

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

GEOMETRIA PROIETTIVA: DALLE ORIGINI A ENRIQUES, E OLTRE

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore:

Chiar.mo Prof.

Alessandro Gimigliano

Presentata da:

Alessia Gherardi

Anno Accademico 2024/2025

*a Bruna, Annarosa,
Giulia, Chiara ed Emma*

Introduzione

La geometria proiettiva occupa un ruolo centrale nello sviluppo della matematica moderna: nata dall'incontro tra esigenze pratiche legate alla rappresentazione prospettica e riflessioni teoriche sulla natura delle figure geometriche, essa si è progressivamente affermata come disciplina autonoma con principi e metodi propri. Fin dall'antichità l'attenzione verso i fenomeni visivi e le leggi della prospettiva ha stimolato indagini che hanno trovato sistematizzazione negli *Elementi* e nell'*Ottica* di Euclide, opere che hanno fornito le basi logiche e simboliche per le indagini successive. Con il Rinascimento, gli studi di prospettiva assunsero una nuova forma, e passarono da strumento artistico a oggetto di ricerca scientifica, fornendo le basi su cui si sarebbero sviluppati gli studi di Girard Desargues, Blaise Pascal e Jean-Victor Poncelet.

Il XIX secolo rappresentò un momento critico, caratterizzato da una forte tensione tra i matematici interessati alla geometria. L'oggetto della discussione erano le metodologie: da un lato il metodo sintetico proiettivo, sviluppato da Steiner, Chasles e von Staudt, mirava a fondare la geometria a partire da concetti puramente proiettivi, indipendenti da considerazioni metriche; dall'altro il metodo analitico, reso possibile dall'introduzione delle coordinate omogenee da parte di Plücker e Möbius, ampliava enormemente le possibilità di calcolo e di classificazione delle curve. La tensione tra questi due approcci, che non si risolse affatto in modo celere, costituì la premessa per un'evoluzione che condusse a una sintesi: la geometria proiettiva fu terreno privilegiato per una collaborazione tra intuizione geometrica e formalizzazione algebrica, ma solo nella seconda metà dell'Ottocento.

In questo contesto di trasformazioni si colloca la nascita e l'affermazione della cosiddetta *scuola italiana di geometria algebrica*, che tra la fine dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento costituì uno dei più importanti poli di ricerca a livello internazionale. Figure come Corrado Segre, Giuseppe Veronese, Guido

Castelnuovo, Gino Fano e soprattutto Federigo Enriques contribuirono a delineare un approccio originale e riconoscibile: da un lato la valorizzazione dell'intuizione geometrica, dall'altro l'impegno verso una sistematizzazione teorica e assiomatica. Le superfici algebriche, la classificazione delle curve e le trasformazioni birazionali furono al centro di un'attività intensa e innovativa, i cui effetti si propagarono ben oltre i confini italiani.

Questa tesi si propone di ripercorrere la storia della geometria proiettiva dalle sue origini fino agli sviluppi della scuola italiana con particolare attenzione al ruolo di Enriques, figura di sintesi e mediazione tra diverse tradizioni metodologiche, per poi analizzare le ragioni storiche e disciplinari del suo declino. L'obiettivo è quello di ricostruire le tappe storiche fondamentali di questo percorso e di mettere in luce come problemi, concetti e strumenti elaborati in quel periodo abbiano gettato le basi per sviluppi successivi nella matematica del Novecento. In quest'ottica, la geometria proiettiva si rivela come campo di ricerca in costante dialogo con altre aree della matematica.

La struttura del lavoro segue tale impostazione. Dopo alcune nozioni preliminari, necessarie per fissare il linguaggio tecnico e introdurre i concetti fondamentali, il primo capitolo è dedicato al contesto storico-matematico, con un'analisi delle origini della geometria proiettiva, da rintracciare negli studi di prospettiva, e dei contributi decisivi di Desargues, Pascal, Poncelet e von Staudt. Si analizza inoltre il panorama dell'Ottocento, caratterizzato dal confronto tra approccio sintetico e analitico e dalle prime formulazioni assiomatiche. Nel secondo capitolo l'attenzione si concentra sulla scuola italiana: se ne delineano i protagonisti, i risultati principali e i tratti metodologici distintivi. Il terzo capitolo è incentrato sulla figura di Federigo Enriques, con un'analisi della sua attività disciplinare e didattica, mentre il quarto capitolo è riservato al declino della scuola italiana e alla transizione verso le nuove correnti del Novecento.

In conclusione, questa tesi si propone di mostrare come la geometria proiettiva, nata da esigenze concrete e sviluppatasi inizialmente come estensione della geometria classica, abbia saputo trasformarsi in uno dei cardini della matematica moderna. Lo studio del suo percorso storico quindi offre la possibilità di comprendere meglio il modo in cui concetti e metodi matematici si trasformano, si arricchiscono e si trasmettono nel tempo, e come ogni branca della matematica non possa sussistere senza le altre.

Indice

Introduzione	i
Nozioni preliminari	1
1 Contesto storico-matematico	7
1.1 La nascita della geometria proiettiva	7
1.1.1 Desargues	9
1.1.2 Pascal	13
1.1.3 Poncelet	17
1.1.4 von Staudt	19
1.2 La geometria nell'Ottocento	21
2 La scuola italiana	27
2.1 La scuola italiana	29
2.1.1 Segre e Peano	29
2.1.2 Veronese e Fano	35
2.1.3 Castelnuovo	39
3 Federigo Enriques	41
3.0.1 Lezioni di geometria proiettiva	48
3.0.2 Attività didattica	51
4 Il declino della scuola italiana	59
Bibliografia	63
Sitografia	65

Nozioni Preliminari

In questa sezione sono proposte alcune definizioni e alcuni Teoremi che saranno citati all'interno della tesi. Si tratta di nozioni matematiche necessarie alla comprensione della trattazione storica dei quattro capitoli successivi.

Definizione 0.1 (Spazio proiettivo). *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n + 1$. Si definisce lo spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ associato a V come:*

$$\mathbb{P}(V) = \{\text{sottospazi vettoriali di } V \text{ di dimensione } 1\}.$$

La dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è n . Un'altra definizione dello spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ associato a V è la seguente:

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim ,$$

dove $\sim$ indica la relazione di equivalenza seguente:

$$\forall v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}, v_1 \sim v_2 \iff v_1 = \lambda v_2, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Si ha un'equivalenza tra le due definizioni in quanto i sottospazi di dimensione 1 di V (cioè le rette dello spazio vettoriale) coincidono con le classi di equivalenza dello spazio quoziente. Quando $V = \mathbb{K}^{n+1}$ generalmente si usa la notazione $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Osservazione 0.2. Lo spazio $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è detto piano proiettivo, e lo si può immaginare come un'estensione del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ con l'aggiunta dei cosiddetti *punti all'infinito*, o *punti impropri*, che giacciono su un'unica retta all'infinito detta *retta impropria*. Tali punti all'infinito sono identificati dalle direzioni delle rette del piano passanti per l'origine, dunque si otterrà che due rette parallele nel piano proiettivo si intersecheranno in un punto improprio. Dunque osserviamo che la nozione di parallelismo non può esistere in un piano proiettivo, e che nel piano

proiettivo si ha una perfetta "dualità" fra punti e rette: ogni coppia di punti identifica un'unica retta che li contiene, ogni coppia di rette identifica un punto loro intersezione (che può essere "all'infinito").

Definizione 0.3 (Coordinate omogenee). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$, e sia $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ una sua base. Sia $P \in \mathbb{P}(V)$ e sia $v = (w_0, \dots, w_n)_{\mathcal{B}}$ un rappresentante di P , cioè $P = [v]$. Le coordinate $w_0, \dots, w_n$ si dicono coordinate omogenee del punto P rispetto alla base $\mathcal{B}$. Le coordinate omogenee di un punto non sono uniche, ma sono definite a meno di una costante, infatti $[v] = [\lambda v]$.*

Definizione 0.4 (Isomorfismo). *Dati V e W spazi vettoriali, una funzione $f : V \rightarrow W$ lineare e biettiva è detta isomorfismo.*

Definizione 0.5 (Proiettività). *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e iniettiva tale che $f(v) = w$. Questa induce una nuova applicazione $\tilde{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che $\tilde{f}([v]) = [f(v)] = [w]$. Se la funzione f è un isomorfismo di V allora si ottiene una mappa indotta biivoca $\tilde{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, che viene detta proiettività.*

Definizione 0.6 (Punti proiettivamente indipendenti). *$P_0 = [v_0], \dots, P_n = [v_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si dicono punti proiettivamente indipendenti se $v_0, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V .*

Definizione 0.7 (Posizione generale). *I punti $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale se:*

1. *se $n \leq \dim(\mathbb{P}(V))$, sono proiettivamente indipendenti;*
2. *se $n > \dim(\mathbb{P}(V))$, comunque scelti in numero pari a $\dim(V)$, sono proiettivamente indipendenti.*

Definizione 0.8 (Birapporto e gruppo armonico). *Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti in posizione generale in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Il birapporto di questa quaterna è definito come:*

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0},$$

dove $P_4 = [y_0, y_1]$. Alternativamente possiamo definirlo in questo modo:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} \cdot \frac{P_4 P_2}{P_4 P_1}.$$

La quaterna di punti è detta gruppo armonico quando $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$. Dati tre punti P_1, P_2, P_3 , il punto P_4 si dice quarto armonico se i quattro punti costituiscono un gruppo armonico.

Definizione 0.9 (Polo-polare). *Polare di un punto P , rispetto a una conica nel piano proiettivo, è il luogo dei punti P' tali che P e P' sono separati armonicamente dalle intersezioni della loro congiungente con la conica. La polare di un punto è una retta, e il punto rispetto al quale viene determinata è detto polo. In altre parole la retta polare r rispetto al punto P è la retta che congiunge i punti di intersezione della conica con le tangenti ad essa passanti per P .*

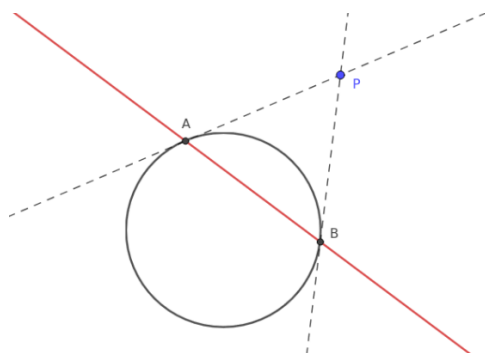


Figura 1: Relazione di polarità reciproca

Osservazione 0.10. Se il punto P è interno alla circonferenza, la sua polare è ancora la retta congiungente i punti di contatto delle tangenti alla circonferenza passanti per P , ma tali tangenti sono rette complesse.

Definizione 0.11 (Legge di dualità). *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione $n + 1$. Esiste un'applicazione δ definita in questo modo:*

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{P}(V^*) &\longrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \\ [F] &\rightarrow \text{Ker}(F), \end{aligned}$$

che consente di scambiare punti e iperpiani tra $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V^)$.*

Definizione 0.12 (Curve algebriche piane). *Una curva algebrica piana proiettiva su un campo $\mathbb{K}$ è una classe di equivalenza di polinomi omogenei di grado $d \geq 1$ in tre variabili. Dato $\mathbb{K}$ un campo, la relazione di equivalenza in questione è la seguente:*

$$\forall f, g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n], \quad f \sim g \iff f = \lambda g, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Definizione 0.13 (Coniche e quadriche). *Una conica proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, con $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, è una curva algebrica piana di grado due; quindi ha equazione del tipo:*

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Equivalentemente in forma matriciale si ha:

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

e utilizzando una notazione abbreviata si ottiene $x^T A x = 0$, con A simmetrica. In base al rango della matrice A si distinguono due tipologie di coniche: se $\text{rg}(A) = 3$ la conica in esame si dice non degenera, in tutti gli altri casi si dice degenera.

Una quadrica proiettiva in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, ha equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{j=1, i < j}^n 2a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Definizione 0.14 (Assioma di Archimede). *Dati due numeri reali positivi a, b esiste un numero $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $na > b$.*

Definizione 0.15 (Trasformazioni birazionali). *Le trasformazioni birazionali sono trasformazioni geometriche che si possono esprimere tramite funzioni razionali di due variabili (in altre parole come rapporto di polinomi) sia in forma diretta che inversa.*

Teorema 0.16 (Fondamentale delle proiettività). *Siano $\{P_0, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, \dots, Q_n\}$ due insiemi ordinati di $n + 2$ punti in posizione generale in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Allora esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i \ \forall i = 0, \dots, n + 1$.*

Teorema 0.17 (di Menelao). *Dati tre punti D, E, F sui tre lati di un triangolo ABC (o sui loro prolungamenti), essi saranno collineari se e solo se vale:*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

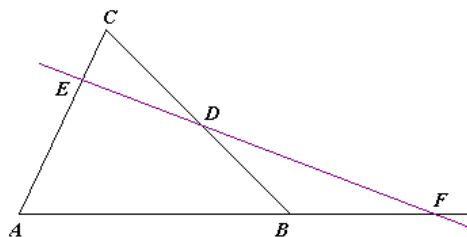


Figura 2: *Teorema di Menelao*

Teorema 0.18 (di Pappo). *Siano A, B, C tre punti di una retta r e siano A', B', C' tre punti di una retta r' (abbiamo un esagono con i vertici su due rette distinte). Siano:*

$$AB' \cap A'B = N \quad AC' \cap A'C = M \quad BC' \cap B'C = L.$$

Allora i punti N, M, L sono collineari.

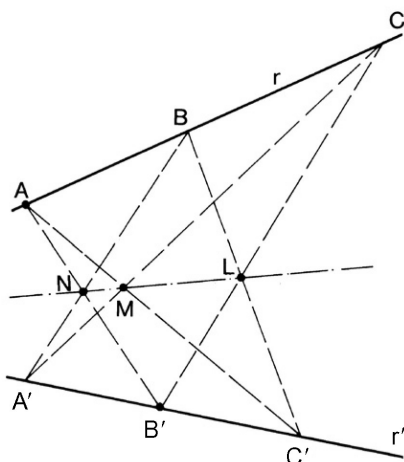


Figura 3: *Teorema di Pappo*

Capitolo 1

Contesto storico-matematico

1.1 La nascita della geometria proiettiva

Per iniziare il nostro percorso storico dobbiamo tornare molto indietro nel tempo, nella Grecia del IV-III secolo a.C. Un matematico e filosofo greco scrisse due opere che sarebbero diventate i cardini della geometria, gli *"Elementi"* e l'*"Optica"*. Stiamo parlando proprio di Euclide, colui che diede delle fondamenta e un metodo rigoroso allo studio della geometria. Citiamo queste due opere perché i tredici libri che compongono gli *"Elementi"*, l'opera più celebre di Euclide, sono stati scritti per descrivere "le cose come sono", mentre l'*"Optica"*, meno nota, aveva uno scopo ben diverso. L'obiettivo di Euclide infatti era quello di creare una teoria della visione diretta, in modo da descrivere "le cose come si vedono". Non si tratta infatti dell'ottica che intendiamo oggi, bensì di uno studio della prospettiva e della percezione visiva. Per comprendere questo lavoro è necessario aver letto gli *"Elementi"*, in quanto la geometria in esso descritta è diretta applicazione di quella descritta negli *"Elementi"*, e la struttura basata su assiomi e conseguenze logiche è la medesima. L'opera contiene sette assiomi e cinquantasei proposizioni, di cui una in particolare credo che meriti attenzione. L'assioma IV di quest'opera dice: *"e che le cose viste sotto angoli più grandi appaiano più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli più piccole, uguali quelle viste sotto angoli uguali"*. Questo assioma ci aiuta a comprendere la proposizione seguente, riferita alla Figura 1.1.

Teorema 1.1 (Proposizione 6). *Rette parallele, viste da distanza, appaiono non essere ugualmente distanti l'una dall'altra.*

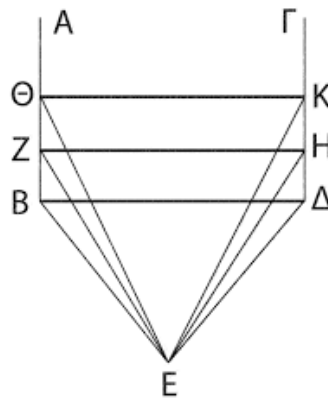


Figura 1.1: *Proposizione 6*

Notiamo quindi che la prospettiva era già nota nell'età Ellenistica, e sappiamo che fu proprio questa, con le sue particolarità che guidò i matematici verso lo sviluppo della geometria proiettiva. Questo è reso evidente dalla Figura 1.2, di epoca romana.



Figura 1.2: *Stanza delle Maschere, casa di Augusto*

Questo approccio allo studio della visione verrà ripreso e ampliato nell'arte Rinascimentale. La geometria della visione si fece largo tra gli artisti, soprattutto tra i pittori, che iniziarono a sfruttarla per rendere al meglio la tridimensionalità delle loro opere, ottenendo così di farle più realistiche. Furono addirittura pubblicati dei trattati sulla prospettiva scritti proprio da pittori e architetti, tra

cui ricordiamo Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti e Piero della Francesca. L'utilizzo della teoria geometrica della prospettiva divenne evidente, ne riportiamo un esempio nella Figura 1.3.

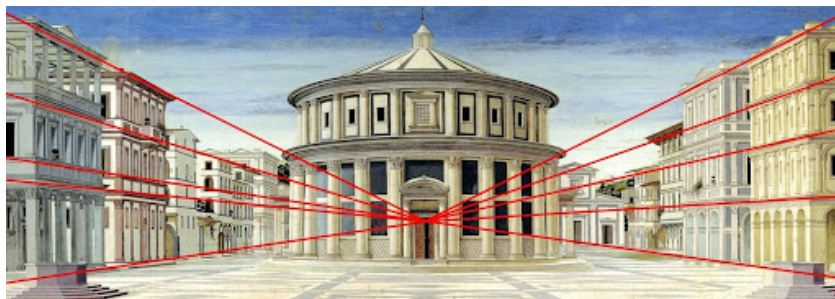


Figura 1.3: *Città ideale (XV sec.)*

É proprio in questo momento storico che affondano le radici della geometria proiettiva. Vediamo di seguito alcuni dei matematici che diedero una maggiore spinta alla nascita e allo sviluppo della disciplina.

1.1.1 Desargues



Figura 1.4: *Girard Desargues*

Nato a Lione nel 1591, Desargues fu uno dei matematici che più contribuì alla nascita della geometria proiettiva. La sua data di nascita fu sconosciuta fino al lavoro di René Taton pubblicato nel 1962. Prima della ricerca di Taton si credeva erroneamente che Desargues fosse nato nel 1593, in quanto nella biografia di Descartes del 1691 scritta da Adrien Baillet si affermava che Desargues fosse più anziano di tre anni rispetto a Descartes. Taton scoprì un oroscopo di Desargues che indicava la sua nascita alle 6:30 del 21 febbraio 1591. Pur sapendo che

Desargues era di buona famiglia, e potendo quindi presupporre che ebbe accesso a una buona istruzione, non abbiamo informazioni sulla sua vita prima dei trent'anni; sappiamo però che fu un ingegnere di successo, e che ebbe un particolare interesse per l'architettura. Fu forse questo suo interesse ad avvicinarlo agli studi sulla prospettiva. A Parigi fece parte della cerchia di Mersenne, dove conobbe alcuni dei matematici più attivi del momento, tra cui Cartesio e Pascal. Tra i suoi scritti ricordiamo sicuramente il *"Brouillon Project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plane"* del 1639, in cui troviamo i suoi risultati più importanti nel campo della geometria proiettiva, e che al tempo fu stampato solo in una conquantina di copie, tutte perse negli anni successivi. Fu un suo allievo, Abraham Bosse, a diffondere in parte i suoi risultati, pubblicando nel 1648 il *"Manière universelle de Mr Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied"*. Fino al 1845 fu questo il testo di riferimento per studiare le idee di Desargues, anno in cui il matematico Chasles ritrovò una copia del *"Brouillon Project"*. Desargues ricevette grandi riconoscimenti nella cerchia di Mersenne per i suoi scritti, ma il *"Brouillon Project"* fu aspramente criticato, in quanto scritto con un linguaggio oscuro, potremmo dire "botanico", e a volte privo del richiesto rigore matematico. Di seguito vediamo uno dei teoremi cardine del suo lavoro, che al tempo fu diffuso dal suo studente Bosse.

Teorema 1.2 (Teorema di Desargues o dei triangoli omologici). *Se due triangoli ABC e $A'B'C'$, giacenti in due piani distinti o nello stesso piano, sono in immagine prospettica rispetto ad un punto P , allora i punti di intersezione dei loro lati (o dei prolungamenti dei lati) corrispondenti sono collineari [come si vede nella Figura 1.5]. Se i due triangoli si trovano su due piani distinti si avrà che i tre punti collineari si trovano sulla retta comune ai due piani.*

Dimostrazione. Come si vede dall'enunciato, il caso di due triangoli su piani distinti nello spazio è immediato, resta da dimostrare il caso di due triangoli nel piano. Per concludere la dimostrazione sarà necessario applicare tre volte il Teorema 0.17. Considero il triangolo $A'PC'$ tagliato dalla retta per A, C, D . Allora per tale Teorema si ha:

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AA'}{A'P} = \frac{C'C}{PC'}.$$

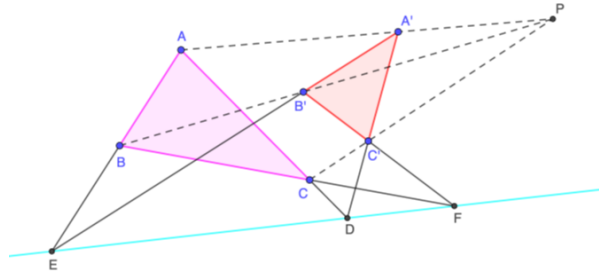


Figura 1.5: *Teorema dei triangoli omologici*

Analogamente considerando i triangoli $A'PB'$ e $C'PB'$ tagliati rispettivamente dalla retta per A, B, F e dalla retta per D, C, B si ottengono le seguenti:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BB'}{B'P} = \frac{A'A}{PC'}, \quad \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BB'}{B'P} = \frac{C'C}{PC'}.$$

Risolvendo il sistema composto dalle tre equazioni si ottiene la relazione:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{FB}{AF},$$

che è il Teorema 0.17 applicato sul triangolo ABC tagliato dalla retta per E, D, F , da cui si deduce che E, D, F sono allineati. $\square$

In realtà in questa parte del "*Brouillon Project*" così di difficile comprensione si cela un altro teorema cardine del lavoro di Desargues, che ricevette il meritato riconoscimento solo tanto tempo dopo. Per enunciare e comprendere tale teorema abbiamo bisogno di interpretare a livello matematico i particolari termini utilizzati. Una retta viene chiamata *tronco*, i suoi punti vengono detti *nodi*, e i segmenti uscenti dal tronco sono denominati *rami*. Un *albero* è il dato di un tronco, un suo punto A detto *ceppo*, e tre paia di nodi B, H, C, G e D, F tali che soddisfino la relazione: $AB \times AH = AC \times AG = AD \times AF$. Dato un albero come appena descritto, Desargues dimostrò che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{GD \times GF}{CD \times CF} &= \frac{GB \times GH}{CB \times CH}, \\ \frac{FC \times FG}{DC \times DG} &= \frac{FB \times FH}{DB \times DH}, \\ \frac{HC \times HG}{BC \times BG} &= \frac{HD \times HF}{BD \times BF}. \end{aligned}$$

In questo caso i sei punti, o nodi, si dicono *in involuzione*. Abbiamo ora gli strumenti giusti per enunciare il teorema.

Teorema 1.3 (Teorema della frasca). *Siano A, A', B, B' e C, C' tre coppie di nodi su un tronco r che sono in involuzione. Se K è un punto non sul tronco r , allora ogni retta per il punto K taglia le rette KA, KA', KB, KB' e KC, KC' in tre paia di punti che sono in involuzione. [Ne si può vedere un'illustrazione nella Figura 1.6].*

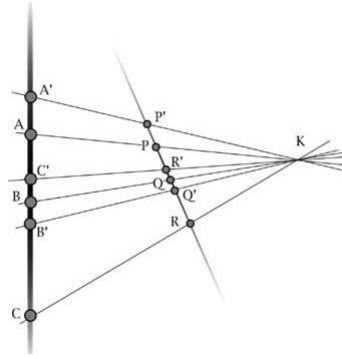


Figura 1.6: Teorema della frasca

Come per il teorema sui triangoli omologici, la dimostrazione si conclude usando più volte il teorema di Menelao 0.17. Vediamo ora un ultimo teorema che unisce il concetto di involuzione e lo studio delle coniche, che fu di grande ispirazione negli anni a venire.

Teorema 1.4 (Teorema di involuzione). *Siano A, B, C, D quattro punti su una conica e in posizione generale. Ogni retta che sia secante la conica e non passi per i quattro punti e le intersezioni di lati opposti o delle diagonali, interseca la conica, il quadrilatero e le sue diagonali in sei punti che sono in involuzione, [come mostrato in Figura 1.7].*

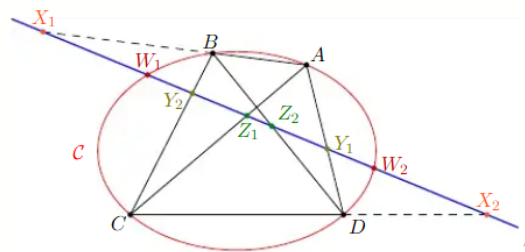


Figura 1.7: Teorema di involuzione

Il *Brouillon*, pur essendo un lavoro estremamente innovativo per il tempo, non fu apprezzato in parte perché il suo linguaggio era estremamente difficile

da seguire, come abbiamo visto, ma probabilmente anche perché Desargues non utilizzò l'algebra o le coordinate per sviluppare il suo lavoro, strumenti che erano particolarmente in voga in quegli anni. Morì nel 1661 a Lione, la sua città natale, lasciando terreno fertile per studi futuri.

1.1.2 Pascal



Figura 1.8: *Blaise Pascal*

Desargues fu di particolare ispirazione per un altro matematico, ben noto anche come fisico e filosofo, Blaise Pascal. Figlio di Étienne Pascal, magistrato e matematico francese, Blaise nacque nel 1623 a Clermont, unico figlio maschio della famiglia. Il padre aveva delle idee particolari riguardo all'istruzione del figlio, per cui decise di istruire personalmente Blaise, e gli proibì di studiare matematica fino ai 15 anni. In realtà già a 12 anni Blaise aveva esplorato autonomamente la geometria, e quando il padre se ne accorse decise di concedergli la lettura di Euclide. A soli 14 anni iniziò ad accompagnare il padre agli incontri organizzati dalla cerchia di Mersenne, dove conobbe personalmente e si appassionò al lavoro di Desargues. Nel 1640, a 16 anni, scrisse il saggio "*Essay pour les coniques*", composto di una sola pagina, ma ricco di novità. Per aiutare suo padre, esattore delle tasse, per tre anni lavorò a un calcolatore meccanico, e fu così che nacque la Pascalina, uno dei primi calcolatori mai inventati, che ricorda molto quelli che verranno poi costruiti negli anni Quaranta del Novecento. Purtroppo ne furono prodotte una cinquantina ma ne furono vendute pochissime, quindi dopo poco tempo andò fuori produzione. Gli eventi del 1646 segnarono Pascal da un punto di vista spirituale: suo padre si fece male a una gamba e fu costretto a rimanere

a casa per un certo periodo, nel quale due giovani facenti parte di un gruppo religioso si presero cura di lui. La religione si fece strada nella vita di Pascal, e ne divenne una parte fondamentale. Quando morì il padre Blaise scrisse una lettera a una delle sue sorelle, in cui attribuiva un significato profondamente cristiano alla morte; questa lettera conteneva anche idee filosofiche che furono particolarmente apprezzate dagli studiosi degli anni successivi. Nonostante vari problemi di salute si dedicò intensamente ai suoi studi fisici e matematici fino al 1654, anno in cui rischiò di perdere la vita in un incidente: i cavalli che trainavano la sua carrozza si imbizzarrirono e la carrozza rimase appesa a un ponte sopra la Senna. Sebbene fosse stato tratto in salvo senza ferite fisiche, sembra che ne fosse stato profondamente colpito psicologicamente. Non molto tempo dopo visse un'altra esperienza religiosa, e decise quindi di dedicare la sua vita al Cristianesimo. La sua salute peggiorò, e negli ultimi anni di vita tornò a dedicarsi alla matematica per occupare il tempo in cui non riusciva a dormire a causa dei dolori fisici. Morì a 39 anni, e fu ricordato come uomo perseverante, perfezionista, e ostinato, ma che cercò sempre di essere umile.

Ci concentriamo su due suoi scritti in particolare, il primo dei quali è l' "*Essay pour les coniques*". Il saggio è composto da tre definizioni, tre lemmi e cinque proposizioni, nessuna delle quali è dimostrata, e sono presenti tre figure accanto al titolo.

Le tre definizioni sono quelle di: *ordre*, cioè fascio di rette, *sezioni coniche*, che per lui sono cerchio, ellisse, parabola, iperbole e angolo retto, e *ligne droite*, cioè retta.

Tra i lemmi troviamo invece dei risultati importantissimi per lo sviluppo della geometria proiettiva, e Pascal ne era totalmente consapevole. Da questi tre lemmi infatti si possono dedurre tutte le proprietà significative delle coniche. Il primo lemma è il seguente.

Teorema 1.5. *I lati opposti di un esagono inscritto in un cerchio si intersecano in tre punti collineari.*

Il terzo lemma è una sua estensione a tutte le coniche, come mostrato in Figura 1.10, ed è oggi noto come *Teorema di Pascal*. È molto interessante notare che se i vertici dell'esagono si trovano su due rette parallele, che possiamo considerare come conica degenera, si ottiene il Teorema di Pappo 0.18. Il carattere proiettivo di

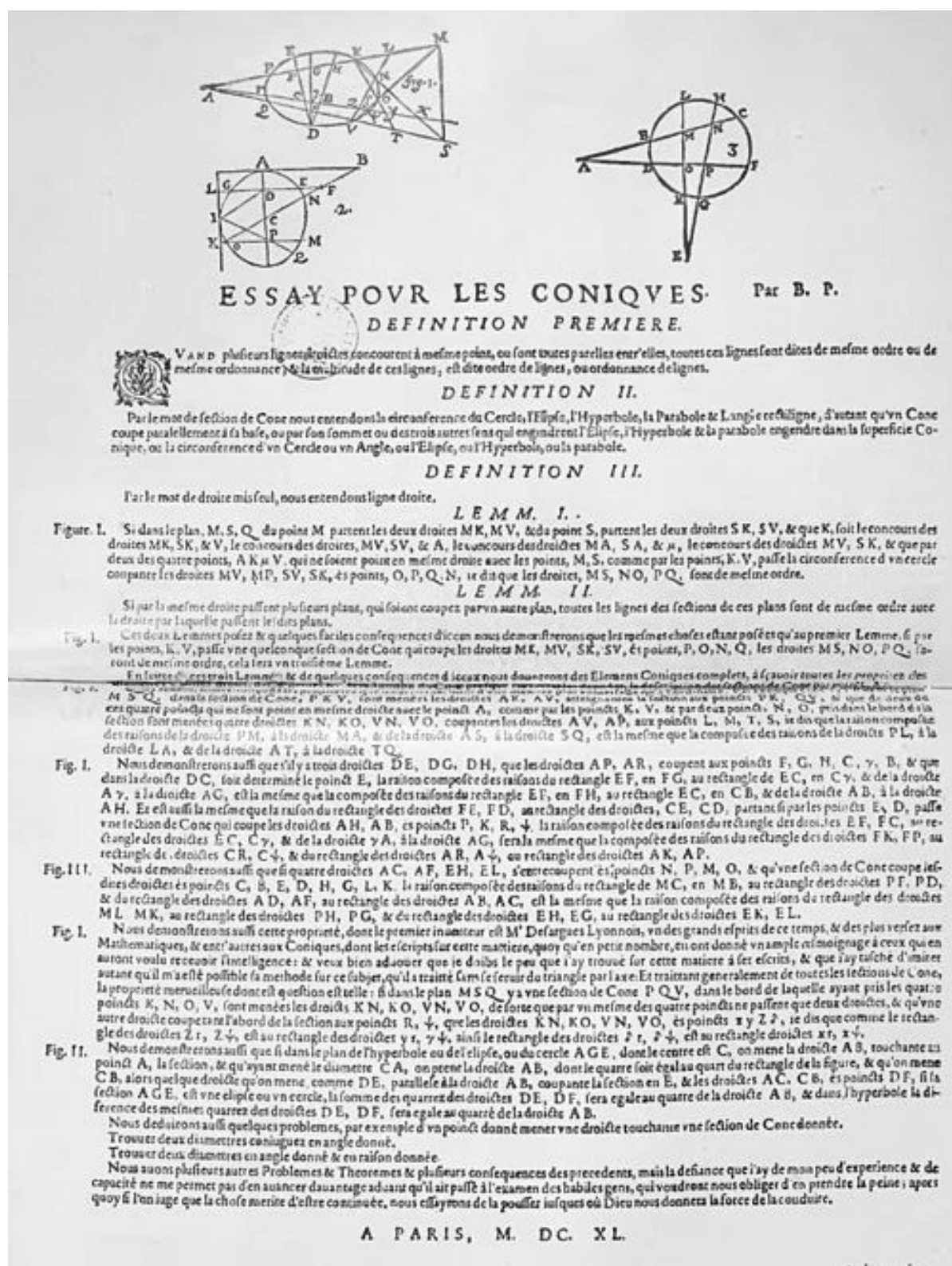


Figura 1.9: *Essay pour les coniques*

questo Teorema si vede molto bene nel caso degli esagoni con lati opposti paralleli, perché in quel caso i loro tre punti di incontro si trovano "all'infinito", collineari

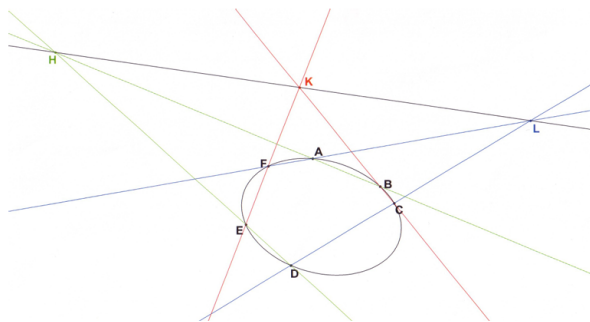


Figura 1.10: *Teorema di Pascal*

su una "retta all'infinito". Il secondo lemma invece riguarda l'intersezione di un fascio di piani con un piano trasversale.

Nelle cinque proposizioni Pascal lavorò sulle relazioni tra i segmenti presenti nelle tre figure accanto al titolo del saggio, relazioni che saranno riprese da altri matematici, tra cui Carnot, qualche secolo più tardi. Osserviamo che la quarta proposizione equivale al Teorema di involuzione di Desargues, che è citato da Pascal stesso.

L'altro suo lavoro da citare è il "*Conicorum Opus Completum*" che, per come ci è arrivato, è un lavoro incentrato sulle coniche, sulle loro costruzioni e sulle loro proprietà. In realtà possediamo solo il primo capitolo di quest'opera, infatti quando nel 1673 il segretario del Royal Society di Londra venne a conoscenza dell'opera, chiese a Leibniz di rintracciare i familiari di Pascal per recuperare il manoscritto, che non era mai stato pubblicato. Leibniz lo prese in prestito nel 1675 e lo restituì l'anno successivo, suggerendo una suddivisione in capitoli e consigliando ai familiari di farne delle copie e diffonderlo. Questo non accadde, e il manoscritto fu smarrito; Leibniz aveva copiato soltanto il primo capitolo, e questo è tutto ciò che abbiamo oggi. Ciò che è stato recuperato, in ogni caso, è estremamente interessante, infatti nella prima parte Pascal osservò che un piano può intersecare un cono in sei modi diversi, e dunque generare sei coniche diverse (comprese quelle degeneri). Nel suo studio, in cui incluse i punti all'infinito, non si fermò a questo, anzi osservò che ogni conica è proiezione di un cerchio di base del cono dal vertice del cono stesso. Questo gli permise di definire i *punti senza immagine*, cioè punti del cerchio la cui proiezione sul piano di sezione è a distanza infinita, e i *punti mancanti*, i punti della conica che sono proiezione dei punti senza immagine e che quindi sono all'infinito. Pascal si concentrò molto anche sul

rapporto tra le tangenti e le corde del cerchio di base e il rapporto tra la loro proiezione sul piano di sezione e la conica generata, soffermandosi in particolar modo sull'iperbole. Esistevano altre cinque sezioni di questo manoscritto, ma purtroppo di esse ci sono arrivate solo le note scritte da Leibniz. Nella seconda parte invece troviamo uno studio di quello che chiamò *Esagramma Mistico*, cioè formato da sei rette in posizione generale (mai tre per uno stesso punto), che individuano quindici punti di intersezione. Questo studio ebbe un'applicazione importante: lo studio dei quindici punti consente di esprimere contemporaneamente il teorema di Pascal (sui sei punti su una conica) e quello di Desargues (sui triangoli omologici).

1.1.3 Poncelet



Figura 1.11: *Jean-Victor Poncelet*

Possiamo far risalire la nascita della moderna geometria proiettiva (anche se al tempo non possedeva ancora questo nome) ad un trattato scritto dal matematico Jean-Victor Poncelet, nato nel 1788 a Metz, in Francia. Entrò alla École Polytechnique nel 1807, e lì ebbe insegnanti come i matematici Gaspard Monge, Lazare Carnot e Charles Brianchon. A causa della sua salute cagionevole saltò gran parte del suo terzo anno di studi, motivo per cui si laureò a 22 anni, più tardi dei suoi coetanei. Decise in seguito di intraprendere la carriera militare, e divenne tenente. In quegli anni svolse qualche incarico di tipo ingegneristico, ma nel 1812 fu richiamato per unirsi all'esercito di Napoleone e partire per la Russia. Fu attivamente coinvolto nei combattimenti e fu responsabile della costruzione di

ponti sul fiume Dnepr. Una volta entrati a Mosca, dopo una settimana Napoleone ordinò la ritirata dell'esercito, ma in quel momento i russi attaccarono, e Poncelet, creduto morto, fu lasciato sul campo di battaglia. Fu raccolto dai soldati nemici solo perché pensavano che, essendo un ufficiale, potesse fornire informazioni utili. In quanto prigioniero di guerra fu costretto a marciare fino alla sua prigione, a Saratov, sulle rive del Volga. Qui, una volta arrivata la primavera, si sentì sufficientemente in forze per recuperare le sue conoscenze matematiche e scrivere quelli che oggi sono noti come *"I quaderni di Saratov"*, una prima bozza della sua opera di geometria. Il Trattato di Parigi del 1814 sancì la pace tra Francia e Russia, e Poncelet tornò in Francia. Al ritorno lavorò come ingegnere militare e si dedicò anche allo studio approfondito della geometria, cosa che lo portò, nel 1822, a pubblicare il *"Traité des propriétés projectives des figures"*, uno studio delle proprietà invarianti per proiezioni. In questo trattato enunciò il principio di continuità, che vedremo tra poco nel dettaglio e che causò qualche diatriba, in particolare con il matematico Cauchy. Poncelet entrò in polemica anche con Gergonne e Plücker per la priorità del principio di dualità, che lo spinse a dedicarsi alla meccanica piuttosto che alla geometria. Morì nel dicembre 1867, dopo una lunga malattia, e purtroppo alcuni dei suoi manoscritti inediti andarono perduti durante la Prima Guerra Mondiale.

L'innovazione di Poncelet risiede nel suo interesse verso le proprietà grafiche delle figure, e non metriche. Questo significa che il focus non è posto sulle misure di segmenti o angoli, ma solo su quelle proprietà che rimangono invariate tramite proiezioni o sezioni, ad esempio l'essere allineati (per i punti) o incontrarsi o essere tangenti (per le rette e le curve). Inoltre, e da questo momento in avanti sarà sempre così, considerò le figure piane comprendendo i punti all'infinito, e immaginando tali punti come facenti parte di una retta all'infinito, anch'essa parte del piano.

Poncelet considerò proiezioni e sezioni come facenti parte di quelle che già altri matematici avevano chiamato *trasformazioni continue*. Inoltre è noto per il suo *Principio di continuità*, che può essere espresso in questo modo.

Teorema 1.6 (Principio di continuità). *Se un teorema che esprime certe proprietà geometriche di una figura, rimane vero quando si cambi la figura con movimenti infinitesimali continui, dei quali non si pongono particolari restrizioni rispetto alla*

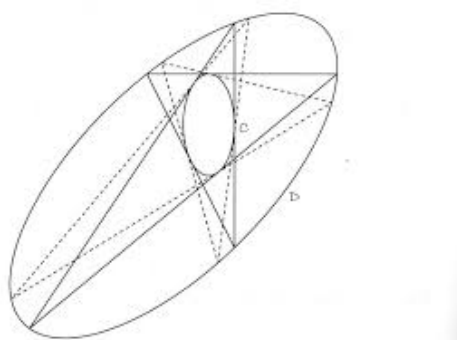


Figura 1.12: *Teorema di Poncelet*

realtà della figura, allora il teorema rimane vero anche se alcuni particolari della figura scompaiono divenendo immaginari.

In termini moderni potremmo riformularlo così: se $f(x_1, \dots, X_n; X_1, \dots, X_n) = 0$, è valida per le X_i , e per dei valori $a_1, \dots, a_n$ dei parametri $x_1, \dots, x_n$, dove $X_1, \dots, X_n$, sono legati ad una figura data, allora se l'identità vale anche per valori in un intorno di $(a_1, \dots, a_n)$, vale anche per valori complessi delle X_i . Fu proprio studiando i punti complessi che Poncelet scoprì che tutte le circonferenze nel piano hanno due punti in comune: $(1, i, 0)$ e $(-1, i, 0)$, in odierne coordinate omogenee, detti *punti ciclici*.

Fu sempre Poncelet a definire e sviluppare la teoria e le implicazioni del birapporto, e a intuire una corrispondenza tra polo e polare, che divenne terreno fertile per lo studio della dualità proiettiva.

Ricordiamo infine un Teorema per cui Poncelet divenne molto noto, illustrato nella Figura 1.12.

Teorema 1.7 (Teorema di Poncelet). *Se partendo da un punto di una conica si traccia la tangente ad un'altra conica fino a raggiungere la prima e procedendo in questo modo si torna al punto di partenza, allora questo accade da qualunque punto della prima conica si parta.*

1.1.4 von Staudt

Un altro matematico il cui lavoro fu apprezzato solo da metà Ottocento fu Karl von Staudt. Nacque nel 1798 a Rothenburg, in Germania. Quando von Staudt aveva quattro anni la sua città natale fu annessa alla Baviera, e questo comportò vari scovolgimenti nel sistema educativo. Per questo motivo dovette spostarsi ad



Figura 1.13: *Karl von Staudt*

Ansbach per frequentare una scuola superiore, e qui si appassionò alla matematica. Finite le superiori non andò subito all'università, ma rimase ad Ansbach e prese lezioni private dal suo ex professore di matematica, che dopo qualche tempo gli consigliò di recarsi a Gottinga per conoscere e frequentare le lezioni tenute da Gauss. A livello burocratico e amministrativo non fu affatto facile, perché per chi viveva in Baviera e voleva studiare fuori dal Regno si presentavano varie difficoltà. Una volta superate, affiancò Gauss, che in quel momento era impegnato in calcoli astronomici, per tre anni, poi dovette tornare a Rothenburg per problemi familiari. Decise quindi di proseguire gli studi con un dottorato, ma la sua scarsa preparazione filosofica fu motivo di alcuni rifiuti da parte di professori nelle università vicine. Fu l'università di Erlangen a consentirgli di conseguire questo titolo. Nel 1822 scelse di sostenere l'esame per diventare insegnante di matematica al Gymnasium, in termini moderni si tratta di una scuola superiore, e fu assunto nella scuola di Würzbur, dove aveva concluso il suo tirocinio. Nello stesso anno fu nominato docente nell'università di quella città, nonostante qualche opposizione sorta proprio per la sua scarsa preparazione filosofica. Von Staudt aveva la reputazione di essere un eccellente insegnante, ma molto affaticato dal peso di dover sostenere le lezioni sia al Gymnasium sia all'Università. Insoddisfatto della sua situazione a Würzbur accettò il lavoro che gli fu offerto ad un Gymnasium di Norimberga, dove fu anche nominato professore di matematica alla Scuola Politecnica. Infine si spostò all'Università di Erlangen, dove rimase per il resto della sua vita. Morì nel 1867 a Erlangen.

Nel 1847 pubblicò il suo *"Geometrie der lage"*, seguito da tre scritti riuniti nel

"Beiträge zur Geometrie der Lage". In questi testi riuscì a rendere i principi e i metodi della geometria proiettiva indipendenti da caratterizzazioni metriche, e fornì un'assiomatizzazione importante degli oggetti di base. Così facendo rese possibile il pari utilizzo e la pari manipolazione dei punti e delle rette propri e impropri. Interessante fu il suo approccio alla dualità: infatti la rese una parte fondamentale del suo studio, e gli consentì di trattare le coniche con un nuovo approccio, cioè vedendole attraverso corrispondenze proiettive. Purtroppo il modo conciso in cui scrisse i suoi trattati e la totale assenza di immagini li resero poco leggibili, per cui ebbero poco successo e furono poco diffusi. Fu grazie al *"Die Geometrie der Lage"* di Karl Theodore Reye, un libro che seguiva, ampliava e rendeva più accessibili le proposte di von Staudt, che le sue idee raggiunsero un pubblico più ampio.

1.2 La geometria nell'Ottocento

Attorno al 1830, in una fase di enorme progresso, la geometria vide accentuarsi al suo interno una spaccatura già presente: si contrapponevano matematici che seguivano l'approccio sintetico, e matematici che seguivano l'approccio algebrico (o analitico). Ricordiamo infatti che fino a Cartesio (1596-1650) la geometria si era sviluppata seguendo le metodologie presenti in Euclide, ma l'unione tra geometria e algebra proposta da Cartesio aveva aperto una nuova via allo studio della materia. L'introduzione di un sistema di coordinate aveva permesso una manipolazione degli oggetti geometrici molto diversa rispetto al passato, ma a inizio Ottocento sembrava che questa nuova strada non potesse più dare frutti. Il conflitto fra le due parti fu intenso, e ognuno sosteneva che il proprio metodo fosse migliore. Ognuno dei due approcci, singolarmente, presentava vantaggi e svantaggi. Per quanto riguarda l'approccio sintetico possiamo sicuramente affermare che, essendo indipendente da considerazioni metriche, fu una base fondamentale per lo sviluppo della geometria proiettiva. Consentiva, infatti, di considerare i punti all'infinito alla pari degli altri, unificando i casi di parallelismo e di incidenza di rette nel piano (o piani nello spazio). A volte però richiedeva costruzioni geometriche complicate e poteva presentare difficoltà nel considerare alcune curve (ad esempio le cubiche), problemi che la geometria analitica risolveva con calcoli talvolta anche semplici. L'approccio analitico invece permetteva di sfruttare tutta

la forza dell'algebra per trattare tramite equazioni le figure geometriche. Questo metodo consentiva anche di scoprirne proprietà che l'approccio sintetico non era in grado di portare alla luce. Consentiva anche di trattare curve (o superfici) che non sarebbero state trattabili con costruzioni geometriche (ad esempio definite da polinomi di grado superiore a due, o trascendenti). Un grande limite fu visto nel non poter applicare le coordinate cartesiane ai punti all'infinito, che potevano solo essere visti come punti limite degli altri; inoltre alcuni calcoli potevano diventare davvero complicati (per costruzioni geometriche anche piuttosto semplici). Negli anni '30 dell'Ottocento questa dualità si accentuò, dato che i progressi della geometria analitica erano rallentati fino quasi a fermarsi mentre la via sintetica aveva vissuto un momento di enorme crescita grazie alla scoperta di nuovi teoremi di geometria proiettiva. Questo diede una forte spinta ai matematici che preferivano l'approccio algebrico, e per rimanere al passo con i progressi si lavorò per introdurre l'algebra nella geometria proiettiva. Josef Diez Gergonne (1771-1859), August Möbius (1790-1868) e Jacob Plücker (1801-1868) furono coloro che contribuirono maggiormente allo sviluppo del metodo analitico, mentre Joseph Steiner (1796-1863) e Michel Chasles (1793-1880) furono i matematici che diedero il maggiore impulso al metodo sintetico. In questi anni Möbius introdusse quelle che chiamò *coordinate baricentriche*, per poter maneggiare in modo algebrico anche i punti all'infinito; queste furono modificate da Plücker, che decise di chiamarle *coordinate omogenee*, che sono proprio quelle che utilizziamo ancora oggi. Un punto nel *piano proiettivo*, sempre definito da Plücker, era individuato quindi da una tripletta di coordinate (x, y, z) . L'approccio algebrico fu ciò che permise a Gergonne di ipotizzare una legge di dualità, che fu studiata a lungo e divenne uno dei cardini della geometria proiettiva. I matematici che si muovevano lungo la via sintetica, invece, definirono il *birapporto*, lo studiarono a lungo e osservarono in particolar modo sotto quali trasformazioni del piano esso veniva conservato. Secondo loro si trattava del principio che doveva essere messo alla base di tutta la geometria proiettiva.

Nonostante questa forte dicotomia, fu soltanto nella seconda metà del secolo che si compresero le potenzialità di una combinazione dei due metodi.

È anche necessario ricordare nell'Ottocento ci fu un estremo fermento nel campo della geometria, a causa di alcune pubblicazioni che misero in discussione vari cardini della disciplina. Nacque infatti in questo periodo la necessità di dare un

fondamento assiomatico alle varie branche della matematica, e il dibattito si concentrò appunto sulla geometria. Fino ad allora essa era stata fondata e sviluppata a partire dagli *"Elementi"* di Euclide, che indicavano cinque postulati alla sua base.

La discussione nacque quando alcuni matematici iniziarono a chiedersi se il V postulato fosse dipendente dai primi quattro, e quindi "eliminabile" per un discorso di sintesi. Il suo enunciato originale era:

"Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti".

Ne forniamo una rappresentazione grafica nella Figura 1.14.

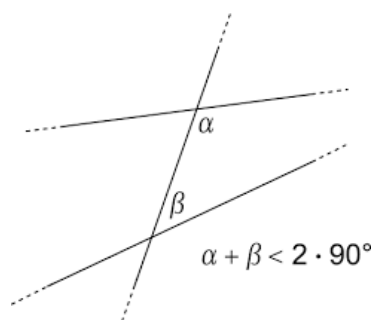


Figura 1.14: Quinto postulato di Euclide

Un primo passo per poterlo analizzare è formulare degli enunciati equivalenti che ne permettano una più facile manipolazione, cosa che fu fatta ampiamente e che ha portato alla formulazione più utilizzata oggi, quella di Playfair (fine del XVIII Secolo):

"dati una qualsiasi retta r e un punto P non appartenente a essa, è possibile tracciare per P una e una sola retta parallela alla retta r data".

Osserviamo preliminarmente che tale postulato può essere negato in due modi.

Prendendo in esame la formulazione di Playfair, possiamo negare l'esistenza o l'unicità della retta parallela alla retta data passante per il punto.

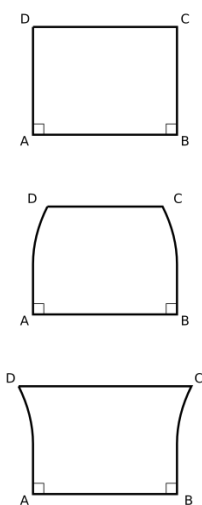


Figura 1.15: *Quadrilatero birettangolo isoscele*

Negando l'esistenza otteniamo che non esistono rette parallele a quella data passanti per il punto, mentre negando l'unicità otteniamo infinite rette parallele a quella data passanti per il punto. Queste due negazioni sono quelle che hanno portato allo sviluppo delle *geometrie non euclidee*, rispettivamente quella ellittica e quella iperbolica.

Ci furono inizialmente vari tentativi di dimostrazione di dipendenza del V postulato dai quattro precedenti, quasi tutti falliti. Nello specifico ricordiamo Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), che lavorò proprio in questa direzione. Egli prese un segmento AB , due segmenti congruenti AC e BD , perpendicolari ad AB , e unendo i punti C e D ottenne quello che chiamò quadrilatero birettangolo isoscele, come si vede nella Figura 1.15. Capì che se fosse riuscito a dimostrare che gli angoli in C e in D erano retti senza utilizzare il quinto postulato di Euclide, avrebbe dimostrato la dipendenza di tale postulato dai primi quattro. Arrivò facilmente a provare che gli angoli in C e in D erano uguali, ma non riuscì a ricondurli a due angoli retti.

Scelse allora di ipotizzare che non lo fossero, e analizzò i due casi rimanenti, cioè che gli angoli in C e D fossero di ampiezza maggiore o minore di un angolo retto. Nel caso di angoli ottusi riuscì a giungere a una contraddizione (ragionamento fallace, colpa del postulato dell'obliqua e del secondo postulato di Euclide), nel caso di angoli acuti sfruttò quella che lui chiamò la *natura della retta* per dire che si otteneva nuovamente una contraddizione (introduce oggetti contrari all'intuizione).

I suoi tentativi dunque fallirono, ma aprirono la strada ad altri studi, mirati ad analizzare la *geometria naturale o assoluta*, cioè quella costruita senza il quinto postulato. Moltissimi matematici della prima metà dell'Ottocento si occuparono della questione, ed è proprio per questo motivo che le medesime idee nacquero in vari luoghi nello stesso periodo, a dimostrazione del fatto che la questione era diventata pressante per tutta la comunità matematica.

János Bolyai (1802-1860) fu un militare che si appassionò particolarmente al problema, fino a farla diventare un'ossessione. Iniziò il suo studio con l'obiettivo

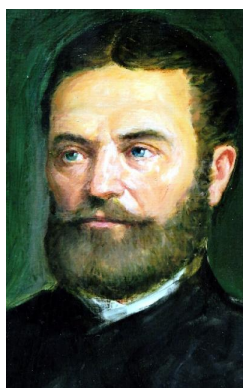


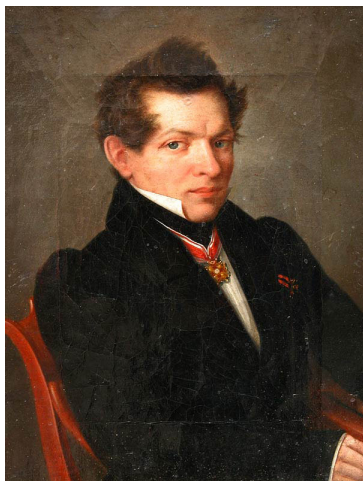
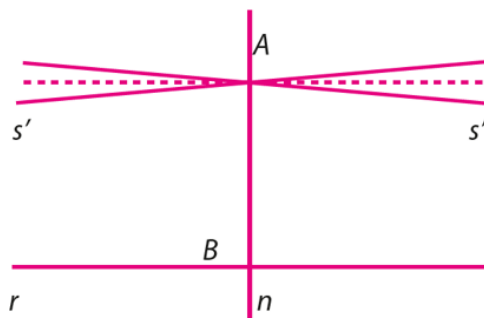
Figura 1.16: *János Bolyai*

di dimostrare la dipendenza del V postulato dai primi quattro, ma realizzò ben presto che tale postulato era a tutti gli effetti indipendente dai precedenti. Scelse allora di cambiare strada, e analizzare la geometria che vedeva alla sua base solo i primi quattro postulati di Euclide, quella che lui chiamò *geometria assoluta*. Ne diede una formalizzazione elegante, e riuscì ad ottenere e dimostrare vari teoremi che risultavano quindi validi anche nelle geometrie in cui si considera falso il V postulato. Si concentrò poi su quella che verrà chiamata *geometria sferica*, cioè quella geometria che si crea quando si suppone falso il V postulato e si suppone che non esistano rette parallele a una retta data passanti per un punto. Mostrò anche come questa coincidesse con la geometria euclidea del piano al tendere del raggio della sfera all'infinito.

Un altro matematico che lavorò sulle geometrie non euclidee fu Nikolaj Lobačevskij (1792-1856), che ebbe decisamente meno fortuna degli altri matematici del suo tempo che si occuparono del problema. Il suo libro "*Geometria immaginaria*" del 1835 non fu affatto apprezzato nella sua patria, la Russia, perché considerato un'assurdità, tanto che il matematico Ostrogradskij la definì:

"[...] una farsa. Invece di sostenere che la somma degli angoli del triangolo non è uguale a due retti, avrebbe potuto allo stesso modo sostenere che il nero è bianco e il quadrato rotondo! Ci si domanda perché si scrivano e, ancora di più, perché si pubblicino simili assurde elucubrazioni".

È quindi evidente che il suo lavoro non ebbe alcun successo in Russia, ma la scelta di tradurlo in francese si rivelò invece vincente perché fu in questo modo che attirò l'attenzione di Gauss, il quale contemporaneamente a Bolyai si era posto

(a) *Nikolaj Lobačevskij*(b) *Intervallo di rette parallele a una retta data*

il problema dell'eventuale eliminazione del V postulato di Euclide. Nel suo libro Lobačevskij proponeva una nuova analisi del parallelismo tra rette. Ponendo falso il V postulato osservò una retta e si chiese se potessero esistere più rette parallele a quella data passanti per un punto esterno ad essa.

Costruì la perpendicolare alla retta data passante per il punto e, sfruttando il punto come perno, fece ruotare la perpendicolare ponendo la sua attenzione sul punto di intersezione. Si accorse che da un certo punto in poi quel punto "spariva" da un lato per poi "ricomparire" dall'altro. Così si chiese quanto fosse grande l'intervallo in cui le due rette non si intersecavano, supponendo che in tale intervallo ci fosse una pluralità di rette parallele a quella data, come si vede nella Figura 1.17b. Pose in questo modo le basi per lo sviluppo di quella che verrà chiamata *geometria iperbolica*.

Il nuovo modo di intendere la geometria si rifletté in tutte le sue branche, tanto che fu rivoluzionato il concetto vero e proprio di geometria, e si iniziò di conseguenza a ragionare anche sulle fondamenta della matematica in generale.

Capitolo 2

La scuola italiana

Per analizzare gli anni tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento dal punto di vista del progresso matematico dobbiamo necessariamente menzionare Felix Klein (1849-1925). Nel 1872, all'età di ventitre anni, il matematico tedesco pubblicò il suo *"Erlanger Programm"*, volto a fornire una nuova impostazione e classificazione della geometria. Ci troviamo in un momento storico in cui era sentita l'esigenza di una sistemazione della geometria che fosse più unitaria e che superasse l'impostazione euclidea. Klein ebbe l'idea di definire ogni particolare geometria come lo studio delle proprietà di un determinato spazio che risultano invarianti rispetto a un fissato gruppo di trasformazioni. Possiamo fornirne una definizione più matematica in questo modo:

Definizione 2.1. *Una geometria nel senso di Klein è una coppia (X, G) , dove X è un insieme non vuoto e G è un gruppo di applicazioni su X .*

Fu dunque chiarito il fatto che la geometria non fosse unica, ma ne esistessero addirittura infinite, in base allo spazio considerato e al gruppo di trasformazioni da applicare alle sue figure. La scelta di tali trasformazioni equivale alla scelta di un criterio di uguaglianza tra figure geometriche. L'influenza di tale testo, inizialmente limitata, divenne poi universale, fornendo una base generale per l'impostazione di tutti i corsi universitari di geometria. Per tornare all'ambito di nostro interesse, da questo momento in poi per geometria proiettiva si intende lo studio delle proprietà invarianti per trasformazioni proiettive, dette anche *proiettività*.

Inoltre con la scoperta delle geometrie non euclidee iniziò un periodo di profonda crisi per la matematica, che coinvolse tutte le sue branche e che costrinse i matematici a una vera e propria rivoluzione della disciplina. Generalmente quando

si parla di *crisi dei fondamenti* ci si riferisce in particolar modo alle problematiche rilevate dal matematico e logico Bertrand Russell, il quale notò una contraddizione intrinseca nel Teorema di Cantor, che aveva il seguente enunciato:

Teorema 2.2 (Teorema di Cantor). *Per un qualsiasi insieme X vale che l'insieme dei suoi sottoinsiemi (altrimenti detto insieme delle parti) ha cardinalità maggiore di quella di X .*

La contraddizione insita nel Teorema 2.2 risiede nel fatto che se consideriamo l'insieme di tutti gli insiemi, esso coincide col suo insieme delle parti, e in questo caso la tesi è falsa. Questa contraddizione e quella data dal paradosso di Russell, che citiamo tra poco, indicano la necessità di ripensare interamente la nozione di insieme, e darne una definizione che eviti queste contraddizioni. Possiamo riassumere il paradosso di Russell in questo modo:

$$\text{Sia } \mathbf{R} = \{x | x \notin x\}, \text{ allora } \mathbf{R} \in \mathbf{R} \iff \mathbf{R} \notin \mathbf{R}.$$

In altre parole $\mathbf{R}$ è l'insieme che comprende tutti gli insiemi che non contengono sé stessi come elemento, e la contraddizione sorge quando ci si chiede se $\mathbf{R}$ appartenga o meno a sé stesso: si ottiene che $\mathbf{R}$ appartiene a sé stesso se e solo se $\mathbf{R}$ non appartiene a sé stesso. Oltre a questi paradossi riguardanti soprattutto l'uso dell'infinito, si ebbe la necessità di una rigorosa definizione dei numeri reali, su cui si basava l'analisi matematica, e che arrivò solo nella seconda metà del secolo.

Per quanto riguarda la geometria ci si dovette interrogare sul significato e sul ruolo di questa disciplina, in quanto le nuove geometrie non euclidee avevano dato luogo a rappresentazioni decisamente lontane dalla realtà osservabile ma pur sempre logicamente coerenti. Venne quindi messa in discussione la validità e l'unicità della geometria euclidea, fino ad allora considerata un modello di rigore scientifico. Da questo momento di incertezza nacque la necessità sempre più pressante di dare una vera e propria base assiomatica alla matematica. Per questo motivo tantissimi matematici di tutta Europa lavorarono per fornire degli assiomi e dei postulati su cui fondare i vari rami della matematica, risultato che (per quanto riguarda la geometria) si ottenne solo nel 1899 con il "*Grundlagen der Geometrie*" di David Hilbert, che impose il totale abbandono del livello empirico-intuitivo tipico della geometria classica.

2.1 La scuola italiana

La risposta italiana alla crisi dei fondamenti e alle proposte tedesche volte in questa direzione non tardò ad arrivare. Tra la metà dell'Ottocento e l'inizio del Novecento i matematici italiani furono protagonisti di un periodo di grandi rinnovamenti a livello scientifico, portando a risultati sorprendenti. Questo momento di splendore italiano fu determinante per la matematica moderna, sia dal punto di vista assiomatico sia dal punto di vista metodologico. Si stima che i protagonisti di questa innovazione siano tra trenta e quaranta in tutta Italia, ma gli esponenti universalmente riconosciuti furono Corrado Segre, Giuseppe Peano, Francesco Severi, Gino Fano, Giuseppe Veronese, Luigi Cremona (che coniò il nome "geometria proiettiva"), Guido Castelnuovo e Federigo Enriques. Non si trattava di un gruppo di ricerca unito e con uguali obiettivi, ma piuttosto di matematici singolarmente impegnati su temi di ricerca convergenti e spesso con forti collaborazioni tra loro. Al centro dei loro interessi c'erano la caratterizzazione e la classificazione delle curve su una superficie e, impresa ben più ardua, delle superfici algebriche, ognuno con il metodo geometrico che più riteneva adatto (alcuni prediligevano un approccio logico-assiomatico, altri intuitivo-esplorativo). La scuola italiana di geometria algebrica fu infatti caratterizzata dal tentativo di conciliare una visione intuitiva della geometria e un attaccamento all'empirismo con le esigenze di rigore e la necessità di astrazione e generalizzazione che nel frattempo si stavano rivelando questioni sempre più pressanti. Il lavoro di questi matematici, come abbiamo avuto modo di osservare, si colloca infatti in un periodo di grandi mutamenti teorici. Il primo centro del fermento matematico lo possiamo individuare a Torino, nonostante negli anni '30 del Novecento ne sia divenuta Roma il centro principale. I risultati ottenuti dai matematici italiani in questi anni influenzarono fortemente i colleghi in tutta Europa, e il declino arrivò solamente dopo la II guerra mondiale, quando si imposero i metodi altamente formalizzati della scuola francese (il *Bourbakismo*). Vediamo alcuni degli esponenti più importanti nel dettaglio.

2.1.1 Segre e Peano

Corrado Segre (1863-1924) fu un matematico italiano di grande spessore, oggi considerato il fondatore della scuola italiana di geometria algebrica. Nacque a Saluzzo ma studiò a Torino, dove si laureò a soli vent'anni in Matematica, contro il

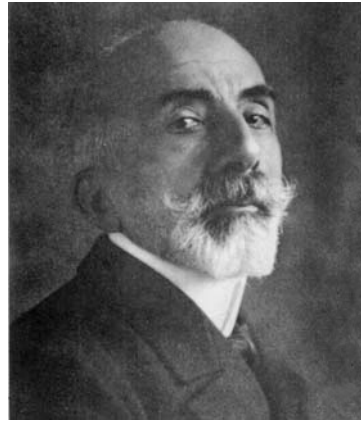


Figura 2.1: *Corrado Segre*

volere del padre che sperava diventasse ingegnere. Segre comprese l'importanza di sapere utilizzare sia metodi geometrici sia analitici, e fu forse da questa unione di metodologie che si sviluppò in tutta la sua potenza la geometria algebrica. Scrisse la sua tesi di laurea in un momento molto difficile a livello familiare, in quanto la sua famiglia collassò economicamente e il padre morì proprio nel periodo vicino alla sua discussione. Si laureò in ogni caso a pieni voti, scrivendo una tesi che fu di fondamentale importanza per la nascita della geometria algebrica, e che al tempo ricevette vari riconoscimenti da matematici affermati. In particolare fu notato come il suo lavoro non risultasse affatto scritto da un matematico principiante, ma da uno esperto e preparato. Prima di completare la sua tesi mandò il suo articolo *"Sur les différentes espèces de complexes du 2 degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre"* al matematico Felix Klein (1849-1925) per farlo pubblicare in una rivista matematica, e da allora i due rimasero in contatto, dando vita a una florida corrispondenza. Questa amicizia segnò Segre tanto che prima di morire scrisse:

"[Klein] è stato il mio Maestro, pur essendo noi a tanta distanza!"¹

Negli anni successivi alla laurea fu assistente di d'Ovidio, al tempo professore di Algebra e Geometria analitica a Torino, suscitando ammirazione in d'Ovidio stesso. Divenne in seguito assistente di Giuseppe Bruno, professore di Geometria proiettiva e descrittiva. Alla fine degli anni Ottanta dell'Ottocento Segre godeva già di una certa reputazione, e in quegli anni gli fu offerta una cattedra all'Università di Napoli, che rifiutò per rimanere a Torino. L'Università di Torino

¹Nachlass Klein, *Lettere a Felix Klein (1883-1923)*, Staats-und Universitätsbibliothek, Göttinga

quindi chiese al Ministro dell'educazione se si potesse dividere in due la cattedra di geometria proiettiva e descrittiva, tra Segre e d'Ovidio, ma la richiesta fu respinta. Fu dunque creato un nuovo corso di Geometria superiore, di cui Segre divenne titolare. Alla pubblicazione dell' *"Erlanger Programm"* di Klein, Segre fu così entusiasta che propose a uno dei suoi studenti, Gino Fano, di farne una traduzione da far circolare in Italia, e in questo modo fu diffuso, pubblicato sulla rivista *"Annali di Matematica"*. Interessante è notare la sua produzione ingente: Segre contò ben 128 pubblicazioni, di per sé un numero altissimo, ma di cui egli si lamentò molto. Infatti nella prima fase della sua carriera si ammalò fortemente per il troppo lavoro, e da quel momento non riuscì più a sostenere la stessa mole di lavoro che era capace di sostenere prima della malattia. Rimase a Torino insegnando geometria fino alla sua morte, lasciando un'eredità estremamente florida ai matematici che vennero dopo di lui.

I primi lavori di Segre riguardano la geometria degli iperspazi. Nel 1877 d'Ovidio aveva pubblicato un'importante memoria, in cui si trovano i primi sviluppi della geometria iperspaziale da un punto di vista metrico-proiettivo, e questo lo ispirò a lavorare proprio in tale direzione. Studiando gli spazi vettoriali (da lui chiamati *lineari*) e utilizzando l'algebra lineare che aveva a disposizione (ricordiamo che la forma attuale dell'algebra lineare fu raggiunta solo attorno al 1920 con gli studi di Weyl), notò un forte legame con la geometria proiettiva, e seguì l'ormai consolidata impostazione di d'Ovidio e Veronese di non porre limite alla dimensione dello spazio con cui poteva lavorare. Questo generò varie e forti discussioni, in quanto per poter parlare di spazi n -dimensionali era necessaria una netta rottura del legame della matematica con la realtà. Francesco Severi a proposito scrisse:

"Per Veronese, per Segre, per Bertini, per tutti i nostri Maestri insomma di geometria iperspaziale, punti, rette, piani di un S_n lineare, sono vere entità geometriche e non meri attributi di entità analitiche. Lo spazio lineare a n dimensioni per loro è come se realmente esistesse. Non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione del linguaggio".²

Grazie a recenti studi algebrici di Weierstrass e di Frobenius, Segre fu capace di sistematizzare la geometria proiettiva utilizzando sia metodi sintetici sia metodi

²Severi F., prefazione a *Corrado Segre, Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. xii-xiii

analitici, provando quanto fosse importante saper unire le due metologie. Fu proprio Segre a dare una prima definizione di *spazio lineare*, che pose all'inizio della sua tesi (di cui troviamo una prima formulazione in Grassmann):

”Uno spazio qualunque ad m dimensioni dicesi lineare quando si possono attribuire a ciascun suo elemento i valori numerici (reali od imaginari) di m quantità in modo che, senza alcuna eccezione, ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio, e viceversa ad ogni elemento di questo corrisponda un solo determinato gruppo di valori di quelle. I valori di queste quantità corrispondenti a quell'elemento si dicono coordinate di questo. Rappresentandole coi rapporti di m altre quantità ad una $(m + 1)$ -esima, queste costituiranno le $m + 1$ coordinate omogenee dell'elemento dello spazio considerato, cosicch  ogni elemento di questo, senza eccezioni, sar  individuato dai rapporti mutui di queste coordinate omogenee e servir  viceversa ad individuare questi loro rapporti.” ³

Si tratta di una definizione ancora acerba, in quanto di difficile comprensione e non completa, infatti non   esplicitato il fatto che la m -upla di soli zeri non costituisce alcun punto (ricordiamo che Segre aveva solo vent'anni quando scrisse la sua tesi). Diede poi la definizione di *isomorfismo*, e sfrutt  queste mappe per studiare varie propriet  degli spazi proiettivi. In alcune memorie Segre mostr  anche l'utilit  di ricorrere agli iperspazi per studiare propriet  dello spazio ordinario S_3 , come allora si indicava lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Proprio come aveva fatto d'Ovidio, Segre lavor  sulla legge di dualit  e sul rapporto tra polo e polare, focalizzandosi sullo studio delle quadriche. Verso la fine degli anni Novanta dell'Ottocento inizi  a distaccarsi dalla visione unicamente proiettiva e, grazie ai contatti mantenuti con Klein e alla lettura di articoli e studi pubblicati da alcuni matematici tedeschi, tra cui Max No ther, il suo interesse si spost  sull'analisi delle propriet  invarianti per *trasformazioni birazionali*, avvicinandosi al campo della geometria algebrica. Per quanto riguarda il problema dei fondamenti, Segre non se ne occup  mai personalmente, ma spron  i suoi studenti

³Segre C., 1883, "Studio sulle quadriche in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni", Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Vol. 36, p. 4

a pensare a un sistema di postulati e assiomi su cui si potesse fondare e poi dedurre la geometria proiettiva. In questo si distinse in particolar modo Gino Fano, suo allievo, il cui lavoro fu elogiato da vari matematici di tutta Europa.



Figura 2.2: *Giuseppe Peano*

Giuseppe Peano (1858-1932) nacque a Cuneo in una famiglia di contadini. Appena suo zio si accorse della sua spiccata intelligenza lo portò con sé a Torino per conseguire gli studi. Qui concluse le scuole superiori ed entrò all'Università di Torino. Dopo la laurea in matematica divenne assistente di d'Ovidio, e in quell'anno pubblicò ben quattro articoli. Fu successivamente assegnato ad un altro professore, Angelo Genocchi, professore di Calcolo Infinitesimale, che fu subito colpito dall'albertà del suo assistente di trovare errori negli enunciati e nelle dimostrazioni fornendo dei controesempi originali. Questa fu la caratteristica che gli consentì di farsi largo nel panorama dei matematici italiani, e alla morte di Genocchi quindi sperò che la cattedra fosse assegnata proprio a lui. Quando si informò a riguardo scoprì che ci sarebbero stati dei ritardi perché c'erano stati dei problemi nel formare la commissione che avrebbe preso la decisione. Nel frattempo quindi Peano pubblicò ancora, e fu proprio in questi anni che introdusse le *space filling curves*, uno dei suoi successi più grandi: si tratta di curve continue che ricoprono un dato spazio, il cui esempio classico generalmente è la curva che ricopre il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, detta appunto *Curva di Peano*, di cui forniamo un'illustrazione nella Figura 2.3.

Quando la commissione fu pronta decise di assegnare la cattedra proprio a Peano, e qualche anno dopo iniziò a insegnare anche all'Accademia Militare di Torino. Nel 1891 fondò *Rivista di Matematica*, una rivista dedicata nello specifico

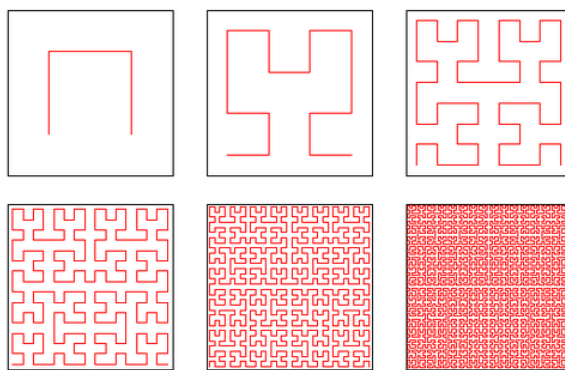


Figura 2.3: *Curva di Peano*

alla logica e ai fondamenti della matematica in cui, sfruttando le sue doti, fece notare come alcuni teoremi (a volte anche scritti dai suoi contemporanei) fossero falsi, trovandone delle eccezioni. Tra i colleghi che subirono questo trattamento ci fu anche Segre. Nel 1892 Peano iniziò un progetto piuttosto ambizioso, il *Formulario Mathematico*, che doveva essere un'opera in grado di uniformare il linguaggio matematico e renderlo il più semplice possibile. Peano stesso nel presentarne una nuova edizione scrisse:

”Ogni professore potrà adottare questo Formulario come libro di testo, poiché dovrebbe contenere tutti i teoremi e tutti i metodi. Il suo insegnamento si ridurrà a mostrare come leggere le formule e a indicare agli studenti i teoremi che desidera spiegare nel suo corso”.⁴

Il progetto fu inizialmente accolto con grande entusiasmo, ma quando fu pubblicato il volume sul Calcolo infinitesimale e Peano iniziò ad utilizzarlo per tenere le sue lezioni la reazione fu tutt'altro che entusiasta: lo stile era troppo formale, troppo complicato per gli studenti, motivo per cui l'Accademia Militare rescisse il suo contratto da professore. Nel 1908 il progetto del *Formulario Mathematico* fu completato, e nonostante la grande quantità di informazioni che conteneva fu utilizzato pochissimo. Dal 1900 la carriera di Peano prese una piega particolare: prima di allora aveva dimostrato un'incredibile originalità e spirito innovativo, mentre a inizio Novecento scelse di concentrarsi su due progetti di estrema difficoltà che rappresentavano vere e proprie imprese matematiche, ma che in seguito si rivelarono pressoché irrilevanti per il progresso della matematica.

⁴Peano G., *Introduction au tome II du "Formulaire de mathématiques"*, p. 4, traduzione italiana dell'autore della tesi.

I maggiori contributi per i quali ricordiamo Peano sono stati la sistemazione rigorosa dell'analisi (contemporaneamente a Weierstrass, Cauchy e Dini), l'assiomatica dei numeri naturali, la scoperta di una curva continua che riempie un quadrato e il teorema di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie.

Viene ritenuto il padre della logica matematica, assieme a Gottlob Frege. Per tale disciplina ideò un simbolismo matematico fatto ad hoc per semplificarne la scrittura, ad esempio fu introdotto proprio da lui un simbolo per indicare l'appartenenza ad un insieme (non era quello odierno, che fu introdotto in seguito da Bertrand Russell).

Il dibattito tra Segre e Peano fu particolarmente acceso, a causa del loro diverso approccio allo studio della matematica. Peano, essendo molto legato all'interpretazione realistica della matematica, non poteva accettare l'abbandono dell'empirismo da parte di Segre. Segre, a sua volta, prediligeva un'esplorazione intuitiva della materia, al contrario del suo collega che preferiva l'approccio rigorosamente logico-deduttivo. Si attaccarono duramente anche sull'aspetto didattico, in quanto Segre riteneva che le lezioni di Peano fossero troppo aride e complicate per delle giovani menti che necessitavano di uno stimolo all'esplorazione, critica a cui Peano rispose facendogli notare che la matematica senza il rigore non può esistere in alcun modo.

2.1.2 Veronese e Fano



Figura 2.4: *Giuseppe Veronese*

Giuseppe Veronese (1854-1917) nacque a Chioggia. Studiò a Venezia e al momento della scelta dell'Università si iscrisse al Politecnico di Zurigo, prima nella Sezione Meccanica poi, visti i suoi interessi in ambito geometrico, nella Sezione Matematica. Iniziò negli anni dell'Università una corrispondenza con Luigi Cremona, che si trovava a Roma, il quale gli suggerì di lavorare sull'Esagramma Mistico di Pascal. Ancora prima di laurearsi l'articolo era pronto e fu pubblicato; inoltre gli fu anche chiesto di ricoprire il ruolo di assistente alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Roma. Si laureò a Roma e decise di procedere con un dottorato. Qualche anno dopo, alla morte del professore che teneva il corso di Geometria algebrica a Padova, vinse il concorso ed ebbe tale cattedra, che mantenne fino alla sua morte.

Si interessò in particolar modo alla geometria n -dimensionale, seguendo un procedimento intuitivo che rispettasse due principi fondamentali: formulare assiomi indipendenti e non contraddittori, e stabilire una relazione tra tale sistema di assiomi e la nostra "intuizione spaziale" della realtà. Proprio per questo motivo le geometrie non euclidee per Veronese erano totalmente accettabili, dato che per tali geometrie esistevano dei modelli euclidei coerenti. Per quanto riguarda la geometria n -dimensionale dovette lavorare proprio su questo aspetto di intuizione spaziale. Scelse allora di utilizzare proiezioni e sezioni, trasformazioni tipiche della geometria sintetica, per scomporre gli oggetti appartenenti a spazi di dimensione n , fino a giungere a rappresentazioni bidimensionali o tridimensionali di questi. Questo metodo fu particolarmente utile anche per avere una visione migliore del piano e dello spazio proiettivo. Osservò a questo punto che alcuni oggetti di spazi proiettivi di dimensione inferiore erano più facilmente maneggiabili se "trasportati" in spazi proiettivi di dimensione maggiore. Questa direzione lo portò a definire la superficie ancora oggi nota come *superficie di Veronese*, definita in questo modo:

$$V : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$[x : y : z] \rightarrow [x^2 : y^2 : z^2 : yz : xz : xy].$$

Si tratta dell'immagine del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ attraverso tale mappa, che in $\mathbb{P}^5$ costituisce appunto una superficie. Contestualmente dimostrò anche come ottenere la *superficie Romana di Steiner* (una superficie definita da un polinomio di quarto grado scoperta dal matematico svizzero Steiner durante un suo soggiorno a Roma) proiettando la sua superficie in $\mathbb{P}^3$.

L'originalità del suo approccio si basava sulla predilezione delle tecniche geometriche intuitive rispetto quelle analitiche e algebriche. Questo approccio influenzò notevolmente la scuola italiana. Attorno al 1890 Veronese propose anche un nuovo concetto, quello di *geometrie non archimedee*, cioè geometrie in cui è negato l'assioma di Archimede 0.14. Peano criticò duramente la nozione a causa della mancanza di rigore nella definizione di Veronese, e anche per l'utilizzo non giustificato di alcuni oggetti matematici. Fu comunque uno spunto fertile, in quanto ne nacque una discussione che fu molto utile ad altri matematici di altre branche. La paura più diffusa era che i sistemi non archimedei non fossero coerenti, ma tutto ciò fu smentito da Hilbert qualche anno dopo.

Ricordiamo anche che il nome "geometria algebrica" fu coniato proprio da Veronese.

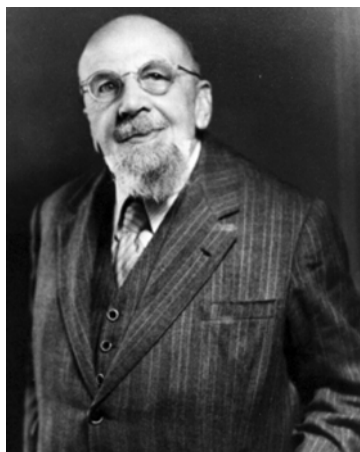


Figura 2.5: *Gino Fano*

Gino Fano (1871-1952) nacque a Mantova. Dovette convincere il padre a lasciarlo studiare matematica, in quanto egli inizialmente avrebbe desiderato che il figlio perseguisse la carriera militare, poi, dato che questa era stata nettamente rifiutata da Gino, avrebbe sperato in una carriera da ingegnere. Una volta convinto il padre, Fano si laureò nel 1892 a Torino, dove era stato allievo di Segre e Castelnuovo. Interessato agli sviluppi internazionali sulla geometria, si trasferì per un anno a Gottinga, dove seguì le lezioni di Felix Klein, e al suo rientro fu assistente di d'Ovidio, come tanti grandi matematici dell'epoca. Fu professore di Algebra e Geometria analitica a Messina dal 1899 al 1901, anno in cui tornò a Torino dopo aver vinto la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva. Durante la Prima Guerra Mondiale scelse di arruolarsi nel ruolo di tenente, per cui per

partire da una serie di assiomi su cui costruire il suo spazio e da cui si potesse poi ricavare la rappresentazione tramite coordinate.

2.1.3 Castelnuovo

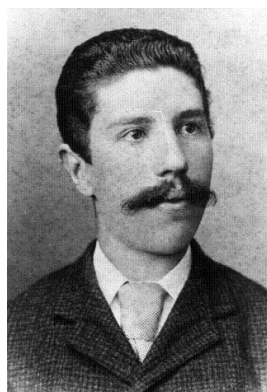


Figura 2.7: *Guido Castelnuovo*

Nato nel 1865 a Venezia, Guido Castelnuovo studiò matematica all'Università di Padova, e sviluppò subito un interesse per la geometria grazie anche al suo professore Giuseppe Veronese. Castelnuovo iniziò una corrispondenza che sarebbe durata tutta la vita con Segre poco dopo la laurea, quando gli mandò una copia dei suoi scritti e le ricevette indietro con all'interno gli appunti e le note di Segre stesso. Dopo un anno a Roma divenne assistente di d'Ovidio a Torino, come tanti celebri geometri di quel tempo. Nel 1891 accettò la cattedra di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Roma, dove conobbe e fu collega di Cremona. Alla morte del collega prese il suo posto come professore di Geometria superiore e scelse di dividere il corso in due parti: la prima era una panoramica generale della matematica, la seconda era specifica sulle curve algebriche piane. Rimase docente a Roma per i successivi 44 anni, tenendo anche corsi di Matematiche complementari e Calcolo delle probabilità. La sua ricerca nel campo della geometria si arrestò presto, perché dal 1906 si dedicò alla probabilità (su cui scrisse due volumi) e a questioni metodologiche, didattiche, storiche e fisiche. Le persecuzioni razziali, iniziate quando si era già ritirato dall'insegnamento, non lo toccarono direttamente nonostante fosse ebreo, tranne per un breve periodo di qualche mese in cui fu costretto a nascondersi. Durante gli anni del Fascismo tenne delle lezioni speciali di matematica per gli studenti ebrei che erano stati svantaggiati dal regime. Morì a Roma nel 1952.

Il suo primo lavoro fu in gran parte ispirato ai lavori di Cremona e Veronese, e nel periodo in cui visse a Torino ebbe una florida collaborazione con Segre. In questi anni il suo lavoro si concentrò sugli iperspazi, ma dagli anni Novanta dell'Ottocento, in particolar modo dopo che Enriques (matematico e suo cognato) si trasferì a Roma, il suo interesse si spostò sulla teoria delle superfici, che al tempo era ancora un territorio prevalentemente inesplorato. Il lavoro che fecero insieme fu di fondamentale importanza per lo sviluppo della classificazione delle superfici, in particolar modo lo studio delle superfici irregolari: riuscirono, insieme, a trovare alcuni esempi cruciali per avere una comprensione di queste ultime e dei loro possibili comportamenti.

Capitolo 3

Federigo Enriques

Federigo Enriques nacque nel 1871 a Livorno da una famiglia ebraica e di origini portoghesi. Conobbe per la prima volta la geometria all'età di tredici anni, e ne fu subito affascinato. Sua madre pensò che si trattasse di una delle passioni momentanee del piccolo Federigo, dato che ne aveva già avute tante, ma come avremo modo di vedere non fu questo il caso. Negli anni della scuola si appassionò anche alla logica, alla pedagogia e alla storia della scienza, interessi che lo accompagnarono tutta la vita e su cui, tanti anni più tardi, scrisse vari articoli e libri.



Figura 3.1: *Federigo Enriques*

Studiò alla Scuola Normale di Pisa, e si laureò nel 1891 con una tesi in geometria. Alcuni dei suoi professori furono Ulisse Dini, Vito Volterra e Riccardo de Paolis, che fu anche il suo relatore di tesi. Continuò a studiare a Pisa per un

altro anno, dopodiché scrisse una lettera a Guido Castelnuovo, che si trovava a Roma, per chiedere consiglio sulla direzione da prendere nelle sue ricerche. Scelse di seguire il suo consiglio e lavorò sulle superfici algebriche, trasferendosi per un anno a Roma per collaborare con lui, per poi trasferirsi di nuovo a Torino, dove lavorò con Corrado Segre. Nel 1893 pubblicò il suo *"Ricerche di geometria sulle superfici algebriche"*, un passo importante verso gli sviluppi di geometria algebrica che si videro qualche anno dopo. Nel 1893 si liberò una cattedra di Geometria descrittiva e proiettiva a Bologna; si vociferava che sarebbe stata assegnata a Mario Pieri senza indire un concorso, e la facoltà di Bologna accettò la proposta, ma poco tempo dopo il Ministro dell'educazione si trovò nel bel mezzo di uno scandalo, e il nuovo Ministro scelse di sospendere il contratto di Pieri e di assegnare la cattedra a chi avrebbe effettivamente vinto il concorso. Temporaneamente Enriques prese la cattedra, ma questa gli fu definitivamente assegnata dopo aver vinto il concorso. Mantenne la cattedra fino al 1922, quando gli fu offerta la cattedra di Matematiche superiori all'Università La Sapienza di Roma, dove qualche anno dopo iniziò a insegnare anche Geometria superiore. All'emanazione del Manifesto della Razza di Mussolini, nel 1938, gli fu revocata la cittadinanza italiana e fu costretto a lasciare il lavoro, in quanto ebreo. Purtroppo iscriversi al Partito Fascista non bastò a risparmiarlo dagli effetti delle leggi razziali, e fu costretto a nascondersi. Dal 1941 riuscì però a partecipare al progetto di Castelnuovo di organizzare un'Università clandestina per gli studenti che a loro volta erano stati colpiti dal regime e per alcuni dei loro studenti fidati. Con la caduta del Fascismo Enriques tornò a insegnare all'Università di Roma fino al 1946, anno in cui morì. Molti dei suoi studenti lo ricordano in questo modo:

"Come insegnante, Enriques non amava niente di più che intrattenersi nelle sue tranquille conversazioni peripatetiche con gli studenti, nei giardini pubblici di Bologna o sotto i portici dopo le lezioni. Quando si trasferì a Roma, il labirintico reticolo di viali di Villa Borghese divenne la sua meta preferita; si fermava lì di tanto in tanto, ricorda uno studente dell'epoca, "per tracciare figure misteriose sul terreno, con la punta del suo inseparabile bastone da passeggio".¹

¹Campedelli L., 1947, "Federigo Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche", Periodico di Matematiche, Serie 4, Vol. 25, p. 95-114

Per quanto riguarda il contributo di Enriques alla matematica dobbiamo sicuramente citare *"Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari"*, che conteneva la chiave per la classificazione delle superfici. Ricordiamo che lavorò anche sulla geometria differenziale, contribuì a scrivere tre articoli (uno sui fondamenti della matematica e due scritti insieme a Castelnuovo sulle superfici algebriche e sulle trasformazioni birazionali) per un'enciclopedia a cui stava lavorando Klein e scrisse alcuni libri di testo destinati alle scuole. Fu uno dei cofondatori di *Mathesis*, un'associazione italiana di insegnanti di matematica e fisica di cui fu Presidente per qualche anno, e fondò varie riviste, tra cui *Scientia* e *Periodico di matematiche*. Fu anche un grande appassionato di filosofia della scienza, arrivando addirittura a chiedere all'Università di Bologna di creare un corso libero su tale materia. Appare evidente che la conoscenza di Guido Castelnuovo, suo cognato dal 1891, diede vita a un rapporto particolarmente proficuo: la loro corrispondenza fu talmente fitta che si possono contare ben seicentosessantotto lettere scambiate tra i due, grazie alle quali si è potuto seguire lo sviluppo di varie opere di Enriques. Tra queste lettere ne troviamo una in cui Enriques parla della preparazione delle sue lezioni per i corsi di Geometria a lui affidati a Bologna:

"Carissimo Castelnuovo

Non attribuire a pigrizia le magre e scarse cartoline succedute alle lunghe lettere. Sono immensamente occupato per la preparazione dei due corsi: dove (specie per la Proiettiva) incontro ad ogni passo delle difficoltà".²

Tali difficoltà citate furono riscontrate dal matematico nello studio della letteratura del tempo, in particolar modo notò la necessità di avere alcuni postulati per poter dimostrare il teorema fondamentale delle proiettività (Preliminari 0.16). I matematici Fano e Amodeo avevano già lavorato in questa direzione, ma dopo aver letto i loro lavori Enriques non ne fu pienamente soddisfatto, e decise di percorrere una strada diversa per la formulazione dei postulati. Nella stessa lettera citata precedentemente troviamo una breve esposizione di Enriques su come avrebbe affrontato il problema dei postulati legato al Teorema fondamentale:

²Enriques F. - Castelnuovo G., 1996, *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino, p. 73, lettera del 29 gennaio 1894



Figura 3.2: Figure presenti nella lettera di Enriques a Castelnuovo

"Ecco uno schizzo della mia trattazione. Ammetto dapprima il postulato che un punto di una retta individua 2 ordini naturali di punti (inversi l'un dell'altro) ciascuno dei quali corrisponde al modo intuitivo di ordinare la retta generandola col moto. Ne segue l'esistenza dei segmenti ecc. Quindi enuncio il postulato di Dedekind. Se un segmento AB è diviso in 2 parti in guisa che ogni punto di AB sia H o K e gli H sieno a sinistra dei K , la divisione è operata mediante un punto C (che è H o K). Ne deduco il teorema che si può assumere invece come postulato "Se in una corrispondenza al segmento AB corrisponde CD in esso dove $C \neq A$ e se la corrispondenza è ordinata (conserva l'ordine ecc.) esiste un 1° punto unito H (che può anche esser B) tale che in AH non vi son punti uniti". Di qui segue, vi è almeno una coppia che ne separa armonicamente 2 che non si separano. Segue poi (come in Staudt) il teorema fondamentale. Cosa ti pare?" ³

Riportiamo nella Figura 3.2 i disegni forniti da Enriques stesso nella lettera.

Diamo ora uno sguardo al sistema di postulati proposto da Enriques per fondare la Geometria proiettiva, pubblicato in una nota del 1894 con il nome di "*Sui fondamenti della geometria proiettiva*", di appena diciotto pagine. Si tratta di sette postulati in totale, di cui il primo gruppo riguarda i postulati della geometria di posizione, mentre il secondo gruppo di postulati riguarda la rappresentazione mediante coordinate degli spazi proiettivi e il teorema delle proiettività. È da notare come non siano presenti caratterizzazioni metriche: Enriques era convinto che la trattazione metrica fosse da evitare, ed essendo particolarmente legato all'intuizione (nonostante l'abbandono dell'empirismo fosse già abbastanza accettato tra i suoi colleghi) scelse di ometterla totalmente. Prima di esporre gli assiomi

³Enriques F. - Castelnuovo G., 1996, *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino, pp. 73-74, lettera del 29 gennaio 1894

rendiamo subito noto che gli oggetti matematici che Enriques chiama di 1^a, 2^a, 3^a specie sono oggetti parametrizzati, nella notazione corrente, da $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^3$.

Vediamo i primi quattro postulati:

- I. In una forma di 3^a specie due elementi determinano una forma di 1^a specie cui appartengono.
- II. In una forma di 3^a specie un elemento e una forma di 1^a specie determinano una forma di 2^a specie cui appartengono.
- III. A questa forma di 2^a specie appartiene sempre la forma di 1^a specie determinata da due elementi di essa.
- IV. In una certa forma di 1^a specie vi sono infiniti elementi. Segue che: in ogni forma di 1^a specie vi sono infiniti elementi, in ogni forma di 2^a specie infinite forme di 1^a specie, ecc.

Come scrive Enriques:

”La proposizione IV non è subito necessaria perché (come ha avvertito il signor Fano) lo sviluppo dalla prima parte della geometria di posizione è indipendente da tale ipotesi; ma occorrendo essa in seguito l’abbiamo posta subito per semplicità”.⁴

Da questi primi assiomi seguono alcuni teoremi che consentono di trattare i gruppi armonici e le loro proiezioni e sezioni, deducendo che ogni proiezione o sezione di un gruppo armonico è ancora un gruppo armonico. Si parla anche di *forme riferite fra loro*, se gli elementi di una sono associati tramite corrispondenza biunivoca agli elementi dell’altra. Viene anche stabilito che se due forme di 1^a specie sono riferite tra loro mediante un numero finito di proiezioni e sezioni, allora vengono dette *proiettive*.

Vediamo ora il quinto postulato:

- V. In una (certa) forma di 1^a specie a si può stabilire un ordine degli elementi in modo che:

⁴Enriques F., 1894, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (s II) XXVII (1894), p. 4

- 1°) dati due elementi B, C l'uno dei due, ad esempio B , *precede* C (dunque C *segue* B);
- 2°) se B, C, D sono tre elementi della forma tali che nel dato ordine B precede C e C precede D , sempre B precede D ;
- 3°) esiste un primo elemento A che precede ogni altro;
- 4°) tra due elementi B e C che si susseguono nel dato ordine esiste sempre un elemento intermedio cioè precedente a C e conseguente a B (esistono quindi infiniti elementi intermedi fra B e C);
- 5°) non esiste alcun ultimo elemento che consegua ad ogni altro nel dato ordine.

Come già sottolineato precedentemente, il VI postulato non era strettamente necessario in quanto Enriques si accorse che era contenuto nel V. Chiamato questo ordine (A) , egli mostrò che esiste sempre un ordine inverso (A') . Restava da analizzare come si comportasse l'ordine su due forme di 1^a specie riferite tra loro. Osservò innanzitutto che fissando un ordine su una delle due si otteneva un ordine anche sull'altra, e modificando l'ordine sulla prima si otteneva una modifica anche nell'ordine della seconda. In modo simile si accorse che cambiando la corrispondenza tra le due forme si potevano ottenere due ordini differenti (una disposizione circolare dell'altro) sulla seconda forma, entrambi corrispondenti all'ordine sulla prima. Per questo motivo fu necessario un nuovo postulato:

- VI. Fra le disposizioni circolari soddisfacenti alle condizioni [del postulato V], che si possono porre nella forma di 1^a specie a , ne esiste una che diremo naturale la quale viene trasformata da ogni proiettività su a . In altre parole: In a si può scegliere un ordine (naturale) soddisfacente al postulato V, il quale per una proiettività posta in a subisca una permutazione circolare, o una permutazione circolare congiunta ad una inversione.

Osservò che questo postulato metteva in contatto i primi tre postulati con il quinto. Per ultimo viene introdotto da Enriques il settimo postulato, detto *postulato di continuità*:

- VII. Se un segmento ordinato $\overline{AB}$ di una forma di 1^a specie è diviso in due parti in [modo] che:

- 1°) ogni elemento del segmento $\overline{AB}$ appartenga ad una delle due parti;
- 2°) l'estremo A appartenga alla prima parte, B alla seconda;
- 3°) ogni elemento della prima parte preceda (in $\overline{AB}$) ad ogni elemento della seconda,

esiste un elemento C del segmento $\overline{AB}$ (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento di $\overline{AB}$ precedente a C (ove esista) appartiene alla prima parte, ed ogni elemento di $\overline{AB}$ conseguente a C (ove esista) appartiene alla seconda.

L'esistenza di un tale elemento C implica direttamente l'unicità. Questi sette assiomi per Enriques costituiscono il fondamento della geometria proiettiva:

"Tutte le proprietà di figure geometriche piane, dedotte dai postulati I, II, III, IV, V, VI, VII (postulati della geometria pro-jettiva), hanno carattere proiettivo cioè si traducono in proprietà delle figure proiezioni di esse in una stella (prospettiva al piano)". ⁵

Nella nota definì una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1^a specie che fosse *ordinata*: si ha tale corrispondenza se la disposizione circolare naturale su una delle due implica una disposizione circolare naturale sull'altra. In altre parole per Enriques una *corrispondenza proiettiva* è una corrispondenza biettiva ordinata.

Nella parte finale della nota sono presenti anche alcune osservazioni riguardanti la legge di dualità:

"Allora mediante una proiezione ogni teorema concernente una figura piana si traduce in un teorema della geometria nella stella; all' elemento punto del piano viene a corrispondere l'elemento "retta", della stella. D'altra parte dalla geometria della stella di raggi si può passare, per dualità nello spazio, alla geometria nel piano rigato: si ottiene così il passaggio dalla geometria del piano punteggiato a quella del piano rigato. Si può dunque enunciare la legge di dualità seguente: Insieme ad ogni teorema della geometria piana fondato sui postulati I, II, III, IV, V, VI, VII, sussiste un teorema correlativo nel piano che si deduce

⁵Enriques F., 1894, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (s II) XXVII (1894), p. 18

dal primo collo scambio delle parole "punto" e "retta", e cogli scambi di parole che ne derivano di conseguenza". ⁶

3.0.1 Lezioni di geometria proiettiva

Come già detto, Enriques fu chiamato a insegnare Geometria proiettiva e descrittiva a Bologna nel 1894, cattedra che mantenne fino al 1922. Avendo difficoltà nella preparazione delle lezioni, sentì la necessità di scrivere un libro per il suo corso, in questo modo nacque *"Lezioni di Geometria proiettiva"*, pubblicato per la prima volta nel 1898. Per scrivere il libro Enriques si ispirò fortemente al *"Geometrie der Lage"* di von Staudt, ma per renderlo più accessibile scelse di inserire delle immagini esplicative. Nella prefazione Enriques scrisse:

"Fin da quando quattro anni or sono, fui chiamato ad insegnare Geometria proiettiva all'Università di Bologna, io mi proposi di svolgere gli elementi di tale scienza, secondo l'indirizzo dello Staudt, sulla base di un sistema di postulati puramente *grafici*, esplicitamente enunciati; intendendo, non già di bandire, ma di tenere distinte le applicazioni metriche". ⁷

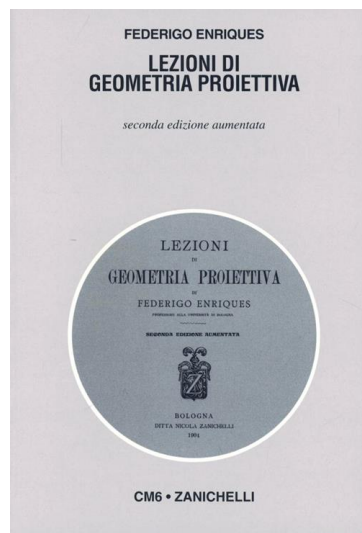


Figura 3.3: *F. Enriques, "Lezioni di Geometria proiettiva"*

⁶Enriques F., 1894, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (s II) XXVII (1894), p. 18

⁷F. Enriques, 1898, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Zanichelli, Prefazione p. 1

Inoltre, per mettere in risalto l'utilizzo della legge di dualità, scelse di scrivere gli enunciati su due colonne: sulla prima una loro formulazione, sulla seconda la loro versione duale. Nel primo capitolo Enriques introdusse i concetti di *punto*, *retta* e *piano* basandosi sul concetto intuitivo di spazio, e diede delle notazioni precise per ognuna di queste categorie: lettere maiuscole per i punti, lettere minuscole per le rette e lettere greche per i piani, la notazione utilizzata ancora oggi. Le definizioni successive riguardano le forme fondamentali e gli elementi impropri; questi ultimi non vengono esplicitamente citati nei postulati forniti poco dopo riguardanti proiezioni e sezioni, in quanto Enriques stesso sottolineò che i Teoremi basati su tali postulati erano validi sia per i punti propri sia per quelli impropri. Dopo aver parlato esaustivamente delle forme di prima specie, passò allo spazio, e formulò il principio di dualità per forme di seconda specie, fornendo vari esempi. Nelle stesse pagine troviamo i due Teoremi di Desagues sui triangoli omologici (si veda il Teorema 1.2) e sui quadrilateri omologici. Nei capitoli successivi Enriques scrisse ciò che ritenne necessario per completare la dimostrazione del Teorema 0.16, che si trova nel Capitolo V. I Capitoli IX e X sono dedicati alle coniche e alle proiettività tra esse, mentre il Capitolo XII è incentrato sulle proprietà focali di tali oggetti.

Nella prefazione alla prima edizione è possibile trovare una breve introduzione storica, meglio approfondita nell'Appendice VI intitolata "*Cenno storico-critico sulla genesi dei concetti fondamentali della Geometria proiettiva*", lunga ben dodici pagine. Enriques iniziò l'analisi storica della disciplina rintracciandone alcuni segni già in Euclide:

"Sebbene la Geometria proiettiva, intesa come scienza, appartenga al secolo XIX, se ne possono riconoscere i germi fino nella *Prospettiva* di Euclide ed Eliodoro. [...] La considerazione delle figure geometriche dal punto di vista della Prospettiva, tende a porre in rilievo le loro proprietà grafiche, discernendole dalle proprietà metriche e induce così ad una concezione più generale delle figure stesse. Inoltre nella Prospettiva sono implicitamente contenute le due *operazioni del proiettare e segare*, fondamentali per la Geometria proiettiva."⁸

⁸F. Enriques, 1898, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Zanichelli, Appendice VI, p.392

I due matematici citati subito dopo Euclide sono proprio Desargues e Pascal. Proseguendo la citazione precedente:

”Sembra che spetti a Desargues e a Pascal il merito di aver applicato nella Geometria, e segnatamente nella teoria delle *coniche*, i metodi della Prospettiva. [...] Ciò che a noi preme di rilevare, è come l'introduzione dei metodi della Prospettiva nello studio delle coniche appaia rispondente allo spirito di generalità, che animava ormai le ricerche scientifiche, mentre le anguste divisioni della Geometria dei Greci non più soddisfacevano al bisogno di raggruppare molte verità in una sola e di farle scaturire in modo più luminoso da uno stesso principio.”

Proprio su Desargues Enriques scrisse, nella riga successiva:

”La concezione di Desargues permetteva di considerare come rientranti in una sola famiglia le tre specie di coniche (ellisse, iperbole, parabola) che per lo innanzi erano state tenute distinte, e ciò conformemente alla considerazione dei punti impropri, dovuta allo stesso Desargues”.

Proseguendo nell'Appendice troviamo una vera e propria ricostruzione storica di come sia nata la Geometria proiettiva, passando dai metodi innovativi di Cartesio, all'abbandono momentaneo della Geometria sintetica, da La Hire, Poncelet e Monge a Möbius, Klein, Darboux e Pasch. La ricostruzione di Enriques è molto ben strutturata nonostante appaia chiaro che non avesse letto fonti molto specifiche o approfondite. Ce ne accorgiamo ad esempio quando, in riferimento a Desargues, troviamo scritto che egli non considerò i punti all'infinito sul piano come appartenenti ad un'unica retta all'infinito (concetto in realtà esposto nel *Brouillon Project*).

Nelle edizioni successive a quella del 1898 Enriques semplificò alcuni passaggi, come scrisse ad esempio nella Prefazione alla seconda edizione:

”A questa seconda edizione delle mie ”Lezioni di Geometria proiettiva” ho portato alcuni mutamenti e talune aggiunte, che l'esperienza didattica dei sei anni trascorsi ha mostrato utili.

Tali variazioni furono già introdotte nella traduzione tedesca del libro, recentemente uscita pei tipi dell'editore Teubner. Esse non alte-

rano d'altronde il disegno generale dell'opera, ma tendono a semplificare qualche dimostrazione, ad estendere il campo delle applicazioni tecniche, a rendere più compiuti i cenni di teorie superiori contenuti nell'Appendice."

Questo testo fu tradotto e stampato in molte altre lingue, tra cui tedesco, francese e spagnolo. Questo ci dimostra quanto il libro fu di successo, tanto che fu il testo di principale riferimento per la Geometria proiettiva fino al 1930.

3.0.2 Attività didattica

Enriques fu un matematico singolare per il suo tempo, in quanto si occupò molto di didattica della matematica. Le cattedre che gli furono assegnate lo costrinsero a scegliere e a ordinare i contenuti dei suoi corsi, e nel farlo si chiese quale fosse il modo più efficace ed efficiente per veicolare tali contenuti. Si trattava di una vocazione, infatti nonostante la ricerca vera e propria in didattica della matematica iniziò alla fine del Novecento, Enriques se ne occupò già un secolo prima; tanto che proprio a fine Ottocento scrisse:

"Ora vengo a parlarti di un progetto, che spero di attuare con poca fatica. Si tratta di un libro dedicato a tutte le questioni che interessano la Geometria elementare [...]. Mi propongo non di farlo, ma di farlo fare a giovani laureati e ad insegnanti delle scuole secondarie, serbando a me, o a qualche altro matematico che volesse occuparsene, la trattazione di qualche argomento più delicato."⁹

Fu proprio questo progetto a ispirare il libro *"Questioni riguardanti la geometria elementare"* di Enriques del 1900.

L'influenza di Klein si fece sentire ancora una volta, e in una lettera a Castelnuovo Enriques scrisse:

"Quanto alla conversazione di Klein sai già quanto era interessante; oltre che delle questioni sui principii abbiamo discorso molto di questioni

⁹Enriques F. - Castelnuovo G., 1996, *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino, p. 419, lettera del 25 maggio 1899

didattiche e da lui solo in poche ore ho imparato tante cose interessanti, di cui non avevo mai avuto notizia, sullo sviluppo dell'istruzione matematica in Inghilterra e in Germania.”¹⁰

In effetti Klein si era già interessato al problema, ed aveva sviluppato un pensiero ben preciso su quali fossero i problemi principali che uno studente che si avvicina alla matematica doveva affrontare. Questo lo aveva portato a chiedersi se fosse necessario ripensare alla formazione degli insegnanti. Klein scrisse tanto e tenne varie conferenze sull'argomento, i cui punti principali si possono riassumere in questo modo: colmare la discontinuità tra scuola secondaria e università (proponendo di anticipare alcuni insegnamenti, tra cui la geometria analitica, nelle scuole secondarie), dare il giusto peso alla storia della scienza, fornire collegamenti con altre discipline e mostrare sempre delle applicazioni della teoria. Quando Enriques si interfacciò con Klein sul problema della didattica si accorse che si trattava di un argomento tanto più vasto di quanto si aspettasse, e se ne appassionò a sua volta.

Come Klein, Enriques sostenne l'importanza della storia della scienza, tanto che nella Prefazione del libro *“Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche”* del 1915, destinato alle scuole superiori, scrisse:

“Comprensione storica della scienza.- Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia. La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a [...] chiarire il cammino dell'idea [...]. Una tale storia diviene parte integrante della scienza[...].”¹¹

In questa ottica la storia della scienza ha anche una funzione di legittimazione culturale della matematica. Per questo motivo i futuri insegnanti, secondo Enriques, dovrebbero studiare origini e sviluppi delle varie teorie, e non solo la teoria

¹⁰F. Enriques - Castelnuovo G., 1996, *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino, p. 536, lettera del 24 ottobre 1903

¹¹F. Enriques, 1915, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Vol. I, Prefazione p. XI

finale statica; inoltre il matematico riconobbe la potenzialità della storia come ausilio per la didattica. Abbiamo visto infatti che un'appendice delle *"Lezioni di Geometria proiettiva"* è interamente storica. In realtà nei suoi libri inserì quasi sempre digressioni storiche che illustrassero il cammino, quasi mai lineare, della scienza, per facilitare la comprensione di alcuni concetti, per mostrare più facilmente proprietà di alcuni oggetti e per rendere la trattazione matematica più interessante.

Proprio come Klein sostenne la necessità di stabilire collegamenti fra la matematica e le altre attività intellettuali, al fine di dare un contesto di utilità alla teoria, ma anche per trasmettere agli allievi una visione unitaria del sapere, perché secondo Enriques solo superando la visione troppo ristretta ed isolata della matematica questa può acquisire valore umanistico e formativo. Questi ragionamenti lo portarono a concepire l'apprendimento come una conquista, una scoperta personale, dunque si rivelava necessario guidare gli studenti alla conquista del sapere perché era l'unico modo per comprendere la matematica. Questo metodo "socratico" era effettivamente utilizzato da Enriques, che molto spesso passeggiava sotto i portici di Bologna con i suoi studenti discorrendo di matematica. Sul tema scrisse:

"[...]l'insegnamento non può essere un regalo che il maestro faccia a qualcuno che viene ad ascoltare le sue ben tornite lezioni (che, se sta disattento, merita di essere rimproverato per la sua ingratitudine!); ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé e però sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o un prodotto del proprio spirito." ¹²

In particolare questo pensiero è da lui approfondito nel saggio *"Insegnamento dinamico"*, pubblicato nel 1921 sulla rivista *Periodico di Matematiche*. Il saggio si apre con l'osservazione che, nonostante l'insegnamento attivo e partecipativo fosse già stato teoreizzato in ambito pedagogico, questo è raramente applicato nella pratica. Insegnare, secondo Enriques, non dev'essere un'attività di trasmissione di informazioni, ed imparare non dev'essere una passiva ricezione di esse (come secondo la visione dell'imbuto di Norimberga); un buon insegnante dovrebbe coinvolgere i propri studenti, stimolare il loro interesse e far loro conquistare il sapere

¹²F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 1

attraverso la scoperta e la ricerca attiva. Un modo per suscitare curiosità secondo Enriques è proporre compiti difficili ma non fuori dalla portata degli studenti in modo che, dopo qualche fatica, siano capaci di risolverli. Questa progressione graduale (che rimanda al lavoro da compiere nella zona di sviluppo prossimale teorizzato da Vygotskij) spinge gli studenti ad avere un atteggiamento positivo, in quanto le difficoltà risultano meno spaventose ma soprattutto superabili. È comunque fondamentale unire teoria e pratica nell'insegnamento della matematica, sicuramente per coinvolgere tutti gli studenti (che avranno differenti preferenze), ma anche perché si può raggiungere lo scopo educativo solo mostrando la teoria astratta e il suo funzionamento insieme alla sua utilità pratica. Un altro errore molto comune secondo il matematico è quello di soffermarsi principalmente sui dettagli senza fornire una visione d'insieme:

”Vi è, se così è lecito esprimersi, una logica in piccolo ed una logica in grande: intendo l'analisi raffinata del processo del pensiero esatto (quasi la veduta microscopica degli elementi che formano il tessuto della scienza), e - per contro - lo studio delle connessioni organiche del sistema, cioè la veduta macroscopica della scienza. Ora io temo che, nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici, la logica in piccolo tenga troppo posto in confronto alla logica in grande! [...] A mio avviso ciò che si deve richiedere all'insegnamento matematico, concepito come formativo delle facoltà logiche, è prima di tutto di svolgere lo spirito di coordinazione, in quella forma che ho chiamato macroscopica.”¹³

Questa osservazione non deve far pensare al lettore che Enriques disprezzasse la ”logica in piccolo”, in quanto parte costitutiva della disciplina e di vitale importanza nella formazione di un insegnante, ma il matematico preferì specificare che tale logica non dovrebbe essere trasferita in modo eccessivo nella scuola media. Il motivo è che se gli studenti non comprendono a fondo queste analisi raffinate allora avranno una forte tendenza ad impararle a memoria, rendendole educativamente ”vuote”. Per questo motivo l'educazione alla logica dev'essere graduale nel percorso scolastico, e sempre dal concreto in direzione dell'astratto. Pur essendo visibilmente contrario allo studio mnemonico senza comprensione, Enriques riconobbe del vero in alcune obiezioni secondo cui è utile far memorizzare fatti

¹³F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 4

e nozioni da poter richiamare in età matura anche se non ancora comprese. La memoria ha un ruolo importante nello studio della matematica, ma per Enriques questa non doveva essere intesa come processo passivo, bensì come coordinazione di attività che ripetendosi diventano automatismi. Nello specifico Enriques scrisse dell'algebra: questa può essere insegnata presto, ma solo se dietro c'è un lavoro attivo e di comprensione:

”Volete che il giovane studente di matematiche acquisti di buon'ora il maneggio del calcolo algebrico, acciocché questo istrumento non gli manchi poi nella risoluzione dei problemi che gli saranno proposti? Consento che ciò sia utile insegnare il più presto possibile, in un'età in cui ancora non si saprebbe comprendere i più vari usi a cui la stessa algebra è chiamata: ma per raggiungere lo scopo dovete ancora far lavorare il ragazzo ; bisogna spiegargli prima (con esemplificazioni che egli stesso dovrà variare a volontà) quale sia il significato delle ”lettere” messe al posto di numeri, e poi fargli osservare le regole di combinazione, quasi come un giuoco, che - con una certa abilità - si riesce a rendergli discretamente interessante, e quindi accettabile. Solo quando il discepolo avrà appreso a ripetere queste combinazioni, in modo da riuscirvi senza più pensare, potremo dire che egli ha acquistato il maneggio del calcolo, fissandolo nella memoria [...]. Qui il pensiero vivo si svolge sul pensiero morto, da cui trae - per così dire - una regola economica di condotta. Ma il pensiero morto non fu travasato dalla testa del maestro a quella del suo ascoltatore; bensì dovette vivere a sua volta nella fatica dell'esercitazione!” ¹⁴

A questo punto rimane l'interrogativo di come mettere in pratica l'insegnamento dinamico. La proposta di Enriques fu la seguente:

”Ho avuto la fortuna di assistere a qualche lezione di aritmetica o di geometria pratica, in cui il discente si metteva a conversare coi ragazzi facendosi - anche lui- un poco ignorante, ricercando insieme con loro, suggerendo, a tentoni, la via che essi stessi dovevano percorrere per guadagnare la verità. E, mentre ammiravo l'intelligente attività

¹⁴F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 8

della guida, trascinato anch'io nell'esercizio della scolaresca animata, mi chiedevo perché lo stesso metodo non si dovesse adoperare anche con alunni di età più matura.... perché no?, anche coi giovanotti che vengono a studiare alle nostre università.”¹⁵

Poche righe dopo il matematico criticò il modo in cui si svolgevano alcune interrogazioni ed esami: spesso viene proibito l'utilizzo del libro o degli appunti, ma tale divieto non assicura un apprendimento più significativo: tale apprendimento avviene attraverso un lavoro interiore guidato dall'insegnante, e non può essere trovato in sterili regole scritte in un libro. Nella conclusione si può percepire la grande passione che Enriques aveva sviluppato negli anni per l'insegnamento:

”Confessiamo francamente che il compito che ci è proposto è tremendamente, stavo per dire divinamente difficile. Infatti se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco. Ma per ciò occorre dunque che anche noi maestri - nell'atto d'insegnare - ripetiamo, non già il risultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità, ricreandone dunque la fatica nello spirito nostro, che si allarga e trascina insieme la scuola.”¹⁶

Nelle ultime righe troviamo un richiamo a quello che sarebbe stato chiamato da Bruner sviluppo a spirale:

”[...] non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come, riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi approfondano le loro radici. Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico; e però che un grado di verità più alto serva ad illuminare il più basso da cui è uscito [...].”¹⁷

¹⁵F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 9

¹⁶F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 9

¹⁷F. Enriques, 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, p. 10

Seguendo questo pensiero, per lui fu naturale sviluppare una visione genetica e dinamica del processo scientifico: secondo la sua visione esporre una teoria matematica in modo esclusivamente deduttivo la fa apparire chiusa e perfetta, ma totalmente priva di stimoli e attrattiva. Il compito degli insegnanti dovrebbe dunque essere quello di aprire orizzonti e spingere ad affrontare i problemi con vari metodi, segnalando gli errori che hanno contribuito all'avanzamento della scienza e mostrando che l'errore non costituisce un fallimento, ma uno spunto da cui ripartire. A proposito della visione genetica della scienza scrisse:

"[...] una veduta genetica del processo scientifico: processo induttivo e deduttivo, che dalle osservazioni particolari sale ai concetti generali ed astratti per ridiscendere all'esperienze di fatto, processo di sviluppo continuo, che pone fra le teorie un rapporto generativo e scorge nel loro succedersi un'approssimazione alla verità."¹⁸

Nel processo di apprendimento un fenomeno che interessò Enriques fu quello dell'errore.

"Sicché pare che, in generale, l'errore non infirmi tanto l'intuizione, come rappresentazione visiva del particolare, quanto l'estensione sua a concetti astratti. In qualche modo si può dire che esso non appartiene né alla facoltà logica né all'intuitiva, ma si introduce nel momento delicato del loro raccordo.[...] Invero l'astrarre (che rende possibile di estendere l'intuizione a classi più generali di oggetti) è insieme un atto intuitivo e logico ed ha perciò due significati o momenti strettamente connessi che non debbono confondersi in un processo mentale semi-oscuro.[...] Se e finché, la Matematica progredisca nel suo cammino millenario, senza isterilirsi nell'esercizio di pedanti senza fantasia, queste norme conserveranno il loro valore, e, di fronte (in opposizione solidale) alle esigenze di una logica sempre più raffinata, si affermeranno ancora i diritti dell'intuizione, che è l'attività creativa della scienza."¹⁹

Proprio in quel saggio, *"L'errore nelle matematiche"*, Enriques distinse due categorie di errori: gli errori-lacuna, che si verificano quando manca un passaggio logico all'interno di una dimostrazione, ma la tesi risulta vera nonostante l'errore (si

¹⁸F. Enriques, 1912, *Scienza e razionalismo*, Zanichelli, p. 132

¹⁹A. Giovannini (F. Enriques), 1942, *L'errore nelle matematiche*, Periodico di Matematiche, p.8

tratta di una lacuna di ragionamento, non di una falsità), e gli errori propriamente detti, cioè affermazioni false presentate come vere a causa di un'estensione indebita di un'intuizione o di un ragionamento (generalmente avvengono nel processo di astrazione). Nella sua concezione gli errori sono tappe obbligate del pensiero nella ricerca del sapere e della conoscenza, ed esperienze didattiche fondamentali perché formative. L'errore dev'essere inteso come una forza propulsiva che spinge il discente a nuove riflessioni, ed è spesso un ottimo segnale in quanto nasce dal processo di astrazione, operazione complessa che richiede l'utilizzo combinato di intuizione e logica. Nel saggio vengono descritti in questo modo:

"È difficile segnare i limiti fra una piccola e una grande lacuna, ed anche fra la lacuna e l'errore propriamente detto. Piccola lacuna sarebbe quella che costituisce il sottinteso di un'esposizione più o meno sommaria, e anche un passaggio ingiustificato che richieda qualche facile complemento. Ma si sdrucchiola dalla lacuna nell'errore, se pure agevolmente correggibile, se si sia creduto comunque di giustificare il mancato passaggio enunciando un legame di dipendenza che petisce eccezioni. Anche più difficile riesce distinguere l'errore dalla lacuna quando si tratti di un passaggio non strettamente logico, ma essenzialmente intuitivo."

20

²⁰A. Giovannini (F. Enriques), 1942, *L'errore nelle matematiche*, Periodico di Matematiche, p. 4

Capitolo 4

Il declino della scuola italiana

Fino agli anni Quaranta del Novecento la scuola italiana di geometria algebrica produsse una notevole quantità di risultati e figure di prestigio. Fu talmente prolifera che arrivarono studenti da tutto il mondo per seguire le lezioni dei grandi matematici italiani, tra cui Julian Lowell Coolidge (1873-1954), Lucien Godeaux (1887-1975) e Solomon Lefschetz (1884-1972), che divennero matematici illustri. Alcuni di loro, durante il soggiorno in Italia, intravidero dei limiti nelle tecniche italiane, limiti che verranno evidenziati pochi anni dopo.

Dopo quasi cinquant'anni di sviluppo autonomo era divenuto chiaro che la scuola italiana prediligesse l'approccio geometrico-proiettivo rispetto a quello algebrico, a cui erano più interessati i matematici tedeschi, che a loro volta ritenevano le metodologie italiane a volte poco adeguate. Questa divergenza era talmente chiara che entrambe le scuole si trovarono a lavorare sugli stessi argomenti, ma senza più comunicare tra loro. I segnali di allontanamento della scuola italiana dalle altre scuole si moltiplicarono nel tempo, e contribuirono a portare al suo interno, proprio negli anni Quaranta, una profonda crisi. Con la fine della guerra fu interrotto lo stato di isolamento, in parte imposto dal regime, in parte voluto dai matematici italiani per un'affermazione del primato dei loro metodi, in cui si trovava la scuola italiana. Rientrando in contatto con il mondo esterno fu sottoposta ad ogni genere di critica proveniente dai nuovi ambienti matematici che nel frattempo erano nati in tutto il mondo. L'isolamento e la chiusura della scuola italiana avevano comportato un atteggiamento quasi altezzoso da parte dei matematici italiani, che non riuscivano (o forse si rifiutavano) di riconoscere che, alla luce delle nuove tecniche, il nuovo linguaggio e i progressi che erano realizzati

all'estero, le loro metodologie non fossero più sufficienti per affrontare i nuovi problemi. Proprio in quegli anni inoltre morirono matematici tra i più notevoli, tra cui Enriques, Castelnuovo e Fano, perdite che affaticarono ancora di più la scuola italiana.

Vediamo dunque alcuni matematici che hanno portato questo cambiamento ormai più che necessario nella geometria.

Nel 1921, Oscar Zariski (1899-1986) si mise in viaggio dalla Russia verso l'Italia, dove rimase fino al 1927. A Roma studiò con Castelnuovo, Enriques e Severi, conseguendo il dottorato nel 1924. Zariski fu uno degli studenti che, pur rimanendo profondamente affascinato dai metodi italiani, ne colse con chiarezza i numerosi limiti, in particolar modo studiando con Enriques e Castelnuovo dopo il dottorato. A causa del clima politico italiano, nel 1927 si trasferì negli Stati Uniti grazie all'aiuto di Lefschetz. Lì ebbe modo di esplorare i nuovi metodi topologici sviluppati da Lefschetz, e fu particolarmente colpito anche dai progressi nel campo dell'algebra commutativa compiuti da Emmy Noether in Germania. Zariski fu una figura fondamentale nella storia della geometria in quanto il suo *"Algebraic Surfaces"* del 1935 segnò la sua definitiva rottura con la scuola italiana, e aprì le porte ad una geometria affrontata con nuovi metodi.

La vera e propria rivoluzione della geometria iniziò con il libro di Zariski e la pubblicazione del *"Modern Algebra"* di Van der Waerden, libro che racchiudeva la tradizione dell'algebra tedesca dei cinquant'anni precedenti. Quest'opera ebbe un ruolo chiave nel superamento della tradizione italiana, perché fu utilizzata da tantissimi matematici, alcuni dei quali entrarono a far parte del gruppo Bourbaki, in Francia.

Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo adottato da un gruppo di matematici, per lo più francesi, che avevano deciso di scrivere un trattato definitivo di matematica moderna. Lo pseudonimo fu un'idea di due matematici francesi, Claude Chevalley (1909-1984) e André Weil (1906-1998), che si diedero il compito di scrivere un testo di calcolo moderno che fosse più aggiornato rispetto a quello utilizzato dagli studenti del tempo. I due invitarono vari matematici di alto livello ad unirsi al gruppo, e si prefissarono obiettivi molto ambiziosi. Il gruppo si accorse ben presto che il tempo stimato per concludere il testo sul calcolo non era sufficiente, principalmente perché il rigore matematico che si erano imposti di utilizzare richiedeva molto più tempo del previsto. Furono dunque aggiunti dei membri,

ma nel corso degli anni non furono mai più di venti, anche perché il gruppo, sostenendo che le idee migliori e il periodo di maggior creatività fosse quello tra i venti e i trent'anni, impose una regola di ritiro obbligatorio a cinquant'anni. Nicolas Bourbaki divenne particolarmente noto per la raccolta di libri "*Éléments de mathématique*", una produzione avviata nel 1939 e che oggi è costituita da più di trenta volumi che spaziano in tutte le aree della matematica. Il titolo richiama volutamente gli *Elementi* di Euclide, che era vista proprio come la prima opera di sintesi del sapere matematico. Un tratto che distinse il lavoro di Bourbaki fu una grande spinta verso l'utilizzo dell'algebra, che divenne strumento fondamentale per rendere matematicamente rigorose anche le costruzioni più complesse, in particolar modo quelle che riguardavano le famiglie di varietà. La scelta della via algebrica fu un grande segnale di distacco dalla scuola italiana, che era ancora legata ai suoi metodi tradizionali basati sull'intuizione geometrica della geometria proiettiva classica.

Uno dei due fondatori del cosiddetto *Bourbakismo*, André Weil, fu un matematico di particolare calibro. Nato a Parigi, figlio di genitori ebrei, si laureò alla Sorbona e, dopo una vacanza estiva passata nelle Alpi, si recò a Roma per seguire le lezioni tenute da Vito Volterra e Francesco Severi. Si trasferì poi a Gottinga, dove conobbe Emmy Noether ed entrò in contatto con l'eredità algebrica tedesca. A Strasburgo prese parte al progetto di Nicolas Bourbaki, e nel 1946 pubblicò il suo "*Fondamenti di Geometria Algebrica*", un progetto innovativo che si proponeva di stabilire in modo rigoroso la geometria algebrica su un campo commutativo arbitrario. In questo libro Weil definì il concetto di varietà algebrica, di dimensione, di punto generico, e così via, facendo uso degli strumenti dell'algebra commutativa con cui era entrato in contatto quando aveva conosciuto Emmy Noether. Questo libro segnò un ulteriore distacco dalla scuola italiana ma anche da Zariski. I *Fondamenti* di Weil sono da considerare come un tentativo di dare delle basi solide alla disciplina in vista delle applicazioni, come ad esempio la teoria dei numeri, a cui Weil era molto interessato.

I *Fondamenti* di Weil furono superati quindici anni dopo dall'opera di Alexander Grothendieck (1928-2014), matematico che nacque a Berlino, in una famiglia ebrea. Nel 1939 si trasferì in Francia con sua madre, dove studiò matematica all'Università di Montpellier e si laureò nel 1948. Trascorse l'anno accademico successivo all'École Normale Supérieure di Parigi, e ottenne il dottorato all'Uni-

versità di Nancy nel 1953. In quegli anni fece parte del gruppo Bourbaki, e i suoi interessi si spostarono nella direzione della geometria e della topologia. Negli anni Sessanta scrisse gli *Éléments de géométrie algébrique*, un'opera in otto volumi basata sui lavori di Weil e Zariski, in cui fondò la geometria algebrica moderna sul concetto di "schema" da lui definito. Ricevette la Medaglia Fields nel 1966.

Il percorso ricostruito mostra come la geometria proiettiva abbia vissuto un alternarsi di fasi: periodi di grande creatività e produzione si sono intrecciati a momenti di riflessione critica e di ricerca di fondamenti più sicuri. Si è assistito ad un susseguirsi di idee e metodi, spesso dimenticati, poi riscoperti e nuovamente valorizzati a distanza di decenni.

Nella prima metà del Novecento ha avuto inizio il progressivo declino della geometria proiettiva sintetica, per lungo tempo colonna portante della scuola italiana, sostituita dall'algebra lineare e dalla geometria proiettiva algebrica. A partire dagli anni Sessanta nuovi punti di vista hanno mostrato che è possibile far coesistere e collaborare aree diverse della matematica: è stato significativo, in questo senso, il lavoro di Robin Hartshorne, allievo di Zariski, che ha saputo proporre un approccio unitario alla geometria, integrando visione sintetica e strumenti analitici.

Concludiamo sottolineando come la geometria proiettiva sia stata una pagina fondamentale della storia della matematica, che ha consentito di riflettere sul rapporto tra intuizione e formalizzazione, tra esigenze applicative e rigore assiomatico, e in tempi più recenti sia stata rivalutata come terreno didattico privilegiato per mostrare la necessità di equilibrio e unione tra visualizzazione geometrica e formalizzazione algebrica.

Bibliografia

- [1] Bottazzini U., *I geometri italiani e i problemi dei fondamenti (1889-1899)*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Bologna, 2001
- [2] Boyer C., *A History Of Mathematics*, Wiley, New York, 1968
- [3] Campedelli L., *Federigo Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche*, Periodico di Matematiche, 1947
- [4] Del Centina A., Gimigliano A., *From Here to Infinity, Tracing the Origin and Development of Projective Geometry*, Springer, Berlin, New York, 2025
- [5] Desargues G., *Brouillon Project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plane*, 1639
- [6] Enriques F. - Castelnuovo G., *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1996
- [7] Enriques F., *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (s II) XXVII (1894), 1894
- [8] Enriques F., *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, 1921
- [9] Enriques F., *Lezioni di Geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna, 1898
- [10] Enriques F., *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Bologna, Vol. I, 1915
- [11] Enriques F., *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna, 1938
- [12] Enriques F., *Scienza e razionalismo*, Zanichelli, Bologna, 1912

-
- [13] Giovannini A. (Enriques F.), *L'errore nelle matematiche*, Periodico di Matematiche, 1942
 - [14] Klein N., *Lettere a Felix Klein (1883-1923)*, Staats-und Universitätsbibliothek, Gottinga
 - [15] Luciano E., Tealdi A., *Federigo Enriques e l'impegno nella scuola*, Conferenze e Seminari 2011-2012 dell'Associazione Subalpina Mathesis, Torino, 2012
 - [16] Pascal B., *Essay pour les coniques*, 1640
 - [17] Peano G., *Introduction au tome II du Formulaire de mathématiques*, Revue de mathématiques, 1895
 - [18] Segre C., *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Vol. 36, 1883
 - [19] Severi F., prefazione a *Corrado Segre, Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957

Sitografia

1. Biblioteca Digitale Italiana di Matematica
2. Corrado Segre e la scuola italiana di geometria algebrica, articolo "La ricerca scientifica" a cura di Livia Giacardi
3. Euclide, Elementi
4. Finite Geometry, Minnesota State University
5. Girolamo Saccheri, tentativi di dimostrazione del V postulato
6. Indice cronologico delle opere di Enriques, Edizione nazionale opere di Federico Enriques
7. INFN, Programma di Erlangen
8. L'errore in matematica, Piano Nazionale Qualità e Merito
9. Mac Tutor, Blaise Pascal
10. Mac Tutor, Corrado Segre
11. Mac Tutor, Federigo Enriques
12. Mac Tutor, Gino Fano
13. Mac Tutor, Girard Desargues
14. Mac Tutor, Non Euclidean Geometry
15. Mac Tutor, Giuseppe Peano
16. Mac Tutor, Giuseppe Veronese
17. Mac Tutor, Guido Castelnuovo

18. Mac Tutor, Jean-Victor Poncelet
19. Mac Tutor, Karl von Staudt
20. Tesi di Laurea "Dal Paradiso di Hilbert all'inferno di Gödel", Giuseppe di Saverio, 2003
21. Tesi di Laurea "L'ottica di Euclide e la scienza della visione", Federico Bernardi, 2008
22. Torino Scienza, Guido Castelnuovo