della funzione in (1.6); scriveremo anche $\operatorname{div}(XI)$ per denotare la funzione divergenza $\sum_{j=1}^N \partial_j a_j$.

Per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ (cioè, α è un vettore con componenti intere non negative) usiamo questa notazione per derivate parziali di ordine superiore:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Se $\alpha = 0$, D_x^0 agisce in modo banale:

$$D_x^0 f = f \quad \text{per ogni } f \in C^0(\Omega).$$

Inoltre, scriviamo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Diciamo che P è un **PDO lineare liscio di ordine** n su Ω se

$$P = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha,$$

dove, per ogni α con $|\alpha| \le n$, a_α è una funzione liscia a valori reali su Ω. Come per i c.v. lisci, pensiamo a P come ad un endomorfismo di $C^\infty(\Omega)$. L'insieme dei PDO lineari lisci (di qualunque ordine non

*Si ricordi che X denota principalmente un PDO, non una funzione a valori vettoriali.

negativo) su Ω sarà denotato con $\mathcal{U}(\Omega)$. Questo è ovviamente un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(C^\infty(\Omega))$. Osserviamo che $\mathcal{U}(\Omega)$ *è chiuso rispetto all'operazione di composizione* (degli endomorfismi). In altre parole, la composizione di due PDO lineari lisci è ancora un PDO lineare liscio.

Concludiamo la sezione con un avvertimento: se X è un c.v. su $\mathbb{R}^n$ e se $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, non bisogna confondere

$$Xf(x) \quad \text{e} \quad X(f(x)).$$

Entrambe sono definite, ma la prima è il valore, nel punto x, della funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ $Xf = (Xf_1, \dots, Xf_N)$, mentre la seconda è il vettore in $\mathbb{R}^n$ ottenuto valutando il vettore dei coefficienti di X in $f(x)$. In caso di ambiguità, quest'ultima sarà indicata con $XI(f(x))$, che è inequivocabile, grazie a (1.6).

1.2 Il flusso di un campo vettoriale

Passiamo ora a dare le definizioni principali di questo capitolo: curve integrali e flussi. Ancora una volta, Ω è da intendersi come un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Avvertiamo il lettore che useremo la parola 'curva' in $\mathbb{R}^n$ con il significato di una *funzione* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo), mentre l'insieme dei punti $\gamma(I)$ sarà indicato come *insieme immagine* della curva.

Definizione 1.2 (Curva integrale). *Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω. Ogni soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie*

$$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$$

è detta una ***curva integrale*** *di X. Se $x \in \Omega$ e se $\gamma(t)$ è una curva integrale di X tale che $\gamma(0) = x$, diciamo che γ* ***parte da*** *x. In tal caso, la (unica) soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \dot\gamma(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

verrà indifferentemente indicata con una delle seguenti notazioni:

$$\gamma(t, X, x), \quad \gamma_X(t, x), \quad \gamma_{X,x}(t).$$

Il dominio della soluzione massimale del problema (CP) sarà indicato con $\mathcal{D}(X, x)$. I simboli X o x potranno essere omessi quando siano chiari dal contesto o irrilevanti. Infine, useremo la seguente notazione:

$$\mathcal{D}(X) := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ x \in \Omega, \ t \in \mathcal{D}(X, x)\Big\}. \tag{1.7}$$

Se $X = \sum_i a_i \partial_i$, il sistema di equazioni differenziali ordinarie $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$ in coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot\gamma_1(t) &= a_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \\ & \vdots \\ \dot\gamma_N(t) &= a_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)). \end{cases}$$

Scriveremo anche $\dot\gamma = X(\gamma)$; si vede che si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie *autonomo*. Ovviamente, la definizione sopra ha senso anche sotto ipotesi di regolarità più deboli sui coefficienti di X, essendo l'ipotesi che X sia di classe C^1 ampiamente sufficiente. Per esempio, è sufficiente che le componenti di X siano localmente lipschitziane su Ω. Nel seguito considereremo c.v. di classe C^1 (o C^2, occasionalmente) per semplicità.

Osservazione 1.3. Sappiamo che, quando X è di classe C^k, risultati generali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie garantiscono che $\gamma_X(t,x)$ è di classe C^k sulla coppia $(t,x) \in \mathcal{D}(X)$, e che l'insieme $\mathcal{D}(X)$ in (1.7) è un *insieme aperto*. Sappiamo anche che l'insieme $\mathcal{D}(X,x) \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto non vuoto contenente 0. Osserviamo che, fissato $x \in \Omega$, $\mathcal{D}(X,x)$ è la proiezione sull'asse t di una sezione dell'insieme aperto $\mathcal{D}(X)$ in (1.7), ottenuta eguagliando la variabile spaziale a x:

$$\mathcal{D}(X,x) = \{t \in \mathbb{R} \,:\, (t,x) \in \mathcal{D}(X)\}.$$

Osserviamo che, a differenza di altri sottoinsiemi aperti in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(X)$ è costituito da una famiglia di intervalli (tutti contenenti $0 \in \mathbb{R}$) disposti lungo l'asse t:

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{D}(X,x) \times \{x\}.$$

Osservazione 1.4 (Foliazione in insiemi immagine disgiunti di curve integrali). Se X è un c.v. di classe C^1 su Ω, gli insiemi immagine di due curve integrali (*come sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$) possono intersecarsi; ciò non è in contrasto con l'unicità del problema (CP). Poiché l'equazione differenziale ordinaria che definisce una curva integrale è autonoma, vale il seguente semplice fatto:

Se $\gamma(t_1,X,x_1) = \gamma(t_2,X,x_2)$ *allora* $\mathcal{D}(X,x_2) = t_2 - t_1 + \mathcal{D}(X,x_1)$ *e*

$$\gamma(t,X,x_1) = \gamma(t_2 - t_1 + t, X, x_2), \quad \textit{per ogni } t \in \mathcal{D}(X,x_1).$$

Come conseguenza, l'insieme immagine di $\gamma(\cdot,X,x_1)$ *coincide con quello di* $\gamma(\cdot,X,x_2)$. Ne consegue che Ω è foliata nell'unione (disgiunta) degli insiemi immagine di tutte le curve integrali che si intersecano tra loro. Più precisamente, possiamo partizionare la famiglia

$$\Big\{\mathcal{D}(X,x) \ni t \mapsto \gamma(t,X,x)\Big\}_{x\in\Omega}$$

nell'unione disgiunta delle sottofamiglie ottenute raggruppando tra loro le curve integrali con insiemi immagine che si intersecano. Passando da queste sottofamiglie agli insiemi immagine che esse definiscono (in modo unico), otteniamo un'unione disgiunta di insiemi che folia Ω. Lasciamo i dettagli al lettore. □

Diamo ora una nuova notazione per le curve integrali $\gamma(t,X,x)$. Qui poniamo l'enfasi sul fatto che la curva integrale massimale è considerata *come funzione del punto iniziale* x, per cui useremo la seguente notazione che privilegia x.

Definizione 1.5 (**Flusso di un campo vettoriale**). *Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω e sia $t \in \mathbb{R}$ fissato. Quando definito, poniamo*

$$\Psi_t^X(x) := \gamma(t,X,x). \tag{1.8}$$

*Questa definizione ha senso se e solo se $x \in \Omega$ è tale che $\mathcal{D}(X,x)$ contiene t (in generale, ciò può non essere vero per ogni $x \in \Omega$). Quando il dominio non è vuoto, la mappa $x \mapsto \Psi_t^X(x)$ è detta **flusso di** X **al tempo** t. La notazione Ψ_t sarà usata quando X è chiaro dal contesto. Dato $t \in \mathbb{R}$, denotiamo con Ω_t^X (eventualmente vuoto) il sottoinsieme di Ω dei punti x tali che la curva integrale massimale di X che parte da x è definita in t, cioè:*

$$\Omega_t^X := \big\{x \in \Omega \,:\, t \in \mathcal{D}(X,x)\big\}.$$

Quando questo insieme non è vuoto, esso è il dominio esatto della mappa di flusso Ψ_t^X:

$$\Psi_t^X : \Omega_t^X \longrightarrow \Omega.$$

Convenzione. Nel seguito chiameremo Ψ_t^X **il flusso di** X, omettendo l'espressione "al tempo t" ogni volta che è chiaro. Tuttavia avvertiamo il lettore che, in Geometria Differenziale, con "flusso" si intende solitamente la mappa

$$(t,x) \mapsto \Psi_t^X(x).$$

Questo piccolo abuso non genererà ambiguità.

Osservazione 1.6. Si noti che, per l'Osservazione 1.3, l'insieme Ω_t^X è un sottoinsieme aperto di Ω (eventualmente vuoto); infatti, $\Omega_t^X = \emptyset$ se non esiste alcun x in Ω tale che $\mathcal{D}(X,x)$ contenga t; altrimenti (cioè, se esiste $x \in \Omega$ tale che $t \in \mathcal{D}(X,x)$), Ω_t^X è esattamente la proiezione (non vuota) sull'asse delle x di una sezione dell'insieme aperto $\mathcal{D}(X)$ in (1.7), sezione ottenuta imponendo che la variabile temporale sia uguale a t:

$$\Omega_t^X = \{x \in \Omega \,:\, (t,x) \in \mathcal{D}(X)\}.$$

Inoltre, si ha

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times \Omega_t^X, \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(X) = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{D}(X,x) \times \{x\}.$$

Nella prima identità, alcuni degli insiemi Ω_t^X possono essere vuoti, mentre nella seconda identità ogni insieme $\mathcal{D}(X,x)$ è non vuoto. $\square$

Osservazione 1.7. Se X è di classe C^1 su Ω, valgono le seguenti proprietà:

- $\Omega_0^X = \Omega$;
- se $t > 0$ e $\Omega_t^X \neq \emptyset$, allora $\Omega_t^X \subseteq \Omega_s^X$ per ogni $s \in [0,t]$;
- se $t < 0$ e $\Omega_t^X \neq \emptyset$, allora $\Omega_t^X \subseteq \Omega_s^X$ per ogni $s \in [t,0]$;
- $\Omega_t^X \uparrow \Omega$ per $t \downarrow 0$ e per $t \uparrow 0$;
- per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $\varepsilon = \varepsilon(K,X,\Omega) > 0$ tale che $K \subset \Omega_\varepsilon^X$ e $K \subset \Omega_{-\varepsilon}^X$. $\square$

Osserviamo che, per un fissato $t \neq 0$, l'applicazione Ψ_t *potrebbe non essere definita su tutto* Ω. Tuttavia, come anticipato nell'Osservazione 1.7, per ogni sottoinsieme compatto K di Ω, esiste $\varepsilon > 0$ (dipendente da K) tale che Ψ_t è definito sull'intero K, per ogni $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Questo significa che, per ogni sottoinsieme compatto di Ω, esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni curva integrale che parte da un punto di questo insieme compatto esiste per ogni tempo in $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

1.2.1 La proprietà di semigruppo

Il seguente risultato è una conseguenza dell'unicità della soluzione di un problema di Cauchy con coefficienti C^1.

Proposizione 1.8 (**Proprietà di semigruppo del flusso**). *Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω e sia $x \in \Omega$. Valgono i seguenti fatti:*

(1) *se $s, t+s \in \mathcal{D}(X,x)$ allora $t \in \mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$ e si ha*

$$\gamma_X\big(t, \gamma_X(s,x)\big) = \gamma_X(t+s, x);$$

(2) *se $s \in \mathcal{D}(X,x)$ allora $-s \in \mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$ e si ha*

$$\gamma_X\big(-s, \gamma_X(s,x)\big) = x;$$

(3) se $\alpha, t \in \mathbb{R}$ *sono tali che* $\alpha\, t \in \mathcal{D}(X,x)$ *allora* $t \in \mathcal{D}(\alpha\, X, x)$ *e si ha*

$$\gamma_X(\alpha\, t, x) = \gamma_{\alpha\, X}(t,x);$$

(4) $\gamma(0,X,x) = x$ *per ogni* $x \in \Omega$.

In termini di flusso del campo vettoriale X*, queste possono essere riformulate brevemente come segue:*

(1') $\Psi_t^X \circ \Psi_s^X = \Psi_{t+s}^X$;

(2') *le applicazioni* Ψ_s^X *e* Ψ_{-s}^X *sono l'una l'inversa dell'altra (si veda l'Osservazione 1.9);*

(3') $\Psi_{\alpha\, t}^X = \Psi_t^{\alpha\, X}$*; in particolare* $\Psi_{-t}^X = \Psi_t^{-X} = (\Psi_t^X)^{-1}$;

(4') *l'applicazione* Ψ_0^X *è l'identità su* Ω.

Le proprietà (1)-(1') *verranno dette* ***proprietà di semigruppo*** *del flusso di* X.

Chiaramente, queste affermazioni possono essere riformulate in altri modi; per esempio, la proprietà di semigruppo (1) è equivalente a:

se $s \in \mathcal{D}(X,x)$ e $t \in \mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$, allora $t+s \in \mathcal{D}(X,x)$ (che equivale a $s + \mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$), e si ha $\gamma_X\big(t, \gamma_X(s,x)\big) = \gamma_X(t+s,x)$.

Dimostrazione della Prop. 1.8. Ci limitiamo a dimostrare la proprietà (1); lasciamo al lettore la dimostrazione della (3), mentre la (2) segue dalla (1) ponendo $t = -s$ e osservando che $\gamma_X(0,x) = x$ per ogni X e x.

Siano $s, t+s \in \mathcal{D}(X,x)$. Mostriamo che $\gamma_X(t, \gamma_X(s,X))$ è definita e coincide con $\gamma_X(t+s,x)$. Per s fissato poniamo $\mu(r) := \gamma_X(r+s,x)$; notiamo che μ è ben definita sull'intervallo $H := \mathcal{D}(X,x) - s$. Per ogni $r \in H$, abbiamo

$$\dot\mu(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(\gamma_X(r+s,x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big|_{u=r+s} \gamma_X(u,x) = X(\gamma(r+s,x)) = X(\mu(r)).$$

Inoltre, $\mu(0) = \gamma_X(s,x)$. Questo dimostra che $\mu : H \to \Omega$ è soluzione del problema

$$\dot\mu = X(\mu), \quad \mu(0) = \gamma_X(s,x).$$

D'altra parte, per definizione (si veda anche la Definizione 1.2), questo problema di Cauchy è risolto da $r \mapsto \gamma_X(r, \gamma_X(s,x))$ sul dominio massimale $\mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$. Per l'unicità della soluzione, ciò dimostra che l'intervallo massimale $\mathcal{D}(X, \gamma_X(s,x))$ contiene H, e in particolare contiene $t = t+s-s \in \mathcal{D}(X,x)-s = H$ (dato che, per ipotesi, $t+s \in \mathcal{D}(X,x)$). Inoltre,

$$\gamma_X(r+s,x) = \mu(r) = \gamma_X(r, \gamma_X(s,x)), \quad \forall\, r \in H.$$

Ponendo $r = t$ (si noti che $t \in H$) otteniamo la proprietà (1). $\square$

Osservazione 1.9. Per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$ si ha $\Psi_t^X(\Omega_t^X) = \Omega_{-t}^X$. Questo segue dalla (2) della Proposizione 1.8. Questo mostra che le funzioni

$$\Psi_t^X : \Omega_t^X \longrightarrow \Omega_{-t}^X \quad \text{e} \quad \Psi_{-t}^X : \Omega_{-t}^X \longrightarrow \Omega_t^X$$

sono una l'inversa dell'altra. $\square$

Osservazione 1.10. La proprietà di semigruppo del flusso è così particolare che *caratterizza l'essere un flusso*. Più precisamente, si supponga che $F = F(t, x)$ sia una funzione di classe C^1 definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$ a valori in Ω. Supponiamo che A abbia la seguente forma: $A = \bigcup_{x \in \Omega} I_x \times \{x\}$, dove, per ogni $x \in \Omega$, I_x è un intervallo aperto contenente 0.

Supponiamo che valgano i seguenti due fatti: $F(0, x) = x$ per ogni $x \in \Omega$; inoltre, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \in I_x$, sia l'identità

$$F(s, F(t, x)) = F(s + t, x) \tag{1.9}$$

valida per ogni $s \in I_{F(t,x)}$ vicino a 0. Allora il campo vettoriale di classe C^1 definito da

$$\Omega \ni x \mapsto X(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} F(t, x)$$

è tale che $F(t, x) = \Psi_t^X(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e ogni $t \in I_x \subseteq \mathcal{D}(X, x)$. Ciò segue immediatamente derivando (1.9) rispetto a s in $s = 0$. $\square$

1.3 Campi vettoriali globali

Diamo adesso una definizione che gioca un ruolo cruciale nel contesto dell'invarianza sinistra di campi vettoriali su gruppi di Lie.

Definizione 1.11 (**Campo vettoriale globale**). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia X un campo vettoriale su Ω di classe C^1. Diciamo che X è **globale** (o completo) se, per ogni $x \in \Omega$, il dominio massimale $\mathcal{D}(X, x)$ della curva integrale (massimale) di X che parte da x è tutto $\mathbb{R}$.*

Osservazione 1.12. Se X è un campo vettoriale globale su Ω di classe C^1, allora

- $\mathcal{D}(X, x) = \mathbb{R}$ per ogni $x \in \Omega$, e $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times \Omega$;
- $\Omega_t^X = \Omega$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_t^X : \Omega \to \Omega$ è un diffeomorfismo di classe C^1, con inversa Ψ_{-t}^X.

Riportiamo senza dimostrazione la seguente

Proposizione 1.13. *Sia X un campo vettoriale su Ω di classe C^1. Allora X è globale se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \Omega$, $\mathcal{D}(X, x)$ contiene $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Dalla Proposizione 1.13 (con un semplice argomento di compattezza), è facile mostrare che ogni campo vettoriale a supporto compatto è globale.

1.4 Derivazione lungo un flusso

In tutta la sezione, si assume che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sia un insieme aperto non vuoto.

Teorema 1.14 (**Derivazione lungo una curva integrale**). *Sia X un campo vettoriale su Ω. Sia $\gamma_X(t)$ una qualsiasi curva integrale di X, definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$.*

(1). Se X è di classe C^1 e $f \in C^1(\Omega)$, allora:

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) = (Xf)(\gamma_X(t)), \qquad t \in I. \tag{1.10}$$

(2). Sia $k \geq 2$; se X è di classe C^{k-1} e $f \in C^k(\Omega)$, allora:

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\gamma_X(t))) = (X^k f)(\gamma_X(t)), \qquad t \in I. \tag{1.11}$$

(3). Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che X sia di classe C^n e che $f \in C^{n+1}(\Omega)$; se $x \in \Omega$ e $\gamma_{X,x}(t)$ è la curva integrale massimale di X che parte da x, allora, per la formula di Taylor con resto integrale, vale:

$$f(\gamma_{X,x}(t)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X^k f)(x)}{k!}\, t^k + \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n\, (X^{n+1}f)(\gamma_{X,x}(s))\, ds, \tag{1.12}$$

valida per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$. In particolare, se si prende f come una delle componenti dell'identità $I(x) = x$, si ottiene (come uguaglianza tra vettori in $\mathbb{R}^n$):

$$\Psi_x^X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X^k I)(x)}{k!}\, t^k + \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n\, (X^{n+1}I)(\Psi_s^X(x))\, ds, \tag{1.13}$$

valida per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$.

(4). Sia $n \in \mathbb{N}$, supponiamo X sia di classe C^n e $f \in C^{n+1}(\Omega)$; se $x \in \Omega$, si ha anche il seguente sviluppo di Taylor con resto di Peano di ordine $n+1$:

$$f(\gamma_{X,x}(t)) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k f)(x)}{k!}\, t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{per } t \to 0, \tag{1.14}$$

$$\Psi_x^X(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k I)(x)}{k!}\, t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{per } t \to 0. \tag{1.15}$$

(5). Di conseguenza, se X è un campo vettoriale liscio e $f \in C^\infty(\Omega)$, la serie di Maclaurin della funzione $t \mapsto f(\gamma_{X,x}(t))$ è:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k f)(x)}{k!}\, t^k. \tag{1.16}$$

La semplice dimostrazione è lasciata come esercizio.

Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (per qualche $m \geq 1$), il Teorema 1.14 resta valido senza modifiche, con la nostra convenzione che Xf è il vettore in $\mathbb{R}^m$ con componenti $Xf_1, \dots, Xf_m$, dove $f_1, \dots, f_m$ sono le componenti di f. Ad esempio, usando la notazione del flusso in (1.8), si ha:

$$\frac{d}{dt}\big(f(\Psi_t^X(x))\big) = (Xf)(\Psi_t^X(x)), \qquad \text{per ogni} \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

valido per $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X,x)$ e per X di classe C^1. Più in generale, per ogni $k \geq 2$,

$$\frac{d^k}{dt^k}\big(f(\Psi_t^X(x))\big) = (X^k f)(\Psi_t^X(x)), \qquad \text{per ogni} \quad f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

valido per $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X,x)$, e X di classe C^{k-1}. Per riferimento futuro, scriviamo esplicitamente i seguenti sviluppi:

$$\Psi_t^X(x) = x + t\,X(x) + o(t), \quad \text{per } t \to 0, \tag{1.17}$$

$$\Psi_t^X(x) = x + t\,X(x) + \frac{t^2}{2}\,X^2 I(x) + o(t^2), \quad \text{per } t \to 0. \tag{1.18}$$

Entrambi valgono se X è di classe C^1.

Capitolo 2

Gruppi di trasformazioni di Lie ad un parametro

2.1 Gruppi di trasformazioni ad un parametro

Definizione 2.1. *Una famiglia di trasformazioni dell'insieme U con insieme dei parametri V è una funzione*

$$\mathbf{X} : U \times V \to U,$$

con $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti.

Cominciamo col considerare il caso in cui V è un aperto di $\mathbb{R}$; in questo caso cambiamo volutamente di notazione e denotiamo l'insieme a cui appartiene il parametro con S. Ulteriori richieste di regolarità su $\mathbf{X}$ verranno aggiunte in quanto segue.

Definizione 2.2. *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}$ aperti. Supponiamo di avere una famiglia di trasformazioni definita su $U \times S$ che denotiamo con $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(x, \varepsilon)$. Si dice che questa famiglia definisce un gruppo di trasformazioni su U ad un parametro (in S) se esiste una mappa $\phi : S \times S \to S$ tale che valgano le seguenti condizioni:*

(i) per ogni ε in S, la funzione $\mathbf{X}(\cdot, \varepsilon) : U \to U$ è biunivoca;

(ii) (S, ϕ) forma un gruppo;

(iii) se ε_0 è l'elemento neutro di (S, ϕ), si ha $\mathbf{X}(x, \varepsilon_0) = x$, per ogni x in U;

(iv) per ogni x in U e per ogni ε, δ in S si ha

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon), \delta) = \mathbf{X}(x, \phi(\varepsilon, \delta)). \tag{2.1}$$

Chiamiamo U dominio del gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}(x; \varepsilon)$ e ϕ legge di composizione.

Osservazione 2.3. Scrivere la legge associativa per l'operazione binaria $(\varepsilon, \delta) \mapsto \phi(\varepsilon, \delta)$ equivale a scrivere la seguente identità:

$$\phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma)) = \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma) \tag{2.2}$$

per ogni α, β, γ in S.

Definizione 2.4. *Si dice che un gruppo di trasformazioni ad un parametro definisce un gruppo di Lie a un parametro di trasformazioni (o gruppo di Lie) se, oltre a soddisfare gli assiomi (i)–(iv) della Definizione 2.2, valgono le seguenti condizioni:*

(v) S *è un intervallo in* $\mathbb{R}$; †

(vi) la funzione $\mathbf{X}$ *è di classe* C^∞ *su* $U \times S$;

(vii) per ogni x *in* U, *la funzione* $\mathbf{X}(x, \cdot)$ *è analitica su* S;

(viii) la mappa $\phi : S \times S \to S$ *è reale analitica.*

Esempio 2.5. L'insieme di trasformazioni con parametro ε in $\mathbb{R}$ definito su $\mathbb{R}^2$ da

$$\mathbf{X}((x, y), \varepsilon) = (x, y + \varepsilon) \tag{2.3}$$

è un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro con legge di composizione su $\mathbb{R}$ data da $\phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$.

Esempio 2.6. L'insieme di trasformazioni con parametro ε in $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definito su $\mathbb{R}^2$ da

$$\mathbf{X}((x, y), \varepsilon) = (\varepsilon x, \varepsilon y) \tag{2.4}$$

è un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro con legge di composizione su $\mathbb{R}^*$ data da $\phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon\delta$.

Esempio 2.7. L'insieme di trasformazioni con parametro ε in $\mathbb{R}$ definito su $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{X}((x, y), \varepsilon) = (x\cos(\varepsilon) - y\sin(\varepsilon), x\sin(\varepsilon) + y\cos(\varepsilon)) \tag{2.5}$$

è un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro con legge di composizione su $\mathbb{R}$ data da $\phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$. Ciò segue facilmente dalle formule di addizione del seno e del coseno.

2.2 Trasformazioni infinitesimali

Consideriamo un gruppo di trasformazioni di Lie su U a un parametro ε in S

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(x, \varepsilon), \tag{2.6}$$

con $\varepsilon_0 = 0$ elemento neutro e ϕ legge di composizione. Espandendo (2.6) in serie di Taylor rispetto a ε in un intorno di $\varepsilon_0 = 0$, otteniamo

$$\mathbf{x}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left.\frac{\partial^n \mathbf{X}(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} = x + \varepsilon \left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Per ogni x in U, poniamo

$$X(x) = \left.\frac{\partial \mathbf{X}(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{2.7}$$

Si noti che X definisce un campo di vettori $X : U \to \mathbb{R}^n$ si classe C^∞. Molto presto assoceremo a X (e quindi a $\mathbf{X}$) un operatore differenziale alle derivate parziali del primo ordine. Siamo interessati alla relazione che lega questo campo vettoriale ai gruppi di trasformazioni. Sarà utile il seguente:

†Senza perdita di generalità, si assume spesso che $\varepsilon = 0$ corrisponda all'elemento identità e.

Lemma 2.8. *Il gruppo di Lie di trasformazioni a un parametro* (2.6) *soddisfa la relazione seguente:*

$$\mathbf{X}(x, \varepsilon + h) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon); \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h)), \tag{2.8}$$

per ogni x in U, ε in S e h vicino a $\varepsilon_0 = 0$ (dipendentemente da x e da ε), dove ε^{-1} denota l'inverso di ε nel gruppo (S, ϕ).

Dimostrazione. Siano x, ε, h come nell'asserto; allora vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon); \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h)) &\overset{(2.1)}{=} \mathbf{X}(x, \phi(\varepsilon, \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h))) \\
&\overset{(2.2)}{=} \mathbf{X}(x, \phi(\phi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + h)) \\
&= \mathbf{X}(x, \phi(0, \varepsilon + h)) \\
&= \mathbf{X}(x, \varepsilon + h).
\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Sia ora $\{\mathbf{X}(\cdot, \varepsilon)\}_{\varepsilon \in S}$ un gruppo di Lie ad un parametro sull'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Abbiamo visto che $\mathbf{X}$ definisce in modo naturale un campo $X : U \to \mathbb{R}^n$. È quindi altrettanto naturale studiare il flusso di X (nel senso introdotto nel Capitolo 1), che gode in generale della proprietà di semigruppo. Nel prossimo teorema confrontiamo $\{\mathbf{X}(\cdot, \varepsilon)\}_\varepsilon$ con il flusso di X.

Teorema 2.9 (**Primo Teorema Fondamentale di Lie**)**.** *Sia $\mathbf{X}$ un gruppo di trasformazioni di Lie su U a un parametro ε in S e sia*

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(s)\, ds,$$

con

$$\Gamma(\varepsilon) = \left. \frac{\partial \phi(a, b)}{\partial b} \right|_{(a,b) = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)}, \tag{2.9}$$

dove ε^{-1} denota l'elemento inverso di ε. Sia infine X il campo vettoriale su U definito in (2.7)*. Allora*

$$\mathbf{X}(x, \varepsilon) = \Psi^X_{\tau(\varepsilon)}(x),$$

per ogni x in U e per ogni ε in S.

Dimostrazione. Abbiamo provato che (per h vicino a 0)

$$\mathbf{X}(x, \varepsilon + h) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h)).$$

Uguagliamo le derivate di entrambi i membri rispetto ad h in $h = 0$: la derivata del primo membro è

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} \{\mathbf{X}(x, \varepsilon + h)\} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon);$$

la derivata del secondo membro è (per la regola della derivata della funzione composta)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} \{\mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h))\} &= (D_2\mathbf{X})(\mathbf{X}(x, \varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} \{\phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + h)\} \\
&= (D_2\mathbf{X})(\mathbf{X}(x, \varepsilon), 0) \cdot (D_2\phi)(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) \\
&\overset{(2.7)}{=} X(\mathbf{X}(x, \varepsilon)) \cdot (D_2\phi)(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) \\
&\overset{(2.9)}{=} X(\mathbf{X}(x, \varepsilon)) \cdot \Gamma(\varepsilon).
\end{aligned}$$

ove Γ è come in (2.9) e X è il campo vettoriale associato a $\mathbf{X}$ come in (2.7). Uguagliando segue:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(x,\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)\cdot X(\mathbf{X}(x,\varepsilon)), \tag{2.10}$$

per ogni ε in S e per ogni x in U. Ne segue che la curva

$$\varepsilon \mapsto \gamma(\varepsilon) := \mathbf{X}(x,\varepsilon)$$

con ε in S risolve il problema di Cauchy (dalla proprietà $\mathbf{X}(x,0)=x$)

$$\begin{cases} \dot\gamma(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)\cdot X(\gamma(\varepsilon)) \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

D'altra parte la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\mu(\varepsilon) = X(\mu(\varepsilon)) \\ \mu(0) = x \end{cases}$$

è, per definizione, la mappa flusso $\Psi^X_\varepsilon(x)$. Poniamo

$$\tau(\varepsilon) := \int_0^\varepsilon \Gamma(s)ds,$$

con ε in S. Ma allora la curva

$$\nu(\varepsilon) := \Psi^X_{\tau(\varepsilon)}(x)$$

verifica $\nu(0) = \Psi^X_{\tau(0)}(x) = \Psi^X_0(x) = x$ e inoltre

$$\begin{aligned} \dot\nu(\varepsilon) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=\tau(\varepsilon)}(\Psi^X_t(x))\cdot\dot\tau(\varepsilon) \\ &= X(\Psi^X_t(x))\Big|_{t=\tau(\varepsilon)}\cdot\Gamma(\varepsilon) \\ &= X(\Psi^X_{\tau(\varepsilon)}(x))\cdot\Gamma(\varepsilon) \\ &= X(\nu(\varepsilon))\cdot\Gamma(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ma allora γ e ν risolvono lo stesso problema di Cauchy e quindi coincidono ovunque, ossia

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \Psi^X_{\tau(\varepsilon)}(x),$$

per ogni x in U e per ogni ε in S. □

Osservazione 2.10. Anche se ciò non è garantito in generale, è d'interesse considerare il caso in cui la funzione τ, definita nel Teorema 2.9 appena dimostrato, è iniettiva. In tal caso possiamo definire un nuovo gruppo $(J,\star)$, dove

$$J := \tau(S),$$

mentre

$$x\star y := \tau(\phi(\tau^{-1}(x),\tau^{-1}(y))).$$

Supponiamo poi che τ' sia sempre diversa da 0, cosicché τ^{-1} è di classe C^1. Poiché $\tau\in C^1(S)$ abbiamo, per ogni $\delta\in J$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\delta}\{\mathbf{X}(x,\tau^{-1}(\delta))\} &= \left\{\frac{1}{\tau'(\varepsilon)}\frac{\partial \mathbf{X}(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\}\Bigg|_{\varepsilon=\tau^{-1}(\delta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\tau^{-1}(\delta))}\cdot\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\varepsilon}(x,\tau^{-1}(\delta)) \\ &\overset{(2.10)}{=} \frac{1}{\Gamma(\tau^{-1}(\delta))}\cdot\Gamma(\tau^{-1}(\delta))\cdot X(\mathbf{X}(x,\tau^{-1}(\delta))) \\ &= X(\mathbf{X}(x,\tau^{-1}(\delta))), \end{aligned} \tag{2.11}$$

e, per ogni $x \in U$

$$\mathbf{X}(x, \tau^{-1}(0)) = \mathbf{X}(x, 0) = x.$$

Consideriamo dunque la famiglia di trasformazioni $\mathbf{T}$ su U definita da

$$\mathbf{T}(x, \delta) := \mathbf{X}(x, \tau^{-1}(\delta)), \qquad \delta \in J.$$

Tale famiglia risulta un gruppo di trasformazioni ad un parametro in J; infatti, per ogni $\alpha, \beta \in J$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(x, \alpha \star \beta) =& \mathbf{T}(x, \tau(\phi(\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\beta))))\\ =& \mathbf{X}(x, \phi(\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\beta)))\\ \overset{(2.1)}{=}& \mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \tau^{-1}(\alpha)), \tau^{-1}(\beta))\\ =& \mathbf{X}(\mathbf{T}(x, \alpha), \tau^{-1}(\beta))\\ =& \mathbf{T}(\mathbf{T}(x, \alpha), \beta).\end{aligned}$$

Essendo τ analitica (come si potrebbe provare), il gruppo di trasformazioni, così definito, è anche di Lie.

Infine, poiché vale (2.27), ricorrendo all'unicità della soluzione del problema di Cauchy, è facile mostrare che

$$\mathbf{T}(\mathbf{T}(x, \alpha), \beta) = \mathbf{T}(x, \alpha + \beta)$$

per ogni $\alpha, \beta \in J$ tali che $\alpha + \beta \in J$, dunque

$$\mathbf{T}(x, \alpha \star \beta) = \mathbf{T}(x, \alpha + \beta).$$

Di conseguenza otteniamo un gruppo di trasformazioni di Lie su U ad un parametro in J che verifica la proprietà (2.1) rispetto all'operazione di addizione, ogni volta che ciò ha senso, cioè ogni volta che $\alpha + \beta \in J$. Poiché siamo interessati all'oggetto $\mathbf{X}$ visto come famiglia di trasformazioni su U, al variare del parametro ε, non è per nulla significativo il dominio in cui varia questo parametro, dunque, nelle ipotesi di iniettività di τ, si ha un gruppo di trasformazioni che verifica

$$\mathbf{X}(x, \varepsilon) = \Psi_\varepsilon^X(x) \tag{2.12}$$

e

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}(x, \varepsilon), \delta) = \mathbf{X}(x, \varepsilon + \delta) \tag{2.13}$$

per ogni $\varepsilon, \delta \in S$ tali che $\varepsilon + \delta \in S$.

Il Primo Teorema Fondamentale di Lie esprime la relazione tra $\mathbf{X}$ e il suo generatore infinitesimale X, senza però fornire una scrittura esplicita di $\mathbf{X}$ in funzione di X. Il nostro obiettivo sarà di esprimere esplicitamente questa dipendenza.

Definizione 2.11. *Sia $X(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ il campo vettoriale associato a $\mathbf{X}$ come in (2.7). L'operatore differenziale lineare alle derivate parziali*

$$X : C^1(U) \to C(U), \qquad (Xf)(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \tag{2.14}$$

si chiama generatore infinitesimale di $\mathbf{X}$.

Se $I : U \to U$ è la funzione identità su U, allora per ogni $x \in U$ si ha:

$$(XI)(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)) = X(x).$$

Teorema 2.12. *Sia X il generatore infinitesimale di $\mathbf{X}$ e supponiamo che valga* (2.12)*. Allora per ogni $x \in U$ esiste un intorno $J \subseteq S$ di $\varepsilon_0 = 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in J$,*

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k I(x).$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{X}$ è una funzione analitica rispetto al suo secondo argomento, esiste un intorno J di $\varepsilon_0 = 0$ tale che:

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{X}}{\partial \varepsilon^k}(x,0) \overset{(2.12)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial^k \Psi_\varepsilon^X}{\partial \varepsilon^k}(x,0).$$

Applicando il Teorema 1.14 con $f = I$ si ha che

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} (X^k I)(\mathbf{X}(x,0)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} (X^k I)(x),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Alla luce di quanto dimostrato adotteremo, all'occorrenza, la seguente notazione:

$$e^{\varepsilon X}(x) := \mathbf{X}(x,\varepsilon).$$

Abbiamo così ottenuto un modo per scrivere $\mathbf{X}$ esprimendone la dipendenza dal suo generatore infinitesimale X.

2.3 Invarianza per funzioni, punti e superfici

In questa sezione introduciamo i concetti di invarianza di funzioni, curve e superfici rispetto ad un gruppo di trasformazioni. Le definizioni e i risultati che introduciamo saranno poi alla base della definizione di invarianza per operatori differenziali. L'idea infatti sarà quella di ricondurre la condizione di risoluzione di una certa equazione differenziale all'appartenenza del suo grafico ad una certa superficie; questo ci consentirà di basare la definizione di invarianza per operatori differenziali sulla definizione di invarianza per superfici, e di dedurne facilmente alcuni risultati. L'invarianza per funzioni, infine, oltre ad avere un interesse specifico nel trovare le soluzioni invarianti di una certa equazione (cioè le soluzioni che vengono portate in se stesse da un gruppo di trasformazioni) consente di ricavare i principali risultati di invarianza per curve e superfici.

Definizione 2.13. *Sia $\mathbf{X}$ una famiglia di trasformazioni su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ad un parametro in $S \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f \in C(U)$. Diremo che f è invariante rispetto a $\mathbf{X}$ se:*

$$f(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) = f(x), \tag{2.15}$$

per ogni $x \in U$ e ogni $\varepsilon \in S$.

Teorema 2.14. *Sia $\mathbf{X}$ un gruppo di trasformazioni di Lie su U ad un parametro ε in S e sia X il suo generatore infinitesimale; supponiamo infine che $\mathbf{X}$ verifichi* (2.12)*. La funzione $f \in C^1(U)$ è invariante rispetto a $\mathbf{X}$ se e solo se:*

$$Xf(x) = 0, \qquad \text{per ogni } x \in U.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che vale (2.12) e che $\mathbf{X}(x,0)=x$. La seguente condizione

$$\frac{d}{d\varepsilon}\{f(\Psi_\varepsilon^X(x))\}=0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon\in S, x\in U \tag{2.16}$$

è equivalente a (2.15), essendo la funzione $f(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) \overset{(2.12)}{=} f(\Psi_\varepsilon^X(x))$, fissato $x\in U$ qualsiasi, costante in ε. D'altra parte, fissati $\varepsilon\in S, x\in U$, per il Teorema 1.14 si ha

$$\frac{d}{d\varepsilon}\{f(\Psi_\varepsilon^X(x))\}=(Xf)(\mathbf{X}(x,\varepsilon)).$$

Ne segue che (2.16) è equivalente a

$$(Xf)(\mathbf{X}(x,\varepsilon))=0 \qquad \text{per ogni } x\in U, \varepsilon\in S.$$

Se vale quest'ultima, preso in particolare $\varepsilon=0$, segue

$$(Xf)(x)=0 \qquad \text{per ogni } x\in U.$$

Abbiamo così provato che (2.15) (ossia (2.16)) implica $Xf\equiv 0$ su U. Viceversa, se $Xf\equiv 0$ su U, segue banalmente che

$$(Xf)(\mathbf{X}(x,\varepsilon))=0 \qquad \text{per ogni } x\in U, \varepsilon\in S.$$

Come abbiamo già detto, visto che vale (2.12), questo equivale a

$$0=(Xf)(\mathbf{X}(x,\varepsilon))=(Xf)(\Psi_\varepsilon^X(x)) \overset{(1.10)}{=} \frac{d}{d\varepsilon}\{f(\Psi_\varepsilon^X(x))\}.$$

Da qui segue che $\varepsilon\mapsto f(\Psi_\varepsilon^X(x))$ è costante e quindi in particolare

$$f(x)=f(\Psi_0^X(x))=f(\Psi_\varepsilon^X(x)),$$

che (sempre da (2.12)) è equivalente a (2.15). □

Definizione 2.15. *Sia* $\mathbf{X}$ *un gruppo di trasformazioni di Lie su* U *ad un parametro* ε *in* S. *Allora valgono i fatti seguenti:*

1. *Dato* $x\in U$, *diremo che* x *è invariante rispetto a* $\mathbf{X}$ *se*

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon)=x, \qquad \textit{per ogni } \varepsilon\in S. \tag{2.17}$$

2. *Sia* $M\subseteq U$ *una varietà di dimensione* $n-1$ *e di classe* C^k. *Diremo che* M *è invariante rispetto a* $\mathbf{X}$ *se*

$$\mathbf{X}(x,\varepsilon)\in M, \qquad \textit{per ogni } \varepsilon\in S \textit{ ed ogni } x\in M. \tag{2.18}$$

Osservazione 2.16. Supponiamo che M sia definita globalmente come luogo di zeri della funzione $F\in C(U,\mathbb{R})$, ossia $M=\{x\in U : F(x)=0\}$. Allora M è invariante rispetto a $\mathbf{X}$ se, per ogni $x\in M$ e ogni $\varepsilon\in S$, vale

$$F(\mathbf{X}(x,\varepsilon))=0.$$

Dunque in questo caso la condizione (2.18) è equivalente a

$$F(\mathbf{X}(x,\varepsilon))=0, \tag{2.19}$$

per ogni $\varepsilon\in S$ e per ogni $x\in U$ tale che $F(x)=0$.

Teorema 2.17. *Sia* $\mathbf{X}$ *un gruppo di trasformazioni di Lie su* U *ad un parametro* ε *in* S *che verifichi* (2.12) *e sia* X *il suo generatore infinitesimale. Allora*

1. *il punto* $x \in U$ *è invariante rispetto a* $\mathbf{X}$ *se e solo se*
$$X(x) = 0; \tag{2.20}$$
2. *se* $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ *e* $M \subseteq U$ *è una varietà di dimensione* $n-1$ *di classe* C^1 *definita globalmente come luogo degli zeri della funzione* F*; se essa è invariante rispetto a* $\mathbf{X}$ *allora*
$$(XF)(x) = 0, \tag{2.21}$$
per ogni $x \in U$ *tale che* $F(x) = 0$*, ossia* $XF \equiv 0$ *su* M*.*

Dimostrazione. (1) Sia $x \in U$ invariante per $\mathbf{X}$. Visto che vale (2.12), si ha che (2.17) equivale a $\Psi_\varepsilon^X(x) = x$ per ogni $\varepsilon \in S$. Quest'ultima equivale a $I(\Psi_\varepsilon^X(x)) = x$ per ogni $\varepsilon \in S$. Derivando rispetto a ε e poi prendendo $\varepsilon = 0$ viene $XI(x) = 0$ che è equivalente a $X(x) = 0$. Viceversa, se $x \in U$ è tale che $X(x) = 0$ allora la soluzione di
$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$
è chiaramente $\gamma(t) \equiv x$. D'altra parte tale soluzione è $t \mapsto \Psi_t^X(x)$ e quindi $\Psi_t^X(x) = x$ per ogni t, ossia x è invariante per $\mathbf{X}$.
(2) Si ragiona come nel Teorema 2.14. □

2.4 Coordinate canoniche

In questa sezione studieremo il comportamento di un gruppo di trasformazioni rispetto ad una riparametrizzazione del primo argomento, ovvero rispetto alla composizione con un diffeomorfismo su U. Vedremo in particolare che esiste sempre un diffeomorfismo che consente di scrivere il gruppo di trasformazioni come un gruppo di traslazioni lungo una sola direzione.

Nel seguito $\mathbf{X}$ sarà un gruppo di trasformazioni di Lie su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ad un parametro in $S \subseteq \mathbb{R}$ e tale che verifichi la proprietà (2.12).

Teorema 2.18. *Siano* $x_0 \in U$*, un intorno di* x_0 *e* $\Theta : U \to \Theta(U)$ *un diffeomorfismo di classe* C^∞*. Poniamo* $U' = \Theta(U)$ *e definiamo poi il gruppo* $\mathbf{X}'$ *di trasformazioni su* U' *nel modo seguente:*
$$\mathbf{X}'(y, \varepsilon) := \Theta\left(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y), \varepsilon)\right), \quad y \in U',\ \varepsilon \in S. \tag{2.22}$$
Sia infine Y *il suo generatore infinitesimale. Vale allora, per ogni* $y \in U'$*:*
$$Y(y) = (\eta_1(y), \dots, \eta_N(y)) = (X\Theta)(\Theta^{-1}(y)). \tag{2.23}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $y \in U'$
$$\begin{aligned}(X\Theta)(\Theta^{-1}(y)) &= (X\Theta)(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y), 0)) \\ &\overset{(2.12)}{=} (X\Theta)(\Psi_0^X(\Theta^{-1}(y))) \\ &\overset{(1.14)}{=} \frac{d}{d\varepsilon}\left\{\Theta(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y), \varepsilon))\right\}\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y)), 0) \cdot X(\Theta^{-1}(y)) \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\Theta^{-1}(y)) \cdot X(\Theta^{-1}(y)).\end{aligned}$$

Sia e_n l'n-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$\begin{aligned} h :& U' \times S \to U \times S \\ & (y, \varepsilon) \mapsto (\Theta^{-1}(y), \varepsilon). \end{aligned}$$

Calcolando ora

$$\begin{aligned} Y(y) &= \left.\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (y) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \Theta(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y), \varepsilon)) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \mathcal{J}_{\mathbf{X}'}(y, 0) \cdot e_n \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\mathbf{X}(\Theta^{-1}(y), 0)) \cdot \mathcal{J}_{\mathbf{X}}(\Theta^{-1}(y), 0)) \cdot \mathcal{J}_h(y, 0) \cdot e_n \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\Theta^{-1}(y)) \cdot \mathcal{J}_{\mathbf{X}}(\Theta^{-1}(y), 0)) \cdot \mathcal{J}_h(y, 0) \cdot e_n \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\Theta^{-1}(y)) \cdot \mathcal{J}_{\mathbf{X}}(\Theta^{-1}(y), 0)) \cdot e_n \\ &= \mathcal{J}_\Theta(\Theta^{-1}(y)) \cdot X(\Theta^{-1}(y)), \end{aligned}$$

si ritrova la (2.23). Questo conclude la prova. □

Definizione 2.19. *Sia $x \in U$. Diremo che il gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}$ è espresso nella **forma canonica** $\mathbf{X}'$ intorno a x se esistono un intorno $V \subseteq U$ di x e un diffeomorfismo $\Theta \in C^\infty(V)$ tale che la trasformazione $\mathbf{X}'$ definita in* (2.22) *assuma la forma:*

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_i(y, \varepsilon) = y_i, & i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \mathbf{X}'_n(y, \varepsilon) = y_n + \varepsilon, \end{cases} \tag{2.24}$$

*per ogni $\varepsilon \in J$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V'$. In tal caso chiameremo **coordinate canoniche** di $\mathbf{X}$ in x le componenti $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ del diffeomorfismo Θ.*

Osservazione 2.20. Sia $\mathbf{X}$ espresso nella forma canonica $\mathbf{X}'$ mediante il diffeomorfismo Θ. Le componenti del generatore infinitesimale $Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ di $\mathbf{X}'$ saranno allora:

$$\begin{aligned} &\eta_i = 0, \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \\ &\eta_n = 1. \end{aligned}$$

Vogliamo ora dimostrare che è sempre possibile esprimere un gruppo di trasformazioni in forma canonica. Per poter giungere a questo risultato, sono necessari alcuni preliminari sulle equazioni differenziali alle derivate parziali quasi-lineari. Ricordiamo che

$$(Xf)(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

è il generatore infinitesimale di $\mathbf{X}$. Siano poi $V \subseteq U$ un aperto e $c \in \mathbb{R}$; consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} Xu = c \quad \text{su } V \\ u \in C^\infty(V). \end{cases} \tag{2.25}$$

Un problema di questo tipo è un caso particolare di equazione differenziale alle derivate parziali quasi-lineare e del primo ordine. Il seguente lemma caratterizza le soluzioni di (2.25).

Lemma 2.21. *Sia $u \in C^\infty(V)$. Allora u risolve (2.25) se e solo se*

$$u(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) = c\varepsilon + u(x),$$

per ogni $x \in U$ e per ogni $\varepsilon \in S$ tali che $\mathbf{X}(x,\varepsilon) \in V$.

Dimostrazione. Dimostrare che una funzione $u \in C^\infty(V)$ risolve (2.25), ossia che $(Xu)(x) = c$ per ogni $x \in V$, è equivalente a dimostrare che $(Xu)(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) = c$ per ogni $x \in U$ e per ogni $\varepsilon \in S$ tali che $\mathbf{X}(x,\varepsilon) \in V$. Siano allora $u \in C^\infty(V)$ e $x \in U$ e $\varepsilon \in S$ tali che $\mathbf{X}(x,\varepsilon) \in V$. Allora, per il Teorema 1.14,

$$(Xu)(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) = c$$

è equivalente a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\{u(\mathbf{X}(x,\varepsilon))\} = c.$$

Ma allora

$$u(\mathbf{X}(x,\varepsilon)) = c\varepsilon + d(x).$$

Ricordando che $\mathbf{X}(x,0) = x$ si ha

$$d(x) = u(x),$$

il che conclude la prova. □

Nel seguito vedremo che saranno necessarie alcune ipotesi su ∂V in quanto eventuali soluzioni di (2.25) dipenderanno, come suggerisce l'intuizione, da una condizione al bordo. Introduciamo dunque la seguente:

Definizione 2.22. *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Diremo che V ha frontiera di classe C^k se, per ogni $x_0 \in \partial V$, esistono $r > 0$ e $\Lambda \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$ tali che, a meno di permutazioni e cambiamenti di segno delle variabili*

$$V \cap B_r(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(x_0) : x_n > \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

In tal caso scriveremo $\partial V \in C^k$. Per convenzione scriveremo $\partial V \in C^\infty$ se $\partial V \in C^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 2.23. Supponiamo $\partial V \in C^\infty$ e fissiamo $x_0 \in \partial V$. Siano r e Λ come nella Definizione 2.22; definiamo su $\Omega = V \cap B_r(x_0)$ la funzione $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= x_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ \phi_n(x) &= x_n - \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Definiamo poi su $\Omega' = \phi(\Omega)$ la funzione $\psi : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con

$$\begin{aligned} \psi_i(y) &= y_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ \psi_n(y) &= y_n + \Lambda(y_1, \dots, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Abbiamo allora $\psi = \phi^{-1}$ e $\mathcal{J}_\phi = \mathcal{J}_\psi = I$. Infine esiste $r' > 0$ tale che

$$\Omega' = \{x = (y_1, \dots, y_n) \in B_{r'}(y_0) : y_n > 0\},$$

dove $y_0 = \phi(x_0)$. In altri termini Ω' ha come bordo una sezione dell'iperpiano $y_n = 0$.

Osservazione 2.24. Sia $u \in C^\infty(V)$ una soluzione di (2.25) e supponiamo $\partial V \in C^\infty$. Consideriamo il diffeomorfismo ϕ definito nell'Osservazione 2.23 e poniamo infine $v = u \circ \psi$; avremo allora $u = v \circ \phi$, dunque per ogni $x \in \Omega$, posto $y = \phi(x)$

$$\begin{aligned} c = Xu(x) &= X(x) \cdot \nabla_x u(x) \\ &= X(x) \cdot \nabla_x (v \circ \phi)(x) \\ &= X(x) \cdot (\nabla_x v(\phi(x)) \cdot \mathcal{J}_\phi(x)) \\ &= X(x) \cdot \nabla_x v(\phi(x)) \\ &= X(\psi(y)) \cdot \nabla_x v(y) \\ &= X(\psi(y)) \cdot \nabla_y v(y). \end{aligned}$$

Dunque, posto $X(\psi(y)) = (\eta_1(y), \ldots, \eta_n(y))$ e posto

$$(Yu)(y) = \sum_{i=1}^n \eta_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i},$$

il problema (2.25) è equivalente al problema

$$\begin{cases} Yu = c & \text{su } V \\ u \in C^\infty(V) \end{cases} \tag{2.26}$$

su Ω'. Sia poi $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ e poniamo $g = f \circ \psi$. Allora

$$u \equiv f \quad \text{su } \Omega \qquad \text{se e solo se} \qquad v \equiv g \quad \text{su } \Omega'.$$

Teorema 2.25. *Siano $\partial U \in C^\infty$ e $x_0 \in U$ tale che $X(x_0) \neq 0$. Allora è possibile trovare, in un intorno V di x_0, un vettore di coordinate canoniche $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ per $\mathbf{X}$.*

Osservazione 2.26. Per ogni vettore $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}'$ della forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_i(x, \varepsilon) &= x_i \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \mathbf{X}'_n(x, \varepsilon) &= x_n + \varepsilon, \end{aligned}$$

è possibile trovare un diffeomorfismo Φ tale che il gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}''$ definito da (2.22) sia della forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}''_i(x, \varepsilon) &= x_i + a_i\varepsilon \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \mathbf{X}''_n(x, \varepsilon) &= x_n + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tale diffeomorfismo Φ è dato da

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_1 x_n, \ldots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n).$$

Per il Teorema 2.25, poi, per un qualunque gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}$ fissato, possiamo trovare un diffeomorfismo Θ tale che il gruppo definito in (2.22) sia $\mathbf{X}'$. In tal modo il gruppo $\mathbf{X}''$ coincide con il gruppo ottenuto da $\mathbf{X}$ mediante il diffeomorfismo $\Theta \circ \Phi$. In particolare possiamo generalizzare il Teorema 2.25 nel modo seguente:

Teorema 2.27. *Sia $\partial U \in C^\infty$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in U$ tale che $X(x) \neq 0$. Allora è possibile trovare, in un intorno V di x_0, un diffeomorfismo $\Theta \in C^\infty$ su V tale che il gruppo di trasformazioni $\mathbf{X}'$ definito da* (2.22) *abbia la funzione costante a come generatore infinitesimale.*

2.5 Gruppi locali di trasformazioni ad un parametro

In questa breve sezione osserveremo che è possibile ottenere le proprietà e i risultati visti finora per i gruppi di trasformazioni di Lie ad un parametro in modo del tutto indipendente dall'operazione definita sul gruppo.

Definizione 2.28. *Sia* $\mathbf{X}$ *una famiglia di trasformazioni sull'aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ad un parametro nell'intervallo aperto* $S \subseteq \mathbb{R}$*. Diremo che* $\mathbf{X}$ *è localmente un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro se:*

1. $0 \in S$;
2. *per ogni* $x, y \in U$ *e* $\varepsilon \in S$ *tali che* $\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \mathbf{X}(y,\varepsilon)$ *allora si ha che* $x = y$;
3. *la funzione* $\mathbf{X}(\cdot,\varepsilon)$ *è uguale alla funzione identità su* U *se e soltanto se* $\varepsilon = 0$*;*
4. *la funzione* $\mathbf{X}$ *è di classe* C^∞ *su* $U \times S$*;*
5. *per ogni* $x \in U$*, la funzione* $\mathbf{X}(x,\cdot)$ *è analitica su* S*;*
6. *per ogni* $\varepsilon, \delta \in S$ *tali che* $\varepsilon + \delta \in S$ *e per ogni* $x, y \in U$ *si ha*
$$\mathbf{X}(\mathbf{X}(x,\delta)\varepsilon) = \mathbf{X}(x,\varepsilon+\delta). \tag{2.27}$$

Il Teorema 2.9 garantisce che la Definizione 2.28 è consistente con la Definizione 2.4, in quanto mostra che ogni gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro è, a meno di una riparametrizzazione di ε, localmente un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro. La Definizione 2.11 è ben posta anche nel caso più generale in cui $\mathbf{X}$ sia localmente un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro. Avrà allora perfettamente senso utilizzare la nozione di generatore infinitesimale per $\mathbf{X}$.

Teorema 2.29. *Sia* $\mathbf{X}$ *localmente un gruppo di trasformazioni di Lie su* U *ad un parametro in* S *e sia* X *il suo generatore infinitesimale. Allora* $\mathbf{X}$ *verifica la proprietà* (2.12)*.*

Dimostrazione. Siano $x \in U$ e $\varepsilon, h \in S$ tali che $\varepsilon + h \in S$. Allora
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(x,\varepsilon) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{X}(x,\varepsilon+h) - \mathbf{X}(x,\varepsilon)}{h} \\
&\overset{(2.27)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}(x,\varepsilon),h) - \mathbf{X}(\mathbf{X}(x,\varepsilon),0)}{h} \\
&= X(\mathbf{X}(x,\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque provato che $\mathbf{X}$ soddisfa la (2.10), con $\Gamma(\varepsilon) = 1$, per ogni $\varepsilon \in S$ e quindi, con un ragionamento del tutto analogo alla dimostrazione del Teorema 2.9, $\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \Psi^X_{\tau(\varepsilon)}(x)$ per ogni $x \in U, \varepsilon \in S$, con
$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(s)ds = \int_0^\varepsilon ds = \varepsilon$$
ossia $\mathbf{X}(x,\varepsilon) = \Psi^X_\varepsilon(x)$ per ogni $x \in U, \varepsilon \in S$, come volevasi dimostrare. $\square$

Come conseguenza del teorema precedente, tutte le definizione e i risultati visti in questo capitolo si estendono al caso in cui $\mathbf{X}$ sia localmente un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro.

Capitolo 3

Esponenziazione delle Algebre di Campi Vettoriali in Gruppi di Lie

Introduciamo alcuni concetti preliminari. I risultati che riportiamo in questa sezione non saranno dimostrati.

Definizione 3.1 (**Algebra**). *Sia A uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $*$ un'operazione binaria su A, ossia, una funzione del tipo*

$$A \times A \to A, \qquad (a, a') \mapsto a * a'.$$

Diciamo che $*$ munisce A della struttura di

1. ***algebra**, se $*$ è $\mathbb{K}$-bilineare;*

2. ***algebra associativa**, se $(A, *)$ è un'algebra e $*$ è associativa:*

$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \textit{per ogni } a, b, c \in A;$$

3. ***algebra associativa unitaria**, se $(A, *)$ è un'algebra associativa ed esiste $e \in A$ tale che:*

$$a * e = a = e * a \qquad \textit{per ogni } a \in A;$$

4. ***algebra di Lie**, se $(A, *)$ è un'algebra, $*$ è antisimmetrica e vale la seguente identità, detta **identità di Jacobi**:*

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0 \qquad \textit{per ogni } a, b, c \in A.$$

Data un'algebra $(A, *)$, diremo che $B \subseteq A$ è una **subalgebra** di A se B è un sottospazio vettoriale di A chiuso rispetto all'operazione $*$, ossia $(B, *|_{B \times B})$ costituisce a sua volta un'algebra.

Come è di consuetudine nell'ambito delle algebre di Lie, l'operazione $*$ sarà denotata con $(a, a') \mapsto [a, a']$ e sarà chiamata **parentesi di Lie** di A. Di conseguenza l'identità di Jacobi può essere riscritta come segue:

$$[a, [b, c]] = [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \qquad \text{per ogni } a, b, c \in A.$$

Osservazione 3.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \Omega \neq \emptyset$. Siano $X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$, con $X = \sum_j a_j \partial_j$ e $Y = \sum_j b_j \partial_j$. Definiamo

$$[X, Y] := \left(\sum_i a_i \partial_i\right) \circ \left(\sum_j b_j \partial_j\right) - \left(\sum_j b_j \partial_j\right) \circ \left(\sum_i a_i \partial_i\right).$$

Allora $(\mathcal{X}(\Omega), [\cdot, \cdot])$ è un'algebra di Lie.

Definizione 3.3 (**Gruppo di Lie**). *Un gruppo di Lie è un gruppo* $(\mathbb{G}, *)$, *con* $\mathbb{G}$ *varietà di classe* C^∞, *tale che le funzioni*

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni (x, y) \mapsto x * y \in \mathbb{G},$$

$$\mathbb{G} \ni x \mapsto \iota(x) := x^{-1} \in \mathbb{G},$$

sono entrambe di classe C^∞.

Osservazione 3.4. Equivalentemente $(\mathbb{G}, *)$ è un gruppo di Lie se e solo se $(x, y) \mapsto x * y^{-1}$ è di classe C^∞.

Per $x \in \mathbb{G}$ fissato, adotteremo le seguenti notazioni

$$\tau_x, \rho_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \qquad \tau_x(y) := x * y, \qquad \rho_x(y) := y * x,$$

per indicare, rispettivamente, la traslazione a sinistra e la traslazione a destra di x.

Definizione 3.5. *Sia* $(\mathbb{G}, *)$ *un gruppo di Lie. Un campo vettoriale liscio* X *su* $\mathbb{G}$ *è detto invariante a sinistra se*

$$X(f \circ \tau_x) = (Xf) \circ \tau_x, \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{G}, \quad \textit{per ogni } f \in C^\infty(\mathbb{G}).$$

Il sottospazio vettoriale di $\mathcal{X}(\mathbb{G})$ di tutti i c.v. lisci su $\mathbb{G}$ invarianti a sinistra è detto algebra di Lie di $\mathbb{G}$, che denotiamo con $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ o con il simbolo $\mathfrak{g}$. Si può provare che ogni $X \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ è globale usando la Proposizione 1.13.

Definizione 3.6 (**Mappa aggiunta**). *Sia* $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *un'algebra di Lie. Fissato* $x \in \mathfrak{g}$ *definiamo*

$$\mathrm{ad}x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{ad}x(y) := [x, y] \quad (y \in \mathfrak{g}).$$

Diciamo che ad$x$ *è la* ***mappa aggiunta*** *(o più semplicemente l'aggiunto) di* x.

Definizione 3.7 (**Polinomi di Dynkin**). *Sia* $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *un'algebra di Lie. Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *definiamo*

$$Z_n : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (a, b) \longmapsto Z_n(a, b),$$

dove

$$Z_n(a, b) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \neq (0,0) \\ i_1 + j_1 + \dots + i_k + j_k = n}} \frac{(\mathrm{ad}\, a)^{i_1} (\mathrm{ad}\, b)^{j_1} \cdots (\mathrm{ad}\, a)^{i_k} (\mathrm{ad}\, b)^{j_k - 1}(b)}{i_1!\, j_1! \cdots i_k!\, j_k!}. \tag{3.1}$$

Inoltre, per ogni $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *con* $(i, j) \neq (0, 0)$ *definiamo*

$$C_{i,j} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (a, b) \longmapsto C_{i,j}(a, b),$$

dove

$$C_{i,j}(a, b) := \frac{1}{i + j} \sum_{k=1}^{i+j} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \neq (0,0) \\ i_1 + \dots + i_k = i,\ j_1 + \dots + j_k = j}} \frac{(\mathrm{ad}\, a)^{i_1} (\mathrm{ad}\, b)^{j_1} \cdots (\mathrm{ad}\, a)^{i_k} (\mathrm{ad}\, b)^{j_k - 1}(b)}{i_1!\, j_1! \cdots i_k!\, j_k!}. \tag{3.2}$$

Chiaramente, quando $j_k = 0$ *il corrispondente addendo in* (3.1) *e* (3.2) *si intende terminare con* $\cdots (\operatorname{ad} a)^{i_k - 1}(a)$. *Tutte le applicazioni aggiunte sono intese rispetto al bracket di Lie di* $\mathfrak{g}$.

Poniamo inoltre $Z_0(a,b) := 0$ *e* $C_{0,0}(a,b) := 0$ *per ogni* $a, b \in \mathfrak{g}$. *Se questo ha senso (ad esempio, se la somma è convergente per qualche topologia su* $\mathfrak{g}$*), poniamo*

$$a \diamond b := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b). \tag{3.3}$$

Diciamo che la serie in (3.3) *è la* ***serie CBHD omogenea*** *e che* (3.1) *è la* ***rappresentazione di Dynkin*** *di* Z_n. *Chiamiamo gli* Z_n *i* ***polinomi di Dynkin omogenei****; chiamiamo i* $C_{i,j}$ *i* ***polinomi di Dynkin non omogenei****.*

Nel seguente enunciato adotteremo la notazione $\exp(X)(x) := \Psi_0^X(x)$.

Teorema 3.8 (**Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin**)**.** *Sia* V *una sottoalgebra di Lie di* $\mathcal{X}(\Omega)$ *di dimensione finita, con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto, e sia* $\|\cdot\|$ *una norma fissata su* V. *Allora valgono i seguenti fatti.*

1. *Esiste un numero reale positivo* ε*, dipendente da* $\|\cdot\|$*, tale che la serie CBHD omogenea*

   $$Z(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(X,Y)$$

   converge per ogni $X, Y \in V$ *con* $\|X\|, \|Y\| \leq \varepsilon$. *Inoltre, per ogni* $x \in \Omega$ *esiste* $\varepsilon(x) > 0$ *(indipendente da* X, Y*) tale che l'identità*

   $$\exp(Y)(\exp(X)(x)) = \exp(Z(X,Y))(x) \tag{3.4}$$

   è verificata per ogni $X, Y \in V$*, con* $\|X\|, \|Y\| \leq \varepsilon(x)$. *Se* K *è un sottoinsieme compatto di* Ω*, lo stesso* $\varepsilon(K) > 0$ *può essere usato in luogo di* $\varepsilon(x)$*, uniformemente per ogni* $x \in K$.

2. *Se ogni campo vettoriale in* V *è un campo vettoriale globale, allora* $\varepsilon(x)$ *di cui sopra non dipende da* $x \in \Omega$.

3. *Infine, se la serie CBHD converge (in* V*) per ogni* $X, Y \in V$ *e se ogni campo vettoriale in* V *è un campo vettoriale globale, allora* (3.4) *vale per ogni* $X, Y \in V$ *e per ogni* $x \in \Omega$*, senza alcuna restrizione su* $\|X\|, \|Y\|$.

Lo scopo principale di questo capitolo è fornire una risposta esaustiva alla seguente domanda naturale:

(Q) Data una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali lisci $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ su $\mathbb{R}^N$, è possibile trovare un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ (la cui varietà sottostante è $\mathbb{R}^N$ dotata della sua struttura differenziabile usuale) tale che $\operatorname{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$?

È chiaro che, se non assumiamo alcuna ipotesi su $\mathfrak{g}$, la risposta è negativa: per esempio, se un campo vettoriale in $\mathfrak{g}$ non è globale, allora $\mathfrak{g}$ non può essere l'algebra di Lie di alcun gruppo di Lie, perché i campi vettoriali invarianti a sinistra sono sempre globali. Tenendo conto di ciò che è noto nella teoria dei gruppi di Lie, non è difficile trovare alcune condizioni necessarie affinché (Q) abbia una risposta positiva:

1. ogni $X \in \mathfrak{g}$ deve essere un campo vettoriale globale (si veda la Definizione 1.11);

2. $\mathfrak{g}$ deve soddisfare la condizione di rango di Hörmander:

$$\dim\big(\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in \mathfrak{g}\}\big) = N, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N;$$

3. la dimensione di $\mathfrak{g}$, come sottospazio vettoriale di $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$, deve essere uguale a N.

Il risultato principale di questo capitolo mostra che le condizioni sopra sono anche un insieme di condizioni necessarie e sufficienti su $\mathfrak{g}$ affinché (Q) abbia una risposta positiva.

I mezzi che useremo per dimostrare questo fatto sono i seguenti:

- il Teorema di Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin (per la composizione dei flussi di campi vettoriali) per dotare $\mathbb{R}^N$ di una struttura locale di gruppo di Lie;
- l'uso di un argomento di prolungamento per le equazioni differenziali ordinarie al fine di globalizzare questo gruppo di Lie locale. A tal fine, l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy svolgerà un ruolo fondamentale come potente strumento di "globalizzazione".

3.1 Le ipotesi per l'esponenziazione

L'obiettivo principale di questa sezione è introdurre, per una classe selezionata di algebre di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$, l'applicazione esponenziale e l'applicazione logaritmica. Tali applicazioni saranno fondamentali per rispondere alla domanda (Q) posta sopra.

Convenzione. D'ora in avanti in questo capitolo tratteremo solo campi vettoriali lisci su $\mathbb{R}^N$; nel seguito si intende sottointeso che $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 3.9. *Diremo che $\mathfrak{g}$ soddisfa l'ipotesi*

(G) *se ogni $X \in \mathfrak{g}$ è un campo vettoriale globale;*

(H) *se vale la condizione di rango di Hörmander:*

$$\dim\big(\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in \mathfrak{g}\}\big) = N \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N; \tag{3.5}$$

(ND) *se $\mathfrak{g}$ ha dimensione N, come sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}^N)$.*

Qui 'G' sta per "globale"; 'H' per "Hörmander"; 'ND' per "N-dimensionale".

Grazie alla Definizione 3.9, possiamo enunciare il teorema principale di questo capitolo, che fornisce una risposta completa alla domanda (Q).

Teorema 3.10. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ un'algebra di Lie che soddisfa le condizioni (G), (H) e (ND) della Definizione 3.9.*

Allora esiste un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ (dove $\mathbb{R}^N$ è dotato della sua struttura di varietà differenziabile usuale), con elemento neutro 0, tale che

$$\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}.$$

Questa uguaglianza non è intesa come un isomorfismo, ma come l'uguaglianza di due insiemi di operatori differenziali lineari. Tali condizioni (G),(H) e (ND) sono anche necessarie affinché ciò avvenga.

Il primo ingrediente per dimostrare il Teorema 3.10 è la definizione di mappa esponenziale di un'algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ che soddisfa la condizione (G).

Definizione 3.11. *(**Mappa esponenziale di** $\mathfrak{g}$). Sia $\mathfrak{g}$ tale che soddisfi la condizione (G). Poniamo*

$$\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^N, \qquad \mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}(X) := \gamma(1; X, 0),$$

*dove $t \mapsto \gamma(t, X, 0)$ denota la curva integrale di X che parte da 0. Con un abuso di linguaggio preso dalla teoria dei gruppi di Lie, a volte chiameremo questa mappa la **mappa esponenziale** di $\mathfrak{g}$. Indicheremo anche $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}(X)$ con $\exp(X)(0)$.*

L'assunzione (G) su $\mathfrak{g}$ è essenziale per la Definizione 3.11; infatti, se $X \in \mathfrak{g}$ non è completo, la curva integrale di X che parte da 0 potrebbe non essere definita per $t = 1$.

Il nostro prossimo scopo è investigare la regolarità della mappa $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$; a questo fine, abbiamo bisogno di un'ulteriore struttura su $\mathfrak{g}$ che ci permetta di parlare di insiemi aperti e funzioni lisce. Quindi assumiamo che $\mathfrak{g}$ soddisfi anche la condizione (ND): in questo caso, lo spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ può essere dotato di una struttura topologico-differenziabile identificandolo con $\mathbb{R}^N$ tramite la scelta di una base.

Lemma 3.12. *Sia $\mathfrak{g}$ tale che soddisfi le condizioni (ND) e (H). Allora esiste una base di $\mathfrak{g}$ come sottospazio di $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$, diciamo $\{J_1, \dots, J_N\}$, tale che*

$$\det(J_1(x) \cdots J_N(x)) \neq 0 \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.6}$$

$$(J_1(0) \cdots J_N(0)) = I_N. \tag{3.7}$$

dove I_N è la matrice identità $N \times N$.

D'ora in avanti, quando ci riferiamo a coordinate su $\mathfrak{g}$, intendiamo sempre rispetto alla base $\{J_1, \dots, J_N\}$ di cui sopra; lo stesso vale se menzioniamo una struttura differenziabile su $\mathfrak{g}$ (questa volta la scelta della base è irrilevante).

Dimostrazione. Poiché $\mathfrak{g}$ soddisfa la condizione (ND), esistono $Z_1, \dots, Z_N \in \mathfrak{g}$ tali che $\mathcal{Z} := \{Z_1, \dots, Z_N\}$ sia una base di $\mathfrak{g}$. Affermiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, i vettori $Z_1(x), \dots, Z_N(x)$ siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$.

Infatti, poiché $\mathfrak{g}$ soddisfa anche la condizione (H), esistono $W_1, \dots, W_N \in \mathfrak{g}$ (eventualmente dipendenti da x) tali che i vettori $W_1(x), \dots, W_N(x)$ siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$; d'altra parte, poiché $\mathcal{Z}$ è una base di $\mathfrak{g}$, abbiamo

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{W_1(x), \dots, W_N(x)\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{Z_1(x), \dots, Z_N(x)\},$$

e ciò mostra che $Z_1(x), \dots, Z_N(x)$ sono linearmente indipendenti, come volevamo.

Un semplice cambiamento di coordinate porta $\mathcal{Z}$ in una base $\{J_1, \dots, J_N\}$ che soddisfa (3.6) e (3.7). $\square$

Osservazione 3.13. Sia $\mathfrak{g}$ tale che soddisfi (H) e (ND), e supponiamo che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ sia un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, con elemento neutro 0, tale che $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$. Allora esiste un'unica base di $\mathfrak{g}$ che soddisfi le ipotesi del Lemma 3.12, poiché un campo vettoriale invariante a sinistra X è completamente determinato dal suo valore $X(0)$.

Proposizione 3.14. *Sia* $\mathfrak{g}$ *tale che soddisfi le condizioni (G), (H) e (ND). Allora* $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$ *è una mappa liscia da* $\mathfrak{g}$ *in* $\mathbb{R}^N$ *con differenziale invertibile in* $0 \in \mathfrak{g}$.

Di conseguenza, esiste un intorno aperto e connesso $\mathcal{U}$ *di* 0 *in* $\mathfrak{g}$ *tale che* $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}\big|_{\mathcal{U}}$ *è un diffeomorfismo sulla sua immagine.*

Prima di dimostrare la Proposizione 3.14 premettiamo il seguente teorema (di dipendenza continua per E. D. O.) di cui non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 3.15. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ *e* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *due insiemi aperti, e sia* $f \in C^k(\Omega \times V, \mathbb{R}^N)$*(con* $k \geq 1$ *o* $k = \infty$*). Per ogni* $((t_0, x_0), \xi_0) \in \Omega \times V$*, sia* $\gamma(\cdot; t_0, x_0, \xi_0) : \mathcal{D}(t_0, x_0, \xi_0) \to \mathbb{R}^N$ *l'unica soluzione massimale di*

$$\dot{x} = f(t, x; \xi_0), \quad x(t_0) = x_0.$$

Allora la funzione

$$(t, t_0, x_0, \xi_0) \mapsto \gamma(t, t_0, x_0, \xi_0)$$

è di classe C^k *sull'insieme aperto*

$$\mathcal{O} = \{(t, (t_0, x_0), \xi_0) \in \mathbb{R} \times \Omega \times V : t \in \mathcal{D}(t_0, x_0, \xi_0)\}.$$

Dimostrazione della Proposizione 3.14. La regolarità di $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$ segue dal Teorema 3.15. Ora mostriamo che il differenziale di $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$ in $X = 0$ è invertibile.

A tal fine, consideriamo la rappresentazione in coordinate di $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$ data da

$$E : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad E(\xi) := \mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}\Big(\sum_{k=1}^{N} \xi_k J_k\Big),$$

e calcoliamo la sua matrice Jacobiana in $\xi = 0$. Dallo sviluppo di Maclaurin in (1.13), è facile mostrare che

$$E(\xi) = \xi + O(\|\xi\|^2), \quad \text{per } \xi \to 0,$$

da cui la matrice Jacobiana di E in 0 è I_N, il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 3.16. Nella dimostrazione della Proposizione 3.14 abbiamo provato il seguente fatto: sotto le condizioni (G), (H), (ND), se $\{J_1, \dots, J_N\}$ è una base di $\mathfrak{g}$ come nel Lemma 3.12, e se

$$\pi(\xi) := \sum_{k=1}^{N} \xi_k J_k, \qquad E := \mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}} \circ \pi,$$

allora E è una mappa liscia e $\mathcal{J}_E(0) = I_N$, dove I_N è la matrice identità $N \times N$.

Definizione 3.17. *(**Mappa logaritmica su** $\mathfrak{g}$). Sia* $\mathfrak{g}$ *tale che soddisfi (G), (H) e (ND), e sia* $\mathcal{U}$ *come nella Proposizione 3.14. Poniamo* $V := \mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U})$ *e denotiamo con* $\mathrm{Log}_{\mathfrak{g}} : V \to \mathcal{U}$ *l'inversa di* $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{U}}$. *Chiamiamo questa mappa la* ***mappa logaritmica*** *di* $\mathfrak{g}$ *(rispetto a* $\mathcal{U}$*).*

3.2 Costruzione del gruppo di Lie locale

In questa sezione mostreremo che, se $\mathfrak{g}$ soddisfa (G), (H) e (ND), è possibile dotare $\mathbb{R}^N$ di una struttura locale di gruppo di Lie in modo che i campi vettoriali in $\mathfrak{g}$ siano (localmente) invarianti a sinistra.

Per iniziare, per mantenere l'esposizione chiara, fissiamo una volta per tutte le principali notazioni usate nel seguito:

- denotiamo con $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ un'algebra di Lie fissata che soddisfa le condizioni (G), (H) e (ND) nella Definizione 3.9;
- denotiamo con Exp la mappa esponenziale $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$ di $\mathfrak{g}$ e con $\mathrm{Log} : V \to \mathcal{U}$ la sua inversa locale (con $V := \mathrm{Exp}(\mathcal{U})$) come in Definizione 3.17;
- fissiamo una base $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$ di $\mathfrak{g}$ come nel Lemma 3.12 e introduciamo la mappa

$$\pi : \mathbb{R}^N \to \mathfrak{g}, \qquad \pi(\xi) := \sum_{k=1}^{N} \xi_k J_k.$$

3.2.1 La moltiplicazione del gruppo di Lie locale

Nelle notazioni di cui sopra, diamo la seguente definizione.

Definizione 3.18. *(**La moltiplicazione del gruppo di Lie locale**). Poniamo*

$$m : \mathbb{R}^N \times V \to \mathbb{R}^N, \qquad m(x, y) := \exp(\mathrm{Log}(y))(x). \tag{3.8}$$

Come di consuetudine, se $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ e se $x \in \mathbb{R}^N$, denotiamo con $t \mapsto \exp(tX)(x)$ la curva integrale massimale di X che parte da x.

È possibile dimostrare che m è liscia su $\mathbb{R}^N \times V$.

Vogliamo mostrare che m in (3.8) è localmente associativa vicino a 0, e che 0 è l'elemento neutro per m. A tal fine, ricordiamo il seguente risultato notevole, che deriva dal Teorema 3.8.

Teorema 3.19. *Sia $\mathfrak{h} \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ un'algebra di Lie che soddisfa le condizioni (G) e (ND), e sia $\|\cdot\|$ una norma fissata su $\mathfrak{h}$. Esiste un numero reale positivo ε, dipendente da $\|\cdot\|$, tale che la serie CBHD (Definizione 3.7)*

$$Z(X, Y) := \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X, Y)$$

è totalmente convergente su $\mathfrak{B}(0, \varepsilon) \times \mathfrak{B}(0, \varepsilon)$, dove $\mathfrak{B}(0, \varepsilon) := \{V \in \mathfrak{h} : \|V\| < \varepsilon\}$.

Inoltre, per ogni $X, Y \in \mathfrak{B}(0, \varepsilon)$, abbiamo la seguente identità di equazioni differenziali ordinarie:

$$\exp(Y)(\exp(X)(x)) = \exp(Z(X, Y))(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.9}$$

Come di consuetudine, usiamo anche la notazione $X \diamond Y := Z(X, Y)$.

Per applicare l'identità notevole (3.9) al nostro contesto, dobbiamo fissare una norma su $\mathfrak{g}$; per semplicità, consideriamo la norma euclidea ottenuta identificando $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$ tramite la base $\mathcal{J}$, cioè

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \xi_k J_k \Big\|_{\mathcal{J}} = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2}.$$

Per le palle rispetto a $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ usiamo la lettera $\mathfrak{B}$, mentre B è usato per le palle euclidee in $\mathbb{R}^N$. Grazie al Teorema 3.19, siamo in grado di derivare una potente rappresentazione per la mappa m nel prossimo teorema.

Teorema 3.20. *Sia $\varepsilon > 0$ come nel Teorema 3.19 e supponiamo (eventualmente riducendo ε) che $\mathfrak{B}(0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Allora è possibile trovare un numero reale $\rho_0 > 0$ tale che*

$$\mathfrak{Z} : B(0, \rho_0) \times B(0, \rho_0) \to \mathfrak{B}(0, \varepsilon), \qquad \mathfrak{Z}(x, y) := \mathrm{Log}(x) \diamond \mathrm{Log}(y)$$

sia ben definita e tale che, per ogni $x, y \in B(0, \rho_0)$, valga la seguente identità:

$$m(x, y) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(x, y)). \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Sia $Z : \mathfrak{B}(0,\varepsilon) \times \mathfrak{B}(0,\varepsilon) \to \mathfrak{g}$ definita da $Z(X,Y) := X \diamond Y$. Poiché, per il Teorema 3.19 (e per la scelta di ε), la serie CBHD $X \diamond Y$ è totalmente convergente su $\mathfrak{B}(0,\varepsilon) \times \mathfrak{B}(0,\varepsilon)$, Z è ben definita e continua nel suo dominio; di conseguenza, è possibile trovare $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tale che

$$Z(X,Y) \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon), \qquad \text{per ogni } X,Y \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon_1). \tag{3.11}$$

Analogamente, poiché Log è continua su V e $\mathrm{Log}(0) = 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $B(0,\delta) \subseteq V$ e

$$\mathrm{Log}(x) \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon_1), \qquad \text{per ogni } x \in B(0,\delta). \tag{3.12}$$

Poniamo quindi $\rho_0 := \delta$ e mostriamo che soddisfa tutte le proprietà enunciate nel teorema. A tal fine, fissiamo $x, y \in B(0,\rho_0)$.

Per (3.12), abbiamo $\mathrm{Log}(x), \mathrm{Log}(y) \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon_1)$; quindi, poiché $\varepsilon_1 < \varepsilon$, per (3.11) la serie CBHD $\mathrm{Log}(x) \diamond \mathrm{Log}(y)$ è convergente, da cui $\mathfrak{Z}$ è ben definita e $\mathfrak{Z}(x,y)$ appartiene a $\mathfrak{B}(0,\varepsilon)$.

Quanto all'identità (3.10), osserviamo che, poiché $B(0,\rho_0) \subseteq V$, abbiamo

$$\begin{aligned} m(x,y) &\overset{(3.18)}{=} \exp(\mathrm{Log}(y))(x) = \exp(\mathrm{Log}(y))\big(\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(x))\big) \\ &= \exp(\mathrm{Log}(y))(\exp(\mathrm{Log}(x))(0)). \end{aligned}$$

Quindi, per (3.12) e (3.9) concludiamo che

$$m(x,y) = \exp(\mathrm{Log}(x) \diamond \mathrm{Log}(y))(0) = \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(x,y)),$$

che è esattamente ciò che volevamo dimostrare. $\square$

Osservazione 3.21. Sia $\rho_0 > 0$ come nel Teorema 3.20. Se $x \in B(0,\rho_0)$, allora

$$\|\mathrm{Log}(x)\|_{\mathcal{J}} < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Infatti, se $x \in B(0,\rho_0)$, abbiamo $\mathrm{Log}(x) = \mathfrak{Z}(x,0)$; quindi, dal Teorema 3.20 deduciamo che $\mathrm{Log}(x) \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon)$, che è proprio (3.13). In particolare, poiché $\mathfrak{B}(0,\varepsilon)$ è simmetrica rispetto alla moltiplicazione per -1, si ha

$$-\mathrm{Log}(x) \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon), \qquad \text{per ogni } x \in B(0,\rho_0). \tag{3.14}$$

Grazie al Teorema 3.20, possiamo fornire una semplice dimostrazione dell'associatività locale di m.

Teorema 3.22. *Sia $\rho_0 > 0$ come nel Teorema 3.20. Allora $m(a,b) \in V$ per ogni coppia di $a, b \in B(0,\rho_0)$ fissati ed m è associativa vicino all'origine: più precisamente, si ha*

$$m(x, m(y,z)) = m(m(x,y),z), \qquad \textit{per ogni } x,y,z \in \mathbb{R}^N \textit{ con } \|y\|, \|z\| < \rho_0. \tag{3.15}$$

Inoltre, il punto $0 \in \mathbb{R}^N$ fornisce un elemento neutro locale per m, cioè

$$m(x,0) = x, \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.16}$$

$$m(0,y) = y, \quad \textit{per ogni } y \in V. \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Siano $a, b \in B(0,\rho_0)$. Poiché $\mathfrak{Z}$ prende valori in $\mathfrak{B}(0,\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$, abbiamo

$$m(a,b) \overset{(3.10)}{=} \mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(a,b)) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{U}) = V. \tag{3.18}$$

Ora dimostriamo (3.15). A tal fine, sia $x \in \mathbb{R}^N$ e siano $y, z \in B(0, \rho_0)$. Per prima cosa, per (3.18) (e poiché $B(0, \rho_0) \subseteq V$), entrambi i membri di (3.15) sono ben definiti; inoltre, grazie al Teorema 3.20 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(m(y,z)) &\overset{(3.10)}{=} \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\mathfrak{Z}(y,z))) \qquad (\text{poiché } \mathfrak{Z}(y,z) \in \mathcal{U}) \\ &= \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}|_{\mathcal{U}}(\mathfrak{Z}(y,z))) = \mathfrak{Z}(y,z). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Di conseguenza, il membro sinistro di (3.15) può essere riscritto come

$$m(x, m(y,z)) = \exp(\mathrm{Log}(m(y,z)))(x) \overset{(3.19)}{=} \exp(\mathfrak{Z}(y,z))(x). \tag{3.20}$$

Quanto al membro destro osserviamo che, per definizione di m, si ha

$$m(m(x,y),z) = \exp(\mathrm{Log}(z))(m(x,y)) = \exp(\mathrm{Log}(z))(\exp(\mathrm{Log}(y))(x))).$$

Pertanto, poiché $\mathrm{Log}(y), \mathrm{Log}(z) \in \mathfrak{B}(0, \varepsilon)$ (per la scelta di ρ_0, vedi (3.13)), possiamo applicare l'identità (3.9), che dà

$$m(m(x,y),z) = \exp(\mathrm{Log}(y) \diamond \mathrm{Log}(z))(x) = \exp(\mathfrak{Z}(y,z))(x). \tag{3.21}$$

Infine, confrontando (3.20) e (3.21), otteniamo (3.15). Quanto all'identità (3.16), essa è una semplice conseguenza della definizione di m: infatti, se $x \in \mathbb{R}^N$,

$$m(x, 0) \overset{(3.8)}{=} \exp(\mathrm{Log}(0))(x) = \exp(0)(x) = x.$$

D'altra parte, se $y \in V$, per definizione di Exp si ha

$$m(0, y) = \exp(\mathrm{Log}(y))(0) = \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(y)) = y,$$

e questo è precisamente quanto richiesto in (3.17). Questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 3.23. *Definiamo*

$$\iota : V \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad \iota(x) := \mathrm{Exp}(-\mathrm{Log}(x)).$$

Come nel caso di m, la regolarità dei campi vettoriali in $\mathfrak{g}$ implica che $\iota \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N)$. Ora dimostriamo che la mappa ι fornisce un'inversa locale per la moltiplicazione m.

Teorema 3.24. *Sia $\rho_0 > 0$ come nel Teorema 3.20. Allora la mappa ι nella Definizione 3.23 fornisce un'inversa locale per m su $B(0, \rho_0)$, cioè*

$$m(x, \iota(x)) = 0, \qquad \textit{per ogni } x \in B(0, \rho_0), \tag{3.22}$$

$$m(\iota(x), x) = 0, \qquad \textit{per ogni } x \in B(0, \rho_0). \tag{3.23}$$

Dimostrazione. Sia $x \in B(0, \rho_0)$ fissato e sia $X = \mathrm{Log}(x) \in \mathfrak{g}$. Per l'Osservazione. 3.21, abbiamo $-X \in \mathfrak{B}(0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$, da cui

$$\iota(x) = \mathrm{Exp}(-\mathrm{Log}(x)) = \mathrm{Exp}(-X) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{U}) = V;$$

di conseguenza, poiché $\mathfrak{B}(0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$, abbiamo anche

$$\mathrm{Log}(\iota(x)) = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(-X)) = -X = -\mathrm{Log}(x). \tag{3.24}$$

Da queste identità deduciamo che $m(x,\iota(x))$ è ben definito (poiché $\iota(x)$ appartiene a V) e che

$$m(x,\iota(x)) = \exp(\mathrm{Log}(\iota(x)))(x) \overset{(3.24)}{=} \exp(-X)(x) = \exp(-X)(\exp(X)(0)).$$

Di conseguenza, poiché $X, -X \in \mathfrak{B}(0,\varepsilon)$, abbiamo

$$m(x,\iota(x)) \overset{(3.9)}{=} \exp(X \diamond (-X))(0). \tag{3.25}$$

Quanto desiderato in (3.22) segue ora da (3.25), notando che

$$X \diamond (-X) = X + (-X) + \sum_{h=2}^{\infty} Z_h(X,-X) = 0.$$

Quanto all'identità (3.23), osserviamo che, per definizione di ι, si ha

$$m(\iota(x),x) = \exp(\mathrm{Log}(x))(\iota(x)) = \exp(X)(\exp(-X)(0));$$

dunque, ragionando come sopra, concludiamo che

$$m(\iota(x),x) \overset{(3.9)}{=} \exp((-X)\diamond X)(0) = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

3.2.2 L'invarianza sinistra locale di $\mathfrak{g}$

Mettendo insieme i risultati dei Teorema 3.22 e 3.24, vediamo che m definisce effettivamente una struttura di gruppo di Lie locale su $\mathbb{R}^N$; concludiamo questa sezione mostrando che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è strettamente connessa a tale struttura.

Teorema 3.25. ***(Invarianza sinistra locale di*** $\mathfrak{g}$*). Per ogni* $X \in \mathfrak{g}$ *si ha*

$$X(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\,X(y), \qquad \textit{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^N \times B(0,\rho_0), \tag{3.26}$$

dove $\rho_0 > 0$ *è come nel Teorema 3.20.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che l'identità (3.26) vale per $y = 0$, cioè che

$$X(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)\,X(0), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.27}$$

A tal fine, sia $x \in \mathbb{R}^N$ e sia $\eta > 0$ tale che $tX \in \mathcal{U}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \eta$. Per tali valori di t, abbiamo $\mathrm{Exp}(tX) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{U}) = V$, dunque

$$\exp(tX)(x) = \exp(\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(tX)))(x) \overset{(3.8)}{=} m(x,\mathrm{Exp}(tX)). \tag{3.28}$$

Derivando rispetto a t entrambi i membri dell'identità (3.28) e valutando in $t = 0$, otteniamo (poiché $t \mapsto \exp(tX)(x)$ è una curva integrale di X)

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\exp(tX)(x)\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{m(x,\mathrm{Exp}(tX))\} \\ &= \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Exp}(tX) \\ &= \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)\,X(0), \end{aligned}$$

che è esattamente quanto desiderato in (3.27).

Passiamo ora a dimostrare l'identità (3.26). Per farlo, notiamo innanzitutto che, poiché m è associativa vicino all'origine (come garantito dal Teorema 3.22), si ha

$$m(m(x,y),z) = m(x,m(y,z)), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N,\ \|y\|,\|z\| < \rho_0.$$

Dunque, derivando rispetto a z l'identità sopra e valutando in $z=0$, otteniamo (per evitare ambiguità, poniamo $m = m(\alpha,\beta)$)

$$\frac{\partial m}{\partial \beta}(m(x,y),0) = \frac{\partial m}{\partial \beta}(x, m(y,0))\, \frac{\partial m}{\partial \beta}(y,0). \tag{3.29}$$

Da ciò, moltiplicando entrambi i membri di (3.29) per il vettore colonna $X(0)$, otteniamo (ricordando che $m(y,0)=y$)

$$\frac{\partial m}{\partial \beta}(m(x,y),0)\, X(0) = \frac{\partial m}{\partial \beta}(x,y)\, \frac{\partial m}{\partial \beta}(y,0)\, X(0),$$

il che dà (tornando alla notazione $m = m(x,y)$):

$$\begin{aligned} X(m(x,y)) &\overset{(3.27)}{=} \frac{\partial m}{\partial y}(m(x,y),0)\, X(0) \\ &= \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, \frac{\partial m}{\partial y}(y,0)\, X(0) \\ &\overset{(3.27)}{=} \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, X(y), \end{aligned}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times B(0,\rho_0)$.

Questo è precisamente quanto desiderato in (3.26), e la dimostrazione è completa. □

D'ora in avanti, intendiamo sottointeso che $\mathcal{J} = \{J_1,\dots,J_N\}$ sia una base di $\mathfrak{g}$ come nel Lemma 3.12, e definiamo la seguente matrice $N \times N$

$$J(x) := (J_1(x),\dots,J_N(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Grazie a (3.27) (con $X = J_i$) nella dimostrazione del Teorema 3.25, una notevole identità differenziale collega questa matrice $J(x)$ alla nostra operazione locale $m = m(x,y)$:

$$J(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,0), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Di conseguenza, l'identità (3.26) del Teorema 3.25 diventa

$$\frac{\partial m}{\partial y}(m(x,y),0) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, \frac{\partial m}{\partial y}(y,0), \tag{3.30}$$

valida per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $y \in B(0,\rho_0)$. In modo equivalente, possiamo ricostruire la matrice Jacobiana completa di m rispetto a y in termini di J, come segue:

$$\frac{\partial m}{\partial y}(x,y) = J(m(x,y))\, J(y)^{-1}, \tag{3.31}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $y \in B(0,\rho_0)$.

Nella teoria dei gruppi di Lie, un'identità simile è soddisfatta dalla mappa di moltiplicazione m definita da $(x,y) \mapsto \tau_x(y)$ (dove τ_x è la traslazione a sinistra del gruppo da x); in tale contesto, essa è nota come **Primo Teorema di Lie**. Non è certo una coincidenza, poiché la nostra mappa $m(x,y)$ è destinata a essere una traslazione a sinistra su un gruppo di Lie.

Osservazione 3.26. Un sorprendente “loop” collega l'associatività di m e l'identità di “invarianza a sinistra” (3.31), riscritta come

$$J(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\, J(y). \tag{3.32}$$

Infatti, abbiamo dimostrato che l'associatività locale di m implica (3.32); viceversa, come parte più difficile della prossima sezione, dimostreremo che possiamo prolungare m in modo tale che (3.32) resti vera per ogni x, y e che essa implichi l'associatività di tale prolungamento di m.

3.3 Dal locale al globale

Lo scopo di quest'ultima sezione è mostrare che la struttura di gruppo locale costruita nella Sezione 3.2 può essere (unicamente) estesa a una struttura globale. Nel seguito fissiamo tutte le notazioni introdotte finora.

Per iniziare, dimostriamo che la mappa m ammette un'estensione C^∞ a tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. La nostra idea è la seguente: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$, consideriamo la curva $\gamma_{x,y}$ definita da

$$\gamma_{x,y}(t) := m(x, ty).$$

Poiché m è definita su $\mathbb{R}^N \times V$, esiste un intorno (possibilmente piccolo) aperto di $0 \in \mathbb{R}$ su cui $\gamma_{x,y}$ è ben definita. Mostriamo che $\gamma_{x,y}$ soddisfa un opportuno problema di Cauchy che possiede una (unica) soluzione massimale globale, supponiamo $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi_{x,y}(t)$. Allora è naturale estendere m come segue:

$$x * y := \varphi_{x,y}(1).$$

Questo sarà realizzato nella prossima sezione.

3.3.1 Equazione differenziale ordinaria di Schur su $\mathfrak{g}$ e prolungamento delle soluzioni

Abbiamo deciso di chiamare la (cruciale) equazione differenziale ordinaria che compare nella prossima sezione l'**equazione differenziale ordinaria di Schur**, poiché fu Schur il primo a studiare la mappa esponenziale locale delle algebre di Lie di campi vettoriali mediante identità di equazioni differenziali ordinarie.

Teorema 3.27. ***(Equazione differenziale ordinaria di Schur)**. Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati e sia $I_y \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale contenente 0 tale che $ty \in B(0, \rho_0)$ per ogni $t \in I_y$. Poniamo*

$$\gamma_{x,y} : I_y \to \mathbb{R}^N, \qquad \gamma_{x,y}(t) := m(x, ty).$$

Allora la curva $t \mapsto \gamma_{x,y}(t)$ è soluzione su I_y del seguente problema di Cauchy:

$$\dot z(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t,y) J_k(z(t)), \qquad z(0) = x, \tag{3.33}$$

*dove $A(t,y) = (a_1(t,y), \dots, a_N(t,y))^T$ è definita da**

$$A(t,y) := (J(ty))^{-1} y. \tag{3.34}$$

*Nel membro destro di (3.34), y è inteso come un vettore colonna $N \times 1$; lo stesso vale per la funzione $A(t,y)$ nel membro sinistro.

Equivalentemente, l'equazione differenziale ordinaria in (3.33) *può essere scritta nella forma seguente:*

$$\dot{z}(t) = J(z(t))\, J(ty)^{-1}\, y. \tag{3.35}$$

Diremo che (3.35) *è l'**equazione differenziale ordinaria di Schur** (per $\mathfrak{g}$ e y) e che* (3.33) *è il **problema di Cauchy di Schur** (per $\mathfrak{g}$ e x, y).*

Notiamo che l'equazione differenziale ordinaria di Schur non è autonoma.

Dimostrazione. Per prima cosa, poiché m è liscia su $\mathbb{R}^N \times V$, allora $\gamma_{x,y} \in C^\infty(I, \mathbb{R}^N)$; inoltre, sfruttando (3.31), otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{x,y}(t) &= \frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)\, y \overset{(3.31)}{=} J(m(x, ty))\, J(ty)^{-1} y \\ &= J(\gamma_{x,y}(t))\, A(t, y) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t, y) J_k(\gamma_{x,y}(t)).\end{aligned}$$

Quindi $\gamma_{x,y}$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria in (3.33); inoltre, $\gamma_{x,y}(0) = x$ segue da (3.16). □

Il nostro prossimo compito è dimostrare che (3.33) ammette una soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$. A tal fine, stabiliamo prima il seguente risultato.

Teorema 3.28. ***(Prolungamento della soluzione dell'equazione differenziale ordinaria di Schur).*** *Siano $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, la soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) X_k(z(t)), \qquad z(0) = \xi, \tag{3.36}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$. Di conseguenza, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$, la soluzione massimale $t \mapsto \varphi_{x,y}(t)$ del problema di Cauchy di Schur (3.33) *è definita su tutto $\mathbb{R}$.*

Sarà necessario il seguente lemma, che non dimostriamo.

Lemma 3.29. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ campi vettoriali lisci su $\mathbb{R}^N$ localmente lipschitziani e siano $a_1, \ldots, a_n \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$, sia $\gamma(\cdot; s) \in C^1(\mathcal{D}(s), \mathbb{R}^N)$ l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy parametrico*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(t+s) X_j(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Allora, per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}$ e per ogni numero reale $h > 0$ esiste $\varepsilon > 0$, dipendente solo da K e da h, tale che $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \mathcal{D}(s)$ per ogni $s \in K$ e

$$\|\gamma(t; s)\| \le h, \qquad \textit{per ogni } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \textit{ e per ogni } s \in K.$$

Dimostrazione del Teorema 3.28. Sia $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ la soluzione massimale unica di (3.36) e supponiamo, per assurdo, che $\mathcal{D} \neq \mathbb{R}$. Per fissare le idee, supponiamo che

$$0 < T := \sup(\mathcal{D}) < \infty,$$

e poniamo $K := [0, T]$. Per il Lemma 3.29, esiste $\varepsilon > 0$ tale che la (unica) soluzione massimale u_s del problema parametrico

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t+s) X_k(x(t)), \qquad x(0) = 0, \tag{3.38}$$

è definita almeno su $[-\varepsilon, \varepsilon]$, uniformemente per $s \in K$, e soddisfa

$$|u_s(t)| \leq \rho_0, \qquad \text{per ogni } t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \text{ per ogni } s \in K. \tag{3.39}$$

Sia ora $\tau \in (0, T)$ tale che $T - \tau < \varepsilon$ e sia $x := \varphi(\tau)$ (notiamo che x è ben definito, poiché $\tau \in (0, T) \subseteq \mathcal{D}$). Definiamo allora

$$\nu : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^N, \qquad \nu(t) := m(x, u_\tau(t)), \tag{3.40}$$

dove u_τ è la soluzione massimale del problema di Cauchy (3.38) con $s = \tau$. Osserviamo che ν è ben definita e liscia su $[0, \varepsilon]$, poiché m appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^N \times V, \mathbb{R}^N)$ e, per (3.39), abbiamo

$$u_\tau(t) \in B(0, \rho_0) \subseteq V, \qquad \text{per ogni } t \in [0, \varepsilon].$$

Affermiamo che ν risolve su $[0, \varepsilon]$ il seguente problema di Cauchy:

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t + \tau) X_k(z(t)), \qquad z(0) = x.$$

Infatti, poiché $m(x, 0) = x$, abbiamo $\nu(0) = m(x, u_\tau(0)) = m(x, 0) = x$; inoltre, per il Teorema 3.25 (e poiché $u_\tau(t) \in B(0, \rho_0)$ per ogni $t \in [0, \varepsilon]$), si ha

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}(t) &= \frac{\partial m}{\partial y}(x, u_\tau(t))\, \dot{u}_\tau(t) \\
&\overset{(3.38)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t + \tau) \left(\frac{\partial m}{\partial y}(x, u_\tau(t)) X_k(u_\tau(t)) \right) \\
&\overset{(3.26)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t + \tau)\, X_k(m(x, u_\tau(t))) \\
&\overset{(3.40)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t + \tau) X_k(\nu(t)).
\end{aligned}$$

Consideriamo ora la mappa

$$\Phi : [0, \tau + \varepsilon] \to \mathbb{R}^N, \qquad \Phi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, \tau] \\ \nu(t - \tau), & t \in (\tau, \tau + \varepsilon]. \end{cases}$$

È facile verificare che $\Phi \in C^1([0, \tau + \varepsilon], \mathbb{R}^N)$ e che Φ è soluzione di (3.36). Di conseguenza, poiché $\tau + \varepsilon > T$ (per la scelta di τ), Φ risulta essere un prolungamento di φ oltre $[0, T)$; ciò è chiaramente in contraddizione con la massimalità di φ. □

Grazie al Teorema 3.28, siamo in grado di estendere la mappa m.

Definizione 3.30. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$, e sia $t \mapsto \varphi_{x,y}(t)$ la (unica) soluzione massimale del problema di Cauchy di Schur* (3.33)*. Definiamo*

$$M : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad M(x, y) := \varphi_{x,y}(1). \tag{3.41}$$

Usiamo anche la notazione

$$x * y := M(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{3.42}$$

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ fissato poniamo

$$\tau_x, \rho_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad \tau_x(y) := x * y, \;\; \rho_x(y) := y * x.$$

Avvertenza. Il lettore non deve lasciarsi fuorviare dalla notazione $*$, simile a un'operazione di gruppo: non sappiamo ancora se $*$ sia associativa, e questo richiederà altro lavoro! Lo stesso avvertimento vale per le notazioni τ_x, ρ_x, simili a quelle usate nell'impostazione dei gruppi di Lie.

Come è naturale aspettarsi, M risulta essere un'estensione liscia di m.

Teorema 3.31. *La funzione M definita in* (3.41) *è liscia su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, ed estende la funzione m, cioè*

$$M(x,y) = m(x,y) = \exp(\mathrm{Log}(y))(x), \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N,\ y \in B(0,\rho_0). \tag{3.43}$$

Dimostrazione. La regolarità di $*$ è una conseguenza dei risultati della teoria delle equazioni differenziali ordinarie sulla dipendenza C^∞ dai parametri. Dimostriamo ora (3.43). A tal fine, fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in B(0,\rho_0)$, e definiamo

$$\gamma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^N, \qquad \gamma_{x,y}(t) := m(x,ty).$$

Per il Teorema 3.27, $\gamma_{x,y}(t)$ risolve (3.33) per ogni $t \in [0,1]$; quindi, poiché $\varphi_{x,y}$ è la soluzione massimale dello stesso problema, abbiamo

$$\gamma_{x,y}(t) = \varphi_{x,y}(t), \qquad \text{per ogni } 0 \le t \le 1.$$

In particolare, scegliendo $t = 1$, otteniamo $m(x,y) = \gamma_{x,y}(1) = \varphi_{x,y}(1) = x*y$, e ciò prova che $*$ coincide con m su $\mathbb{R}^N \times B(0,\rho_0)$, come volevamo. □

Ora che abbiamo esteso la mappa m a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, dedichiamo il resto di questa sezione a dimostrare che $*$ eredita tutte le proprietà di gruppo locale di m e le trasforma in proprietà globali. Per cominciare, dimostriamo il seguente semplice lemma.

Lemma 3.32. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati e sia $t \mapsto \varphi_{x,y}(t)$ la soluzione massimale del problema di Schur* (3.33)*. Allora*

$$\varphi_{x,y}(t) = M(x,ty), \qquad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Con notazioni equivalenti, $\varphi_{x,y}(t) = \varphi_{x,ty}(1) = x*(ty) = \tau_x(ty)$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per definizione di M, si ha

$$M(x,ty) = \varphi_{x,ty}(1), \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

dove $\varphi_{x,ty}$ è la soluzione massimale del problema parametrico

$$\dot z(s) = J(z(s))\, J(sty)^{-1}\, ty, \qquad z(0) = x. \tag{3.45}$$

Fissiamo allora $t \in \mathbb{R}$ e consideriamo la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\gamma(s) := \varphi_{x,y}(ts), \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Affermiamo che γ risolve (3.45) su $\mathbb{R}$. Infatti, poiché $\varphi_{x,y}$ risolve (3.33), si ha $\gamma(0) = \varphi_{x,y}(0) = x$; inoltre, per la regola della catena, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\gamma(s) &= t \frac{d}{du}\Big|_{u=ts} \{\varphi_{x,y}(u)\} \\ &\overset{(3.35)}{=} tJ(\varphi_{x,y}(ts))\, J(tsy)^{-1} y. \end{aligned}$$

Dunque γ risolve il problema di Cauchy (3.45), come fa $\varphi_{x,ty}$; per unicità, concludiamo che $\varphi_{x,y}(t) = \gamma(1) = \varphi_{x,ty}(1)$, cioè (3.44). □

Dal Lemma 3.32 otteniamo immediatamente il seguente risultato.

Corollario 3.33. *Se M è la mappa definita in* (3.41)*, allora*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\{M(x,ty)\} = J(M(x,ty))\,J(ty)^{-1}\,y, \\ \\ M(x,0) = x, \end{cases} \tag{3.46}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Come conseguenza, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,y = J(M(x,y))\,J(y)^{-1}\,y, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,0) = J(x). \tag{3.48}$$

Dimostrazione. L'identità (3.46) segue dal Lemma 3.32 e dal problema di Schur per $\varphi_{x,y}(t)$. Ovviamente, l'equazione differenziale ordinaria in (3.46) è equivalente a

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,ty)\,y = J(M(x,ty))\,J(ty)^{-1}\,y. \tag{3.49}$$

Quando $t = 1$, (3.49) da la (3.47); quando $t = 0$, da la

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,0)\,y = J(x)\,y, \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N,$$

ricordando che $J(0)$ è la matrice identità e che $M(x,0) = x$. Quest'ultima formula è (3.48), data l'arbitrarietà di y. $\square$

Il nostro prossimo sforzo principale consiste nel dimostrare che la moltiplicazione a destra per y in (3.47) può essere eliminata; ciò non è ovvio, poiché le matrici

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(y) = \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfano $A(y)y = B(y)y$, ma sono uguali solo per $y = 0$.

Abbiamo bisogno di un lemma tecnico.

Lemma 3.34. *Sia $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$ e consideriamo le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto a $\mathcal{J}$, cioè le costanti $\{C_{i,j}^k\}_{i,j,k \le N}$ tali che*

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{N} C_{i,j}^k J_k, \qquad \textit{per ogni } i, j \in \{1, \dots, N\}. \tag{3.50}$$

Sia $j \in \{1, \dots, N\}$ fissato. Allora, se $C(j) = (C_{i,j}^k)_{i,k \le N}$, si ha

$$C(j)\,J(z)^{-1}z = J(z)^{-1}\,\frac{\partial J_j}{\partial z}(z)\,z - J(z)^{-1}\Big(\frac{\partial J_1}{\partial z}(z)J_j(z)\ \cdots\ \frac{\partial J_N}{\partial z}(z)J_j(z)\Big)\,J(z)^{-1}z, \tag{3.51}$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Prendendo i vettori colonna dei coefficienti dei campi vettoriali in (3.50) otteniamo

$$J_i(J_j(z)) - J_j(J_i(z)) = \sum_{k=1}^{N} C_{i,j}^k J_k(z), \qquad \text{per ogni } z.$$

Se $C_{i,j}$ è il vettore colonna le cui componenti sono $C^1_{i,j}, \dots, C^N_{i,j}$, questo si riscrive come

$$\frac{\partial J_j}{\partial z}(z) J_i(z) - \frac{\partial J_i}{\partial z}(z) J_j(z) = J(z) C_{i,j}. \tag{3.52}$$

Fissiamo j e creiamo, a partire da questa identità tra vettori colonna $N \times 1$, l'identità tra matrici $N \times N$ le cui colonne sono, in ordine, i due membri di (3.52) per $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial J_j}{\partial z}(z) J(z) - \Big(\frac{\partial J_1}{\partial z}(z) J_j(z) \ \cdots \ \frac{\partial J_N}{\partial z}(z) J_j(z) \Big) = J(z) C(j).$$

Moltiplichiamo a sinistra per la matrice invertibile $J(z)^{-1}$; otteniamo

$$J(z)^{-1} \frac{\partial J_j}{\partial z}(z) J(z) - J(z)^{-1} \Big(\frac{\partial J_1}{\partial z}(z) J_j(z) \ \cdots \ \frac{\partial J_N}{\partial z}(z) J_j(z) \Big) = C(j).$$

Infine, moltiplicando a destra per $J(z)^{-1} z$, otteniamo (3.51). □

Teorema 3.35. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ si ha*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = J(M(x, y))\, J(y)^{-1}. \tag{3.53}$$

Equivalentemente, con la notazione $*$, si ottiene la proprietà di "invarianza a sinistra"

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(y) = J(x * y)\, J(y)^{-1}. \tag{3.54}$$

Come conseguenza, si ha anche

$$X(x * y) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y) X(y), \qquad \textit{per ogni } X \in \mathfrak{g}. \tag{3.55}$$

Dimostrazione. Chiaramente, (3.54) è una riformulazione di (3.53), il che implica

$$J(x * y) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)\, J(y).$$

Poiché i campi vettoriali relativi alle colonne di J formano una base per $\mathfrak{g}$, (3.55) segue da quest'ultima per argomento di linearità.

Restiamo dunque con la parte non banale e lunga della dimostrazione di (3.53).

L'idea di fondo è sostituire ty al posto di y in entrambi i membri di (3.53), e mostrare che entrambi i membri risolvono (come funzioni di t) lo stesso problema di Cauchy. Seguiamo questa linea, ma solo dopo aver fatto un piccolo trucco: moltiplichiamo entrambi i lati di (3.53) per t. Ora spieghiamo il perché.

Per il resto della dimostrazione, fissiamo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Se calcoliamo la matrice Jacobiana rispetto a y nell'equazione differenziale ordinaria in (3.46), otteniamo la matrice-equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt}\left\{ t\, \frac{\partial M}{\partial y}(x, ty) \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ J(M(x, ty))\, J(ty)^{-1} y \right\}. \tag{3.56}$$

È quindi più naturale costruire un problema di Cauchy per la curva

$$t \mapsto A(t) := t\, \frac{\partial M}{\partial y}(x, ty),$$

che ha valori nello spazio delle matrici reali $N \times N$. La nostra tesi (3.53) seguirà dall'uguaglianza finale di $A(t)$ con

$$B(t) := t\, J(M(x, ty))\, J(ty)^{-1}, \tag{3.57}$$

valutando poi in $t = 1$. Notiamo che non ci sono problemi con il dato iniziale: $A(0) = 0 = B(0)$. Dunque, per prima cosa dobbiamo ottenere un'equazione differenziale ordinaria per $A(t)$ a partire da (3.56); in particolare, siamo interessati a una equazione differenziale ordinaria lineare. Prima di intraprendere un calcolo tedioso, fissiamo alcune notazioni:

$$J(z) = (J_1(z) \ \cdots \ J_N(z)), \qquad \text{dove } J_k(z) = \begin{pmatrix} J_k^1(z) \\ \vdots \\ J_k^N(z) \end{pmatrix}.$$

Inoltre, poiché x non interviene mai, con un piccolo abuso scriviamo $M(y)$ al posto di $M(x, y)$. Con l'aiuto di qualche semplice calcolo differenziale, siamo pronti a calcolare la matrice Jacobiana rispetto a y nel membro destro di (3.56):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} \left\{ J(M(ty))\, J(ty)^{-1} y \right\} \\
&= J(M(ty)) \frac{\partial}{\partial y} \left(J(ty)^{-1} y \right) + \sum_{k=1}^{N} \left(J(ty)^{-1} y \right)_k \frac{\partial}{\partial y} \left\{ J_k(M(ty)) \right\} \\
&= J(M(ty)) \frac{\partial}{\partial y} \left(J(ty)^{-1} y \right) + \sum_{k=1}^{N} \left(J(ty)^{-1} y \right)_k \frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty)) \frac{\partial M}{\partial y}(x, ty)\, t.
\end{aligned}$$

Questo mostra che $A(t)$ soddisfa il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie

$$A'(t) = J(M(ty)) \frac{\partial}{\partial y}(J(ty)^{-1} y) + \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1} y)_k \frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))\, A(t).$$

Dobbiamo mostrare che anche $B(t)$ fa lo stesso, cioè dobbiamo provare il seguente

Claim 1.

$$B'(t) = J(M(ty)) \frac{\partial}{\partial y}(J(ty)^{-1} y) + \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1} y)_k \frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))\, B(t). \tag{3.58}$$

Confrontiamo i due membri del Claim 1; tenendo conto di (3.57), vediamo che il membro sinistro del Claim 1 è

$$B'(t) = J(M(ty)) \frac{d}{dt}\{t\, J(ty)^{-1}\} + t \frac{d}{dt}\{J(M(ty))\}\, J(ty)^{-1}.$$

Dunque il Claim 1 è vera se e solo se vale il seguente

Claim 2.

$$\begin{aligned}
0 &= J(M(ty)) \Big(\frac{d}{dt}\{t\, J(ty)^{-1}\} - \frac{\partial}{\partial y}(J(ty)^{-1} y) \Big) \\
&\quad + \Big(t \frac{d}{dt}\{J(M(ty))\} - \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1} y)_k \frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty)) t J(M(ty)) \Big)\, J(ty)^{-1}.
\end{aligned}$$

Scriviamo questa identità come $0 = J(M(ty))\,(1^{st}) + (2^{nd})\, J(ty)^{-1}$, con un significato chiaro di 1^{st} e 2^{nd}. Dopo semplici calcoli, scopriamo che

$$2^{nd} = t \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1} y)_k \left(J_k(J_j^i(M(ty))) - J_j(J_k^i(M(ty))) \right)_{i,j}.$$

Inserendo le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto a $\mathcal{J}$ (si veda (3.50)), abbiamo

$$2^{nd} = t \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1} y)_k\, J(M(ty))\, (C_{k,j}^i)_{i,j} = t\, J(M(ty)) \Big(\sum_{k=1}^{N} C_{k,j}^i (J(ty)^{-1} y)_k \Big)_{i,j}.$$

Quindi il Claim 2 è equivalente al seguente

Claim 3.

$$0 = J(M(ty))\Big(\frac{d}{dt}\{t\,J(ty)^{-1}\} - \frac{\partial}{\partial y}(J(ty)^{-1}y)\Big) + t\,J(M(ty))\Big(\sum_{k=1}^{N} C^i_{k,j}(J(ty)^{-1}y)_k\Big)_{i,j} J(ty)^{-1}.$$

Poiché $J(M(ty))$ è invertibile, ciò è equivalente a

$$0 = \Big(\frac{d}{dt}\{t\,J(ty)^{-1}\} - \frac{\partial}{\partial y}(J(ty)^{-1}y)\Big)J(ty) + \Big(\sum_{k=1}^{N} C^i_{k,j}(J(ty)^{-1}(ty))_k\Big)_{i,j}.$$

Dopo semplici calcoli, quest'ultima è equivalente al seguente (ponendo $z = ty$):

Claim 4.

$$\begin{aligned} J(z)^{-1}\Big(\nabla(J^i_j)(z)z\Big)_{i,j} - \Big(e_j^T J(z)^{-1}(\partial_j J)(z)J(z)^{-1}z\Big)_{i,j} J(z) \\ = \Big(\sum_{k=1}^{N} C^i_{k,j}(J(z)^{-1}z)_k\Big)_{i,j}. \end{aligned}$$

Come identità tra i vettori colonna delle matrici da entrambi i membri, ciò si riduce a (si veda la notazione per $C(j)$ nel Lemma 3.34)

$$J(z)^{-1}\frac{\partial J_j}{\partial z}(z)\,z - \sum_{i=1}^{N} J^i_j(z)\,J(z)^{-1}(\partial_j J)(z)J(z)^{-1}z = C(j)J(z)^{-1}z, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Ora quest'ultima identità proviene da (3.51). □

Osservazione 3.36. Osserviamo che (3.55) è la versione globale di (3.26). In particolare, una volta che abbiamo provato che $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, (3.55) implicherà che $\mathfrak{g}$ è costituita da campi vettoriali invarianti a sinistra, cioè $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$.

Teorema 3.37. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, la mappa τ_x nella Definizione 3.30 è un diffeomorfismo locale liscio di $\mathbb{R}^N$, e quindi un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Questo è una conseguenza diretta di (3.54) e del teorema della funzione inversa, poiché $J(z)$ è non singolare per ogni $z \in \mathbb{R}^N$. □

Con i Teorema 3.35 e 3.37 a disposizione, possiamo provare che $*$ rende globali tutte le proprietà di gruppo locale di m.

Teorema 3.38. *L'origine è un elemento neutro globale per $*$, cioè*

$$x * 0 = 0 * x = x, \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che 0 è un elemento neutro a destra. A tal fine, sia $x \in \mathbb{R}^N$ fissato. Per definizione di $*$ sappiamo che $x * 0 = \varphi_{x,0}(1)$, dove $\varphi_{x,0}$ è la soluzione massimale del problema di Schur con $y = 0$. Guardando a (3.35), ricaviamo che $\varphi_{x,0} \equiv x$; dunque $x * 0 = \varphi_{x,0}(1) = x$, come volevamo.

Per quanto riguarda 0 come elemento neutro a sinistra, osserviamo che $0 * x = \varphi_{0,x}(1)$, dove $\varphi_{0,x}(t)$ risolve il problema di Schur

$$\dot{z}(t) = J(z(t))\,J(tx)^{-1}x, \qquad z(0) = 0.$$

È chiaro che $z(t) = tx$ è la soluzione di questo problema di Cauchy. Di conseguenza, $0*x = \varphi_{0,x}(1) = z(1) = x$, come volevamo. □

Dimostriamo ora che $*$ è globalmente associativa su $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.39. *L'operazione $*$ è globalmente associativa su $\mathbb{R}^N$, cioè*

$$x*(y*z) = (x*y)*z, \qquad \textit{per ogni } x,y,z \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Per definizione di $*$, abbiamo $(x*y)*z = \varphi_{x*y,z}(1)$, dove $t \mapsto \varphi_{x*y,z}(t)$ è la soluzione massimale di

$$\dot\varphi(t) = J(\varphi(t))\,J(tz)^{-1}z, \qquad \varphi(0) = x*y. \tag{3.59}$$

Consideriamo la curva su $\mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(t) := x*(y*(tz)) = \tau_x(y*(tz)),$$

e affermiamo che essa è una soluzione (su $\mathbb{R}$) di (3.59). Per unicità, ciò darà

$$x*(y*z) = \gamma(1) = \varphi_{x*y,z}(1) = (x*y)*z.$$

Siamo dunque rimasti con la dimostrazione del claim. Poiché 0 è un elemento neutro globale per $*$ (Teorema 3.38), abbiamo $\gamma(0) = x*(y*0) = x*y$; inoltre, sfruttando in modo cruciale il Teorema 3.35, per ogni $t \in \mathbb{R}$ otteniamo il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) &= \frac{d}{dt}\{\tau_x(y*(tz))\} = \mathcal{J}_{\tau_x}(y*(tz))\,\frac{d}{dt}\{y*(tz)\}\\ &\overset{(3.46)}{=} \mathcal{J}_{\tau_x}(y*(tz))\,J(y*(tz))\,J(tz)^{-1}z\\ &\overset{(3.54)}{=} J(x*(y*(tz)))\,J(tz)^{-1}z = J(\gamma(t))\,J(tz)^{-1}z.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Rivolgiamo ora la nostra attenzione all'esistenza di una mappa di inversione globale per $*$. Un primo risultato in questa direzione è contenuto nel lemma seguente.

Lemma 3.40. *Esiste un intorno aperto e connesso W di 0 tale che*

$$x*\iota(x) = \iota(x)*x = 0, \qquad \textit{per ogni } x \in W.$$

Qui, $\iota : V \to \mathbb{R}^N$ è la mappa introdotta nella Definizione 3.23.

Dimostrazione. Sia $\rho_0 > 0$ come nel Teorema 3.20. Poiché ι è continua su V, esiste un intorno aperto e connesso $W \subseteq B(0,\rho_0)$ di 0 tale che

$$\iota(x) \in B(0,\rho_0) \subseteq V, \qquad \text{per ogni } x \in W.$$

Da questo, poiché $*$ coincide con m su $\mathbb{R}^N \times B(0,\rho_0)$ e ι fornisce un'inversa locale per m su $B(0,\rho_0)$, otteniamo

$$x*\iota(x) = m(x,\iota(x)) = 0 = m(\iota(x),x) = \iota(x)*x, \qquad \text{per ogni } x \in W.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Il seguente semplice risultato topologico ci permetterà di estendere la mappa ι all'intero $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 3.41. *Sia $W \subseteq V$ come nel Lemma 3.40. Allora si ha*

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{w_1 * \cdots * w_n : w_1,\dots,w_n \in W\}. \tag{3.60}$$

Dalla Proposizione 3.41, deduciamo facilmente il seguente risultato cruciale.

Proposizione 3.42. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$*, esiste un unico* $y_x \in \mathbb{R}^N$ *tale che*

$$x * y_x = y_x * x = 0. \tag{3.61}$$

Dimostrazione. Sia $W \subseteq V$ come nel Lemma 3.40. Per la Proposizione 3.41, è possibile trovare $w_1, \dots, w_n \in W$ (non necessariamente unici) tali che $x = w_1 * \dots * w_n$; definiamo quindi $y := \iota(w_n) * \dots * \iota(w_1)$. Poiché $W \subseteq V$, y è ben definito; inoltre, per l'associatività di $*$ e il Lemma 3.40, abbiamo $x * y = 0$. Analogamente, $y * x = 0$. L'unicità segue dall'associatività di $*$. □

Il risultato contenuto nella Proposizione 3.42 fornisce un modo molto naturale per estendere la mappa ι all'intero $\mathbb{R}^N$.

Definizione 3.43. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$*, sia* $y_x \in \mathbb{R}^N$ *l'unico punto che soddisfa* (3.61)*. Definiamo*

$$\tilde{\iota} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad \tilde{\iota}(x) := y_x. \tag{3.62}$$

Come abbiamo fatto per $*$, dimostriamo che $\tilde{\iota}$ è un'estensione liscia di ι.

Teorema 3.44. *Sia* W *come nel Lemma 3.40. La mappa* $\tilde{\iota}$ *definita in* (3.62) *è liscia su* $\mathbb{R}^N$ *ed estende* ι *fuori da* W*, cioè*

$$\tilde{\iota}(x) = \iota(x), \qquad \textit{per ogni } x \in W. \tag{3.63}$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $\tilde{\iota} \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. A tal fine, fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e poniamo $y_0 := \tilde{\iota}(x_0)$. Allora, per definizione, si ha $x_0 * y_0 = 0$. Sia $M(x, y) := x * y$. A questo punto mostriamo che la matrice Jacobiana di M in (x_0, y_0) ha rango massimo. Ciò segue dall'identità (in forma a blocchi)

$$\mathcal{J}_M(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\rho_{y_0}}(x_0) & \mathcal{J}_{\tau_{y_0}}(x_0) \end{pmatrix},$$

dove τ_x e ρ_x sono come nella Definizione 3.30, ricordando che $\mathcal{J}_{\tau_{y_0}}(x_0)$ è non singolare (si veda il Teorema 3.37). Per il Teorema della Funzione Inversa, possiamo quindi trovare due intorni aperti U, U' di x_0 e y_0 rispettivamente, e una funzione liscia $f : U \to U'$ tale che $f(x_0) = y_0 = \tilde{\iota}(x_0)$, e

$$\{(x, y) \in U \times U' : M(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in U\}.$$

Ora, per l'unicità affermata nella Proposizione 3.42, otteniamo

$$f(x) = \tilde{\iota}(x), \qquad \text{per ogni } x \in U,$$

e questo dimostra che $\tilde{\iota}$ è di classe C^∞ su U. Dalla arbitrarietà di x_0, deduciamo che $\tilde{\iota}$ è liscia su $\mathbb{R}^N$. Per quanto riguarda l'identità (3.63), sappiamo che, se $x \in W$, allora

$$x * \iota(x) = \iota(x) * x = 0;$$

dunque, ancora per la Proposizione 3.42, otteniamo $\iota(x) = \tilde{\iota}(x)$. □

Siamo finalmente pronti per la dimostrazione del Teorema 3.10.

Dimostrazione del Teorema 3.10. Sia $*$ l'operazione definita in (3.42) e sia $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$. Per il Teorema 3.31, $*$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; inoltre, i Teoremi 3.38 e 3.39 mostrano che 0 è un elemento neutro per $*$ e che $*$ è associativa. Infine, se $\tilde{\iota}$ è la mappa in (3.62), dal Teorema 3.44 sappiamo che $\tilde{\iota}$

è liscia e che fornisce una mappa di inversione per $*$. Riassumendo, $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ con elemento neutro 0. Per concludere la dimostrazione del teorema, mostriamo che $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$. A tal fine, osserviamo che, poiché il Teorema 3.35 assicura che

$$X(x * y) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)\, X(y), \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N, \text{ per ogni } X \in \mathfrak{g},$$

allora $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$. Da questo, tenendo a mente che $\mathfrak{g}$ ha dimensione N (si veda (ND)), concludiamo che $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, e la dimostrazione è completa. $\square$

Bibliografia

[1] Baas, N.A. *Sophus Lie*, The Mathematical Intelligencer **16**, 16-19 (1994)

[2] Barletta, A.: *Simmetrie per Operatori Lineari del Secondo Ordine*, Tesi di laurea magistrale, Università di Bologna, 2012

[3] Biagi, S., Bonfiglioli, A.: *An Introduction to the Geometrical Analysis of Vector Fields*, World Scientific, New Jersey, 2018

[4] Bluman, G.W., Anco, S.C.: *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Springer, New York, 2002

[5] Hawkins, T.: *Emergence of the Theory of Lie Groups*, Springer, New York, 2000

[6] Ibragimov, N.H. *Sophus Lie and harmony in mathematical physics, on the 150th anniversary of his birth*, The Mathematical Intelligencer **16**, 20–28 (1994)

[7] Olver, P.J.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 2000