

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**TEOREMA DEL VIRIALE E APPLICAZIONI  
ASTROFISICHE**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Francesco De Iasio**

Relatore:  
**Chiar.ma Prof.  
Marcella Brusa**

---

Anno Accademico 2024-2025



## **Abstract**

Il Teorema del Viriale è uno strumento fondamentale nello studio dei sistemi autogravitanti, in quanto fornisce una relazione globale tra energia cinetica ed energia potenziale.

In questa tesi se ne ripercorre l'evoluzione storica e se ne illustra la derivazione nelle forme tensoriale e scalare. Si parte dallo studio del problema degli N-corpi, passando per la definizione di tempo di rilassamento, per distinguere sistemi collisionless da quelli collisional, e si presenta la trattazione matematica, che con l'ausilio dell'equazione non collisionale di Boltzmann (CBE) e le equazioni di Jeans giunge al teorema prima in forma tensoriale e poi scalare. Infine, si discutono applicazioni specifiche, quali: la catastrofe gravotermica, il limite di Jeans, le strutture stellari e la materia oscura, con particolare attenzione all'utilizzo del teorema per interpretare i diversi fenomeni.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problema degli N-corpi e Teorema del Viriale</b>	<b>3</b>
2.1	Problema degli N-corpi . . . . .	3
2.1.1	Tempo di rilassamento . . . . .	4
2.2	Teorema del Viriale . . . . .	4
2.2.1	Equazione non collisionale di Boltzmann (CBE) e equazioni di Jeans . . . . .	5
2.2.2	Teorema del Viriale tensoriale e scalare . . . . .	6
2.2.3	Piano del Viriale . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>9</b>
3.1	Catastrofe gravotermica . . . . .	9
3.2	Limite di Jeans . . . . .	9
3.3	Strutture stellari . . . . .	10
3.4	Scoperta della materia oscura . . . . .	11

# Capitolo 1

## Introduzione

Il Teorema del Viriale non presenta origini ben definite nè uno sviluppo lineare, poiché non nacque nella sua forma attuale, ma si sviluppò progressivamente a partire da studi termodinamici.

Nel 1851 il fisico tedesco Clausius intraprese un ampio studio sulla natura meccanica del calore, che lo condusse, nell'arco di vent'anni, alla formulazione di quella che oggi possiamo riconoscere come la prima chiara presentazione del teorema del viriale. Il 13 giugno 1870 durante una conferenza all'Associazione per le Scienze Naturali e Mediche della Bassa Renania, dal titolo "Su un teorema meccanico applicabile al calore", Clausius enunciò il teorema affermando: "*La vis viva media del sistema è uguale al suo viriale*". Nel XIX secolo era consuetudine assegnare un nome latino a proprietà particolari di un sistema: il termine *vis viva* indicava l'energia cinetica totale, mentre con il termine *virias* (plurale di *vis*, cioè "forze") Clausius coniò il termine viriale, esprimibile in funzione delle forze  $F_i$  agenti

$$\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \quad (1.1)$$

Questa quantità equivale a metà dell'energia potenziale media. Sebbene oggi il termine viriale non ha più grande rilievo come concetto fisico autonomo, il nome è rimasto legato al teorema e alle sue forme evolute.

Tuttavia, più di un secolo prima, nel 1772, l'Accademia Reale delle Scienze di Parigi pubblicò il "Saggio sul problema dei tre corpi" di Lagrange. In questo scritto egli sviluppò ciò che può essere interpretato come l'identità di Lagrange, base matematica del teorema del viriale. Tale risultato sembrò rimanere un caso speciale, legato al problema dei tre corpi, fino all'inverno del 1842-43, quando Jacobi ne propose una generalizzazione al caso di n-corpi. Da qui al teorema classico il passo fu breve.

È difficile stabilire se Clausius fosse del tutto ignaro di questi lavori. Tuttavia, le differenze tra la formulazione del fisico tedesco e quella di Jacobi sono significative. Il fatto stesso che Clausius avesse bisogno di introdurre un nuovo termine, il viriale, indica chiaramente che il suo legame con gli studi del suo collega non era affatto evidente.

Clausius, Lagrange e Jacobi gettarono le basi del teorema del viriale così come lo conosciamo oggi. Esso fu poi perfezionato in epoche successive da altri fisici e matematici, tra cui Poincaré, Lord Rayleigh e Chandrasekhar.

La storia del teorema del viriale mostra come esso sia un teorema versatile, applicabile a molte discipline scientifiche (dalla meccanica classica alla termodinamica, fino ad

arrivare all'astrofisica). Inoltre, la sua forza risiede nella capacità di passare da una descrizione dettagliata di un sistema, basata su numerose equazioni vettoriali, a una relazione scalare globale tra energia cinetica e potenziale:

$$2T + U = 0 \tag{1.2}$$

Questa semplificazione sacrifica informazioni locali, ma consente di dedurre proprietà globali.

## Capitolo 2

# Problema degli N-corpi e Teorema del Viriale

Molti dei progressi nella comprensione della dinamica stellare derivano dall'uso di modelli matematici e simulazioni numeriche. Un esempio è il problema degli N-corpi, cioè lo studio del moto di N masse puntiformi che interagiscono gravitazionalmente. Molti sistemi stellari, come ammassi globulari e galassie, composti da un enorme numero di stelle, diventano impossibili da risolvere esattamente, per questo motivo ci viene in aiuto il teorema del viriale.

### 2.1 Problema degli N-corpi

I sistemi di N stelle si descrivono con l'uso di equazioni differenziali al secondo ordine, le cui soluzioni consentono di determinare le traiettorie dei corpi che li costituiscono. Per  $N = 2$  il problema presenta una soluzione analitica completa, mentre per  $N > 2$  queste equazioni non sono risolvibili, in quanto non si riescono a formulare  $6N - 1$  integrali del moto, cioè la descrizione matematica del sistema non permette di trovare un numero sufficiente di integrali necessari per definire una soluzione analitica. Questo aspetto fu già sottolineato da Poincaré che affermò la non esistenza di altri integrali primi oltre ai 10 già noti. Per far fronte a questo problema si semplifica la distribuzione delle N masse, passando da una distribuzione discontinua a una continua con una densità  $\rho(\mathbf{x}; t)$ . Con questa approssimazione il sistema granulare reale, in cui la stella sente i contributi delle altre stelle, viene sostituito da un sistema ideale, nel quale la stella si muove in un campo gravitazionale omogeneo, descritto da un potenziale *smooth* (liscio). In questo modo la dimensionalità dello spazio delle fasi si riduce da  $6N$  a 6 e il problema risulta enormemente semplificato.

Dall'equazione di Poisson si ha  $\Delta\phi = 4\pi G \rho$ , dove  $\phi$  rappresenta il potenziale liscio, espresso come:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3y \quad (2.1)$$

Le orbite stellari nel sistema *smoothed* costituiscono solo delle approssimazioni delle

orbite reali, poiché in realtà ciascuna stella si muove nel potenziale *vero*

$$\Phi_{\text{true}}(\mathbf{x}_i, t) = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|} \quad (2.2)$$

La differenza  $\Phi_{\text{true}} - \Phi$  (*termine di granularità*); quantifica lo scostamento tra i due potenziali e quindi tra le orbite reali e quelle ideali. Questo ultimo aspetto è molto importante poiché aiuta a definire se un sistema è collisional o collisionless. Si introduce il *tempo di rilassamento a due corpi*, definito come l'intervallo di tempo dopo il quale l'orbita ideale non descrive più l'orbita reale.

## 2.1.1 Tempo di rilassamento

Per il calcolo del *tempo di rilassamento a due corpi* ( $t_{2b}$ ) si considerano tutti gli "urti" gravitazionali come eventi indipendenti, in modo tale che l'effetto di un incontro si sommi a tutti gli altri.

Un sistema gravitazionale in cui gli effetti di tali incontri sono trascurabili si definisce *collisionless*, altrimenti si definisce *collisional*. Ovviamente i sistemi reali non sono collisionless in senso stretto, poiché la granularità è sempre presente e gli incontri a due corpi avvengono generando inevitabilmente piccole variazioni di energia. Tuttavia, in sistemi con un gran numero di elementi, come le galassie, il processo di variazione dell'energia è talmente lento da poter essere considerato irrilevante.

Tralasciando la trattazione classica del  $t_{2b}$  si passa direttamente alla sua espressione per sistemi autogravitanti, condizione necessaria per applicare il teorema del viriale. Si esprima, quindi, il tempo di rilassamento a due corpi nell'unità di tempo di attraversamento del sistema ( $t_{\text{cross}}$ ) in modo da evidenziare la sua dipendenza da  $N$ :

$$\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} \sim \frac{N}{12 \ln N} \quad (2.3)$$

Per chiarire meglio la distinzione tra sistemi collisionless e collisional possono essere considerati due esempi astrofisici. Una galassia ellittica con  $N \sim 10^{11}$  e  $t_{\text{cross}} \sim 2 \times 10^8$  yrs, ha un tempo di rilassamento pari a  $t_{2b} \sim 10^6 - 10^7$  Gyr, le galassie sono sistemi collisionless, poiché  $t_{2b} \gg t_H$  ( $t_H \sim 14$  Gyr). Un ammasso globulare con  $N \sim 10^5 - 10^6$  e  $t_{\text{cross}} \sim 10^6$  yrs, ha invece  $t_{2b} \sim 5 \times 10^9$  yrs, in questo caso, gli ammassi globulari sono sistemi collisional poiché  $t_{2b} \sim t_H$ .

In conclusione, sia dall'Eq. (2.3) sia dagli esempi numerici, emerge che, all'aumentare di  $N$  aumenta anche  $t_{2b}$ .

## 2.2 Teorema del Viriale

Nei sistemi gravitazionali con un numero estremamente elevato di componenti, come le galassie, seguire l'evoluzione delle singole particelle risulta impraticabile. È quindi più conveniente adottare un approccio statistico, in cui lo stato del sistema non è descritto dalle traiettorie individuali ma da una funzione di distribuzione nello spazio delle fasi, la cui evoluzione è governata dall'Equazione non collisionale di Boltzmann (CBE), che rappresenta l'equazione fondamentale per la descrizione della dinamica collisionless.

Lo studio della CBE consente di ricavare le *equazioni di Jeans*, dalle quali è possibile ottenere, il *Teorema del Viriale* nelle sue forme tensoriale e scalare. La CBE fornisce quindi il ponte concettuale tra la dinamica dei sistemi gravitazionali e le loro proprietà macroscopiche osservabili.

## 2.2.1 Equazione non collisionale di Boltzmann (CBE) e equazioni di Jeans

Come anticipato nella sezione precedente la condizione di non collisionalità è valida per  $N \rightarrow \infty$ , quindi per ricavare la CBE può essere considerato un sistema che ha  $N \rightarrow \infty$  e  $t_{2b} \rightarrow \infty$ . La trattazione inizia definendo la funzione di distribuzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , che descrive statisticamente il sistema, e specificando il potenziale che ne governa la dinamica. Il sistema è caratterizzato da un potenziale smooth  $\phi$  e da un potenziale esterno  $\phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}; t)$ , cioè il moto di ogni elemento è governato dal potenziale totale  $\phi_T = \phi + \phi_{\text{ext}}$  (analizzando *sistemi autogravitanti* il termine  $\phi_{\text{ext}} = 0$ , poiché  $\phi_{\text{ext}}$  descrive tutta la materia al di fuori di essi).

A questo punto si passa alla scrittura della CBE, che non è altro che l'evoluzione della funzione di distribuzione:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_T \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (2.4)$$

dove  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$  rappresentano rispettivamente le coordinate spaziali e quelle di velocità.

La CBE è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine di tipo quasi-lineare. Ciò permette di affrontarne la soluzione tramite il *metodo delle caratteristiche*, che semplifica notevolmente il problema originario, ma questo approccio presenta dei limiti di natura matematica.

Per superare tali difficoltà si ricorre al *metodo dei momenti*, il quale consente di derivare un insieme di equazioni differenziali più semplici rispetto alla CBE stessa. Queste equazioni prendono il nome di *equazioni di Jeans* e descrivono le dipendenze tra funzioni, chiamate momenti, della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità. Esse si presentano in questo modo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \phi_T}{\partial x_j}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

dove le  $\bar{v}_i$  sono le componenti della velocità media locale.

## 2.2.2 Teorema del Viriale tensoriale e scalare

A questo punto si introduce l'elemento fondamentale della trattazione: il *Teorema del Viriale*, la cui esposizione qualitativa è preceduta da una breve sintesi della derivazione matematica.

A partire dalla seconda equazione di Jeans:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\delta \phi_T}{\delta x_j} \quad (2.7)$$

moltiplicando per  $x_k$  e integrando su tutto lo spazio si ottiene:

$$\frac{\delta}{\delta t} \int \rho x_k \bar{v}_j d^3x = - \int x_k \frac{\delta \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\delta x_i} d^3x - \int x_k \rho \frac{\delta \phi_T}{\delta x_j} d^3x \quad (2.8)$$

e integrando per parti

$$\int x_k \frac{\delta \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\delta x_i} d^3x = -2K_{jk} \quad (2.9)$$

dove  $K_{jk}$  è detto *tensore di energia cinetica totale*. Per misurare l'energia cinetica del sistema vengono introdotti altri due tensori: il *tensore di energia cinetica media* ( $T_{jk}$ ) e il *tensore di energia cinetica della dispersione di velocità* ( $\Pi_{jk}$ ).

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}, \quad \text{Tr}(K_{jk}) = K \quad (2.10)$$

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x, \quad \text{Tr}(T_{jk}) = T \quad (2.11)$$

$$\Pi_{jk} = \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3x \quad \text{Tr}(\Pi_{jk}) = \Pi \quad (2.12)$$

dove  $\sigma_{jk}^2$  è il tensore di dispersione delle velocità.

Si introduce ora il *tensore di energia potenziale*:

$$W_{jk} = - \int \rho x_j \frac{\delta \phi_T}{\delta x_k} d^3x. \quad \text{Tr}(W_{jk}) = W \quad (2.13)$$

che combinato con  $K_{jk}$  porta alla seguente relazione:

$$2 \frac{\delta}{\delta t} \int \rho [x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k] d^3x = 2K_{jk} + W_{jk} \quad (2.14)$$

Infine, definendo il *tensore del momento di inerzia* come

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x. \quad (2.15)$$

La sua derivata seconda rispetto al tempo, insieme all'equazione di continuità, conduce alla formulazione del *Teorema del Viriale tensoriale*.

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 I_{jk}}{\delta t^2} = 2K_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}. \quad (2.16)$$

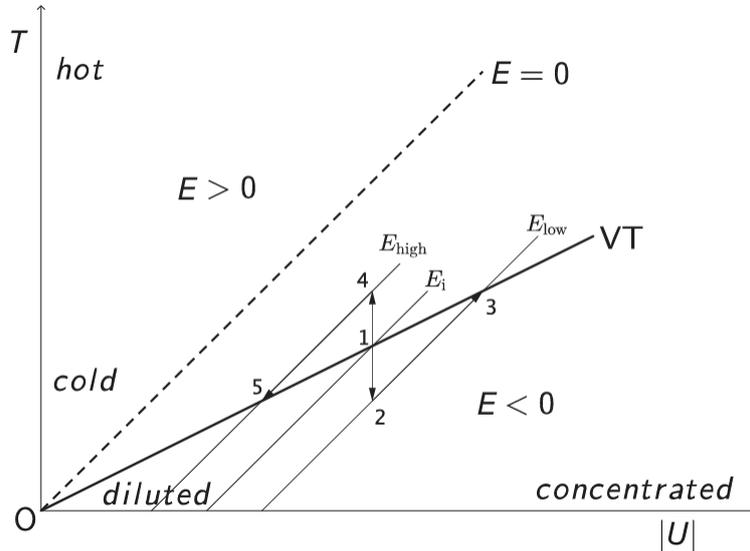
Prendendo la traccia dei tensori e considerando il regime stazionario (dove  $\dot{I} = 0$ ), si arriva al *Teorema del Viriale scalare*

$$2K + W = 0 \quad (2.17)$$

con  $K$  e  $W$  che rappresentano rispettivamente l'*energia cinetica totale* e l'*energia potenziale totale* del sistema.

## 2.2.3 Piano del Viriale

Il *Piano del Viriale* è la rappresentazione grafica del teorema del viriale, in cui l'asse delle ascisse corrisponde all'energia potenziale totale ( $U$ ) e l'asse delle ordinate all'energia cinetica totale ( $T$ ).



**Figura 2.1:** Piano del Viriale per sistemi autogravitanti. Viene rappresentato lo spostamento di un sistema sul piano del viriale, in base alla perdita o all'acquisto di energia. In questo grafico l'energia cinetica totale viene rappresentata con la lettera  $T$ , mentre quella potenziale con la lettera  $U$ , a differenza di come è stato fatto nella trattazione precedente (e inoltre  $E = T + U$ ). Crediti: L.Ciotti, *Introduction to Stellar Dynamics*

Sul piano ogni punto rappresenta un sistema. Per un'energia totale  $E$  costante, il punto corrispondente si muove lungo rette di equazione:

$$T = E + |U| \quad (2.18)$$

dette rette di conservazione dell'energia (con  $U$  indicata con il valore assoluto poiché  $U < 0$ ).

È possibile distinguere quattro zone principali: in alto si trovano sistemi caldi, in basso sistemi freddi, a destra sistemi concentrati e a sinistra sistemi "diluiti". Un sistema virializzato, ovvero all'equilibrio, è posizionato sulla retta VT (retta del viriale), che ha la seguente equazione:

$$T = \frac{|U|}{2} \quad (2.19)$$

Un'ulteriore retta fondamentale è quella relativa ai sistemi con energia totale  $E = 0$ , data da:

$$T = |U| \quad (2.20)$$

Essa separa i sistemi con  $E > 0$  (che non possono essere virializzati) da quelli con  $E < 0$  (che possono essere virializzati). Infatti, solo i sistemi con energia totale negativa possono virializzarsi, in quanto possiedono rette di conservazione che intersecano la retta del viriale. Al contrario, quelli con  $E > 0$  non possono mai raggiungere condizioni di equilibrio,

perchè ciò implicherebbe avere un'energia potenziale positiva e un'energia cinetica negativa, che sono condizioni di forte instabilità. A differenza di quelli con  $E < 0$  si spostano lungo rette di conservazione, le quali non intersecano mai la retta del teorema del viriale.

L'unica possibilità per un sistema con energia positiva di virializzarsi consiste nel perdere abbastanza energia da portarsi a  $E < 0$ .

Si consideri un esempio pratico di un sistema che si muove nel piano del viriale. Si suppone di avere un sistema virializzato nel Punto 1 e si assume che una frazione della sua energia cinetica viene persa a causa dell'espulsione di una stella. Tale perdita riduce  $T$ , mentre  $U$  rimane costante (si può osservare dalla linea retta che giunge al Punto 2). In pratica abbiamo "raffreddato" il sistema a  $U$  fissata. Tuttavia, in questa posizione non è più in equilibrio, il sistema, quindi, tende a virializzarsi nuovamente giungendo a una configurazione più concentrata e più calda (raggiungendo il Punto 3). In altre parole, il sistema inizialmente si è raffreddato, ma la sua stessa gravità lo ha riscaldato portandolo a una temperatura maggiore rispetto alle condizioni iniziali. Naturalmente, il processo può accadere anche in senso opposto.

Questo comportamento paradossale, per cui un sistema che perde energia tende a riscaldarsi, è alla base della *catastrofe gravotermica*, fenomeno approfondito nel capitolo successivo.

## Capitolo 3

# Applicazioni astrofisiche

Nelle sezioni successive mostreremo come il teorema del viriale, nelle sue varie formulazioni, venga utilizzato per interpretare e modellare sistemi astrofisici reali; dagli ammassi globulari alle galassie.

### 3.1 Catastrofe gravotermica

Uno dei concetti più importanti della dinamica degli ammassi globulari è la *catastrofe gravotermica*. Alla base di questo fenomeno vi è il concetto di tempo di rilassamento a due corpi ( $t_{2b}$ ) che, in queste tipologie di sistemi astrofisici, è paragonabile o inferiore all'età dell'universo, per cui essendo sistemi collisional non rimangono stabili.

Attraverso gli scambi di energia all'interno del sistema, le stelle di piccola massa, situate nelle zone periferiche, tendono a guadagnare velocità fino a superare la velocità di fuga. Di conseguenza vengono espulse portandosi via energia cinetica (*evaporazione gravitazionale*). In altre parole, le stelle piccole durante la loro orbita dalle zone di confine dell'ammasso si dirigono verso il centro si scaldano, "raffreddando" il nucleo, e nel momento in cui la velocità di fuga viene superata vengono espulse. Questo causa una perdita di energia del nucleo che si contrae e si riscalda. Il processo continua, e con il passare del tempo il gradiente di temperatura tra la zona interna e la zona esterna dell'ammasso aumenta, fino a culminare con il collasso del nucleo e la formazione di sistemi binari.

### 3.2 Limite di Jeans

Il *limite di Jeans* definisce la massa critica di una nube, detta *massa di Jeans*, al di sopra della quale il sistema diventa instabile e collassa. Quest'ultima può essere ricavata partendo proprio dal teorema del viriale.

Si consideri una nube sferica di gas che collassa sotto l'effetto della sua stessa gravità, con una massa  $M$  pari al volume iniziale moltiplicato per la densità iniziale.

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0 \quad (3.1)$$

L'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica delle particelle sono rispettivamente:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (3.2)$$

$$K = \frac{3}{2} N k_B T \quad (3.3)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $N$  è il numero di particelle, definito dal seguente rapporto (massa totale su massa della particella):

$$N = \frac{M}{m} \quad (3.4)$$

Il collasso avviene nel momento in cui l'energia potenziale diventa maggiore dell'energia cinetica. Prendendo il teorema del viriale, quando

$$2K < |U| \quad (3.5)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{k_B T}{m} < \frac{1}{5} \frac{GM}{R} \quad (3.6)$$

Si definisce *raggio di Jeans* il limite superiore della disequazione appena trovata:

$$R_J = c_s \sqrt{\frac{9}{4\pi G \rho}} \quad (3.7)$$

con  $c_s$  che indica la velocità del suono. Ora, per ottenere l'equazione della *massa di Jeans* si sostituisce l'equazione di  $R_J$  nella 3.1, e si trova:

$$M_J = \left( \frac{5k_B T}{Gm} \right)^{3/2} \left( \frac{3}{4\pi \rho} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

### 3.3 Strutture stellari

Le *strutture stellari*, essendo sistemi virializzati, possono essere descritte in modo efficace attraverso il teorema del viriale. La sua forma scalare è:

$$2K + W = 0 \quad (3.9)$$

da cui si ricava l'energia cinetica

$$K = -\frac{W}{2} \quad (3.10)$$

Si prenda ora l'equazione dell'energia totale

$$E = K + W \quad (3.11)$$

e inserendo al suo interno la 3.10, si ottiene:

$$E = \frac{W}{2} \quad (3.12)$$

Le relazioni trovate permettono di analizzare il caso di una configurazione stabile che, in un momento successivo, entra in fase di contrazione ( $dW < 0$ ). In questo scenario si ha:

$$dK = +\frac{|W|}{2} \quad (3.13)$$

e di conseguenza

$$dE = -\frac{|W|}{2} \quad (3.14)$$

Se ne deduce che metà della variazione andrà spesa per incrementare l'energia cinetica interna (e dunque la temperatura), mentre l'altra metà viene irradiata. La struttura stellare, di conseguenza, si contrae e allo stesso tempo emette e si riscalda. Viceversa, ogni perdita di energia totale per irraggiamento costringe la struttura a contrarsi diminuendo la propria energia potenziale e aumentando la temperatura interna. Questo processo prosegue fino a quando la temperatura non raggiunge valori sufficienti a innescare una reazione di fusione nel nucleo, evento che arresta temporaneamente la contrazione.

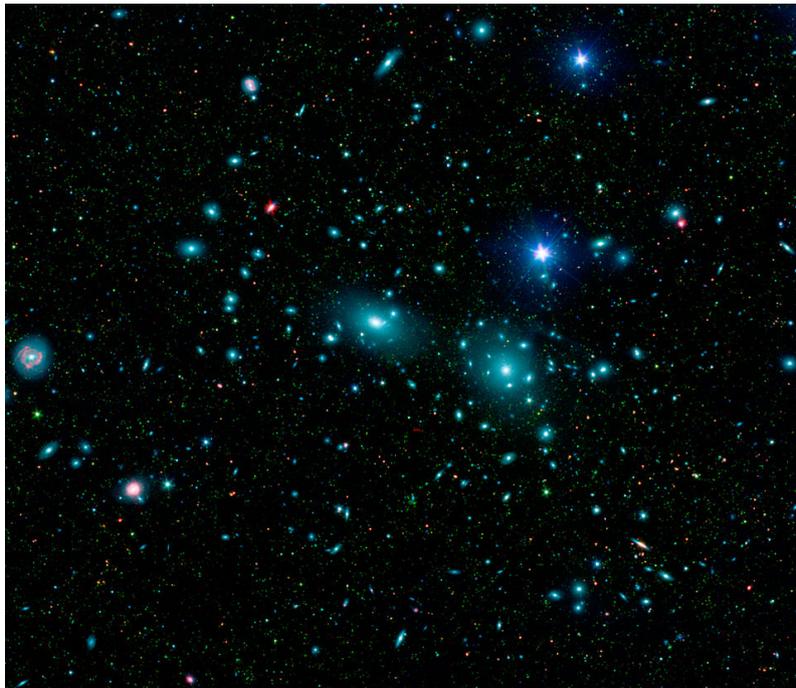
A questo punto della trattazione definiamo il *tempo scala termodinamico* o *tempo di Kelvin-Helmholtz*:

$$t_{\text{KH}} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{LR} \quad (3.15)$$

esso rappresenta l'intervallo di tempo durante il quale una stella può sostenere la propria luminosità esclusivamente tramite la contrazione gravitazionale. Per il sole tale tempo risulta essere  $t \approx 1.5 \times 10^7$  yr. Questo valore è la prova che contraddisse la teoria iniziale tale per cui il sole producesse la propria energia solo grazie alla contrazione e di conseguenza ha portato alla scoperta che il sole produce energia anche grazie alle reazioni di fusione nel suo nucleo.

In conclusione, la vita di una stella può essere descritta come una continua contrazione di volta in volta arrestata dall'innescio delle reazioni termonucleari, con una continua alternanza di tempi scala.

### 3.4 Scoperta della materia oscura



**Figura 3.1:** Ammasso della Chioma. Crediti: *NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins*

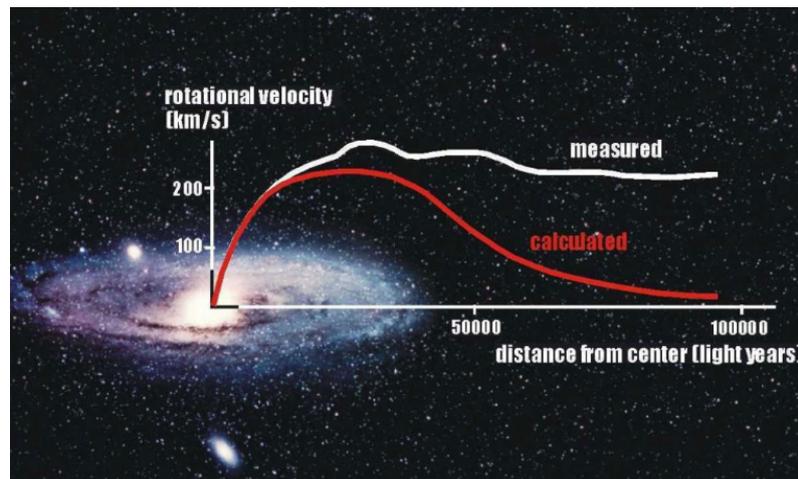
La questione della materia oscura affonda le sue radici con Fritz Zwicky, che, nei primi anni '30 del secolo scorso, intraprese uno studio sistematico dell'ammasso della Chioma, un aggregato di migliaia di galassie.

Il fisico svizzero eseguì due tipi di misure: stimò la massa totale dell'ammasso dal numero delle galassie che poteva vedere e dalla sua luminosità totale; dalla misura dello spostamento Doppler della luce emessa, invece, determinò le velocità radiali delle galassie. Con questi dati a disposizione, fu in grado di calcolare le energie cinetica e gravitazionale contenute nell'ammasso.

Il *teorema del viriale* afferma che, in un sistema chiuso, qual è un ammasso, la prima deve essere metà della seconda. Tuttavia, Zwicky trovò che le singole galassie si muovevano troppo velocemente perché l'ammasso potesse rimanere compatto. Con le velocità osservate, l'ammasso avrebbe dovuto "evaporare".

Per risolvere questa situazione paradossale ipotizzò l'esistenza di una componente di massa invisibile, che esercita attrazione gravitazionale ma che non emette luce, non contribuendo, quindi, alla luminosità della galassia. Coniò per essa il termine "materia oscura".

All'inizio degli anni '70, Vera Rubin, insieme al suo collaboratore, Kent Ford, iniziò a studiare le cosiddette curve di rotazione delle galassie a spirale. Una curva di rotazione è l'andamento della velocità di rotazione all'interno di un sistema astronomico in funzione della distanza dal centro del sistema stesso. Rubin si aspettava di trovare l'andamento predetto (*regime kepleriano*,  $v(R) \approx R^{-1/2}$ ), ma osservò che a grande distanza dal centro della galassia la velocità di rotazione rimaneva pressoché costante.



**Figura 3.2:** Curva di rotazione di una tipica galassia a spirale. La curva rossa è la curva teorica; quella bianca rappresenta l'andamento delle misure sperimentali. Crediti: INFN

È importante precisare, come si vede dalla figura, che la curva si estende ben al di là della regione delle stelle più esterne. In questa regione la velocità di rotazione è quella delle nubi di idrogeno neutro (*HI*) che ruotano intorno al centro della galassia. Queste nubi emettono radiazione con una determinata lunghezza d'onda (la cosiddetta linea a  $\lambda = 21$  cm). È dallo spostamento Doppler di questa linea che Rubin fu in grado di determinare la velocità orbitale delle nubi periferiche.

La curva bianca può essere compresa soltanto se la distribuzione di massa si estende ben oltre quella della luce stellare visibile, il che equivale a dire che la massa nelle regioni esterne della galassia è oscura.

Per poter comprendere la natura di questa materia si è postulato che l'alone che circonda la galassia sia composto da particelle elementari, elettricamente neutre, stabili e massive sin qui non ancora osservate. Il fatto che esse siano neutre spiega la ragione per cui risultino invisibili, non potendo emettere radiazione elettromagnetica di nessun tipo.

# Bibliografia

- [1] Giuseppe Bertin. *Dynamics of galaxies*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] Luca Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University press, 2021.
- [3] F. Bossi D. Babusci. *Il problema della materia oscura*. 2018. URL: <http://w3.lnf.infn.it/problema-della-materia-oscura/>.
- [4] Francesco De Iasio. “Appunti di astrofisica extragalattica”. 2024.
- [5] Francesco De Iasio. “Appunti di astrofisica stellare”. 2024.
- [6] George W. Collins II. *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*. NASA Astrophysics Data System, 2003.
- [7] Scott Tremaine James Binney. *Galactic dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- [8] Christopher Lovell. *Deriving the Jean’s Mass*. 2016. URL: <https://www.christopherlovell.co.uk/blog/2016/04/26/jeans-mass.html>.