

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Matematica

Il teorema di Cantini e Sportiello sulle configurazioni FPL

Tesi di Laurea in Combinatoria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
CASELLI FABRIZIO

Presentata da:
CIALDELLA MATTEO

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

Le *fully packed loop configurations* (FPLs) costituiscono una classe di oggetti di natura combinatoria il cui studio si è sviluppato in tempi relativamente recenti e pertanto presenta numerosi problemi ancora aperti. Una FPL consiste in una griglia quadrata i cui lati sono colorati di rosso o di nero in modo che su ciascun vertice interno insistano esattamente due lati rossi e due lati neri. Questa condizione è detta *ice rule* ed è alla base delle leggi chimiche che regolano la struttura dei cristalli di ghiaccio.

Un reticolo cristallino è effettivamente una griglia in cui ciascun atomo di ossigeno (rappresentato da un vertice) si lega a quattro atomi di idrogeno, e ciascun atomo di idrogeno (rappresentato da un lato) si lega a due atomi di ossigeno. La *ice rule* altro non è che una traduzione della seguente condizione: ciascun ossigeno è in grado di formare due legami covalenti e due legami di tipo idrogeno; ciascun atomo di idrogeno, a sua volta, può formare un legame covalente e un legame idrogeno. Inoltre, le FPLs costituiscono anche una rappresentazione grafica delle *alternating sign matrices* (ASMs), una classe di matrici di grande interesse nell'ambito dell'algebra e della combinatoria enumerativa.

Mostriamo esplicitamente l'equivalenza tra questi modelli nel corso del primo capitolo, in cui forniremo una descrizione più generale delle FPLs e osserveremo come la *ice rule* permetta di individuare sulla griglia dei percorsi, e quindi degli accoppiamenti, tra vertici esterni. Questo concetto sarà fondamentale per i due teoremi principali che enunceremo nel corso della tesi. Nel secondo capitolo infatti osserveremo che esiste una simmetria tra le FPLs che inducono un certo accoppiamento e le FPLs che inducono lo stesso accoppiamento "ruotato". Si tratta di un'idea sviluppata prima da Carl Bosley e Lukasz Fidkowski e poi, nella forma che enunceremo, da Henry Cohn e James Propp, e infine dimostrata da Benjamin Wieland nel 2000.

Nel terzo capitolo introdurremo una rappresentazione grafica dei suddetti accoppiamenti, che ci permetterà di definire ed illustrare l'azione degli operatori e_k . La

somma, al variare di k , degli e_k è l'operatore Hamiltoniano H , che esprimeremo in forma di matrice irriducibile non negativa. Tale operatore sarà protagonista del quarto ed ultimo capitolo, nel quale enunceremo e dimostreremo la congettura di Razumov Stroganov, la quale ci consente di trovare esplicitamente l'autovettore di Perron-Frobenius relativo ad H . Tale autovettore è dato dalla somma formale di tutti i possibili accoppiamenti, ciascuno contato tante volte quante sono le FPLs che inducono lo stesso.

Mostreremo tale congettura in più step, mediante una rielaborazione della dimostrazione proposta da Luigi Cantini e Andrea Sportiello nel 2010. Tra gli strumenti utilizzati, ricorreremo ad una generalizzazione del teorema di Wieland per griglie irregolari, di per sé molto interessante e della quale citeremo le idee necessarie al nostro obiettivo.

Indice

1	FPLs e modelli equivalenti	7
1.1	FPLs su una Griglia $n \times n$	9
1.2	Square Ice Configurations e ASMs	10
2	Teorema di Wieland	15
2.1	Enunciato del Teorema di Wieland	15
2.2	Gyraton	19
2.3	Vertici fissi	22
2.4	Conclusione della dimostrazione	26
3	Uno spazio vettoriale su $Lp(n)$ e generalizzazione della Gyraton	29
3.1	Rappresentazione degli accoppiamenti	29
3.2	Operatori sugli accoppiamenti	32
3.3	Spazio vettoriale su $Lp(n)$	38
3.4	Grafi di grado 2 o 4	41
3.5	Generalizzazione della Gyraton	44
3.6	Operatori a_k e c_k	45
3.7	Gyraton per condizioni al bordo generiche	46
4	Congettura di Razumov Stroganov	51
4.1	Operatore H e congettura di Razumov-Stroganov	51
4.2	Considerazioni sull'ultima riga di Λ_n	55

4.3	Alcune relazioni utili	60
4.4	Riscrittura di RS_n	63
4.5	Operatore N_S	66
4.6	Un'applicazione dell'operatore a_{2m-1}	70
4.7	Conclusione della dimostrazione di Razumov Stroganov	73
Bibliografia		77

Capitolo 1

FPLs e modelli equivalenti

Data la griglia quadrata di $\mathbb{R}^2$ costituita dai punti con almeno una coordinata intera, consideriamo la regione di piano Λ delimitata da un cammino chiuso γ .

Definiamo i seguenti insiemi:

- $V(\Lambda)$ è l'insieme dei vertici di Λ , costituito dai punti in $\Lambda \cap \mathbb{Z}^2$;
- $E_0(\Lambda)$ è l'insieme dei lati interni di Λ , cioè dei segmenti compresi tra due vertici di Λ ;
- $E_1(\Lambda)$ è l'insieme dei lati esterni di Λ , cioè quelli non compresi in γ ma con uno (e un solo) estremo in $V(\Lambda)$.

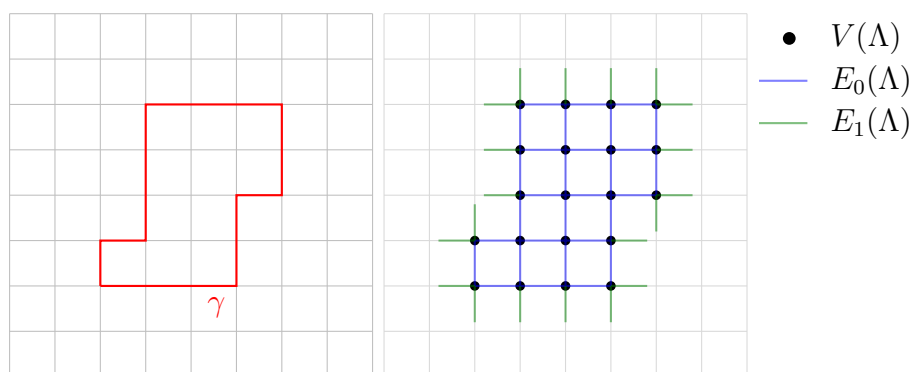


Figura 1.1: Un esempio di γ e della regione Λ da essa individuata.

Sia $E(\Lambda) = E_0(\Lambda) \cup E_1(\Lambda)$. Vogliamo ora assegnare un colore (rosso o nero) a ciascun lato di $E(\Lambda)$ in modo che sia rispettata la *ice rule*: ciascun vertice v in $V(\Lambda)$ deve essere estremo di esattamente due lati rossi e due lati neri. Possiamo pensare

ad una colorazione di questo tipo come una funzione $\phi : E \longrightarrow \{r, n\}^{|E|}$, che ad ogni lato associa il suo colore (r =rosso, n =nero). Denotiamo l'insieme di queste funzioni come $Fpl(\Lambda)$, i cui elementi sono detti *fully packed loop configurations*.

Aggiungiamo ora una condizione sui lati esterni. Data $\tau : E_1 \longrightarrow \{r, n\}^{|E_1|}$, $Fpl(\Lambda, \tau)$ è l'insieme delle ϕ la cui restrizione a E_1 è τ : fondamentalmente, τ impone una condizione sul colore dei lati esterni. Osserviamo che $\{Fpl(\Lambda, \tau)\}_{\tau: E_1 \longrightarrow \{r, n\}^{E_1}}$ costituisce una partizione di $Fpl(\Lambda)$.

La *ice rule* permette di individuare su Λ dei cammini rossi e neri. In effetti, a partire da un lato esterno nero (o rosso), possiamo muoverci sul vertice adiacente, e da lì proseguire muovendoci sull'altro lato nero che su esso insiste, e così fino ad arrivare ad un altro (e distinto) lato esterno nero. In questo modo ciascun lato esterno è collegato a uno e un solo lato esterno dello stesso colore; ne segue che in ogni colorazione τ dei lati esterni avremo un numero pari a $2n$ di lati rossi e un numero pari a $2m$ di lati neri. Chiamiamo percorsi i cammini tra due lati esterni.

In una configurazione ϕ possono essere presenti anche loop neri o rossi, ovvero cammini chiusi che non hanno terminazioni su lati esterni, interamente compresi in $E_0(\Lambda)$. Data una configurazione ϕ , chiamo $l(\phi)$ il numero totale di loop neri e rossi.

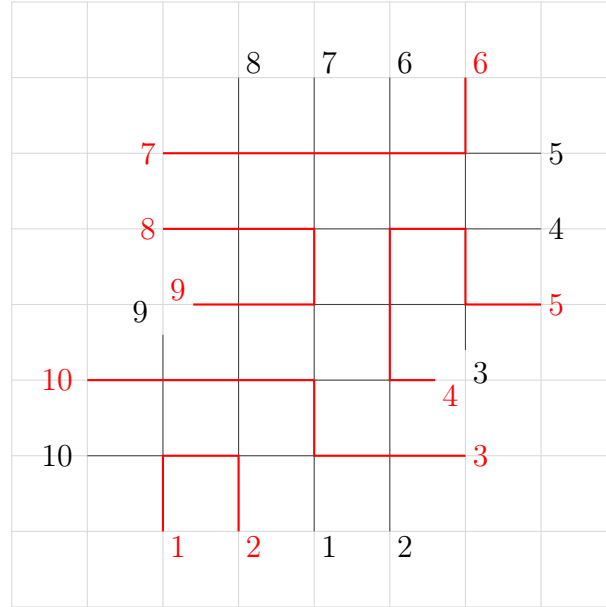


Figura 1.2: Abbiamo attribuito una colorazione ammissibile ϕ a Λ . A partire da ciascun lato esterno, è possibile seguire un percorso che termina in un altro lato esterno. Non sono presenti loop.

Chiamiamo endpoint (o terminazioni) gli estremi dei lati esterni su cui terminano

i percorsi. Numeriamo gli endpoint rossi da 1 a $2n$, in senso antiorario a partire da un lato esterno nero a cui scegliamo di applicare l'etichetta 1. Analogamente, numeriamo da 1 a $2m$ gli endpoint neri.

Data una configurazione ϕ , definiamo l'accoppiamento rosso indotto $\pi_R(\phi)$ come un insieme costituito dalle n coppie di endpoint collegate da un percorso rosso in ϕ . In generale, se in $\pi_R(\phi)$ è presente la coppia di terminazioni (k, j) , scriviamo che $\pi_R(k) = j$.

Analogamente $\pi_N(\phi)$ è l'insieme delle m coppie di endpoint neri in ϕ .

Nell'esempio in Figura 1.2, $\pi_R(\phi) = \{(1, 2); (3, 10); (4, 5); (6, 7); (8, 9)\}$ e $\pi_N(\phi) = \{(1, 8); (2, 3); (4, 5); (6, 7); (9, 10)\}$.

Denotiamo con $LP(n)$ l'insieme dei possibili accoppiamenti dei numeri da 1 a $2n$ (dunque $\pi_R(\phi) \in LP(n)$ e $\pi_N(\phi) \in LP(m)$).

1.1 Fully Packed Loop su una Griglia $n \times n$

Introduciamo un esempio molto importante di griglia Λ e di relativa τ , al quale ci restringeremo nell'enunciare la maggior parte dei teoremi nei capitoli successivi.

Sia Λ_n griglia individuata da una curva γ quadrata con spigoli in $(1, 1)$, $(n, 1)$, $(1, n)$, (n, n) . I lati esterni avranno dunque estremi in $(0, x)$, $(x, 0)$, $(n+1, x)$, $(x, n+1)$, con $x \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consideriamo τ_n tale che il lato esterno verticale con estremo in $(1, 0)$ sia rosso e, muovendosi lungo il bordo in senso antiorario, ogni lato esterno abbia colore diverso rispetto al precedente.

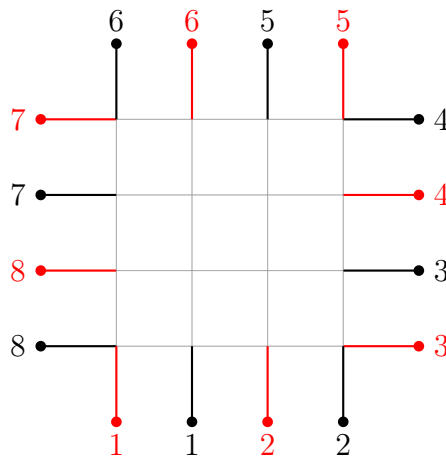


Figura 1.3: La generica struttura di una ϕ in $Fpl(\Lambda_4, \tau_4)$

Poiché i lati esterni sono in totale $4n$ e la loro colorazione è alternata, si hanno $2n$ endpoint rossi e $2n$ neri, pertanto $\pi_R(\phi), \pi_N(\phi) \in LP(n)$. Assegniamo all'endpoint rosso in $(1, 0)$ l'etichetta 1, e a partire da esso numeriamo gli altri endpoint rossi fino a $2n$. Numeriamo in modo analogo gli endpoint neri a partire dalla terminazione in $(2, 0)$.

Nella successiva sezione studieremo due rappresentazioni equivalenti di questi oggetti.

1.2 Square Ice Configurations e ASMs

Data una $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$, consideriamo i vertici in $V(\Lambda_n)$ e assegniamo loro una colorazione secondo il seguente criterio:

- se la somma delle coordinate (x, y) di v è pari, v è nero;
- se la somma delle coordinate (x, y) di v è dispari, v è rosso.

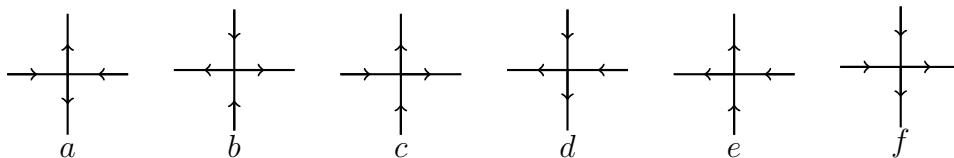
Di conseguenza, ciascun lato di lunghezza 1 avrà un estremo rosso e un estremo nero.

A questo punto applichiamo sui lati di Λ_n delle frecce:

- i lati verticali in E_1 hanno frecce uscenti,
- i lati orizzontali in E_1 hanno frecce entranti,
- i lati (rossi e neri) in E_0 hanno frecce che puntano in direzione del vertice del loro stesso colore.

Pertanto, possiamo dimenticare il colore dei lati di Λ_n e assegnare a ciascuno di essi un verso: chiamiamo una struttura di questo tipo *square ice configuration*. Notiamo che, a partire da una *square ice configuration*, si può sempre risalire alla ϕ corrispondente. Infatti, conoscendo a priori il colore dei vertici, il verso delle frecce determina il colore dei lati in E_0 , mentre il colore dei lati esterni è dato da τ_n .

Osserviamo che, per la *ice rule*, ogni vertice ha 2 frecce entranti e due frecce uscenti, per cui ogni vertice si presenta in uno dei 6 seguenti modi:



Definizione 1.2.1. Una ASM (*alternating sign matrix*) di ordine n è una matrice $n \times n$ tale che:

1. ha solo $1, -1$ e 0 come entrate;
2. in ogni colonna e in ogni riga, gli elementi non nulli si alternano;
3. la somma degli elementi di ciascuna riga e di ciascuna colonna è 1 .

Chiamiamo A_n l'insieme delle ASMs di ordine n .

Proposizione 1.2.2. $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ è in biezione con A_n .

Dimostrazione. Abbiamo già osservato come a ciascuna $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ è possibile associare univocamente una *square ice configuration*.

Definiamo esplicitamente una biezione tra l'insieme delle *square ice configuration* e A_n . Consideriamo i 6 possibili vertici disegnati sopra. Al vertice a assegniamo valore 1 , al vertice b assegniamo valore -1 e agli altri valore 0 . Associamo ad una *square ice configuration* ϕ una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ che all'entrata (i, j) abbia il valore assegnato al vertice in $(n - j, i)^1$ (Figura 1.4).

Verifichiamo che A soddisfi le proprietà 2. e 3. della definizione. Nel vertice a , con valore 1 , entrambe le frecce orizzontali sono entranti (e entrambe le verticali sono uscenti). Viceversa, il vertice b , con valore -1 , ha entrambe le frecce orizzontali uscenti e le verticali entranti. Nei vertici con valore 0 , le frecce orizzontali (e quindi le verticali) puntano nella stessa direzione.

Dimostriamo che, in ogni riga orizzontale ad altezza y ($y \in \mathbb{Z}$, $1 \leq y \leq n$), esiste almeno un vertice a . Sappiamo che entrambi i lati esterni della riga hanno una freccia che punta verso la griglia. Se il vertice $(1, y)$ è di tipo a , concludiamo; altrimenti il lato orizzontale alla destra del vertice punta nella stessa direzione del precedente, cioè verso destra. Ragioniamo così finché non troviamo un vertice di tipo a ; se al passo $n - 1$ non abbiamo ancora trovato un vertice a , tutti i lati interni hanno frecce verso destra. Ma allora il vertice (n, y) ha il lato alla sua sinistra con freccia che punta verso destra per quanto appena detto, e quello alla sua destra che punta verso sinistra per costruzione della *square ice configuration*. Dunque è un vertice di tipo a . Abbiamo quindi mostrato che ogni riga della matrice A ha almeno un'entrata con valore 1 .

¹il cambio di indici è dovuto solo a una differenza di notazione tra matrici e *s.i.c.*; graficamente il passaggio è immediato

Inoltre, se a destra del vertice a (non necessariamente consecutivamente) c'è un vertice di tipo b , alla destra di quest'ultimo ci sarà una freccia che punta verso destra. Ci troviamo dunque nella stessa situazione di partenza: è necessario che tra il vertice b e il lato esterno di destra ci sia un vertice di tipo a .

Discorso analogo si può fare qualora il vertice b fosse alla sinistra del vertice a . Abbiamo quindi mostrato che, in ogni riga

$$\#\{\text{vertici di tipo } a\} = \#\{\text{vertici di tipo } b\} + 1$$

ed essi sono alternati. Un argomento simile si può applicare a ciascuna colonna, provando così che la matrice A associata a ϕ è una ASM.

Invertendo i passaggi, a partire da una qualsiasi ASM, si può passare ad una *s.i.c.*, ottenendo così la biezione desiderata. $\square$

D'ora in poi, dal momento che i due insiemi sono in biezione, useremo equivalentemente le notazioni $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ e A_n .

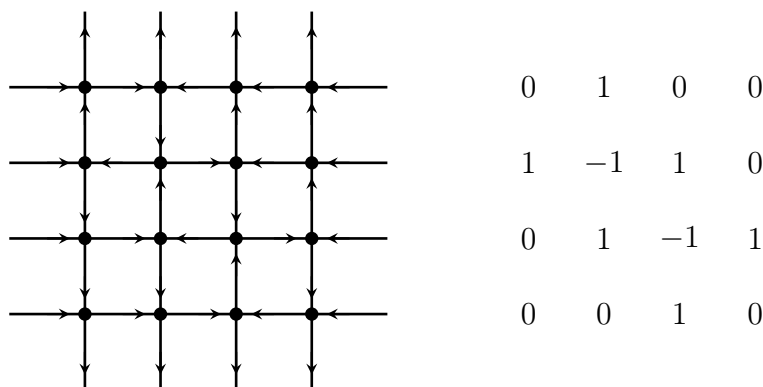


Figura 1.4: Un esempio di *square ice configuration* e la ASM ad esso associata.

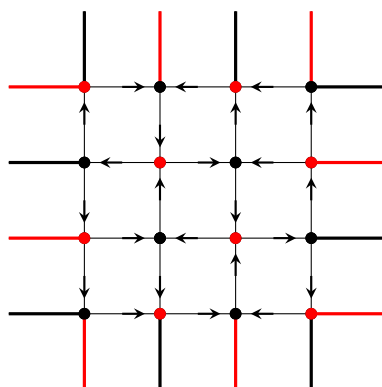


Figura 1.5: Il passaggio dalla s.i.c. della Figura 1.4 alla relativa FPL

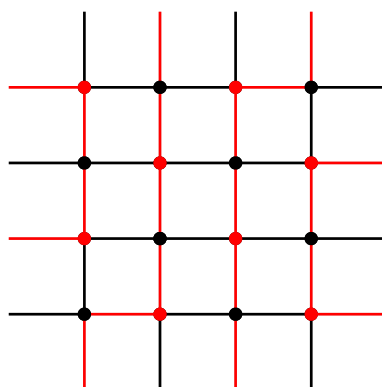


Figura 1.6: La FPL equivalente

Come si è accennato nel corso dell'introduzione, la griglia in Figura 1.4 può essere interpretata come una rappresentazione di un reticolo cristallino, formato da atomi di idrogeno, indicati con i lati, e atomi di ossigeno, indicati con i vertici. Dato un atomo di idrogeno, la freccia convenzionalmente punta verso l'ossigeno con cui esso forma un legame di tipo covalente, dunque il legame con l'altro ossigeno sarà quello di tipo idrogeno.

Capitolo 2

Teorema di Wieland

2.1 Enunciato del Teorema di Wieland

Consideriamo i possibili accoppiamenti indotti da una ϕ sugli endpoint neri e rossi.

Se immaginiamo ciascuna coppia $(k, \pi(k))$ come un elemento del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_{2n}$, possiamo comporre le coppie in $\pi(\phi)_R$ e $\pi(\phi)_N$ con $(1, 2, \dots, 2n-1, 2n)$ e $(2n, 2n-1, \dots, 2, 1)$. Data una coppia (k, k') , si ha che

$$\begin{aligned}(1, 2, \dots, 2n-1, 2n)(k, k') &= (k+1, k'+1), \\ (2n, 2n-1, \dots, 2, 1)(k, k') &= (k-1, k'-1);\end{aligned}$$

dove tali somme e sottrazioni avvengono in modulo $2n$.

Definiamo

- $\pi'(\phi)_R = (1, 2, \dots, 2n-1, 2n) \circ \pi(\phi)_R$, dove se $(k, \pi(k)) \in \pi(\phi)_R$, allora $(k+1, \pi(k)+1) \in \pi'(\phi)_R$.
- $\pi'(\phi)_N = (2n, 2n-1, \dots, 2, 1) \circ \pi(\phi)_N$, dove se $(k, \pi(k)) \in \pi(\phi)_N$, allora $(k-1, \pi(k)-1) \in \pi'(\phi)_N$;

Interpretiamo queste trasformazioni come una rotazione in senso orario degli accoppiamenti neri e in senso antiorario degli accoppiamenti rossi.

Più in generale, definiamo:

- $\pi^{(k)}(\phi)_R = (1, 2, \dots, 2n-1, 2n)^k \circ \pi(\phi)_R$ (rotazione di k endpoint neri in senso orario)

- $\pi^{(k)}(\phi)_N = (2n, 2n-1, \dots, 2, 1)^k \circ \pi(\phi)_N$ (rotazione di k endpoint rossi in senso antiorario)

Enunciamo ora il teorema di Wieland.

Teorema 2.1.1. Sia $A_n(\pi_N, \pi_R, l)$ l'insieme delle ϕ che inducono l'accoppiamento π_N sugli endpoint neri e l'accoppiamento π_R sugli endpoint rossi, e che hanno l loop. Dato $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, allora gli insiemi $A_n(\pi_N, \pi_R, l)$ e $A_n(\pi_N^{(k)}, \pi_R^{(k)}, l)$ sono in biezione.

Osservazione 2.1.2. Il teorema è ovvio se $k = n$ e la biezione è data dalla rotazione di 180° dell'intera griglia.

Se n è pari, una biezione è data anche dalla rotazione della griglia di 90° , pertanto il teorema è valido anche nel caso di rotazione di entrambi gli accoppiamenti in senso orario (o in senso antiorario) di $\frac{n}{2}$ endpoint.

Osservazione 2.1.3. Il teorema vale anche in casi meno restrittivi: ad esempio, possiamo ignorare i cammini neri ed i loop e si ha che, dato un certo π_R , $A_n(\pi_R)$ e $A_n(\pi_R^{(k)})$ sono in biezione. In effetti:

$$\begin{aligned} \bullet \quad A_n(\pi_R) &= \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\pi_N \in LP(n)} A_n(\pi_N, \pi_R, l) \right); \\ \bullet \quad A_n(\pi_R^{(k)}) &= \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\pi_N \in LP(n)} A_n(\pi_N^{(k)}, \pi_R^{(k)}, l) \right). \end{aligned}$$

Si tratta di un'unione finita poiché $LP(n)$ è un insieme finito (ne studiamo la cardinalità nella sezione 3.1) e, per ogni n , esiste un N tale che, se $l > N$, non c'è nessuna configurazione in $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ con l loop. Pertanto i due insiemi sono in biezione perché unione finita di insiemi in biezione.

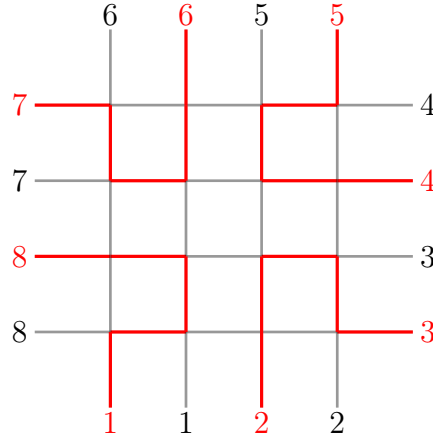


Figura 2.1: una $\phi \in Fpl(\Lambda_4, \tau_4)$ con un loop (nero).

Esempio. Consideriamo la ϕ in figura 2.1. Si ha che

$$\pi_R = \pi_1 := \{(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 1)\},$$

$$\pi_N = \pi_2 := \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}.$$

Osserviamo che:

$$\pi_R^{(k)} = \begin{cases} \pi_2 & \text{se } k \text{ dispari,} \\ \pi_1 & \text{se } k \text{ pari;} \end{cases}$$

$$\pi_N^{(k)} = \begin{cases} \pi_1 & \text{se } k \text{ dispari,} \\ \pi_2 & \text{se } k \text{ pari.} \end{cases}$$

Il teorema di Wieland afferma quindi che $A_n(\pi_1, \pi_2, 1)$ e $A_n(\pi_2, \pi_1, 1)$ sono in biezione.

In effetti, si può verificare che ciascuno dei due insiemi ha solo due elementi. Supponiamo che il loop sia nero. I lati del loop non possono avere nessun vertice in comune con i lati esterni (altrimenti si avrebbe un percorso). Pertanto, il loop non può che essere avvolto attorno al quadrato centrale (come in figura 2.1), perché tutti gli altri lati del reticolo hanno almeno un vertice in comune con un lato esterno.

A questo punto, i cammini neri devono essere necessariamente sul perimetro del quadrato (altrimenti si intersecherebbero con il loop e non sarebbe rispettata la *ice rule*). Dunque a partire dalla terminazione nera 1, possiamo scegliere se collegarla lungo il perimetro al vertice 2 (come nell'esempio) o al vertice 8. A questo punto i restanti accoppiamenti sono univocamente determinati: nel primo caso si avrà $\pi_N = \pi_2$, nel secondo $\pi_N = \pi_1$. I cammini rossi necessariamente passeranno lungo i

lati rimanenti e otterremo, rispettivamente nel primo e nel secondo caso, $\pi_R = \pi_2$ e $\pi_R = \pi_1$. Abbiamo dunque trovato un elemento per ciascuno dei due insiemi.

Supponendo il loop centrale rosso, in maniera analoga otterremo le altre 2 configurazioni possibili, una per ogni insieme. Per costruzione, non possono esistere altre.

2.2 Gyration

In questa sezione definiremo l'operatore *gyration*, molto utile alla dimostrazione del teorema di Wieland.

Consideriamo i quadrati di lato 1 che compongono la griglia Λ_n . Un quadrato si dice pari o dispari se la somma delle coordinate del suo vertice in basso a sinistra (non necessariamente in $V(\Lambda_n)$) è pari o dispari.

Chiamiamo quadrati interni i quadrati i cui lati sono tutti in $E_0(\Lambda_n)$ ed esterni quelli con due lati in $E_1(\Lambda_n)$

Poiché ogni lato può essere rosso o nero, un quadrato S interno a Λ_n può essere colorato in 16 modi distinti. Se S ha due lati consecutivi dello stesso colore diciamo che S è di tipo A. Nei restanti casi, cioè quando i lati paralleli di S sono a due a due dello stesso colore (ma non tutti dello stesso), diciamo che S è di tipo B.

Si osserva facilmente che i quadrati di tipo B sono 2, pertanto quelli di tipo A sono 14.

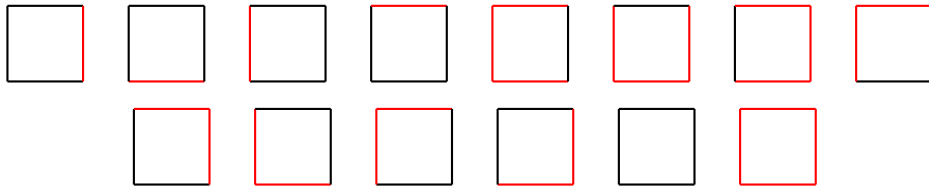


Figura 2.2: Quadrati di tipo A.

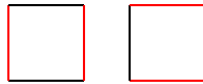


Figura 2.3: Quadrati di tipo B

Dato S quadrato interno, definiamo una biezione $G_S : A_n \longrightarrow A_n$ la quale, data una configurazione ϕ , agisce nel seguente modo:

- se S è di tipo A, $G_S(\phi) = \phi$;
- se S è di tipo B, G_S cambia colore a ciascun lato di S , lasciando invariati gli altri lati.

Osserviamo che se S è di tipo B in ϕ , lo è anche in $G_S(\phi)$. Quindi, riapplicando G_S , il colore di ciascun lato di S cambia nuovamente e si riottiene esattamente la configurazione di partenza.

Pertanto per ogni ϕ e per ogni S , $G_S \circ G_S(\phi) = \phi$, cioè G_S è una biezione con il suo codominio, che verifichiamo essere proprio A_n .

Mostriamo che data $\phi \in A_n$, $G_S(\phi) \in A_n$. Se S è di tipo A, è ovvio; se S è di tipo B su ogni vertice v di S insistono esattamente un lato rosso e un lato nero di S . Ciò significa che gli altri due lati, non in S , che insistono su v sono anch'essi uno rosso e uno nero (per la *ice rule*). Allora, cambiando colore ad ogni lato di S , su v continuano a insistere, in totale, 2 lati neri e 2 rossi, e la *ice rule* è ancora rispettata.

Dal momento che i lati esterni non vengono mai modificati, poiché non sono lati di nessun quadrato interno, la condizione al bordo di $G(\phi)$ è ancora τ_n . Ciò prova che $G_S(\phi)$ è ancora una configurazione in A_n .

Si osserva facilmente che, per come sono colorati i vertici di Λ , ogni lato è compreso al più tra un quadrato interno pari S_0 e un quadrato interno dispari S_1 , dunque solo G_{S_0} e G_{S_1} ne possono cambiare il colore. Quindi se S e S' hanno la stessa parità, G_S e $G_{S'}$ commutano, in quanto agiscono su quadrati e quindi lati distinti e l'azione di uno non influenza l'azione dell'altro. Possiamo pertanto definire G_0 come la composizione dei G_S per ogni S pari e G_1 come la composizione dei G_S per ogni S dispari.

Definiamo quindi l'operatore *gyration*:

$$G := G_0 \circ G_1 : A_n \longrightarrow A_n$$

il quale *visita* prima ciascun quadrato interno dispari e cambia il colore dei lati secondo il criterio già definito, e successivamente fa lo stesso con ciascun quadrato pari.

Introduciamo un insieme più ampio di configurazioni ϕ .

Sia $B_n := Fpl(\Lambda_n, \bar{\tau}_n)$, dove in $\bar{\tau}_n$ ciascun lato esterno è colorato in modo opposto rispetto a τ_n . Definiamo G_0 e G_1 anche su B_n , ottenendo anche in questo caso una biezione con B_n stesso.

Definiamo la funzione

$$-I : A_n \cup B_n \longrightarrow A_n \cup B_n$$

la quale, data una ϕ , cambia colore a ciascun lato, compresi quelli esterni. Evidentemente $-I$ è invertibile con $(-I)^2 = id$. In particolare $(-I)|_{A_n} : A_n \longrightarrow B_n$ è una

biezione poiché, data una $\phi \in A_n$, la condizione al bordo di $(-I)(\phi)$ è $\bar{\tau}_n$.

Consideriamo ora le seguenti composizioni di biezioni:

$$H_1 := -I \circ G_1 : A_n \longrightarrow B_n,$$

$$H_0 := -I \circ G_0 : B_n \longrightarrow A_n.$$

A livello grafico, H_1 e H_0 cambiano colore a tutti e soli i lati che vengono lasciati invariati da G_1 e G_0 . In altre parole H_k :

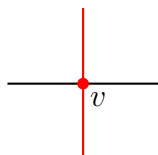
- visita tutti i quadrati di parità k (compresi quelli esterni),
- cambia colore ai lati dei quadrati esterni,
- cambia colore ai lati dei quadrati interni di tipo A.

Inoltre, è facile verificare che G_0 e $-I$ commutano: come già osservato, se un quadrato è di tipo A o B, lo è anche dopo che viene cambiato colore a tutti i suoi lati, pertanto non c'è differenza tra l'applicare G_0 prima o dopo di $-I$.

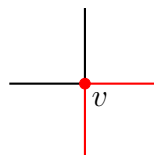
Otteniamo così una scrittura alternativa dell'operatore *gyration*, in quanto $H_0 \circ H_1 = -I \circ G_0 \circ -I \circ G_1 = G_0 \circ (-I)^2 \circ G_1 = G$.

2.3 Vertici fissi

Data una configurazione ϕ e $k \in \{0; 1\}$, consideriamo $v \in V(\Lambda_n)$. Diciamo che v è un vertice fisso rispetto ad H_k (o k -fisso) se i suoi due lati rossi (e quindi i suoi due lati neri) si trovano in quadrati di parità k distinti.



Esempio 1



Esempio 2

Consideriamo i due casi in figura: poiché il vertice v è rosso (parità 1), i quadrati di parità 1 sono quello in alto a destra e quello in basso a sinistra. Pertanto, in entrambi i casi, v è fisso rispetto ad H_1 , poiché i lati dello stesso colore si trovano in quadrati rossi distinti. Osserviamo che nell'Esempio 2 entrambi i lati rossi (e quindi entrambi i neri) si trovano sullo stesso quadrato di parità 0, dunque v non è fisso rispetto ad H_0 .

Sappiamo che ogni vertice viene attraversato da un cammino nero e da un cammino rosso. Avendo attribuito una parità anche ai quadrati al bordo, possiamo dire che ogni lato di E è compreso tra un quadrato pari e un quadrato dispari. Per la definizione appena data abbiamo che, quando un cammino passa per un vertice k -fisso, il tratto precedente e il tratto successivo al vertice si trovano lungo quadrati di parità k distinti.

Dimostriamo ora due proposizioni.

Proposizione 2.3.1. Sia ϕ una configurazione e v un suo vertice. Si ha che v è k -fisso in ϕ se e solo se v è k -fisso in $H_k(\phi)$.

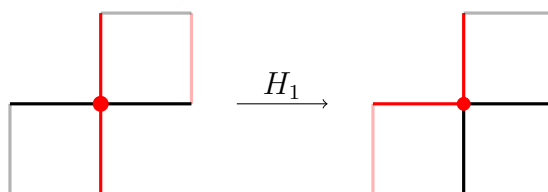


Figura 2.4: Un esempio di vertice rosso fisso rispetto ad H_1 . Dopo aver applicato quest'ultimo operatore, continua ad essere 1-fisso.

Dimostrazione. Poiché $H_k(H_k(\phi)) = \phi$, è sufficiente mostrare un'implicazione. Consideriamo l'azione di H_k sui quadrati di parità k tra i quali v è compreso. Essendo

v k -fisso, in ciascun quadrato ci sono un lato rosso ed uno nero che insistono su v . Dunque anche dopo l'azione di H_k in ciascun quadrato i lati che insistono su v saranno uno rosso e uno nero (eventualmente, il loro colore è scambiato). Pertanto v continua ad essere k -fisso in $H_k(\phi)$ $\square$

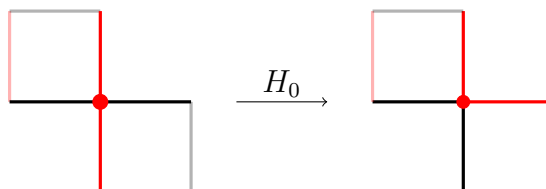


Figura 2.5: Non è vero che se un vertice è k -fisso in ϕ , lo è anche in $H_{1-k}(\phi)$. In figura è riportato un caso in cui v è fisso rispetto ad H_1 , ma non lo è più dopo che è stato applicato H_0 .

Proposizione 2.3.2. Due vertici k -fissi giacciono lungo lo stesso cammino nero (o rosso) prima dell'azione di H_k se e solo se giacciono lungo lo stesso cammino nero (o rosso) dopo l'azione di H_k .

Dimostrazione. Dato un cammino, consideriamo due vertici fissi consecutivi, cioè tali che il tratto di cammino che li connette non abbia altri vertici fissi. Per definizione allora tale tratto è interamente sui lati di un solo quadrato di parità k .

Pertanto i vertici fissi saranno vertici di uno stesso quadrato di parità k .

Osserviamo che se un quadrato al bordo di parità k ha due vertici in $V(\Lambda_n)$, necessariamente uno dei due è non fisso. In effetti un quadrato esterno di questo tipo ha tre lati in E , di cui due paralleli di colori diversi. Pertanto, quale che sia il colore del terzo lato, il vertice in cui si incontrano due lati dello stesso colore sarà non fisso.

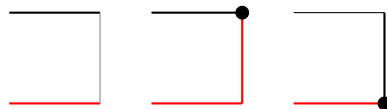


Figura 2.6: Tutti i quadrati al bordo con più di un vertice hanno, a meno di rotazioni e simmetrie, una configurazione di questo tipo, con un solo vertice fisso (evidenziato in nero).

Dunque, un tratto di cammino che connette due vertici k -fissi sarà lungo i lati di un quadrato interno. A meno di ruotare e di cambiare colore a tutti i lati, un quadrato interno di parità k avrà una delle quattro colorazioni riportate nella

figura sottostante, in cui sono stati evidenziati i vertici k -fissi. Si osserva che i vertici k -fissi che sono connessi da un cammino nero (o rosso) lo sono anche dopo l'applicazione di H_k .

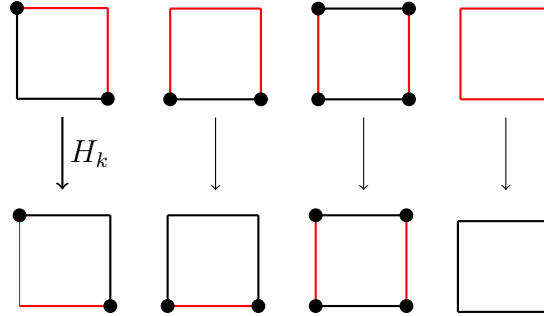


Figura 2.7: I casi interessanti sono i primi due: in entrambi i due vertici fissi sono connessi da un cammino rosso e uno nero, la cui traiettoria viene modificata da H_k . Tuttavia, i due cammini continuano a passare per i due vertici.

Dunque in generale, presi due vertici fissi qualunque all'interno di un cammino rosso (o nero), spezziamo il tratto di cammino che li connette in cammini tra vertici fissi consecutivi. Applicando quanto appena dimostrato, abbiamo che anche i due vertici fissi non consecutivi continuano ad essere connessi da un cammino rosso (o nero) dopo l'applicazione di H_k .

Come nella proposizione 2.3.1, il viceversa segue dal fatto che $H_k(H_k(\phi)) = \phi$. $\square$

Data una configurazione ϕ , consideriamo

$$V_1(\phi) = \{v \in V(\Lambda) : v \text{ è fisso in } \phi \text{ rispetto ad } H_1\}.$$

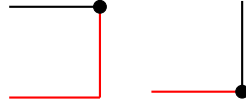
Fissato un colore (rosso o nero), consideriamo la partizione di $V_1(\phi)$ in classi costituite da vertici che giacciono lungo lo stesso cammino del colore scelto. La proposizione 2.3.1 afferma che $V_1(\phi) = V_1(H_1(\phi))$ e la proposizione 2.3.2 garantisce che le classi di equivalenza dei due insiemi coincidano. Pertanto, ad ogni cammino (che può essere un loop o un percorso) che contiene almeno un vertice fisso, ne è associato in maniera biunivoca uno in $H_k(\phi)$.

In realtà, osservando i quadrati esterni, noto che ciascun percorso contiene almeno due vertici fissi.

In effetti, come avevamo già parzialmente osservato, dato un quadrato esterno di parità k , esso contiene:

- un lato esterno nero e un lato esterno rosso,
- un vertice fisso rispetto ad H_k ,
- al massimo un vertice non fisso (se e solo se il quadrato ha effettivamente due vertici)

A meno di ruotare e di cambiare colore ad ogni lato, abbiamo uno dei due casi raffigurati, dove sono stati evidenziati i vertici fissi.



Si può quindi osservare che a partire da un endpoint, il cammino che da esso parte passa per un vertice k -fisso dopo aver percorso al più due lati.

Inoltre, applicando H_k (che ricordiamo cambia colore a tutti i quadrati esterni) il vertice fisso continua ad essere attraversato da un percorso nero e da uno rosso.

Ciò significa che dopo l'applicazione di H_k , i percorsi, pur cambiando terminazioni, restano percorsi e non diventano loop.

Di conseguenza anche i loop che contengono almeno un vertice fisso restano loop. Se un loop non contiene alcun vertice fisso, vuol dire che esso è avvolto attorno ad un unico quadrato di parità k . Pertanto, quando tale quadrato viene visitato da H_k , il suo colore viene cambiato e attorno ad esso ci sarà ancora un loop, ma di colore diverso.

Questo significa che il numero totale di loop in ϕ è uguale al numero totale di loop in $H_k(\phi)$ e dunque anche al numero totale di loop in $G(\phi)$, dal momento che $G = H_0 \circ H_1$.

2.4 Conclusione della dimostrazione

Non resta che mostrare che applicare G ad una configurazione ϕ fa ruotare l'accoppiamento dei vertici neri in senso orario e l'accoppiamento dei vertici rossi in senso antiorario.

Studiamo l'azione di G sui quadrati esterni di una configurazione ϕ .

Consideriamo il quadrato esterno dispari il cui vertice in basso a sinistra è $(1, 0)$. Per come abbiamo definito τ_n , il lato esterno più a sinistra è nero, quello più a destra è rosso. Possiamo dire che, percorrendo in senso antiorario il bordo di Λ_n , in ogni quadrato esterno dispari, il lato rosso precede il lato nero.

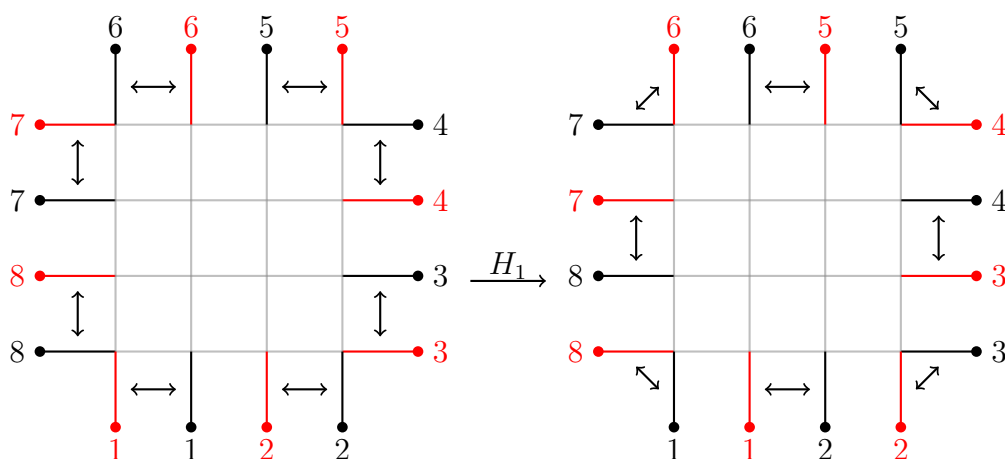


Figura 2.8: Nel disegno a sinistra, i quadrati dispari sono quelli attraversati dalla freccia: si può notare come, seguendo la numerazione degli endpoint, in ciascun quadrato dispari i lati rossi precedano quelli neri. Dopo l'applicazione di H_1 , consideriamo i quadrati pari e facciamo un discorso simile.

Applicando H_1 , i lati dei quadrati esterni dispari si scambiano il colore. Dunque in ogni quadrato esterno dispari il lato nero si muoverà di un endpoint in senso orario e il lato rosso in senso antiorario.

Consideriamo ora i quadrati di parità 0: dopo l'azione di H_1 , si può dire che, sempre percorrendo il bordo di Λ_n in senso antiorario, in ciascun quadrato pari il lato nero è successivo al lato rosso. Pertanto quando applichiamo H_0 , il lato rosso si muove ancora in senso antiorario e il nero in senso orario.

Consideriamo in ϕ un cammino tra gli endpoint neri i e j . Nei pressi di ciascuna terminazione si ha un vertice fisso rispetto ad H_1 . Dopo l'applicazione dell'operatore H_1 , i lati neri si spostano come appena descritto e tra essi continua ad esistere un

cammino, in quanto i rispettivi vertici fissi sono nella stessa classe di equivalenza. Anche nella nuova configurazione, nei pressi delle terminazioni ci saranno due vertici fissi rispetto ad H_0 : come sopra, la loro presenza garantisce che, dopo aver applicato H_0 , le terminazioni rosse, che ora sono nei vertici etichettati con $i+1, j+1$, continuano ad essere collegate tra loro.

Possiamo finalmente affermare che $G : A_n(\pi_N, \pi_R, l) \longrightarrow A_n(\pi'_N, \pi'_R, l)$ è la biezione che cercavamo. In effetti, abbiamo mostrato che:

- il numero di loop in ϕ è uguale al numero di loop in $G(\phi)$;
- $\pi_N(G(\phi)) = \pi'_N(\phi)$
- $\pi_R(G(\phi)) = \pi'_R(\phi)$.

Inoltre G è invertibile con inversa $G^{-1} = H_1 \circ H_0$ che agisce sugli accoppiamenti in maniera opposta rispetto a G , ripristinando $\pi_N(\phi)$ e $\pi_R(\phi)$.

Capitolo 3

Uno spazio vettoriale su $Lp(n)$ e generalizzazione della Gyration

In questo capitolo, introdurremo due spazi vettoriali i cui vettori sono somme formali di, rispettivamente, accoppiamenti in $Lp(n)$ e configurazioni in $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$.

Definiremo degli operatori lineari su tali spazi che permettono di scrivere in maniera più rigorosa ed elegante alcune considerazioni già proposte nel precedente capitolo.

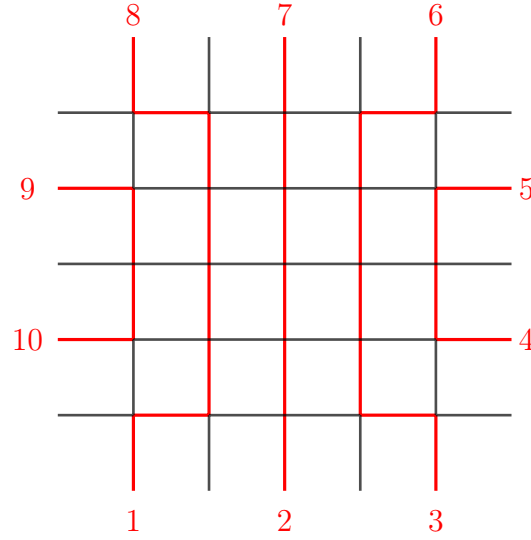
Inoltre daremo un'idea di come generalizzare il teorema di Wieland su griglie non quadrate e con condizione su bordo τ qualunque.

I risultati ottenuti saranno poi utilizzati per enunciare e dimostrare la congettura di Razumov Stroganov, argomento del quarto capitolo.

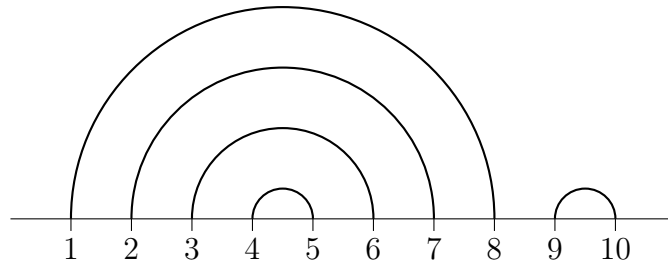
3.1 Rappresentazione degli accoppiamenti

Da questo momento in avanti, scegliamo di concentrarci sull'accoppiamento dei vertici rossi indotto da una configurazione ϕ su Λ_n . Dunque, riferendoci all'accoppiamento relativo ad una ϕ , intenderemo sempre quello indotto dai percorsi rossi e con $\pi(\phi)$ indicheremo il vettore in $\pi_R(\phi) \in Lp(n)$.

Data una $\pi \in Lp(n)$, vogliamo darne una rappresentazione grafica che non dipenda da ϕ , ma evidenzi solo quali endpoint sono tra loro collegati.

Figura 3.1: Un esempio di ϕ su Λ_5 .

Disponiamo gli indici degli endpoint su un segmento orizzontale e colleghiamo con degli archetti le coppie in π .

Figura 3.2: La rappresentazione della π indotta dalla ϕ della Figura 3.1.

Ricordiamo che, per la *ice rule*, due percorsi rossi non si incrociano mai all'interno della griglia: nella rappresentazione appena introdotta ciò si traduce nel fatto che gli archetti che connettono i vertici non si intersecano.

Questa osservazione ci è utile per studiare la cardinalità di $Lp(n)$. Evidentemente, il numero di accoppiamenti possibili non corrisponde al numero di modi in cui si possono scegliere n coppie tra $2n$ elementi. In effetti, il vincolo che due percorsi non si intersechino riduce in modo notevole i casi possibili.

Dato $c_0 = 1$, si definisce ricorsivamente, per ogni $n \geq 1$, l' n -esimo numero di Catalan come

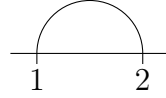
$$c_n = \sum_{k=1}^n c_{k-1} c_{n-k}.$$

Proposizione 3.1.1. $|Lp(n)| = c_n$.

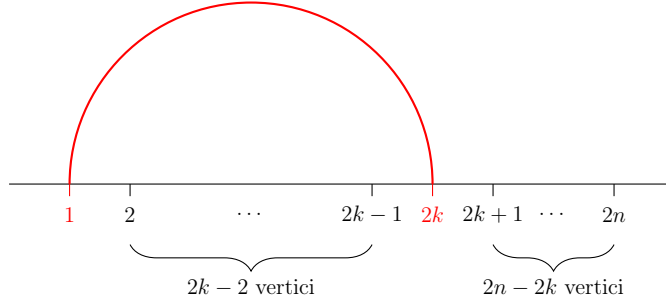
Dimostrazione. Il numero di $\pi \in Lp(n)$ corrisponde al numero di modi possibili di connettere $2n$ vertici su un segmento con degli archetti che non si intersechino tra di loro.

Dimostriamo per induzione su n che tali rappresentazioni sono proprio c_n .

Se $n = 1$, è possibile connettere i vertici 1 e 2 in un solo modo. In effetti, $c_1 = 1$.



Assumiamo vera la proposizione per ogni $k < n$ e studiamo $Lp(n)$. Consideriamo il vertice 1: esso sarà connesso necessariamente ad un vertice pari. Altrimenti, se fosse collegato ad un vertice dispari $2k + 1$, tra 1 e $2k + 1$ ci sarebbero $2k - 1$ vertici, che necessariamente dovrebbero essere accoppiati tra loro (per non incrociare l'arco che va da 1 a $2k + 1$). Ma ciò non è possibile proprio perché sono in numero dispari.



Sia $2k$, con $1 \leq k \leq n$, il vertice a cui è connesso 1. I vertici tra 1 e $2k$ sono $2k - 2$: per ipotesi induttiva possono essere accoppiati in c_{k-1} modi distinti. I restanti vertici, che sono $2n - 2k$, possono essere collegati in c_{n-k} modi. Dunque, ci sono $c_{n-k}c_{k-1}$ rappresentazioni tali che $(1, 2k)$ sia una coppia. Facendo variare k concludiamo che il numero totale di rappresentazioni possibili è proprio

$$\sum_{k=1}^n c_{k-1}c_{n-k} = c_n.$$

□

3.2 Operatori sugli accoppiamenti

Nel primo capitolo abbiamo mostrato come l'operatore *gyration* ruoti in senso antiorario l'accoppiamento rosso della configurazione su cui viene applicato. Definiamo un operatore

$$\tilde{G} : LP(n) \longrightarrow LP(n)$$

che manda $\pi = \{(k, \pi(k))\}_{1 \leq k \leq 2n}$ in $\pi' = \{(k+1, \pi(k)+1)\}_{1 \leq k \leq 2n}$.

In altre parole $\pi(G\phi) = \tilde{G}\pi(\phi)$.

Tuttavia occorre sottolineare che $\tilde{G}^{2n} = id$ per ogni π , ma non si può dire che $G^{2n}(\phi) = \phi$.

Poiché $\tilde{G}$ è invertibile, possiamo definire

$$R := \tilde{G}^{-1} : LP(n) \longrightarrow LP(n)$$

che ruota gli accoppiamenti rossi in senso orario, cioè, dato un accoppiamento π , in $R(\pi)$ ad ogni indice viene sottratto 1 (in modulo $2n$).

D'ora in avanti, useremo più spesso l'operatore R e ci riferiremo a $\tilde{G}$ come R^{-1} .

Inoltre, per ogni k tale che $1 \leq k \leq 2n$, definiamo

$$e_k : LP(n) \longrightarrow LP(n)$$

nel modo seguente:

- se $\pi(k) = k+1$, allora $e_k(\pi) = \pi$;
- altrimenti, le coppie $(k, \pi(k))$ e $(k+1, \pi(k+1))$ vengono sostituite con le coppie $(k, k+1)$ e $(\pi(k), \pi(k+1))$.

In altre parole, e_k fa sì che il vertice k sia accoppiato con il vertice successivo $k+1$.

Osserviamo come questi operatori modifichino la rappresentazione di π . Riprendiamo l'esempio in Figura 3.2, che riportiamo.

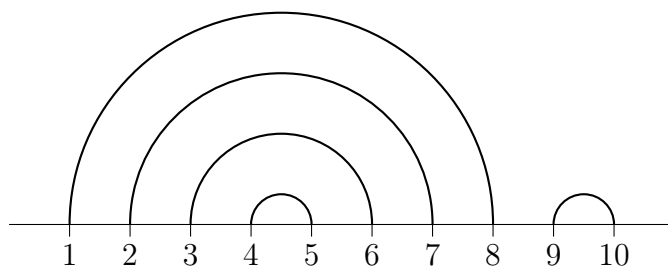


Figura 3.3: La rappresentazione associata alla Figura 3.1.

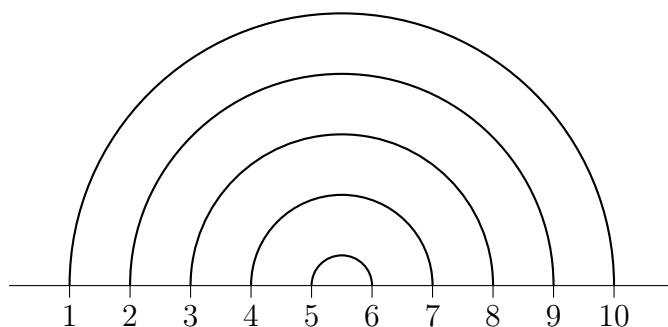


Figura 3.4: Applicare $\tilde{G}$ si traduce, graficamente, nello spostare verso destra il vertice di partenza di ciascun archetto, mantenendone costante l'ampiezza. L'unica eccezione va fatta per l'archetto che, prima di applicare $\tilde{G}$, connette $(10, \pi(10))$, la cui ampiezza va modificata in modo da connettere $(1, \pi(10) + 1)$. Nell'esempio, $\pi(10) = 9$, e in effetti, dopo aver applicato $\tilde{G}$, si ottiene la coppia $(1, 10)$

Analogamente, applicare R sposta verso sinistra il vertice di partenza di ciascun archetto.

Per quanto riguarda l'azione degli e_k , notiamo che nel nostro esempio $e_4(\pi) = e_9(\pi) = \pi$ poiché in π si hanno già le coppie $(4, 5)$ e $(9, 10)$. Rappresentiamo ora $e_2(\pi)$.

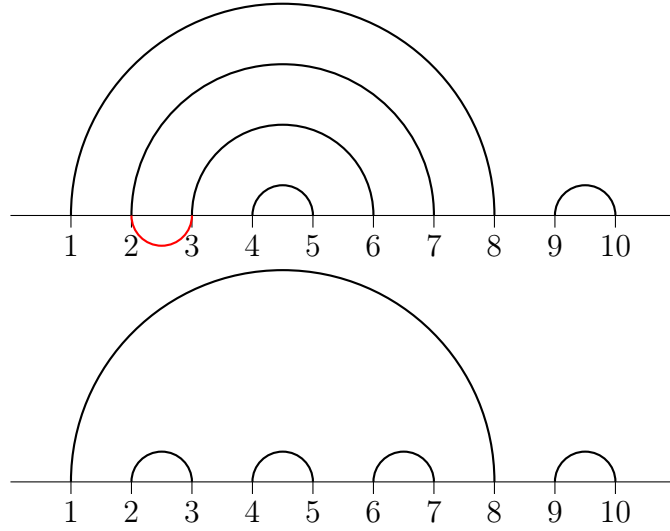


Figura 3.5: Si osserva come gli unici archetti che sono stati modificati da e_2 sono quelli che coinvolgevano gli endpoint 2 e 3, in modo da connettere le coppie $(2, 3)$ e $(\pi(2), \pi(3)) = (6, 7)$.

Proposizione 3.2.1. Dati $1 \leq k, j \leq 2n$, valgono le seguenti relazioni tra operatori:

1. $e_k^2 = e_k$;
2. se i vertici k e j non sono vertici consecutivi, $e_k \circ e_j = e_j \circ e_k$;
3. $e_k \circ e_{k \pm 1} \circ e_k = e_k$;
4. $R \circ e_{k+1} \circ R^{-1} = e_k$.

Dimostrazione. Consideriamo un generico $\pi \in LP(n)$, $\pi = \{(i, \pi(i))\}$ e studiamo come cambia dopo l'applicazione degli operatori.

1. In $e_k(\pi)$ i vertici k e $k+1$ sono accoppiati, dunque $e_k(e_k(\pi)) = e_k(\pi)$.
2. Poiché $k+1 \neq j$ e $j+1 \neq k$, entrambe le composizioni danno come risultato $\{(k, k+1), (\pi(k), \pi(k+1)), (j, j+1), (\pi(j), \pi(j+1)), \dots\}$, dove gli accoppiamenti omessi sono quelli già presenti in π .

3. Seguiamo i vari step della composizione, evidenziando solo gli accoppiamenti che subiscono modifiche:

$$\begin{aligned}
& (k, \pi(k)), (k+1, \pi(k+1)) \\
& \xrightarrow{e_k} (k, k+1), (\pi(k), \pi(k+1)) \\
& \xrightarrow{e_{k+1}} (k+1, k+2), (k, \pi(k+2)), (\pi(k), \pi(k+1)) \\
& \xrightarrow{e_k} (k, k+1), (k+2, \pi(k+2)), (\pi(k), \pi(k+1)).
\end{aligned}$$

Poiché $(k+2, \pi(k+2))$ era già in π , l'azione di questi tre operatori è analoga a quella di e_k .

4. Poiché $R \circ R^{-1} = id$, gli accoppiamenti non modificati da e_{k+1} rimangono invariati sotto l'azione di $R \circ e_{k+1} \circ R^{-1}$. Osserviamo cosa accade agli accoppiamenti effettivamente modificati:

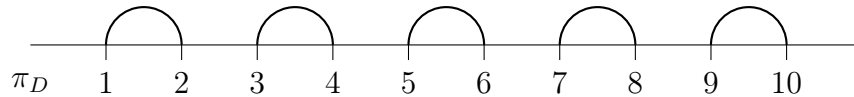
$$\begin{aligned}
& (k, \pi(k)), (k+1, \pi(k+1)) \\
& \xrightarrow{R^{-1}} (k+1, \pi(k)+1), (k+2, \pi(k+1)+1) \\
& \xrightarrow{e_{k+1}} (k+1, k+2), (\pi(k)+1, \pi(k+1)+1) \\
& \xrightarrow{R} (k, k+1), (\pi(k), \pi(k+1)).
\end{aligned}$$

Pertanto, la composizione di questi tre operatori ha avuto lo stesso effetto di e_k .

□

Proposizione 3.2.2. Siano $\pi, \pi' \in Lp(n)$ qualsiasi. È possibile, mediante l'applicazione di soli operatori di tipo e_k , ottenere π' a partire da π .

Dimostrazione. Chiamiamo π_D l'accoppiamento in cui ciascun vertice dispari è collegato al successivo pari.



Per ogni $\pi \in Lp(n)$, vale che

$$e_{2n-1}e_{2n-3} \dots e_3e_1(\pi) = \pi_D.$$

Dunque è sufficiente mostrare che a partire da π_D , è possibile ottenere π' applicando operatori e_k .

In π' , diciamo che un archetto è massimale se non ha altri archi sopra di sé. Ad esempio, in π_D tutti gli archi sono massimali.

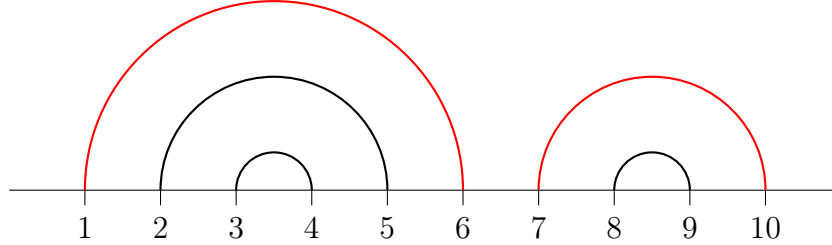


Figura 3.6: In questo esempio, gli archi massimali sono quelli evidenziati di rosso.

In particolare, l'arco che parte da 1 è sempre massimale; come già osservato nella proposizione 3.1.1 il suo vertice d'arrivo j_1 è necessariamente pari.

Se $j_1 \neq 2n$, da $j_1 + 1$ parte un arco massimale, che termina in j_2 pari, con $j_1 + 1 \leq j_2$. Procedendo in questo modo, percorriamo tutti gli archi massimali fino all'ultimo che termina in $2n$.

Sia $M = \{(1, j_1), (j_1 + 1, j_2) \dots, (j_k + 1, 2n)\}$ l'insieme delle coppie indotte dagli archi massimali.

Vogliamo mostrare che a partire da π_D , è possibile ottenere un accoppiamento π_1 tale che:

- gli archi massimali sono $\{(1, j_1), (j_1 + 1, j_2) \dots, (j_k + 1, 2n)\}$;
- i restanti vertici pari sono collegati al successivo dispari.

Concentriamoci sul primo arco massimale, che parte da 1. Consideriamo $e_2\pi_D$: rispetto a π_D , otteniamo le coppie $(2, 3)$ (che non verrà più modificata) e $(1, 4)$. Applicando ora e_4 , si hanno le coppie $(4, 5)$ e $(1, 6)$. Si procede in questo modo fino ad applicare e_{j_1-1} , che induce la coppia $(1, j_1)$.

In maniera analoga, otteniamo l'arco massimale a estremi (j_n, j_{n+1}) applicando $e_{j_{n+1}-1} \dots e_{j_n+1}$.

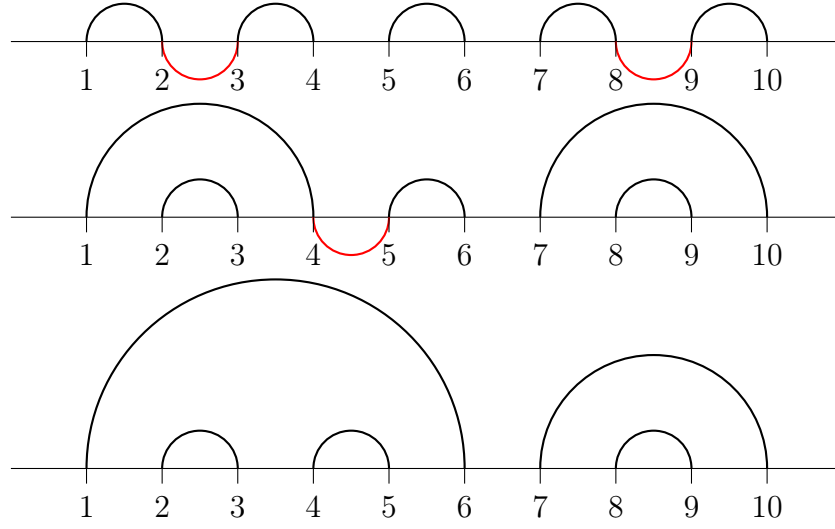


Figura 3.7: Nell'esempio precedente, gli archi massimali erano $(1, 6)$ e $(7, 10)$. A partire π_D , applicando $e_8 \circ e_4 \circ e_2$ otteniamo l'accoppiamento in figura.

Inoltre, ciascun vertice pari strettamente compreso tra 1 e j_1 è in coppia con il successivo dispari. Dunque, su questa regione si ha un accoppiamento equivalente a π_D su $j_1 - 2$ vertici.

Pertanto, con lo stesso metodo usato al passo precedente, da esso è possibile ottenere gli archi massimali dell'accoppiamento di π' ristretto alla regione strettamente compresa tra 1 e $j_1 - 1$.

Procedendo in questo modo, ad ogni passaggio gli archi massimali individuano dei sottogruppi di vertici ai quali ci restringiamo. Poiché il numero di vertici delle regioni cui ci restringiamo è decrescente, necessariamente dopo un numero finito di passaggi si avranno solo archi massimali che connettono un vertice al successivo. A quel punto, avremo ottenuto esattamente π' . $\square$

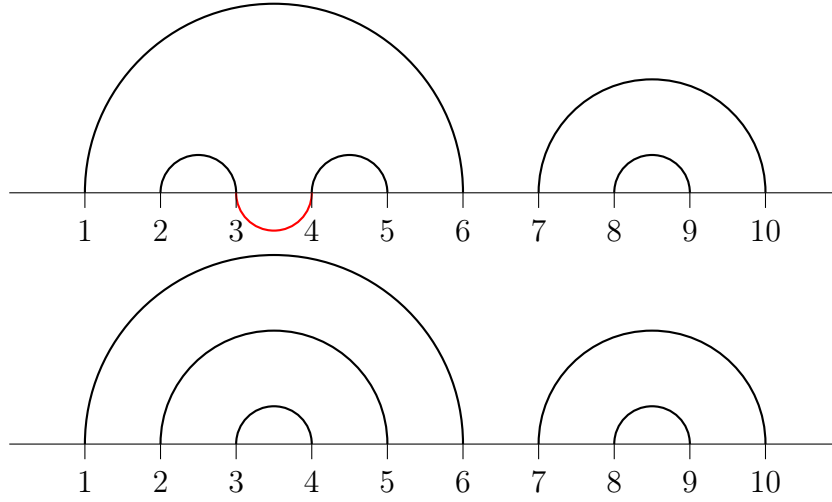


Figura 3.8: Nell'esempio, è sufficiente applicare e_3 a π_1 per ottenere π' e concludere.

3.3 Spazio vettoriale su $Lp(n)$

Costruiamo ora uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ che abbia come base i vettori formali $|\pi\rangle$ con $\pi \in Lp(n)$. Denotiamo tale spazio, di dimensione c_n , come $\mathbb{C}^{Lp(n)}$.

Gli elementi di tale spazio vettoriale sono somme formali su accoppiamenti in $LP(n)$ della forma:

$$\sum_{\pi \in Lp(n)} a_{\pi} |\pi\rangle,$$

con $a_{\pi} \in \mathbb{C}$ per ogni π .

Data una generica funzione $f : LP(n) \longrightarrow LP(n)$, essa si può sempre estendere ad un operatore lineare

$$f : \sum_{\pi \in Lp(n)} a_{\pi} |\pi\rangle \longmapsto \sum_{\pi \in Lp(n)} a_{\pi} |f(\pi)\rangle.$$

Chiamiamo $\psi(\pi) \in \mathbb{Z}$ il numero di configurazioni $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ tali che l'accoppiamento degli endpoint rossi sia π .

Definiamo il vettore

$$|s_n\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)} |\pi(\phi)\rangle = \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |\pi\rangle,$$

dato da una somma di accoppiamenti in cui ciascun π è contato tante volte quante sono le configurazioni ϕ che inducono l'accoppiamento π .

Se una configurazione ϕ ha come accoppiamento π , diremo che ϕ contribuisce al coefficiente di $|\pi\rangle$.

Osservazione 3.3.1. $R|s_n\rangle = |s_n\rangle$.

In effetti, per il teorema di Wieland vale che $\psi(\pi) = \psi(\tilde{G}^k(\pi)) = \psi(R\pi)$, dunque:

$$\begin{aligned} R|s_n\rangle &= R\left(\sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |\pi\rangle\right) = \\ &= \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |R(\pi)\rangle = \\ &= \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(R(\pi)) |R(\pi)\rangle = |s_n\rangle. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale perché per ogni $\pi' \in LP(n)$ esiste un unico π tale che $\pi' = R(\pi)$.

Osservazione 3.3.2. Sia $\bar{\tau}_n$ la colorazione degli endpoint opposta rispetto a τ , cioè ottenuta invertendo il colore di ciascuna terminazione rispetto a τ . Sia

$$|\bar{s}_n\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_n, \bar{\tau}_n)} |\pi(\phi)\rangle.$$

Vale che

$$|s_n\rangle = |\bar{s}_n\rangle.$$

In effetti, l'operatore H_1 definisce una biezione tra $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ e $Fpl(\Lambda_n, \bar{\tau}_n)$, e, per costruzione, vale che l'accoppiamento tra endpoint rossi in ϕ e in $H_1(\phi)$ è lo stesso per ogni ϕ .

Infine, possiamo definire, per ogni k :

$$e_k |s_n\rangle = \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |e_k(\pi)\rangle.$$

Nel vettore risultante, i coefficienti dei vettori $|\pi\rangle$ tali che $\pi(k) \neq k+1$ sono nulli.

Come fatto per $Lp(n)$, definiamo su $\mathbb{C}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{Fpl(\Lambda_n, \tau_n)}$, avente come base l'insieme di vettori $\{||\phi\rangle\rangle \mid \phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)\}$.

Definiamo il vettore

$$||s_n\rangle\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)} ||\phi\rangle\rangle.$$

Abbiamo una naturale applicazione lineare

$$\Pi : \mathbb{C}^{Fpl(\Lambda_n, \tau_n)} \longrightarrow \mathbb{C}^{LP(n)}$$

che manda il vettore $||\phi\rangle\rangle$ in $|\pi(\phi)\rangle$.

Si ha che

$$\Pi ||s_n\rangle\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)} |\pi(\phi)\rangle = \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |\pi\rangle = |s_n\rangle.$$

3.4 Grafì di grado 2 o 4

In questa sezione vogliamo definire un dominio che generalizzi la griglia Λ_n .

Si consideri un grafo connesso $\mathcal{G}$ i cui vertici abbiano grado 2 o 4, cioè siano estremi di 2 o 4 lati.

Sia E l'insieme dei lati, V l'insieme dei vertici e chiamiamo $V' \subset V$ l'insieme dei vertici di grado 2.

Siano i lati in E colorati di rosso o di nero in modo che in ciascun vertice di grado 4 sia rispettata la ice rule. Su $\mathcal{G}$ si individuano quindi dei loop e dei percorsi. Questi ultimi hanno estremi nei vertici di grado 2 in cui si incontrano un lato rosso e uno nero. Chiamiamo $V'' \subset V'$ l'insieme di tali vertici.

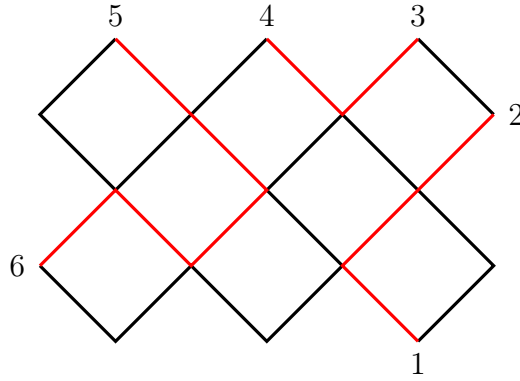


Figura 3.9: Un esempio di $\mathcal{G}$ colorato in modo da rispettare la ice rule. In questa configurazione non sono presenti loop.

Assegniamo un'etichetta ai vertici in V'' ; se $|V''| = 2n$, ciascuna colorazione di $\mathcal{G}$ induce due accoppiamenti π_R e π_N (relativi ai percorsi rossi e neri) in $Lp(n)$.

Nell'esempio in figura, $\pi_R = \{(1, 2); (3, 4); (5, 6)\}$ e $\pi_N = \{(2, 3); (4, 5); (6, 1)\}$.

Sia $E' \subset E$ l'insieme dei lati adiacenti a vertici in V' ; data una colorazione di $\mathcal{G}$, chiamiamo τ la colorazione dei lati in E' .

Indicheremo con $Fpl(\mathcal{G}, \tau)$ l'insieme delle possibili configurazioni di $\mathcal{G}$ in cui il colore dei lati in E' è fissato da τ .

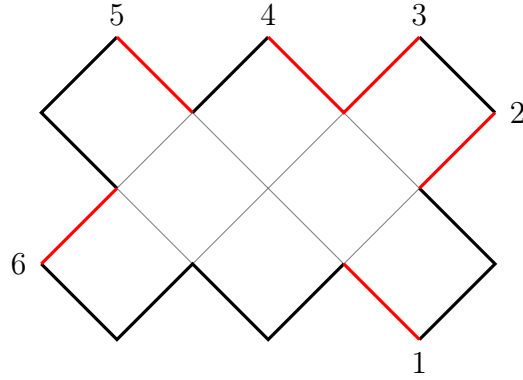


Figura 3.10: La struttura di base di una configurazione in $Fpl(\mathcal{G}, \tau)$, dove $\mathcal{G}$ e τ sono gli stessi dell'esempio precedente.

Osserviamo che le griglie Λ_n descritte nel capitolo precedente sono riconducibili ad un caso particolare di $\mathcal{G}$.

In effetti, Λ_n è un grafo in cui i vertici interni hanno grado 4, mentre gli endpoint hanno grado 1. Per ottenere un grafo $\mathcal{G}$, incolliamo a coppie gli endpoint consecutivi.

Il grafo risultante è determinato scegliendo se incollare l'endpoint verticale in basso a sinistra (che solitamente è etichettato con 1) con l'endpoint successivo o con il precedente. A seconda della scelta fatta, chiamiamo i grafi ottenuti, rispettivamente, Λ_d e Λ_p .

In entrambi i casi, si creano dei cicli di lunghezza 2 o 3 lungo il bordo di Λ .

Le lettere d e p suggeriscono la parità dei cicli ottenuti. In effetti, con la convenzione che l'endpoint rosso etichettato con 1 si trovi a coordinate $(1,0)$, il triangolo ottenuto incollandolo al successivo (a coordinate in $(2,0)$) si trova in corrispondenza di un quadrato che nella sezione 2.2 avevamo definito "dispari". Analogamente, i triangoli (e cicli di lunghezza 2) in Λ_p si trovano in corrispondenza di quadrati pari.

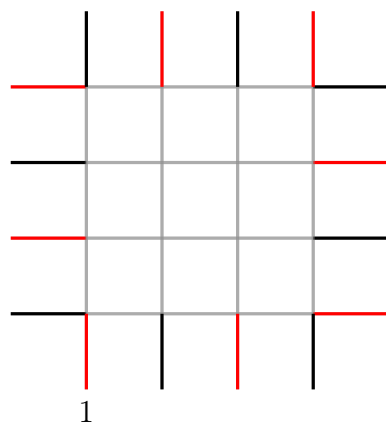


Figura 3.11: La generica struttura di una ϕ in $Fpl(\Lambda_4, \tau_4)$.

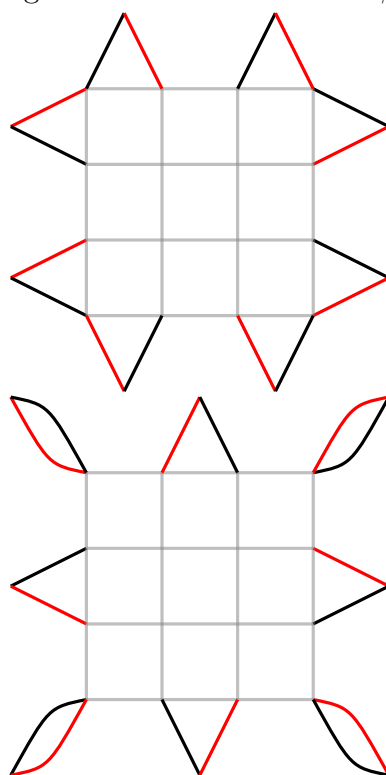


Figura 3.12: In alto l'endpoint 1 è stato incollato al successivo, ottenendo Λ_d . In basso, abbiamo rappresentato Λ_p .

3.5 Generalizzazione della Gyration

Consideriamo una griglia rettangolare generica Λ e sia τ una colorazione dei lati esterni qualunque. In generale, indichiamo con $\bar{\tau}$ la condizione sul bordo in cui il colore di tutti i lati esterni è invertito rispetto a τ .

Come già detto per le griglie quadrate, possiamo rendere Λ un grafo di grado 2 o 4 incollando gli endpoint in due modi possibili, ottenendo Λ_p o Λ_d .

Ricordando che un quadrato si dice di tipo A se ha due o più lati consecutivi dello stesso colore, definiamo

$$\begin{aligned} H_d : Fpl(\Lambda_d, \tau) &\longrightarrow Fpl(\Lambda_d, \bar{\tau}), \\ H_p : Fpl(\Lambda_p, \tau) &\longrightarrow Fpl(\Lambda_p, \bar{\tau}), \end{aligned}$$

i quali, data una $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau)$, agiscono in questo modo:

- cambiano colore a tutti i lati dei cicli di lunghezza 2 o 3 che si creano incollando gli endpoint;
- visitano rispettivamente i quadrati interni dispari e pari e ne cambiano il colore dei lati se e solo se i quadrati sono di tipo A.

Si osserva facilmente che, ciascuno dei due operatori visita ciascun lato in E una e una sola volta.

Inoltre se $\Lambda = \Lambda_n$, a meno di separare gli endpoint, H_d e H_p agiscono esattamente come H_1 e H_0 , per cui $H_p \circ H_d = G$.

3.6 Operatori a_k e c_k

Definiamo due operatori, c_k e a_k , i quali, intuitivamente, aggiungono e tolgono la coppia $(k, k + 1)$ ad un accoppiamento $\pi \in Lp(n)$.

Più precisamente:

$$a_k : Lp(n) \longrightarrow Lp(n + 1)$$

somma 2 agli indici maggiori o uguali di k nelle coppie di π , e poi aggiunge la coppia $(k, k + 1)$;

$$c_k : Lp(n) \longrightarrow Lp(n - 1)$$

elimina gli indici k e $k + 1$, aggiunge la coppia $(\pi(k), \pi(k + 1))$ (se essa non coincide con $(k, k + 1)$) e sottrae 2 agli indici maggiori o uguali di k .

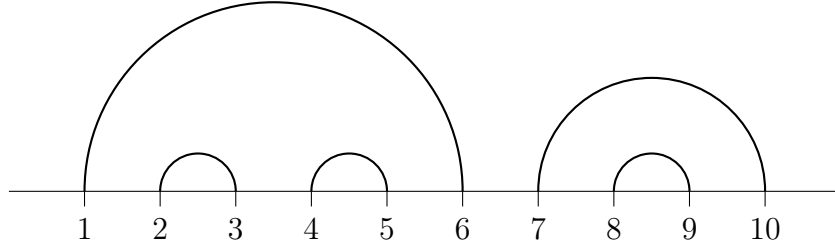


Figura 3.13: Dato questo accoppiamento in $Lp(5)$, applichiamo a_3 e c_3 .

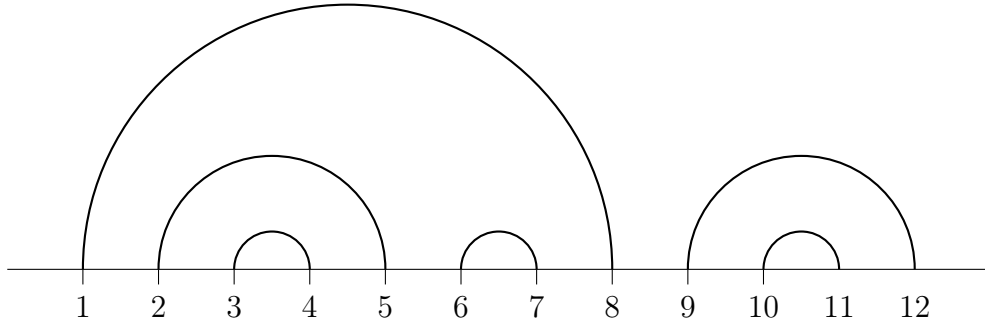


Figura 3.14: L'operatore a_3 ha aumentato di 2 tutti gli indici maggiori o uguali di 3 e aggiunto la coppia $(3, 4)$.

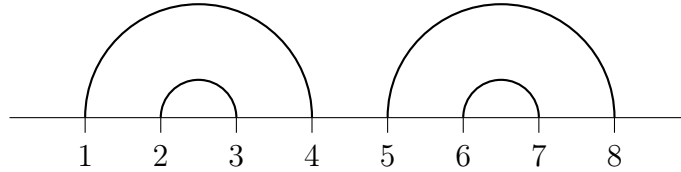


Figura 3.15: L'operatore c_3 ha eliminato gli indici 3 e 4, connesso $\pi(3) = 2$ e $\pi(4) = 5$ e sottratto 2 a tutti gli indici maggiori o uguali di 3

Valgono le seguenti relazioni:

- $c_k \circ a_k = id$;
- $a_k \circ c_k = e_k$;
- $a_k \circ e_j = e_j \circ a_k$ se $|k - j| \geq 2$;
- $c_k \circ e_j = e_j \circ c_k$ se $|k - j| \geq 2$.

La validità di tali uguaglianze è piuttosto intuitiva pertanto omettiamo una dimostrazione rigorosa.

Da esse si ottiene immediatamente la seguente espressione. Dato $J \subset \{1, \dots, 2n\}$ che non abbia elementi consecutivi, si ha che

$$\left(\prod_{\substack{j \in J \\ \text{in ordine decrescente}}} a_j \right) \left(\prod_{\substack{j \in J \\ \text{in ordine crescente}}} c_j \right) = \prod_{j \in J} e_j.$$

3.7 Gyration per condizioni al bordo generiche

Sia Λ griglia rettangolare con condizione al bordo τ . Consideriamo il grafo Λ_d che si ottiene da Λ incollando ciascun endpoint dispari con il successivo pari.

I vertici di grado 2 ottenuti sono compresi tra due terminazioni colorate in uno dei seguenti modi: rosso-nero, nero-rosso, rosso-rosso, nero-nero. Chiamiamo $N_{r,n}$, $N_{n,r}$ e $N_{n,n}$ il numero di vertici di ciascun tipo.

Si ha che in (Λ, τ) il numero di endpoint rossi è $2m_1 = N_{r,n} + N_{n,r} + 2N_{r,r}$, mentre il numero di endpoint neri, che corrispondono agli endpoint rossi in $(\Lambda, \bar{\tau})$, è $2m_2 = N_{r,n} + N_{n,r} + 2N_{n,n}$.

Dato $\pi \in Lp(m_1)$, sia $\psi(\pi)$ il numero di configurazioni in $Fpl(\Lambda, \tau)$ che inducono l'accoppiamento π sui vertici rossi. Dato $\pi' \in Lp(m_2)$, sia $\psi(\pi')$ il numero di configurazioni in $Fpl(\Lambda, \bar{\tau})$ che inducono l'accoppiamento π' sui vertici rossi.

Sia $J_1 \subset \{1, \dots, 2m_1 - 1\}$ l'insieme che, per ogni coppia di endpoint rosso-rosso, contiene il minore dei due indici. Analogamente $J_2 \subset \{1, \dots, 2m_2 - 1\}$ contiene l'indice minore delle coppie nero-nero. Evidentemente, $|J_1| = N_{r,r}$ e $|J_2| = N_{n,n}$; inoltre nei due insiemi non ci sono elementi consecutivi.

Definiamo:

$$|s\rangle = \sum_{\pi \in Lp(m_1)} \psi(\pi) |\pi\rangle; \quad |\bar{s}\rangle = \sum_{\pi' \in Lp(m_2)} \psi(\pi') |\pi'\rangle.$$

Proposizione 3.7.1.

$$\prod_{\substack{j \in J_1 \\ \text{in ordine crescente}}} c_j |s\rangle = \prod_{\substack{j \in J_2 \\ \text{in ordine crescente}}} c_j |\bar{s}\rangle.$$

Osservazione 3.7.2. Se $\tau = \tau_n$, si ha che $J_1 = J_2 = \emptyset$. In effetti, abbiamo mostrato nell'osservazione 3.3.2 che

$$|s_n\rangle = |\bar{s}_n\rangle.$$

Dimostrazione. Sia $2n = N_{r,n} + N_{n,r}$. Considerando Λ_d come grafo con vertici di grado 2 o 4, una configurazione $\phi \in Fpl(\Lambda_d, \tau)$ induce un accoppiamento dei vertici rossi in $Lp(n)$. In effetti, gli endpoint rossi che si incollano formando coppie di tipo rosso-rosso non sono terminazioni di alcun percorso in Λ_d . In particolare, incollare tra loro gli endpoint rossi j e $j+1$ è equivalente ad applicare c_j all'accoppiamento π di partenza in $Lp(m_1)$.

Per cui vale che

$$\left(\prod_{j \in J_1} c_j \right) |s\rangle = \left(\prod_{j \in J_1} c_j \right) \sum_{\pi \in Lp(m_1)} \psi(\pi) |\pi\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_d, \tau)} |\pi(\phi)\rangle,$$

dove $\pi(\phi) \in Lp(n)$.

In maniera analoga,

$$\left(\prod_{j \in J_2} c_j \right) |\bar{s}\rangle = \left(\prod_{j \in J_2} c_j \right) \sum_{\pi' \in Lp(m_2)} \psi(\pi') |\pi'\rangle = \sum_{\phi' \in Fpl(\Lambda_d, \bar{\tau})} |\pi(\phi')\rangle.$$

L'uguaglianza

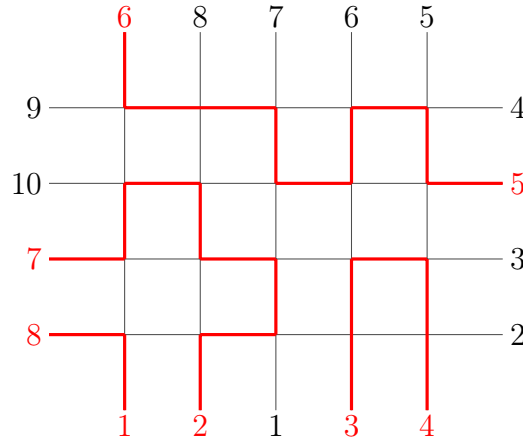
$$\sum_{\phi \in Fpl(\Lambda_d, \tau)} |\pi(\phi)\rangle = \sum_{\phi' \in Fpl(\Lambda_d, \bar{\tau})} |\pi(\phi')\rangle$$

segue dal fatto che $H_d : Fpl(\Lambda_d, \tau) \longrightarrow Fpl(\Lambda_d, \bar{\tau})$ è una biezione tale che, per ogni $\phi \in Fpl(\Lambda_d, \tau)$, $\pi(\phi) = \pi(H_d(\phi))$

Il fatto che H_d sia una biezione è evidente in quanto applicazione iniettiva, suriettiva e invertibile.

Consideriamo un vertice in V'' etichettato j . Applicando H_d , il colore delle terminazioni che insistono sul vertice j si inverte, tuttavia continua a esistere un cammino rosso che parte da j . Con riflessioni del tutto analoghe a quelle fatte nello studio di H_1 , si mostra che tale cammino continua a connettere il vertice j con il vertice $\pi(j)$. $\square$

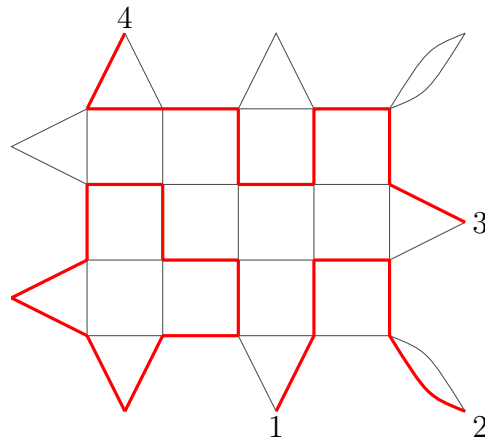
Osserviamo un esempio concreto.



In questo esempio si ha una griglia Λ rettangolare, la configurazione su di essa induce i seguenti accoppiamenti:

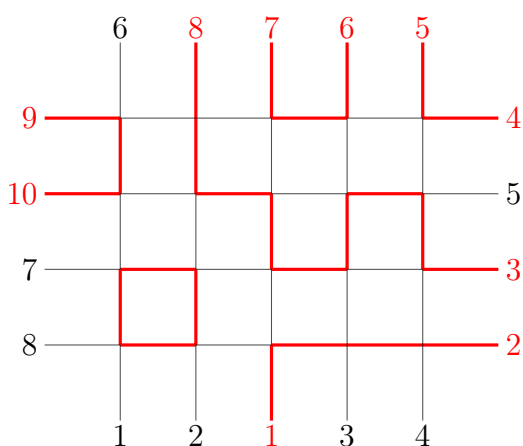
- $\pi_R = \{(1, 8), (2, 7), (3, 4), (5, 6)\}$,
- $\pi_N = \{(1, 2), (3, 8), (4, 5), (6, 7), (9, 10)\}$.

Incollando i vertici in modo da ottenere Λ_d , osserviamo intanto che $J_1 = \{1, 7\}$ e $J_2 = \{4, 6, 9\}$.



$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j \in J_1} c_j \right) \{(1, 8), (2, 7), (3, 4), (5, 6)\} = \\ & = c_1 c_7 \{(1, 8), (2, 7), (3, 4), (5, 6)\} = \{(1, 2), (3, 4)\}. \end{aligned}$$

Separando i vertici incollati in modo da riottenere la griglia Λ , notiamo che l'accoppiamento dei vertici rossi è $\{(1, 2), (3, 8), (4, 5), (6, 7), (9, 10)\}$.


$$\prod_{j \in J_2} c_j = c_4 \circ c_6 \circ c_9 \{(1, 2), (3, 8), (4, 5), (6, 7), (9, 10)\} = \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

Capitolo 4

Congettura di Razumov Stroganov

4.1 Operatore H e congettura di Razumov-Stroganov

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{LP(n)}$, definiamo l'operatore Hamiltoniano

$$H_n = \sum_{k=1}^{2n} e_k$$

che manda un vettore $|\pi\rangle$ in $\sum_{k=1}^{2n} |e_k(\pi)\rangle$.

Sia H matrice associata a H_n rispetto alla base $\{|\pi\rangle \mid \pi \in Lp(n)\}$.

Si ha che

$$H = \sum_{k=1}^{2n} E_k,$$

dove E_k è la matrice associata all'operatore e_k .

La matrice E_k ha, su ciascuna colonna, una e una sola entrata non nulla, in particolare con valore 1. In effetti, per ogni $\pi \in Lp(n)$, $e_k(\pi) \in Lp(n)$, dunque e_k manda ciascun vettore della base in un vettore della base.

Da ciò deduciamo che H è una matrice non negativa, poiché somma di matrici non negative. Inoltre, la somma delle entrate di ciascuna colonna di H è $2n$.

Vogliamo ora stimare il raggio spettrale di H , che ricordiamo essere definito come

$$\rho(H) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovettore di } H\}.$$

Mostriamo che $\rho(H) \leq 2n$ utilizzando il secondo teorema di Gershgorin.

Teorema 4.1.1. Sia $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$. Per ogni colonna j , sia

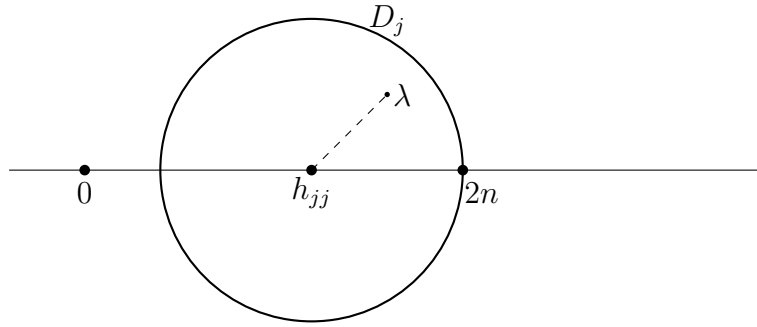
$$D_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\}.$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A . Allora

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^k D_j.$$

D_j è un disco centrato nell'elemento diagonale a_{jj} e avente come raggio la somma dei valori assoluti degli elementi fuori dalla diagonale della j -esima colonna.

Per le considerazioni fatte sulle colonne di H_k , si ha che D_j è un disco centrato in h_{jj} e di raggio $2n - h_{jj}$.



Sia λ autovalore di H . Per il secondo teorema di Gershgorin, esiste j tale che $\lambda \in D_j$.

Dunque

$$|\lambda| \leq h_{jj} + |\lambda - h_{jj}| \leq h_{jj} + (2n - h_{jj}) = 2n.$$

Ciò ci permette di concludere che $\rho(H) \leq 2n$.

Enunciamo un importante risultato di algebra lineare relativo a matrici non negative.

Teorema 4.1.2 (Teorema di Perron Frobenius per matrici non negative). Sia A una matrice non negativa e irriducibile. Sia ρ il suo raggio spettrale. Allora ρ è un autovalore di A , è semplice e esiste un autovettore ad esso associato con tutte le componenti positive.

Per applicare tale teorema alla matrice H , dobbiamo mostrare che essa è irriducibile.

Definizione 4.1.3. Una matrice $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ si dice irriducibile se per ogni i, j tali che $1 \leq i, j \leq k$, esiste una sequenza di elementi di A non nulli della forma

$$(a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_k j}).$$

Nel caso di H , un elemento non nullo in H corrisponde ad un elemento non nullo in E_k per un certo k .

Se $|\pi_i\rangle, |\pi_j\rangle$ sono rispettivamente l'elemento i -esimo e l'elemento j -esimo della base,

$$h_{ij} \neq 0 \iff \text{esiste } k \text{ t.c. } e_k \pi_j = \pi_i.$$

Pertanto l'esistenza di una successione come nella definizione 4.1.3 è equivalente ad affermare che, presi due accoppiamenti qualsiasi, è possibile passare da uno all'altro attraverso la composizione di operatori di tipo e_k , che è proprio quanto affermato nella proposizione 3.2.2.

Pertanto, valgono le ipotesi del teorema di Perron Frobenius e $\rho(H)$ è un autovalore di H .

La congettura di Razumov-Stroganov permette di affermare che $\rho(H) = 2n$ e di determinare il suo autovettore con componenti tutte positive.

Teorema 4.1.4 (Congettura di Razumov Stroganov). Sia $|s_n\rangle = \sum_{\pi \in LP(n)} \psi(\pi) |\pi\rangle$ e

$$H_n = \sum_{k=1}^{2n} e_k. \text{ Allora}$$

$$H_n |s_n\rangle = 2n |s_n\rangle$$

o analogamente

$$RS_n := (H_n - 2n) |s_n\rangle = 0.$$

Per la proposizione 3.2.1, $Re_k R^{-1} = e_{k-1}$. Applicando m volte questa relazione, si ha che $R^m e_k R^{-m} = e_{k-m}$, dove consideriamo $k - m$ in modulo $2n$.

Allora, per ogni k , possiamo riscrivere

$$H_n = \sum_{m=0}^{2n-1} R^m e_k R^{-m}.$$

Come mostrato nell'osservazione 3.3.1, $R|s_n\rangle = |s_n\rangle$ e chiaramente ciò vale anche per qualsiasi potenza di R .

Dunque

$$H_n |s_n\rangle = \sum_{m=0}^{2n-1} R^m e_k |s_n\rangle .$$

Definiamo $\sum_{m=0}^{2n} R^m := Sym$. Si osserva facilmente che

$$Sym |s_n\rangle = \sum_{m=0}^{2n-1} |s_n\rangle = 2n |s_n\rangle ;$$

riscriviamo dunque l'enunciato della congettura di Razumov-Stroganov come

$$Sym(e_k |s_n\rangle) = Sym |s_n\rangle$$

o equivalentemente

$$RS_n = Sym(e_k - 1) |s_n\rangle = 0.$$

Nella successiva sezione, introdurremo una notazione alternativa di $|s_n\rangle$ che permetta di riscrivere la quantità RS_n .

4.2 Considerazioni sull'ultima riga di Λ_n

Sulla griglia Λ_n con condizione sul bordo τ_n , consideriamo gli endpoint che si trovano alla base della griglia, cioè a coordinate $(x, 0)$ con $1 \leq x \leq n$.

Sia $n_+ := \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $n_- := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Poiché il primo endpoint della riga, a coordinate $(1, 0)$, è rosso per costruzione e il colore dei successivi è alternato, il numero totale di terminazioni rosse è n_+ e il numero totale di terminazioni nere è n_- . In effetti, se n è pari il loro numero coincide, se n è dispari ci sarà una terminazione rossa in più.

Ricordiamo che a ciascun endpoint è associato un indice da 1 a $2n$ per studiare gli accoppiamenti indotti dai percorsi neri e rossi.

Dunque, nell'ultima riga si trovano:

- gli endpoint rossi numerati da 1 a n_+ , a coordinate in $(2j-1, 0)$ con $1 \leq j \leq n_+$,
- gli endpoint neri numerati da 1 a n_- , a coordinate in $(2j, 0)$ con $1 \leq j \leq n_-$.

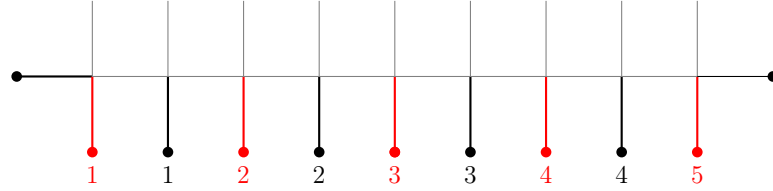
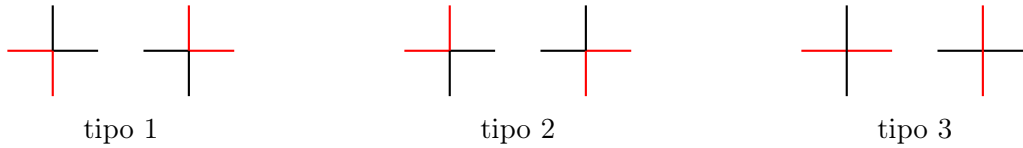


Figura 4.1: La struttura di base dell'ultima riga di una $\phi \in \Lambda_9$

Ricordiamo che un vertice in Λ_n può avere 6 colorazioni, che classifichiamo in tipo 1, 2, 3.



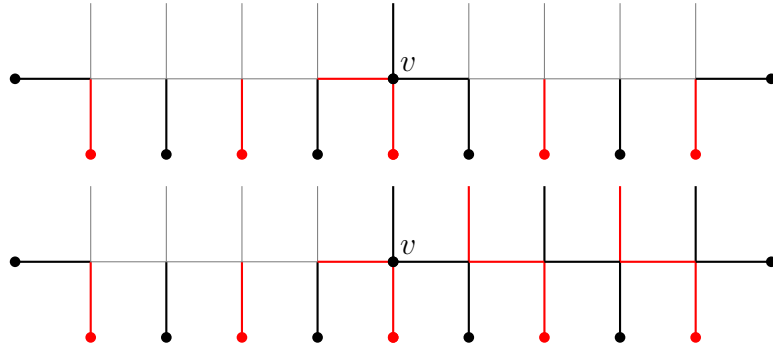
Dato $i \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \leq j \leq n_+$, definiamo $||d_j^i\rangle\rangle$ vettore somma di tutte le $||\phi\rangle\rangle$ il cui vertice in coordinate $(2j-1, 1)$, cioè in corrispondenza del j -esimo endpoint rosso, è di tipo i . Poiché la terminazione sotto tale vertice è rossa, le configurazioni contate in $||d_j^3\rangle\rangle$ hanno in $(2j-1, 1)$ il vertice di tipo i con lato verticale più in basso rosso.

Analogamente, dato $i \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \leq j \leq n_-$, $||p_j^i\rangle\rangle$ è vettore somma di tutte le $||\phi\rangle\rangle$ il cui vertice in coordinate $(2j, 1)$ è di tipo i . Anche in questo caso, poiché l'endpoint sottostante è nero, sappiamo che il vertice in questione sarà quello con il lato verticale in basso nero.

La scelta delle lettere p e d suggerisce che la coordinata orizzontale del vertice preso in considerazione è pari o dispari, cioè si trova in corrispondenza di un endpoint nero o rosso.

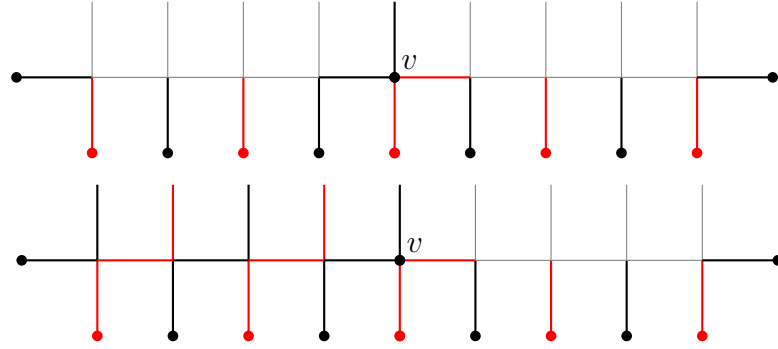
A partire dalla più generica rappresentazione della base di Λ_n fornita in figura 4.1, osserviamo cosa accade imponendo la presenza di un determinato tipo di vertice in posizione $2j$ o $2j - 1$, e evidenziamo come la colorazione di alcuni lati limitrofi sia univocamente determinata.

- Se un vertice è di tipo 1, tutti i vertici alla sua destra sono di tipo 1.



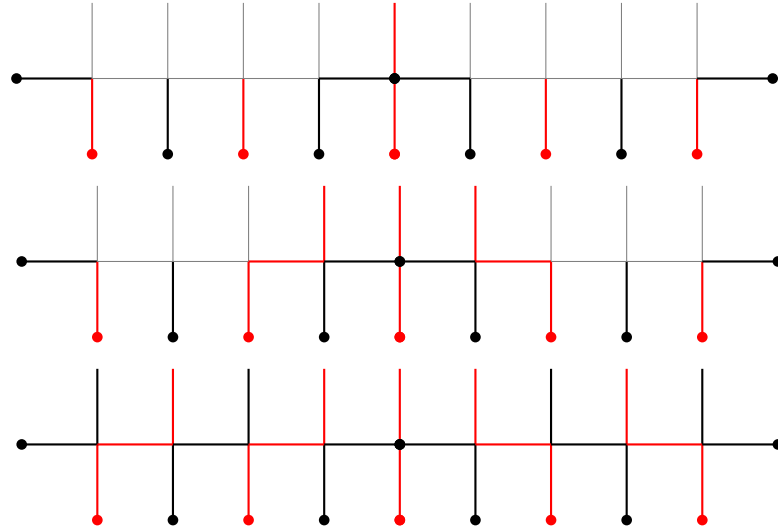
È sufficiente mostrare che il vertice alla destra di un vertice di tipo 1 è di tipo 1. Supponiamo che $v = (2j - 1, 1)$ sia tipo 1, allora il lato orizzontale alla sua destra è nero. Dunque i lati alla sinistra e in basso rispetto al vertice in $(2j, 1)$ sono neri. Pertanto, tale vertice è tipo 1 e gli altri due lati sono rossi. Discorso analogo se il vertice di tipo 1 è in $(2j, 1)$, in questo caso il lato alla sua destra è rosso.

Similmente, si può osservare che alla sinistra di un vertice di tipo 2 ci sono necessariamente solo vertici di tipo 2.



Osserviamo infine che alla sinistra di un vertice di tipo 3 si ha necessariamente un vertice di tipo 2, mentre alla destra si ha un vertice di tipo 1.

Per quanto detto sui vertici di tipo 1 e 2, concludiamo che avere un vertice di tipo 3 in $(2j-1, 0)$ o in $(2j, 0)$ ci permette di conoscere integralmente la colorazione di tutti lati ad altezza minore o uguale di 2.

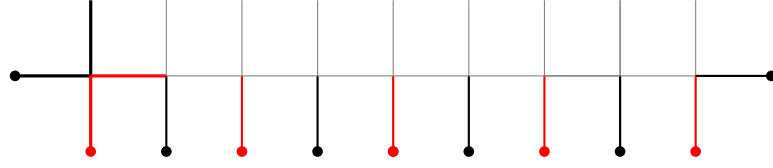


Possiamo essere ancora più precisi.

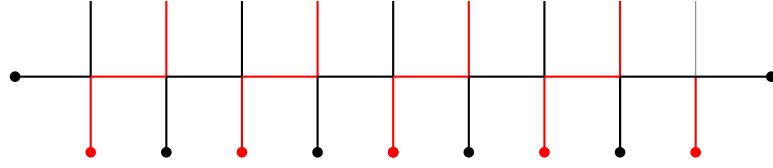
Proposizione 4.2.1. Data una qualsiasi $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$, esiste ed è unico $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $(j, 0)$ è di tipo 3.

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato l'unicità: se $(j, 0)$ è di tipo 3, tutti i vertici alla sua sinistra sono di tipo 2 e tutti quelli alla sua destra sono di tipo 1, dunque non ce ne sono altri di tipo 3.

Mostriamo che ce ne è sempre almeno uno. Osserviamo che il vertice $(1, 1)$, per la struttura di τ , non può essere di tipo 1. Se è di tipo 3, possiamo concludere. Se è di tipo 2, il vertice in $(2, 1)$ non può essere di tipo 1.



Iterando il ragionamento, ci muoviamo in orizzontale verso destra: finché non incontriamo un vertice di tipo 3, si hanno necessariamente solo vertici di tipo 2. Tuttavia, il vertice in $(n, 1)$ per la struttura di τ , non può essere di tipo 2.



Pertanto, se non c'è nessun vertice di tipo 3 fino al vertice $(2n - 1, 1)$ (che dunque sarà di tipo 2), il vertice in $(2n, 1)$ non può essere né di tipo 1 né di tipo 2: sarà di tipo 3.

Si tratta di un ragionamento del tutto analogo a quello usato per dimostrare la proposizione 1.2.2. $\square$

Da ciò segue immediatamente che

$$a) \quad ||s_n\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{n_+} ||d_j^3\rangle\rangle + \sum_{j=1}^{n_-} ||p_j^3\rangle\rangle,$$

in quanto ogni $||\phi\rangle\rangle$ ha uno e un solo vertice di tipo 3 in coordinate $(2j - 1, 1)$ o $(2j, 1)$.

Inoltre, per la ovvia constatazione che un qualsiasi vertice è necessariamente di tipo 1 o 2 o 3, vale che per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n_+\}$

$$b) \quad ||s_n\rangle\rangle = ||d_j^1\rangle\rangle + ||d_j^2\rangle\rangle + ||d_j^3\rangle\rangle$$

e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n_-\}$

$$c) \quad ||s_n\rangle\rangle = ||p_j^1\rangle\rangle + ||p_j^2\rangle\rangle + ||p_j^3\rangle\rangle.$$

Lemma 4.2.2. Valgono le seguenti:

$$1. \quad ||d_j^1\rangle\rangle = ||p_{j-1}^3\rangle\rangle + ||p_{j-1}^1\rangle\rangle;$$

2. $||p_j^1\rangle\rangle = ||d_j^3\rangle\rangle + ||d_j^1\rangle\rangle$;
3. $||d_j^2\rangle\rangle = ||p_j^3\rangle\rangle + ||p_j^2\rangle\rangle$;
4. $||p_j^2\rangle\rangle = ||d_{j+1}^3\rangle\rangle + ||d_{j+1}^2\rangle\rangle$.

Dimostrazione. Osserviamo che il vertice fissato da $||d_j^i\rangle\rangle$, ovvero $(2j-1, 1)$, ha alla sua sinistra il vertice relativo a $||p_{j-1}^i\rangle\rangle$ e alla sua destra il vertice relativo a $||p_j^i\rangle\rangle$.

Sia v un vertice ad altezza 1. Le uguaglianze 1) e 2) sono vere se e solo se vale che le configurazioni in cui v è di tipo 1 sono tutte e sole quelle in cui il vertice alla sinistra di v è di tipo 1 o 3.

Abbiamo già osservato che alla destra di un vertice di tipo 1 o 3 si ha necessariamente un vertice di tipo 1. Inoltre, nel corso della dimostrazione della proposizione 4.2.1 abbiamo osservato che alla sinistra di un vertice di tipo 1 non può esserci un vertice di tipo 2, pertanto vale l'uguaglianza.

Analogamente, 3) e 4) valgono se e solo se le configurazioni in cui v è di tipo 2 sono tutte e sole quelle il cui vertice dispari alla destra di v è di tipo 3 o 2. Si mostra con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte per i primi due punti. $\square$

Definiamo ora

$$\begin{aligned} |p_j^i\rangle &= \Pi(|p_j^i\rangle\rangle), \\ |d_j^i\rangle &= \Pi(|d_j^i\rangle\rangle), \end{aligned}$$

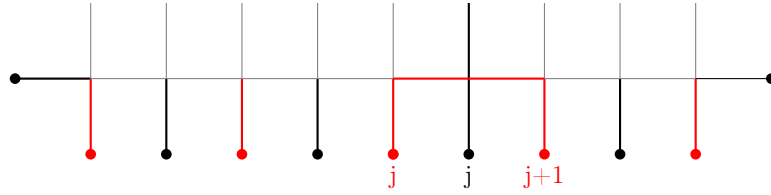
vettori in $\mathbb{C}^{Lp(n)}$.

Il lemma 4.2.2 e le relazioni $a)$, $b)$, $c)$ enunciate precedentemente valgono in modo naturale anche per le proiezioni $|p_j^i\rangle$ e $|d_j^i\rangle$.

4.3 Alcune relazioni utili

Poiché $|p_j^i\rangle$ e $|d_j^i\rangle$ sono elementi di $\mathbb{C}^{Lp(n)}$, possiamo applicare su tali vettori gli operatori definiti nella sezione 3.2.

Consideriamo $|p_j^3\rangle$. Nelle configurazioni che hanno un vertice di tipo 3 in corrispondenza dell'endpoint nero $(2j, 0)$ c'è un percorso che congiunge gli endpoint rossi in $(2j-1, 0)$ e in $(2j+1, 0)$, cioè quelli con etichetta j e $j+1$.



Pertanto, tutti gli accoppiamenti $|\pi\rangle$ a coefficiente non nullo in $|p_j^3\rangle$ contengono la coppia $(j, j+1)$ e quindi vale la relazione:

$$\alpha) \quad e_j |p_j^3\rangle = |p_j^3\rangle.$$

Visualizzare cosa accade applicando e_j ai vettori $|p_j^i\rangle$ (se $i \neq 3$) e $|d_j^i\rangle$ è meno immediato.

Lemma 4.3.1. Valgono le seguenti:

$$\beta) \quad e_j |d_j^3\rangle = R^{-1} e_{j-1} |p_j^3\rangle;$$

$$\gamma) \quad e_j |p_j^1\rangle = R^{-1} e_{j-1} |p_j^1\rangle;$$

$$\delta) \quad e_j |d_j^1\rangle = R^{-1} e_{j-1} |d_j^1\rangle;$$

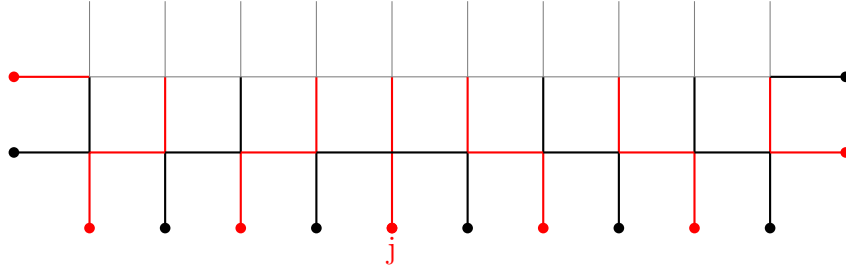
$$\epsilon) \quad e_j |d_j^2\rangle = R^{-1} e_{j-1} |d_j^2\rangle;$$

$$\zeta) \quad e_j |p_j^2\rangle = R e_{j+1} |p_j^2\rangle.$$

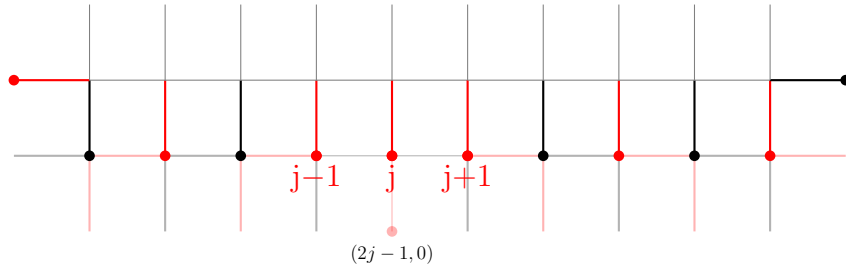
Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma risulta interessante soprattutto perché utilizza un'idea che tornerà nella conclusione della dimostrazione della congettura di Razumov Stroganov.

Mostriamo l'uguaglianza β .

Sia ϕ una configurazione in $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ che contribuisce al vettore $|d_j^3\rangle$. Sappiamo che le ultime due righe della griglia Λ sono colorate come in figura.



Dimenticando momentaneamente i lati verticali ed orizzontali ad altezza minore o uguale di 1, è possibile restringersi a studiare ϕ su una griglia Λ' di larghezza n e altezza $n - 1$.



Ristretta a Λ' , $\phi \in Fpl(\Lambda', \tau')$ dove in τ' il colore dei lati esterni è alternato, ad eccezione di tre endpoint rossi consecutivi etichettati come $j - 1, j, j + 1$.

Abbiamo quindi indotto una biezione tra le $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ con un vertice di tipo 3 in $(2j - 1, 1)$ e le configurazioni $\phi' \in Fpl(\Lambda', \tau')$, le quali ci risultano più facili da studiare.

Data una $\phi' \in Fpl(\Lambda', \tau')$, indichiamo con ϕ la configurazione in $Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ ottenuta riaggiungendo l'ultima riga.

Si può affermare che

$$|d_j^3\rangle = \sum_{\phi' \in Fpl(\Lambda', \tau')} |\pi(\phi)\rangle = |s_1\rangle$$

Osserviamo infatti che il numero di endpoint rossi in τ_n e τ' è lo stesso e le configurazioni ϕ e ϕ' , seppur su griglie diverse, inducono lo stesso accoppiamento.

Applichiamo la proposizione 3.7.1 alle configurazioni in $Fpl(\Lambda', \tau')$.

Incollando gli endpoint in modo da ottenere Λ'_d , si ha che $J_1 = \{j\}$ mentre, incollando in modo da ottenere Λ'_p , $J_1 = \{j - 1\}$. In entrambi i casi, non essendoci due endpoint neri consecutivi, $J_2 = \emptyset$.

Per la proposizione 3.7.1 vale che:

$$\begin{aligned} c_j |s_1\rangle &= |s_2\rangle, \\ R^{-1} c_{j-1} |s_1\rangle &= |s_2\rangle. \end{aligned}$$

Il motivo per cui, nella seconda uguaglianza, è necessario applicare l'operatore R^{-1} è che, in Λ'_p , non contando i vertici rossi $j-1$ e j eliminati da c_{j-1} , ciascun endpoint nero k è incollato all'endpoint rosso $k-1$. Poiché la corrispondenza tra configurazioni in $Fpl(\Lambda'_p, \tau')$ e $Fpl(\Lambda'_p, \bar{\tau}')$ è data dallo scambio dei colori delle terminazioni incollate, per garantire l'uguaglianza tra accoppiamenti è necessario sommare 1 agli indici degli accoppiamenti rossi.

Mettendo insieme i due risultati, si ottiene $c_j |d_j^3\rangle = R^{-1} c_{j-1} |d_j^3\rangle$.

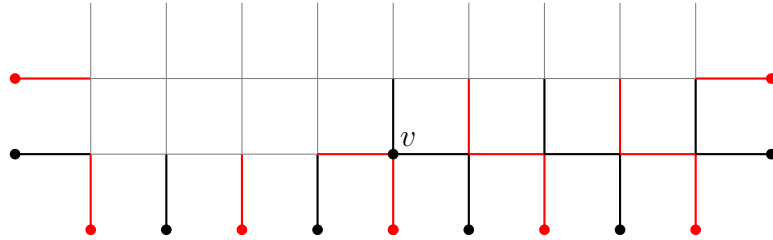
Applichiamo a_j a entrambi i termini e otteniamo che

$$a_j c_j |d_j^3\rangle = a_j R^{-1} c_{j-1} |d_j^3\rangle = R^{-1} a_{j-1} c_{j-1} |d_j^3\rangle.$$

Infine, sapendo che, per ogni k , $a_k c_k = e_k$, otteniamo la relazione cercata:

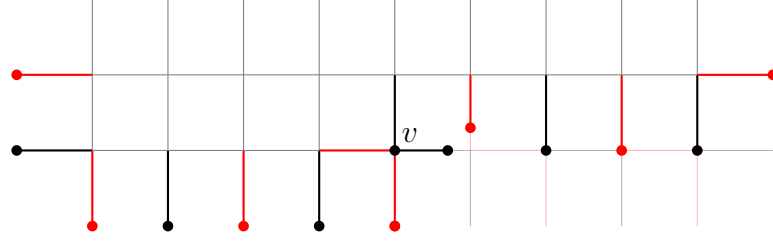
$$e_k |d_j^3\rangle = R^{-1} e_{k-1} |d_j^3\rangle.$$

Diamo solo un accenno della dimostrazione dell'uguaglianza γ .



In figura è riportata la colorazione di base di una ϕ che contribuisce a $|d_j^1\rangle$.

In maniera analoga a quanto già fatto, restringiamo la griglia di partenza per poter studiare le ϕ che contribuiscono a $|d_j^1\rangle$ come tutte le configurazioni $\phi'' \in Fpl(\Lambda'', \tau'')$.



La differenza con il caso già analizzato è che Λ'' è una griglia non rettangolare, ma con un angolo concavo. Tuttavia, con opportune considerazioni che per brevità omettiamo, possono essere fatti ragionamenti analoghi e ottenere la uguaglianza

$$e_j |d_j^1\rangle = R^{-1} e_{j-1} |d_j^1\rangle.$$

Analogamente si procede per le relazioni δ , ϵ , ζ .

□

4.4 Riscrittura di RS_n

In questo capitolo, useremo le relazioni trovate nelle due sezioni precedenti per riscrivere l'uguaglianza

$$RS_n = \text{Sym}(e_k - 1) |s\rangle = 0.$$

Proposizione 4.4.1. Fissato j compreso tra 1 e n_+ , vale che

$$\text{Sym}(e_j - 1) |s\rangle = \text{Sym} \left(\sum_{k=1}^{n_+} (e_k - 1) |d_k^3\rangle \right).$$

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione, utilizzeremo spesso le uguaglianze enunciate nelle sezioni 4.2 e 4.3. Ad ogni passaggio, riportiamo a destra la lettera (o il numero) a cui è associata la relazione applicata.

Riscriviamo $e_j |s_n\rangle$:

$$e_j |s\rangle = e_j (|d_j^1\rangle + |d_j^2\rangle + |d_j^3\rangle) \quad (\text{b})$$

$$= e_j (|d_j^1\rangle + |p_j^2\rangle + |p_j^3\rangle + |d_j^3\rangle) \quad (3)$$

$$= |p_j^3\rangle + e_j |d_j^1\rangle + e_j |p_j^2\rangle + e_j |d_j^3\rangle. \quad (\alpha)$$

Consideriamo $e_j |d_j^1\rangle$:

$$e_j |d_j^1\rangle = R^{-1} e_{j-1} |d_j^1\rangle \quad (\delta)$$

$$= R^{-1} e_{j-1} (|p_{j-1}^3\rangle + |p_{j-1}^1\rangle) \quad (1)$$

$$= R^{-1} e_{j-1} (|p_{j-1}^3\rangle + |d_{j-1}^3\rangle + |d_{j-1}^1\rangle) \quad (2)$$

$$= R^{-1} (|p_{j-1}^3\rangle + e_{j-1} |d_{j-1}^3\rangle + e_{j-1} |d_{j-1}^1\rangle). \quad (\alpha)$$

Iteriamo questo procedimento isolando ogni volta $e_{j-k} |d_{j-k}^1\rangle$.

Dopo $j-1$ passi, si ottiene $|d_1^1\rangle$ che sappiamo essere 0 poiché per le condizioni sul bordo il vertice in $(1,1)$ non può essere di tipo 1.

Ad ogni step, si ottiene un residuo del tipo

$$R^{-k} (|p_{j-k}^3\rangle + e_{j-k} |d_{j-k}^3\rangle),$$

con $1 \leq k \leq j-1$.

Svolgiamo un procedimento analogo per $e_j |p_j^2\rangle$:

$$e_j |p_j^2\rangle = R e_{j+1} |p_j^2\rangle \quad (\zeta)$$

$$= R e_{j+1} (|d_{j+1}^3\rangle + |d_{j+1}^2\rangle) \quad (4)$$

$$= R e_{j+1} (|d_{j+1}^3\rangle + |p_{j+1}^3\rangle + |p_{j+1}^2\rangle) \quad (3)$$

$$= R (e_{j+1} |d_{j+1}^3\rangle + |p_{j+1}^3\rangle + e_{j+1} |p_{j+1}^2\rangle). \quad (\alpha)$$

Anche in questo caso, in $(n_- - j)$ passi riusciamo ad ottenere

$$R^{n_- - j} e_{n_-} |p_{n_-}^2\rangle.$$

Se $n_- = n_+$, cioè se l'ultimo endpoint della riga è nero, si ha che $|p_{n_-}^2\rangle = 0$. Altrimenti, l'ultimo endpoint della riga è rosso e vale che $|d_{n_+}^2\rangle = 0$. Si ha che

$$R^{n_- - j} e_{n_-} |p_{n_-}^2\rangle = R^{n_+ - j} e_{n_+} |p_{n_+}^2\rangle \quad (\zeta)$$

$$\begin{aligned} &= R^{n_+ - j} e_{n_+} (|d_{n_+}^3\rangle + |d_{n_+}^2\rangle) \\ &= R^{n_+ - j} e_{n_+} |d_{n_+}^3\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Dunque, ad ogni passaggio, otteniamo

$$R^k (e_{j+k} |d_{j+k}^3\rangle + |p_{j+k}^3\rangle),$$

con $1 \leq k \leq n_- - j$, inoltre, se $n_+ \neq n_-$, si ha anche $R^{n_+ - j} e_{n_+} |d_{n_+}^3\rangle$.

Sommando tutti i residui ottenuti, otteniamo:

$$\begin{aligned} e_j |s\rangle &= \sum_{k=-j+1}^{n_+ - j} R^k e_{j+k} |d_{j+k}^3\rangle + \sum_{k=-j+1}^{n_- - j} R^k |p_{j+k}^3\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_+} R^{k-j} e_k |d_k^3\rangle + \sum_{k=1}^{n_-} R^{k-j} |p_k^3\rangle. \end{aligned}$$

Applichiamo l'operatore Sym :

$$\begin{aligned} Sym e_j |s\rangle &= \sum_{k=1}^{n_+} Sym R^{k-j} e_k |d_k^3\rangle + \sum_{k=1}^{n_-} Sym R^{k-j} |p_k^3\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_+} Sym e_k |d_k^3\rangle + \sum_{k=1}^{n_-} Sym |p_k^3\rangle \\ &= Sym \left(\sum_{k=1}^{n_+} e_k |d_k^3\rangle + \sum_{k=1}^{n_-} |p_k^3\rangle \right). \end{aligned}$$

Studiamo ora $Sym |s\rangle$.

Usando proprietà *a)* per cui ogni configurazione ϕ ha nell'ultima riga, uno e un solo vertice di tipo 3, abbiamo che

$$Sym |s\rangle = Sym \left(\sum_{k=1}^{n_+} |d_k^3\rangle + \sum_{k=1}^{n_-} |p_k^3\rangle \right),$$

Pertanto, vale che

$$RS_n = \text{Sym}(e_j - 1) |s\rangle = \text{Sym} \left(\sum_{k=1}^{n_+} (e_k - 1) |d_k^3\rangle \right).$$

□

Nelle successive due sezioni mostreremo due proposizioni che saranno fondamentali per mostrare che

$$\text{Sym} \left(\sum_{k=1}^{n_+} (e_k - 1) |d_k^3\rangle \right) = 0.$$

4.5 Operatore N_S

Dato S un quadrato interno di lato 1 in Λ_n , definiamo l'operatore

$$N_S : \text{Fpl}(\Lambda_n, \tau_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

che a ciascuna configurazione ϕ associa un valore a seconda della colorazione di S .

In particolare:

$$N_S(\phi) = \begin{cases} +1 & \text{se } S = \boxed{} \\ -1 & \text{se } S = \boxed{} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Estendiamo N_S allo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{\text{Fpl}(\Lambda, \tau)}$ definendo, per ogni ϕ ,

$$N_S(|\phi\rangle) = N_S(\phi) |\phi\rangle.$$

Rispetto alla base $\{|\phi\rangle \mid \phi \in \text{Fpl}(\Lambda_n, \tau_n)\}$, la matrice associata a N_S è diagonale con valori $N_S(\phi)$ sulla diagonale.

Osserviamo che le colorazioni di S per cui $N_S(\phi) \neq 0$ sono quelle che nella sezione 2.2 avevamo definito di tipo B. Ciò significa che $N_S(\phi) \neq 0$ se e solo se G_S cambia la colorazione del quadrato S .

Data $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$, definiamo l'orbita di ϕ come

$$\mathcal{O}(\phi) := \{\phi' \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n) \mid \exists k \text{ tale che } G^k \phi = \phi'\}.$$

Poiché $Fpl(\Lambda, \tau)$ è un insieme finito, per ogni ϕ vale che $|\mathcal{O}(\phi)| < \infty$; tuttavia abbiamo già osservato che in generale $G^{2n}(\phi) \neq \phi$, dunque non vale che $|\mathcal{O}(\phi)| = 2n$.

Proposizione 4.5.1. Dati $\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n)$ e S quadrato interno di Λ , si ha

$$\sum_{\phi' \in \mathcal{O}(\phi)} N_S(\phi') = 0.$$

Dimostrazione. Mostriamo il teorema per induzione sulla distanza del quadrato S dal perimetro di Λ_n , cioè sul numero di quadrati che, partendo da S , è necessario attraversare prima di giungere ad un quadrato con un lato adiacente al perimetro.

Passo Base.

Supponiamo che S sia un quadrato con un lato l adiacente al perimetro di Λ_n .

Poiché $|\mathcal{O}(\phi)| < \infty$ e G è invertibile, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $G^k(\phi) = \phi$. Consideriamo il vettore

$$v(\phi) = \left(N_S(\phi), N_S(G\phi), N_S(G^2\phi), \dots, N_S(G^{k-1}\phi) \right).$$

Similmente, definiamo

$$u(\phi) = \left(l(\phi), l(G\phi), l(G^2\phi), \dots, l(G^{k-1}\phi) \right),$$

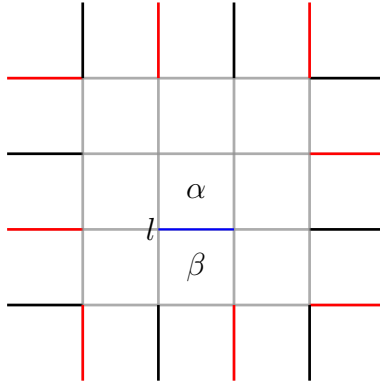
dove $l(\phi) = r$ se il lato l in ϕ è rosso, $l(\phi) = n$ se il lato l in ϕ è nero.

Come già osservato, $N_S(\phi) \neq 0$ se e solo se G_S cambia colore al lato l . Inoltre, poiché l si trova lungo il perimetro di Λ , non è in comune con nessun altro quadrato. Pertanto G (che è composizione dei G_S al variare di S quadrato interno) cambia colore a l se e solo se G_S cambia colore ad l .

Per cui $v_i(\phi) = +1$ se e solo se $u_i(\phi) = r$ e $u_{i+1}(\phi) = n$; $v_i(\phi) = -1$ se e solo se $u_i(\phi) = n$ e $u_{i+1}(\phi) = r$. Quindi, i valori non nulli di $v(\phi)$ corrispondono ai cambi di colore di l , ne segue che i $+1$ e i -1 si alternano. In totale, i cambi di colore sono in numero pari perché $G^k \phi = \phi$. Abbiamo dunque mostrato che la somma delle k componenti di $v(\phi)$ è 0, provando l'enunciato del teorema nel caso di S adiacente al perimetro.

Non è possibile fare esattamente lo stesso ragionamento per un quadrato non al bordo poiché, preso un qualunque suo lato l , esso è compreso tra un quadrato dispari e un quadrato pari. Ricordando che G_0 è la composizione di tutti i G_S con S pari e che G_1 è la composizione di tutti i G_S con S dispari, si ha che il colore di l può essere cambiato sia da G_0 che da G_1 .

Passo Induttivo Supponiamo che il teorema sia vero per ogni quadrato a distanza minore o uguale di n dal bordo, e mostriamolo per un quadrato α a distanza $n + 1$. Di certo, α ha un lato l in comune con un quadrato β a distanza n dal bordo. Supponiamo senza perdere di generalità, che α sia pari e β sia dispari.



Consideriamo

$$\begin{aligned} u(\phi) &= \left(l(\phi), l(G_1\phi), l(G\phi), l(G_1G\phi), \dots, l(G_1G^{k-1}\phi) \right); \\ v_\alpha(\phi) &= \left(N_\alpha(\phi), N_\alpha(G\phi), N_\alpha(G^2\phi), \dots \right); \\ v_\beta(\phi) &= \left(N_\beta(G_1\phi), N_\beta(G_1G\phi), \dots \right). \end{aligned}$$

Anche in questo caso, ad ogni cambio di colore in $u(\phi)$ corrisponde un $+1$ o un -1 in v_α o in v_β . Per cui la somma di tutte le entrate di v_α e v_β è 0 .

Si ha che in v_α , ϕ' varia all'interno dell'orbita di ϕ sotto l'azione di G . In v_β invece ϕ' varia nell'orbita di $G_1\phi$ sotto l'azione di G_1G_0 .

Sappiamo che $G_1G_0 = G^{-1}$, per cui l'orbita di G_1G_0 coincide con quella di G . Dunque

$$\sum_{\phi' \in \mathcal{O}(\phi)} N_\alpha(\phi') + \sum_{\phi' \in \mathcal{O}(G_1\phi)} N_\beta(\phi') = 0.$$

Poiché β è a distanza n dal perimetro, per ipotesi induttiva si ha che

$$\sum_{\phi' \in \mathcal{O}(G_1 \phi)} N_\beta(\phi') = 0,$$

e da ciò segue il teorema per α .

□

Dato un accoppiamento $\pi' \in Lp(n)$, definisco

$$\mathcal{O}(\pi') = \bigcup_{\substack{\phi \in Fpl(\Lambda_n, \tau_n) \\ \pi(\phi) = \pi'}} \mathcal{O}(\phi);$$

l'unione delle orbite delle ϕ che inducono l'accoppiamento π' . Segue facilmente dalla proposizione precedente che

$$\sum_{\phi \in \mathcal{O}(\pi)} N_S(\phi) = \sum_{\pi(\phi) = \pi} \sum_{\phi' \in \mathcal{O}(\phi)} N_S(\phi') = 0.$$

In $\mathbb{C}^{Fpl(\Lambda, \tau)}$, ciò si traduce in

$$Sym \Pi N_S ||s_n\rangle\rangle = 0.$$

In effetti

$$\begin{aligned} Sym \Pi N_S ||s_n\rangle\rangle &= Sym \Pi \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda, \tau)} N_S(\phi) ||\phi\rangle\rangle \\ &= Sym \Pi \left(\sum_{\pi \in Lp(n)} \sum_{\pi(\phi) = \pi} N_S(\phi) ||\phi\rangle\rangle \right) \\ &= Sym \sum_{\pi \in Lp} \left(\sum_{\pi(\phi) = \pi} N_S(\phi) \right) |\pi\rangle \\ &= \sum_{\pi \in Lp(n)} |Aut(\pi)| \left(\sum_{\phi \in \mathcal{O}(\pi)} N_S(\phi) \right) |\pi\rangle = 0, \end{aligned}$$

dove $|Aut(\pi)|$ è la cardinalità del gruppo dei G^k che fissa π .

Proviamo a spiegare questa serie di uguaglianze studiando il coefficiente di ciascun $|\pi\rangle$.

- L'operatore Π fa sì che per ogni ϕ tale che $\pi(\phi) = \pi$, $N_S(\phi)$ sia un elemento della somma dei coefficienti di $|\pi\rangle$.
- Ricordando che $Sym = \sum_{m=0}^{2n-1} R^m$, e sapendo che se $R^m(\pi') = \pi$ allora $R^m N_S(\phi) |\pi'\rangle = N_S(\phi) |\pi\rangle$, sono coefficienti di $|\pi\rangle$ anche tutti gli $N_S(\phi)$ con $\pi(\phi) \in \mathcal{O}(\pi)$.
- Infine, tale somma si ripete tante volte quante sono le m tali per cui $R^m \pi = \pi$, da cui segue il fattore $|Aut(\pi)|$.

4.6 Un'applicazione dell'operatore a_{2m-1}

Data una generica griglia Λ con $2n$ endpoint, sia $E_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ l'insieme dei suoi lati esterni.

Nel primo capitolo, abbiamo definito le possibili colorazioni dei lati esterni come funzioni $\tau : E_1 \longrightarrow \{r, n\}^{|E_1|}$ che a ciascun lato esterno associano un colore.

Siano τ_1 e τ_2 condizioni sul bordo con le seguenti caratteristiche:

1. $\tau_1(x_{2n-1}) = \tau_1(x_{2n}) = r$;
2. $\tau_2(x_{2n-1}) = \tau_2(x_{2n}) = n$;
3. $\tau_1(x_i) = \tau_2(x_i) \forall i \neq 2n-1, 2n$.

Sia $2m$ il numero totale di lati esterni rossi in τ_1 , cioè se $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_1)$ allora $\pi(\phi) \in Lp(m)$.

Per come è definita τ_2 , essa ha due lati rossi in meno rispetto a τ_1 , dunque se $\phi' \in Fpl(\Lambda, \tau_2)$ allora $\pi(\phi') \in Lp(m-1)$.

Chiamiamo e il lato che collega i lati esterni x_{2n-1}, x_{2n} .

Sia $Fpl(\Lambda, \tau_1, n)$ l'insieme delle $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_1)$ tali che il lato e sia nero. Sia $Fpl(\Lambda, \tau_2, r)$ l'insieme delle $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_2)$ tali che il lato e sia rosso.

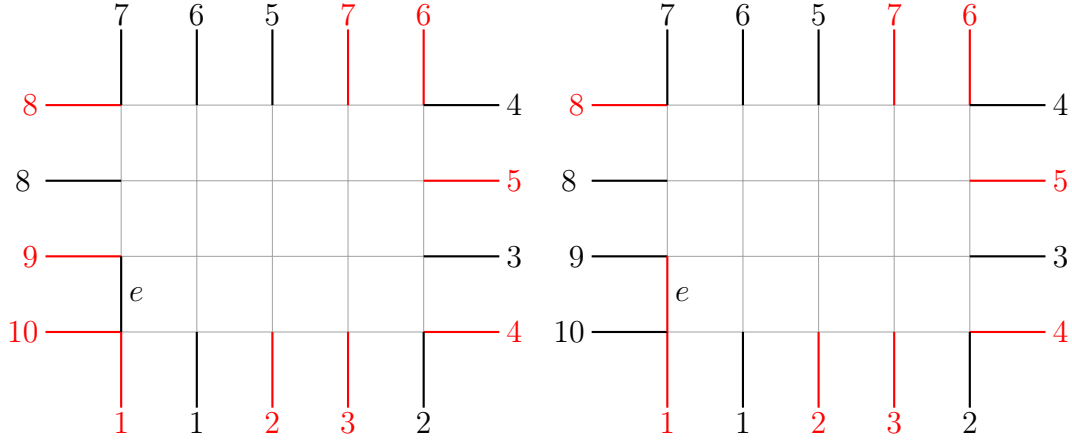


Figura 4.3: Data una certa τ_1 , a sinistra è rappresentata la struttura di base di una $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_1, n)$ e a destra la struttura di base di una $\phi' \in Fpl(\Lambda, \tau_2, r)$

Proposizione 4.6.1. Si considerino i vettori

$$|s_1\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_1, n)} |\pi(\phi)\rangle;$$

$$|s_2\rangle = \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_2, r)} |\pi(\phi)\rangle.$$

Vale la seguente relazione:

$$e_{2m-1} |s_1\rangle = a_{2m-1} |s_2\rangle,$$

dove a_{2m-1} è l'operatore lineare da $\mathbb{C}^{Lp(m-1)} \longrightarrow \mathbb{C}^{Lp(m)}$ definito nella sezione 3.6.

Dimostrazione. In generale, $Fpl(\Lambda, \tau_1, n)$ e $Fpl(\Lambda, \tau_2, r)$ sono in biezione mediante l'applicazione che inverte il colore di x_{2m-1}, x_{2m} ed e .

Siano $\phi \in Fpl(\Lambda, \tau_1, n)$ e $\phi' \in Fpl(\Lambda, \tau_2, r)$ due configurazioni in biezione. Per concludere la dimostrazione, basta mostrare $e_{2m-1} |\pi(\phi)\rangle = a_{2m-1} |\pi(\phi')\rangle$.

In ϕ si hanno due possibilità:

1. gli endpoint $2m-1$ e $2m$ sono collegati da un percorso rosso, cioè in $\pi(\phi)$ si ha la coppia $(2m-1, 2m)$;
2. $2m$ è collegato con un certo j e $2m-1$ con un certo j' , cioè in $\pi(\phi)$ si hanno le coppie $(2m-1, j), (2m, j')$.

Nel primo caso, applicando e_{2m-1} , $\pi(\phi)$ non cambia.

La corrispondente ϕ' , ottenuta cambiando il colore dei tre lati, ha il medesimo accoppiamento di π senza la coppia $(2m-1, 2m)$, poiché il percorso che connetteva questi due endpoint è diventato un loop. Applicando a_{2m-1} , si aggiunge la coppia $(2m-1, 2m)$ e si ottiene esattamente $\pi(\phi)$.

Nel secondo caso, applicare e_{2m-1} a $\pi(\phi)$ significa sostituire le coppie relative a $2m-1$ e $2m$ con (j, j') e $(2m-1, 2m)$.

Nella ϕ' corrispondente i percorsi rossi che partono da j e j' sono connessi dal lato rosso e , dunque in $\pi(\phi')$ è presente la coppia (j, j') . Applicando a_{2m-1} si aggiunge la coppia $(2m-1, 2m)$ e si ottiene esattamente $e_{2m-1}\pi(\phi)$, concludendo così la dimostrazione.

□

Abbiamo mostrato tale proposizione nel caso di τ_1 e τ_2 che differiscono solo negli ultimi due endpoint. In realtà, tale proposizione vale anche per condizioni sul bordo che si differenziano per due lati esterni consecutivi qualunque. In effetti, è sufficiente rinumerare gli endpoint in modo che i lati in questione siano gli ultimi e applicare la Proposizione appena mostrata.

4.7 Conclusione della dimostrazione di Razumov Stroganov

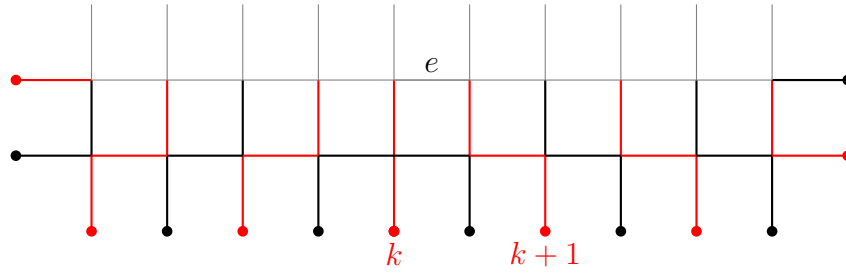
Nella sezione 4.4 avevamo mostrato che

$$RS_n = \text{Sym} \left(\sum_{k=1}^{n_+} (e_k - 1) |d_k^3\rangle \right).$$

Pertanto, per provare la congettura di Razumov Stroganov, è sufficiente mostrare che, per ogni k ,

$$\text{Sym}(e_k - 1) |d_k^3\rangle = 0.$$

Fissato un k , studiamo $(e_k - 1) |d_k^3\rangle$. Abbiamo già osservato che avere un vertice di tipo 3 in $(2k - 1, 1)$ determina univocamente la colorazione di tutti i lati orizzontali e verticali ad altezza minore di 2.



Chiamiamo e il lato ad estremi in $(2k - 1, 2)$ e $(2k, 2)$. Sia ϕ una configurazione che contribuisce a $|d_k^3\rangle$. Se $e(\phi) = r$ si osserva immediatamente che gli endpoint k e $k + 1$ sono collegati, dunque ϕ contribuisce ai coefficienti della stessa π prima e dopo l'applicazione di e_k . Ne segue che

$$(e_k - 1) |\pi(\phi)\rangle = 0$$

Pertanto, nello studio di $(e_k - 1) |d_k^3\rangle$, possiamo limitarci a considerare il contributo delle ϕ tali che $e(\phi) = n$. In particolare, chiamiamo A l'insieme delle ϕ tali che:

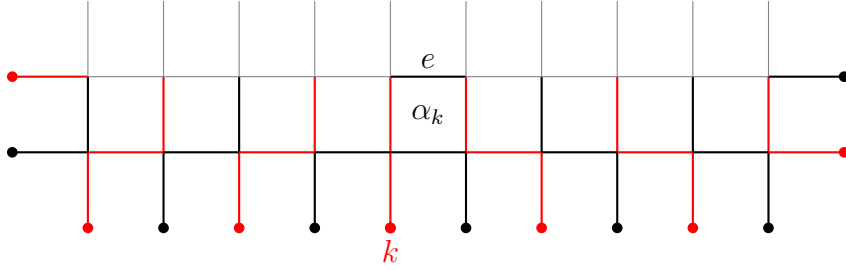
1. in $(2k - 1, 1)$ c'è un vertice di tipo 3,
2. $e(\phi) = n$;

allora, definito

$$|d_k^3(n)\rangle = \sum_{\phi \in A} |\pi(\phi)\rangle = \Pi \sum_{\phi \in A} ||\phi\rangle\rangle,$$

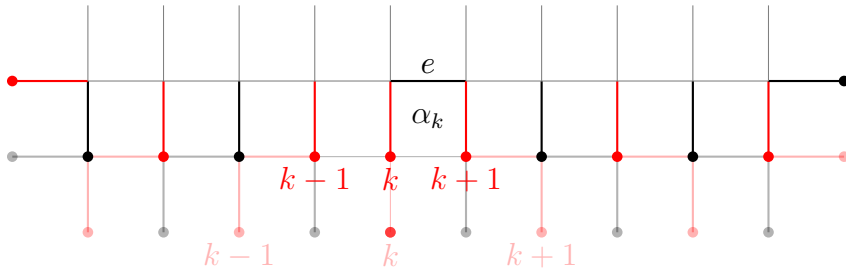
vale che

$$(e_k - 1) |d_k^3\rangle = (e_k - 1) |d_k^3(n)\rangle.$$



Sia α_k il quadrato interno il cui lato superiore è e , si ha che le configurazioni $\phi \in A$ sono tutte e sole quelle per cui $N_{\alpha_k}(\phi) = -1$.

Con la stessa idea usata nella dimostrazione del lemma 4.3.1, possiamo momentaneamente dimenticare i lati ad altezza minore o uguale di 1 e ottenere Λ' , una griglia di altezza $n - 1$ e larghezza n . Assegniamo ai nuovi endpoint etichette seguendo la consueta numerazione in senso antiorario. Osserviamo che gli endpoint rossi continuano ad essere $2n$ e che, per ogni k , il percorso rosso che parte dal k -esimo endpoint rosso di Λ , passa per il k -esimo endpoint di Λ' .



Data una ϕ in A , sia ϕ' la sua restrizione a Λ' , chiamiamo $A' = \{\phi' \mid \phi \in A\}$. Evidentemente, A e A' sono in biezione

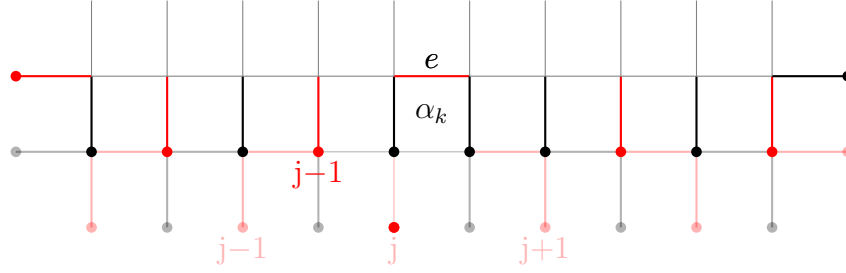
Studiamo dunque $e_k |d_k^3(n)\rangle$ su Λ_1 . Osserviamo che in $(2k - 1, 1)$ e $(2k, 1)$ si hanno due endpoint rossi, e il lato e che li connette è nero.

Per ogni $\phi' \in A'$, sia $\bar{\phi}'$ la configurazione corrispondente in cui il colore dei tre lati appena menzionati è invertito, e sia $\bar{A}' = \{\bar{\phi}' \mid \phi' \in A'\}$.

Possiamo dunque applicare la Proposizione 4.6.1, ed affermare che

$$e_k |d_k^3(n)\rangle = a_k \sum_{\bar{\phi}' \in \bar{A}'} |\pi(\bar{\phi}')\rangle,$$

dove, ricordiamo, data una π , a_k somma due agli indici degli endpoint maggiori o uguali di k e aggiunge la coppia $(k, k+1)$.

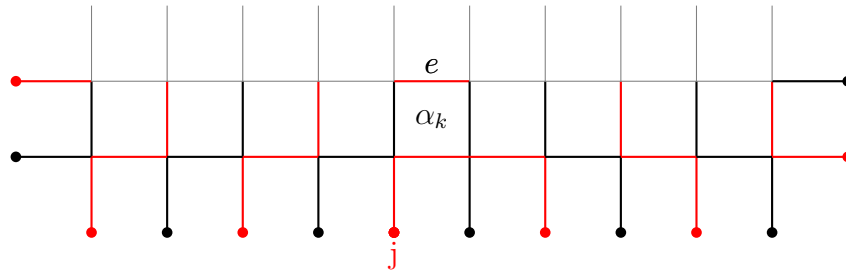


A partire da una configurazione $\bar{\phi}' \in \bar{A}'$, possiamo estenderla da Λ' a Λ in uno e un solo modo:

- le terminazioni (cioè i lati verticali con altezza tra 0 e 1) sono colorati in modo da rispettare la condizione sul bordo τ_n ;
- i lati orizzontali sono colorati nell'unico modo per cui la *ice rule* sia rispettata.

Si ha che l'unico cambiamento rispetto alla colorazione che tali lati avevano prima di essere cancellati riguarda il lato orizzontale ad estremi $(2k-1, 1)$ e $(2k, 1)$, che da nero diventa rosso.

Come si vede in figura, ciò induce un percorso rosso che collega gli endpoint k e $k+1$.



Pertanto, data una $\bar{\phi}' \in \bar{A}'$, la sua estensione $\bar{\phi}$ su Λ induce l'accoppiamento $a_k |\pi(\bar{\phi}')\rangle$, cioè

$$\sum_{\bar{\phi}' \in \bar{A}'} |\pi(\bar{\phi})\rangle = a_k \sum_{\bar{\phi}' \in \bar{A}'} |\pi(\bar{\phi}')\rangle.$$

Osserviamo il quadrato α_k : le configurazioni di tipo $\bar{\phi}$ sono tutte e sole quelle per cui $N_{\alpha_k}(\phi) = 1$.

Per cui, unendo i risultati ottenuti, abbiamo

$$\begin{aligned}
 (e_k - 1) |d_k^3(n)\rangle &= e_k |d_k^3(n)\rangle - |d_k^3(n)\rangle \\
 &= \sum_{\bar{\phi}' \in \bar{A}'} |\pi(\bar{\phi}')\rangle - \sum_{\phi \in A} |\pi(\phi)\rangle \\
 &= \Pi N_{\alpha_k} \sum_{\phi \in Fpl(\Lambda, \tau)} ||\phi\rangle\rangle \\
 &= \Pi N_{\alpha_k} ||s_n\rangle\rangle .
 \end{aligned}$$

Per cui, possiamo finalmente mettere insieme i risultati ottenuti e concludere che

$$\begin{aligned}
 RS_n &= Sym(e_k - 1) |s_n\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{n_+} Sym(e_k - 1) |d_k^3\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{n_+} Sym \Pi N_{\alpha_k} ||s_n\rangle\rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [CS11] Luigi Cantini e Andrea Sportiello. “Proof of the Razumov-Stroganov conjecture”. In: *J. Combin. Theory Ser. A* 118.5 (2011), pp. 1549–1574. ISSN: 0097-3165,1096-0899. DOI: 10.1016/j.jcta.2011.01.007. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2011.01.007>.
- [Wie00] Benjamin Wieland. “A large dihedral symmetry of the set of alternating sign matrices”. In: *Electron. J. Combin.* 7 (2000), Research Paper 37, 13. ISSN: 1077-8926. DOI: 10.37236/1515. URL: <https://doi.org/10.37236/1515>.