

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di laurea

Presentata da:
Matteo Curcio

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Appello II
Anno Accademico 2024-2025

Abstract

La dinamica dei sistemi collisionali rappresenta un aspetto fondamentale nello studio dei sistemi stellari, in particolare degli ammassi globulari, nei quali le interazioni gravitazionali a due corpi giocano un ruolo dominante nell'evoluzione a lungo termine. In questo elaborato viene introdotto il concetto di tempo di rilassamento come parametro chiave per distinguere tra sistemi collisionali e non collisionali, evidenziandone le implicazioni fisiche e le connessioni con processi quali l'evaporazione, l'equipartizione e il core collapse. Particolare attenzione è dedicata al ruolo delle binarie, la cui formazione e interazione regolano l'evoluzione degli ammassi globulari dando origine a fenomeni come le oscillazioni gravotermiche. Infine, viene discussa la complessità delle simulazioni numeriche di tali sistemi, sottolineando come la modellizzazione degli ammassi globulari rappresenti tuttora una sfida centrale dell'astrofisica computazionale.

Indice

1	Definire un sistema collisionale	1
1.1	Calcolo del tempo di rilassamento	1
1.1.1	L'approssimazione impulsiva	3
1.1.2	Calcolo del tempo di rilassamento per sistemi autogravitanti .	6
2	Gli ammassi globulari	7
2.1	Anisotropia della velocità	7
2.2	Equipartizione dell'energia ed evaporazione stellare	8
2.3	Core collapse	9
2.4	Il ruolo delle stelle binarie: le oscillazioni gravotermiche	10
3	Algoritmi dinamici	12
3.1	Metodi del continuo	12
3.2	Metodi N -body	13
3.3	Il "kitchen sink"	14
A	Variazione della velocità in due diversi sistemi di riferimento	16
B	Il teorema del Viriale per sistemi autogravitanti	16

1 Definire un sistema collisionale

I moti delle stelle all'interno di un sistema autogravitante, per esempio una galassia o un ammasso globulare, producono continue fluttuazioni del campo gravitazionale del sistema, le quali a loro volta inducono cambiamenti (sia nel modulo che nella direzione) della velocità di ogni stella. In questa trattazione le stelle verranno considerate come masse puntiformi soggette a interazione gravitazionale, e per tale motivo verranno ignorate collisioni fisiche dirette, andiamo a mostrare la legittimità di tale approssimazione. Ragioniamo per ordini di grandezza, considerando un generico sistema composto da N stelle ognuna di raggio pari al raggio del Sole $R_* = R_\odot = 7 \times 10^{10}$ cm. Il sistema occupa un volume sferico di raggio R , si ha un urto quando la distanza tra due centri è minore di $2R_*$. Perciò ciascuna stella ha a disposizione un volume cilindrico di base $\sigma_* = \pi R_*^2$ e lunghezza λ , interpretabile come il libero cammino medio della stella. Imponendo che il volume totale spazzato da tutte le stelle sia uguale al volume totale a disposizione si ha:

$$N\lambda\sigma_* = \frac{4\pi}{3}R^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{R} \propto \frac{R^2}{NR_*^2} \quad (1.1)$$

Se per una galassia assumiamo, con buona approssimazione, $R = 10^4$ pc $\approx 10^{22}$ cm, $N = 10^{11}$ si trova che $\frac{\lambda}{R} \approx 10^{13}$. Questo implica che mediamente una stella in una galassia compirà circa 10^{13} orbite prima di urtare fisicamente un'altra stella. Una stella come il Sole, dalla sua nascita, ne ha compiute tra le 30 e le 40, un numero più piccolo di ben dodici ordini di grandezza. Per tale motivo la probabilità statistica di un urto stellare è molto piccola, e le stelle possono essere trattate come punti materiali. Un sistema stellare (ma non solo) viene definito collisionale quando l'evoluzione delle orbite delle sue componenti è dominata non più dal potenziale gravitazionale medio, bensì dalle perturbazioni cumulative dovute agli incontri ravvicinati tra le singole stelle¹. In tale regime, le condizioni iniziali perdono progressivamente importanza, e la dinamica del sistema è determinata soprattutto dai processi di rilassamento, che diventano rilevanti quando l'età del sistema è confrontabile con il suo tempo di rilassamento, una misura temporale la cui introduzione può essere motivata in diverse maniere, alcune molto sofisticate (collegate ad esempio alla teoria delle equazioni differenziali stocastiche e ad argomenti di meccanica statistica), altre più fenomenologiche, che hanno però il merito di renderlo più intuitivo e di portare a stime sufficientemente corrette per le applicazioni pratiche in astrofisica. Qui illustreremo brevemente il concetto e ne metteremo in risalto le implicazioni più importanti.

1.1 Calcolo del tempo di rilassamento

L'approccio standard al calcolo del tempo di rilassamento si basa su due assunzioni:

1. tutti gli incontri tra le stelle sono trattati come indipendenti, perciò l'effetto di ogni incontro è semplicemente sommato a quelli degli altri incontri,

¹Viene detto quindi che ogni stella sente la “granularità” del campo gravitazionale.

2. tutti gli incontri tra le stelle sono trattati come incontri iperbolici tra due corpi.

Sulla base di queste ipotesi, il rilassamento viene descritto come il risultato cumulativo di numerosi incontri binari indipendenti: per questo motivo il tempo caratteristico associato prende il nome di tempo di rilassamento a due corpi, indicato con t_{2b} . Interazioni tra più di due corpi sono raramente significative: ciò è legato ai teoremi di Sundman [17], che affermano che nel problema dei tre corpi le collisioni a tre corpi avvengono solo con probabilità trascurabile. Questo significa che, ogni volta che tre particelle si avvicinano, ci sarà sempre una sequenza di incontri ravvicinati a due corpi separati; praticamente mai i tre corpi arriveranno a trovarsi estremamente vicini nello stesso frangente. Ponendoci in un sistema di riferimento inerziale S_0 definiamo il sistema in esame: esso è composto da N corpi, ha massa totale M ed è descritto da una funzione di distribuzione $f(\vec{x}_f, \vec{v}_f)$, che rappresenta la densità di probabilità di trovare una stella in una certa posizione con una certa velocità. Consideriamo tutte le stelle che compongono il sistema di uguale massa m_f , e andiamo a studiare una stella di test m_t . Prendendo una generica stella m_f , andiamo a definire la massa ridotta $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$, la posizione relativa di m_t rispetto a m_f $\vec{r}(t) = \vec{x}_t(t) - \vec{x}_f(t)$, e infine la velocità relativa di m_t rispetto a m_f $\vec{v}(t) = \vec{v}_t(t) - \vec{v}_f(t)$, da cui possiamo definire $\vec{v}(\pm\infty)$, ovvero la velocità relativa asintotica delle due stelle nel moto iperbolico, quindi per $t \rightarrow \pm\infty$. Definiamo inoltre $\Delta\vec{v} = \vec{v}(\infty) - \vec{v}(-\infty)$, la variazione totale di velocità relativa. Andiamo ora a quantificare t_{2b} . L'idea di base dietro alla prima assunzione è quella di sommare gli effetti di tutte le interazioni tra due corpi valutati non considerando le restanti $N - 2$ stelle, e definire una soglia in modo che, quando l'effetto totale è più grande della soglia, è passato un tempo di rilassamento. In realtà, sin dall'inizio le orbite delle stelle sono affette dalla granularità del sistema, ma col passare del tempo esse possono essere descritte sempre con meno accuratezza tramite orbite in un sistema idealmente liscio, continuo. Possono essere usati diversi indicatori per definire gli effetti cumulativi delle interazioni tra due corpi e per derivare una stima di t_{2b} . Qui ci concentreremo sulle variazioni di energia cinetica associata alla componente perpendicolare della velocità della stella di test rispetto alla velocità relativa iniziale $\vec{v}(-\infty)^2$. Per poter sommare una proprietà orbitale generica della stella di test su tutte le interazioni, è necessario identificare la funzione di distribuzione. Per semplificare il problema, assumiamo una distribuzione delle masse di campo spazialmente omogenea (il che implica che la densità numerica n_f è indipendente dalla posizione), e assumiamo inoltre l'isotropia della loro distribuzione di velocità. Dunque la distribuzione di densità delle stelle di campo è data da:

$$f(\vec{x}_f, \vec{v}_f) = n_f g(v_f) \quad v_f \equiv \|\vec{v}_f\| \quad 4\pi \int_0^\infty g(v_f) v_f^2 dv_f = 1 \quad (1.2)$$

dove g è una funzione positiva dipendente dal modulo di $\vec{v}_f$, come conseguenza dell'isotropia delle velocità. L'integrale su g viene normalizzato, per motivi che vanno oltre gli scopi di questo elaborato. Tramite semplici considerazioni geometriche e sotto le ipotesi fatte fino a questo punto, in un intervallo di tempo Δt , il numero

²Ci si potrebbe anche concentrare, per esempio, sulle deflessioni angolari orbitali, o semplicemente sulla variazione di energia cinetica.

di interazioni tra la stella di test e le stelle di campo che posseggono una velocità compresa nell'elemento differenziale $d^3\vec{v}_f$ intorno a $\vec{v}_f$, e con un parametro d'impatto (la distanza minima che separerebbe due stelle se seguissero traiettorie rettilinee e uniformi senza interagire tra loro) compreso tra b e $b + db$, è pari a:

$$\Delta n_{enc} = 2\pi b db \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| \Delta t n_f g(v_f) d^3\vec{v}_f \quad (1.3)$$

L'Eq. 1.3 mostra che, mentre la stella di test si muove, essa incontra un insieme di possibili traiettorie di campo, che nello spazio delle velocità relative si possono visualizzare come un "mare" di cilindri con differenti orientazioni e sezioni d'urto. Introduciamo ora, per una data proprietà orbitale P della stella di test, il coefficiente di diffusione $D(P)$:

$$D(P) \equiv 2\pi n_f \int_{\mathbb{R}^3} g(v_f) \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| d^3\vec{v}_f \int_0^\infty \langle P \rangle b db \quad (1.4)$$

dove $\langle P \rangle$ è la media angolare di P intorno alla direzione della velocità relativa iniziale. In pratica $D(P)$ misura il tasso di variazione nel tempo della proprietà orbitale P a causa degli effetti cumulativi delle interazioni con le stelle di campo. Al coefficiente di diffusione di una proprietà P può essere associato un tempo caratteristico, definito come $t \sim \frac{P}{D(P)}$. Nel caso dei sistemi stellari collisionali, questo tempo caratteristico coincide col tempo di rilassamento del sistema. Supponiamo di aver risolto il problema dei due corpi per una generica interazione, quindi conosciamo il valore di $\Delta\vec{v}_\perp$ e di $\Delta\vec{v}_\parallel$ per l'orbita relativa. Perciò avremo le seguenti espressioni:

$$\Delta\vec{v}_{t,\perp} = \frac{\mu}{m_t} \Delta\vec{v}_\perp \quad \Delta\vec{v}_{t,\parallel} = \frac{\mu}{m_t} \Delta\vec{v}_\parallel \quad (1.5)$$

che valgono in S_0 . Queste espressioni sono ricavate in Appendice A. Consideriamo innanzitutto il coefficiente di diffusione $D(\|\Delta\vec{v}_\perp\|^2)$, dal quale ricaveremo

$$D(\|\Delta\vec{v}_{t,\perp}\|^2) = \frac{\mu^2 D(\|\Delta\vec{v}_\perp\|^2)}{m_t^2} \quad (1.6)$$

Per integrare l'Eq. 1.4 seguiremo un approccio chiamato approssimazione impulsiva.

1.1.1 L'approssimazione impulsiva

Nell'approssimazione impulsiva, dopo ogni interazione della stella di test con una stella di campo, il cambiamento della velocità relativa perpendicolare alla velocità relativa iniziale $\vec{v}(-\infty)$ è:

$$\mu \|\Delta\vec{v}_\perp\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \frac{2b}{v} \quad v = \|\vec{v}(-\infty)\| \quad (1.7)$$

L'Eq. 1.7 è asintoticamente corretta nel limite di parametro d'impatto b o velocità relativa iniziale v grandi. Il contenuto dell'Eq. 1.7 può essere descritto come la deviazione totale dell'orbita relativa ottenuta sotto l'azione di una forza pari a $\frac{Gm_t m_f}{b^2}$ che agisce nella direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale per un tempo $\frac{2b}{v}$, e per tale motivo è chiamata approssimazione impulsiva. Perciò otteniamo che:

$$\|\Delta\vec{v}_{t,\perp}\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta\vec{v}_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} \quad b \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

Inserendo ora questo risultato nell'Eq. 1.4 otteniamo:

$$D(\|\Delta\vec{v}_{t,\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3\vec{v}_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (1.9)$$

Si può notare dall'Eq. 1.9 come l'integrazione sul parametro d'impatto b porti a un risultato divergente agli estremi dell'intervallo d'integrazione. Si parla quindi di divergenza ultravioletta per $b \rightarrow 0$, associata a urti estremamente ravvicinati, e di divergenza infrarossa per $b \rightarrow +\infty$, legata invece agli urti deboli a grande distanza. La divergenza ultravioletta è analoga a quella che compare in fisica dei plasmi nel calcolo della radiazione emessa per bremsstrahlung, ma qui è conseguenza dell'approssimazione impulsiva, che diventa inadeguata per collisioni molto ravvicinate. In un trattamento più accurato dell'interazione a due corpi, il comportamento dell'integrale viene corretto sostituendo a $b = 0$ il valore di $b_{\frac{\pi}{2}}$, ossia il parametro d'impatto per cui $\vec{v}$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ rad. La divergenza infrarossa, invece, non può essere eliminata in un modello di sistema gravitazionale omogeneo infinito, ma viene risolta considerando che l'universo non è uno spazio euclideo illimitato. Per un sistema isolato si introduce dunque un cutoff $b_{\max}$, pari al raggio del sistema. Il risultato finale si esprime quindi tramite il logaritmo di Coulomb $\ln \Lambda$:

$$\ln \Lambda \equiv \ln \frac{b_{\max}}{b_{\frac{\pi}{2}}} \quad (1.10)$$

Dopo aver integrato sui possibili parametri d'impatto, l'Eq. 1.9 diventa:

$$D(\|\Delta\vec{v}_{t,\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f) \ln \Lambda}{v} d^3\vec{v}_f \quad (1.11)$$

Andiamo infine a integrare sullo spazio delle velocità, e introduciamo il logaritmo di Coulomb pesato sulle velocità $\ln \bar{\Lambda}$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f) \ln \Lambda}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f \equiv \Psi(v_t) \ln \bar{\Lambda} \quad (1.12)$$

In applicazioni pratiche $\ln \bar{\Lambda}$ è stimato usando dei valori medi tipici delle velocità delle stelle di campo $\bar{v}_f$. Invece $\Psi(v_t)$ è pari a

$$\Psi(v_t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f \quad (1.13)$$

Questo risultato può essere confrontato con il potenziale generato da una distribuzione di densità sferica nello spazio reale: in modo analogo, $\Psi(v_t)$ descrive l'effetto complessivo delle stelle di campo su m_t nello spazio delle velocità, ed è perciò chiamato primo potenziale di Rosenbluth [5]. Esso dipende solo dalla distribuzione delle velocità $g(v_f)$ delle stelle di campo, e le condizioni di normalizzazione imposte su g nell'Eq. 1.2 implicano che, per alti valori di v_t rispetto alle velocità caratteristiche delle stelle di campo, il potenziale è dominato dal termine di monopolo $\frac{1}{v_t}$. Da queste osservazioni otteniamo il valore del coefficiente di diffusione:

$$D(\|\Delta\vec{v}_{t,\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t) \quad (1.14)$$

L'effetto cumulativo delle interazioni è quello di scaldare la stella di test nella direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale. Il tempo caratteristico associato a questo riscaldamento è il tempo di rilassamento a due corpi, che, come definito precedentemente, è dato da:

$$t_{2b} \equiv \frac{E_t(-\infty)}{D(\Delta E_{t,\perp})} \sim \frac{v_t^2}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t)} \sim \frac{v_t^3}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda}} \quad (1.15)$$

Questa approssimazione aumenta di accuratezza al crescere del valore di v_t . È lecito chiedersi perché abbiamo definito il tempo di rilassamento usando solo la componente perpendicolare della velocità, e non quella parallela, dal momento che si può facilmente intuire che:

$$\Delta E_t \propto \Delta E_{t,\perp} + \Delta E_{t,\parallel} \quad (1.16)$$

La risposta sta nel valore del coefficiente di diffusione per la componente parallela della velocità:

$$D\left(\|\Delta \vec{v}_{t,\parallel}\|^2\right) \sim 4\pi G^2 n_f m_f^2 \Psi(v_t) \quad (1.17)$$

Perciò, per alti valori di Λ , il riscaldamento in direzione parallela è trascurabile, difatti l'Eq. 1.15 è asintoticamente corretta anche quando si aggiunge il termine $D(\Delta E_{t,\parallel})$ al denominatore. Il motivo per cui il termine $D(\Delta E_{t,\parallel})$ è trascurabile è legato al fatto che l'integrale in db è dominato dagli incontri a grande parametro d'impatto, che quindi provocano piccole deflessioni dell'orbita della stella di test, quantificabili da un angolo θ per cui vale $\theta \approx 0$ e che portano la stella ad avere una nuova velocità $\vec{v}'$. Perciò dopo l'interazione avremo che:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = (v(\cos \theta - 1), v \sin \theta) \quad (1.18)$$

Questa equazione vale nel caso si supponga di orientare l'asse x parallelamente alla componente parallela della velocità iniziale, operazione che si può fare senza perdere di generalità grazie all'isotropia dello spazio. Andando a considerare ora solo piccoli θ espandiamo in serie di Taylor le funzioni sin e cos osserviamo che:

$$\Delta v_{\perp} = v \sin \theta \approx v \theta \quad (1.19)$$

$$\Delta v_{\parallel} = v(\cos \theta - 1) \approx v \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - 1\right) = -\frac{v\theta^2}{2} \quad (1.20)$$

Perciò si nota facilmente che

$$\frac{\|\Delta v_{\parallel}\|}{\|\Delta v_{\perp}\|} \approx \frac{\frac{v\theta^2}{2}}{v\theta} = \frac{\theta}{2} \stackrel{\theta \approx 0}{\ll} 1 \quad (1.21)$$

Di conseguenza il coefficiente di diffusione è essenzialmente determinato unicamente dai contributi perpendicolari. La componente $D\left(\|\Delta \vec{v}_{t,\parallel}\|^2\right)$ genera un effetto chiamato frizione dinamica, definita da un proprio tempo caratteristico chiamato tempo di frizione dinamica, ma lo studio di questo fenomeno va oltre gli scopi di questo elaborato.

1.1.2 Calcolo del tempo di rilassamento per sistemi autogravitanti

Cerchiamo di capire i valori tipici di t_{2b} in sistemi astrofisici autogravitanti. Consideriamo un sistema di forma sferica e raggio R , riempito in maniera omogenea con N stelle identiche di massa $m = m_f = m_t$, avremo perciò che $n_f = \frac{3N}{4\pi R^3}$. Dal teorema del Viriale possiamo scrivere, con buona approssimazione:

$$\sigma_V^2 = \frac{GNm}{R} \quad (1.22)$$

dove σ_V indica la dispersione di velocità delle stelle nel sistema (per cui approssimiamo $\sigma_V = v_f = v_t$). Esprimiamo t_{2b} in unità del tempo naturale del sistema, il tempo di attraversamento:

$$t_{\text{cross}} \equiv \frac{2R}{\sigma_V} \quad (1.23)$$

Si può verificare tramite semplici passaggi algebrici che

$$\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} \sim \frac{N}{12 \ln \bar{\Lambda}} = \frac{N}{12 \ln N} \quad (1.24)$$

Vediamo come si ottiene $\bar{\Lambda} = N$. Poniamo $b_{\text{max}} = 2R$, andando quindi a considerare solo le interazioni con le stelle all'interno del sistema, mentre per $b_{\frac{\pi}{2}}$ si può dimostrare che vale:

$$\mu \|\vec{v}\|^2 = \frac{Gm_t m_f}{b_{\frac{\pi}{2}}} \quad (1.25)$$

ma avendo posto $m_t = m_f = m$, e utilizzando l'Eq. 1.22, si ricava che:

$$b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{N} \quad \Rightarrow \quad \ln \bar{\Lambda} = \ln N \quad (1.26)$$

Dall'Eq. 1.24 si deduce facilmente che, a massa totale del sistema fissata, all'aumentare del numero di stelle t_{2b} aumenta, quindi gli effetti di granularità del potenziale gravitazionale diventano importanti in tempi più lunghi. Ciò può sembrare a primo impatto un controsenso, poiché la stella di test subirà più collisioni, ma non bisogna considerare solo il numero di collisioni, ma anche le variazioni di energia:

$$\Delta E_t \propto N \times \Delta E_{\text{singola interazione}} \quad (1.27)$$

Tuttavia, a massa fissata lo scambio di energia in un'interazione diminuisce all'aumentare di N , poiché $\Delta E_{\text{singola interazione}} \propto m_f^2 \propto N^{-2}$; di conseguenza $\Delta E_t \propto \frac{1}{N}$, e ciò porta all'aumento del numeratore nell'Eq. 1.24. Calcoliamo il t_{2b} di alcuni sistemi stellari:

- per una tipica galassia ellittica $N \approx 10^{11}$ e $t_{\text{cross}} \approx 2 \times 10^8$ yrs, perciò si può stimare $t_{2b} \approx 10^{6/7}$ Gyrs. Le galassie sono quindi sistemi non collisionali, dal momento che il loro tempo di rilassamento è di alcuni ordini di grandezza superiore all'età dell'Universo ($t_H \approx 10$ Gyrs);
- per un tipico ammasso globulare $N \approx 10^{5/6}$, e $t_{\text{cross}} \approx 10^6$ yrs, perciò si avrà $t_{2b} \approx 5 \times 10^9$ yrs. Questi sistemi possono essere quindi considerati collisionali, come viene confermato anche da osservazioni e simulazioni numeriche.

Bisogna inoltre considerare che sistemi astrofisici come galassie e ammassi globulari sono generalmente molto disomogenei, ossia la densità delle loro regioni centrali può essere superiore alla loro densità media di diversi ordini di grandezza, di conseguenza, in calcoli più dettagliati, è necessario considerare che t_{2b} dipende fortemente dalla posizione all'interno del sistema. La conoscenza di t_{2b} in astrofisica è particolarmente rilevante poiché dalla meccanica statistica sappiamo che quando un sistema di particelle è soggetto per lungo tempo a fenomeni di scambi di energia deboli e statisticamente non correlati, il sistema viene spinto verso la formazione di uno stato termodinamico, caratterizzato da una distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (1.28)$$

e dall'equipartizione. Ciò ha implicazioni importanti in sistemi astrofisici con una velocità di fuga finita: l'effetto finale è di avere evaporazione gravitazionale delle stelle di piccola massa e il core collapse del sistema [16].

2 Gli ammassi globulari

Gli ammassi globulari sono sistemi stellari costituiti da centinaia di migliaia fino a qualche milione di stelle legate gravitazionalmente, con distribuzione approssimativamente sferoidale, che orbitano intorno al centro di una galassia. Hanno età tipiche dell'ordine di 10 Gyr, dunque la loro antichità li rende ideali per lo studio della dinamica dei sistemi collisionali: infatti, come abbiamo visto nel Cap. 1.1.2, il loro t_{2b} è confrontabile con l'età dell'Universo $t_H \approx 1.3 \times 10^{10}$ yrs. Di conseguenza, la loro evoluzione dinamica è stata fortemente influenzata dalle interazioni gravitazionali tra le stelle, per cui possono essere considerati a tutti gli effetti sistemi collisionali, che hanno ormai perso memoria delle loro condizioni iniziali.

2.1 Anisotropia della velocità

Grazie alle interazioni stellari, gli ammassi globulari tendono a mostrare una distribuzione isotropa delle velocità. Per caratterizzare questo comportamento, consideriamo innanzitutto il rapporto tra le dispersioni di velocità in due direzioni ortogonali (di seguito definito "anisotropia"). Di solito, per comodità, si considerano le dispersioni di velocità radiale σ_R e tangenziale σ_T . La Fig. 2.1 mostra il risultato di un'analisi di un campione di 22 ammassi globulari, dove vengono confrontati tempo di rilassamento e anisotropia. Vediamo che gli ammassi sono quasi tutti isotropi se si considera il core, e alcuni lo sono anche considerando il raggio effettivo (distanza dal centro dell'ammasso dove si trova la metà della luce totale emessa da esso); altri, invece mostrano un'anisotropia radiale lieve al raggio effettivo. Il risultato interessante è che il grado di anisotropia aumenta all'aumentare del tempo di rilassamento. Per quantificare il fenomeno, è stato stimato mediante fitting un modello che assume anisotropia costante per tempi di rilassamento più brevi di un valore caratteristico, e anisotropia che decresce linearmente per tempi più lunghi del valore. Da ciò si possono ricavare importanti informazioni sull'evoluzione degli ammassi: si ritiene che in passato essi presentassero anisotropia radiale e che, tramite interazioni stellari,

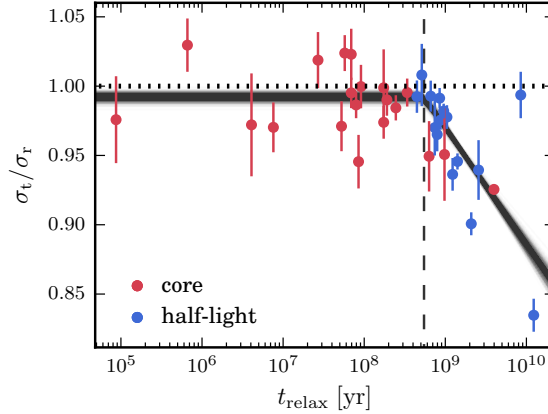


Figura 2.1: Anisotropia in funzione del tempo di rilassamento per un campione di 22 ammassi globulari. I punti rossi mostrano i valori nel core, i punti blu i valori nel raggio effettivo. Le linee grigie mostrano un fit piatto per tempi di rilassamento minori di un tempo caratteristico, e un fit che decresce linearmente per tempi maggiori. Fonte: [18]

tendano progressivamente a rilassarsi, facendo scomparire le tracce di anisotropia. Le regioni più dense, nei core, hanno tempi di rilassamento più brevi e raggiungono quindi l'isotropia più rapidamente, nelle regioni intermedie, intorno al raggio effettivo, i tempi sono invece più lunghi, perciò l'isotropia non è stata ancora raggiunta in alcuni ammassi e si osserva ancora una lieve anisotropia residua.

2.2 Equipartizione dell'energia ed evaporazione stellare

Come abbiamo descritto nel Cap. 1, il passaggio ravvicinato di due stelle fa sì che esse si scambino energia, in particolare viene trasferita energia dalla stella più energetica a quella meno energetica. Dopo un numero sufficiente di interazioni, un sistema stellare tende a raggiungere l'equipartizione, situazione in cui ogni stella possiede la stessa energia cinetica. In caso di completa equipartizione ci aspettiamo che la dispersione di velocità σ abbia una proporzionalità dalla massa del tipo $\sigma \propto m^{-\frac{1}{2}}$. In casi reali, gli ammassi globulari si trovano in uno stato di equipartizione parziale, con dispersioni rappresentate da leggi del tipo $\sigma \propto m^{-\eta}$, con η che quantifica il grado di equipartizione (da 0 a 0.5). L'equipartizione implica che stelle di piccola massa tendono a muoversi più velocemente di stelle di grande massa, perciò per misurarne gli effetti è necessario misurare le velocità di stelle lungo un ampio intervallo di masse. La Fig. 2.2 mostra i risultati per l'ammasso globulare NGC 104 (47 Tuc). Si stima $\eta \sim 0.2$, in linea con i risultati delle simulazioni. L'equipartizione dell'energia all'interno degli ammassi globulari porta a un fenomeno noto come struttura core-halo, analogo a ciò che viene osservato nelle stelle molto massicce. In particolare, esso si manifesta quando, con il progressivo avvicinarsi dell'energia cinetica delle stelle più massicce a quella delle stelle meno massicce, le prime avranno velocità inferiori, risulteranno pertanto incapaci di opporsi al potenziale gravitazionale dell'ammasso globulare e non potranno estendersi fino alle regioni più esterne di esso. Le stelle meno massicce invece avranno velocità molto maggiori, e formeranno un alone intorno al core centrale composto da stelle pesanti. Avviene pertanto una vera e propria segregazione di massa, e si forma una struttura composta da un core

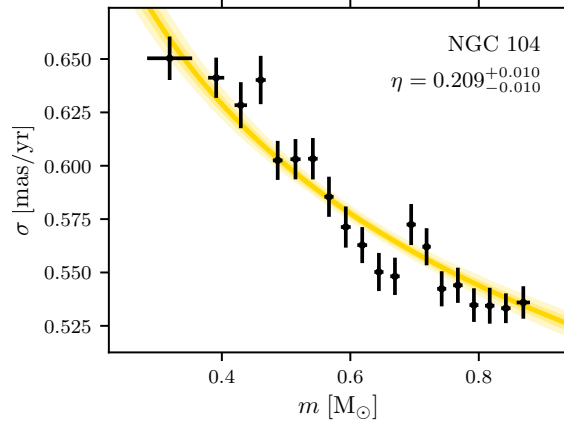


Figura 2.2: Dispersione di velocità in funzione della massa per l’ammasso NGC 104 (47 Tuc). I punti neri derivano dai moti propri (HST), la linea gialla mostra un fit con una legge di potenza $\sigma \propto m^{-\eta}$, viene anche mostrata una stima di η . Fonte: [18]

centrale con densità molto alta circondato da un alone stellare di bassa densità: la struttura core-halo. Ciò porta all’evaporazione stellare, un fenomeno dovuto al fatto che gli ammassi globulari hanno velocità di fuga finita, perciò le stelle che si trovano nell’alone possono acquistare velocità tali da superare il limite imposto dalla velocità di fuga dell’ammasso, riuscendo effettivamente a scappare dalla buca di potenziale del sistema. Per una distribuzione di velocità maxwelliana (Eq. 1.28), una piccola frazione delle stelle ha una velocità tale da superare la velocità di fuga del sistema ($\varepsilon \sim 0.74\%$). Le stelle scapperanno dal sistema in un tempo confrontabile col tempo di attraversamento t_{cross} (Eq. 1.23), tuttavia la coda della distribuzione corrispondente alle velocità più grandi verrà ripopolata in un tempo confrontabile col tempo di rilassamento t_{2b} (Eq. 1.15). Pertanto, il tempo caratteristico di evaporazione, ossia la scala temporale su cui la proprietà considerata (qui il numero di stelle) varia significativamente, è dell’ordine di $\frac{t_{2b}}{\varepsilon}$. Calcoli dettagliati [15] mostrano che

$$t_{\text{ev}} \equiv -N \left(\frac{dN}{dt} \right)^{-1} \approx 300 t_{2b} \quad (2.1)$$

2.3 Core collapse

La segregazione di massa e l’evaporazione stellare portano al core collapse dell’ammasso globulare, un fenomeno legato al fatto che gli oggetti autogravitanti hanno calore specifico negativo, il che implica che una perdita di energia gravitazionale porta a un aumento della temperatura. La dimostrazione di ciò, servendosi del teorema del Viriale, si può trovare in Appendice B. Questa conseguenza fisica porta al collasso del nucleo degli ammassi globulari. Nel momento in cui l’ammasso ha raggiunto una struttura core-halo, avviene una perdita di energia dovuta principalmente a due fenomeni:

- l’evaporazione stellare (Cap. 2.2) comporta una perdita di energia sia gravitazionale che cinetica. Tuttavia, come abbiamo mostrato, sono le stelle meno massive a scappare dall’ammasso globulare, le quali danno un contributo all’energia cinetica molto maggiore rispetto a quello che danno all’energia gravitazionale;

- il core composto di stelle molto massive è molto denso e caldo, e in accordo con la seconda legge della termodinamica (secondo la formulazione di Clausius), cede energia all'alone che lo circonda sotto forma di energia cinetica. Ciò avviene nel momento in cui le stelle poco massive dell'alone passano vicine al nucleo e ricevono dei cosiddetti “calci gravitazionali”.

Questi processi portano il sistema a perdere energia cinetica in maggiore quantità rispetto all'energia gravitazionale, e, come viene mostrato in Appendice B, il nucleo va a restringersi e scaldarsi. Tuttavia questo non fa che amplificare il divario energetico tra core e alone, dando luogo a un meccanismo auto-alimentato in cui il nucleo si restringe e si riscalda progressivamente, fenomeno che in letteratura è talvolta descritto come “catastrofe gravotermica”. Il core collapse è un fenomeno verificato sia tramite le simulazioni che tramite le evidenze osservative, difatti l'aumento della concentrazione dell'ammasso nelle regioni centrali può essere verificato tramite il profilo di densità, che non risulta più piatto come nelle fasi evolutive iniziali, ma descrivibile da una legge di potenza, espressa dalla relazione:

$$\Sigma(r) \propto r^\alpha \quad -1 < \alpha < -0.7 \quad (2.2)$$

dove $\Sigma(r)$ è la densità superficiale. Osservare la forma del profilo di densità è il

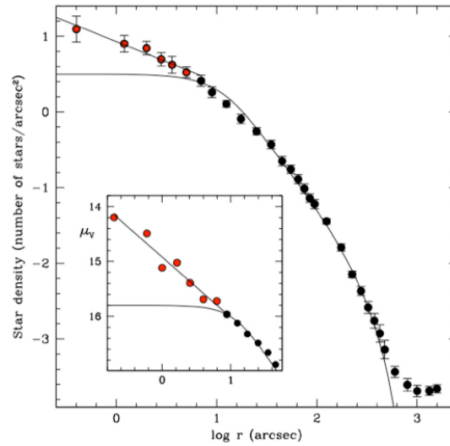


Figura 2.3: Profilo di densità dell'ammasso globulare M30. Sono mostrati due modelli: uno di King, che mostra una legge di potenza nelle regioni lontane dal centro e un appiattimento nel core, che tuttavia non è adeguato per descrivere un ammasso globulare nella fase del collasso, e un modello a legge di potenza, più adatto a descrivere il profilo in questa fase evolutiva. Fonte: [14]

criterio maggiormente adottato per distinguere gli ammassi globulari che hanno già subito il core collapse da quelli che sono ancora in una fase evolutiva precedente. Secondo questo criterio, si stima che gli ammassi globulari facenti parte di questa categoria siano circa il 15-20% del totale [14]. Recenti simulazioni numeriche, tuttavia, suggeriscono che anche ammassi con core piatto potrebbero avere già subito il collasso del core e si troverebbero in una fase di “rimbalzo” successiva [8].

2.4 Il ruolo delle stelle binarie: le oscillazioni gravotermiche

Descritto così, il core collapse sembrerebbe proseguire senza fine, fino a portare alla formazione di una singolarità. In realtà il processo si arresta, grazie alla formazione

di numerose binarie nel core. Mentre il collasso è guidato dalla perdita di energia, le binarie compiono il processo opposto: cedono energia alle stelle circostanti, riscaldando il core e inducendone la riespansione. Il loro ruolo è analogo a quello delle reazioni nucleari nelle stelle: entrambe forniscono una sorgente di energia capace di controbilanciare il collasso gravitazionale. Così, l'instabilità gravotermica si interrompe e il core torna a espandersi, evitando la formazione della singolarità. Le binarie considerate responsabili della riespansione del core possono essere di tre diversi tipi:

- binarie generate da “single-single interactions”, per i quali il processo di formazione è noto come “tidal capture”: nel momento in cui due stelle passano vicine tra di loro e interagiscono, se il periastro dell'interazione è sufficientemente piccolo, le stelle possono provocare oscillazioni mareali l'una sull'altra, andando a dissipare parte delle loro energie cinetiche. Se viene dissipata abbastanza energia cinetica dal sistema, le stelle possono diventare legate e formare un nuovo sistema binario;
- binarie generate da “three-body interactions”, per i quali il processo di formazione è noto come “3 body capture”: durante un incontro ravvicinato a tre corpi, è possibile che una delle stelle venga espulsa acquistando energia cinetica, mentre le altre due rimaste, se la loro energia relativa è sufficientemente ridotta, possono formare una coppia legata. In generale di solito sarà la stella meno massiva a essere espulsa con maggiore velocità, poiché è la più facile da accelerare (ciò può anche essere visto come conseguenza dell'equipartizione);
- binarie primordiali: sono quelle formatesi insieme all'ammasso, durante la fase di formazione stellare. Il loro numero iniziale dipende dalle condizioni della nube progenitrice: osservazioni indicano che una frazione significativa delle stelle nasce in sistemi binari.

Per comprendere come le binarie contribuiscono alla riespansione del core, è utile distinguere tra binarie hard e soft. Le binarie hard sono sistemi con energia di legame $E_b = \frac{Gm_1m_2}{a}$ (dove a è il semiasse maggiore) superiore all'energia cinetica tipica delle stelle circostanti: esse hanno orbite compatte e sono fortemente vincolate. Al contrario, le binarie soft hanno E_b minore dell'energia cinetica tipica delle stelle circostanti, orbite più larghe e legame più debole. La dinamica di queste due categorie è regolata dalla legge di Heggie [11], secondo cui, mediamente, le binarie hard diventano sempre più hard a seguito delle interazioni, mentre le binarie soft tendono a diventare più soft fino alla distruzione. Questo comportamento spiega il ruolo delle binarie hard nel trasferire energia al core e favorirne la riespansione, mentre le binarie soft possono acquistare energia dal core e accelerare il collasso. Nel momento in cui si sono formati molti sistemi di binarie hard nel core, le stelle di passaggio andranno a interagire più frequentemente con essi che con stelle singole, poiché si può facilmente intuire che i sistemi binari hanno una sezione d'urto gravitazionale maggiore. Questo porta una binaria hard a trasferire energia orbitale dalla binaria al campo stellare circostante: la binaria andrà quindi a compattarsi (avverrà quindi l'hardening), mentre la stella perturbatrice andrà a guadagnare velocità. Questo processo rifornisce il core di energia, che può quindi contrastare il collasso. Il sistema quindi si autoregola: appena il core collassa abbastanza da rendere frequenti gli

incontri con binarie hard, le binarie rilasciano energia sufficiente a fermare il collasso e a riespandere il core. Esso quindi si raffredda a causa dell'espansione, fino a che non viene nuovamente invertito il gradiente di temperatura, e si ripete il processo di core collapse. L'alternanza tra le fasi di collasso e di espansione prende il nome di oscillazioni gravotermiche: esse sono state osservate principalmente tramite simulazioni numeriche, poiché si manifestano su scale temporali molto più lunghe di quelle accessibili alle osservazioni dirette.

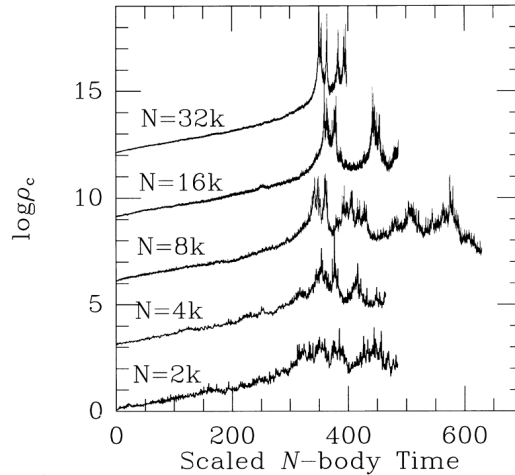


Figura 2.4: Oscillazioni gravotermiche ottenute tramite simulazioni numeriche di sistemi con masse uguali: logaritmo della densità del core in funzione del tempo, scalato in proporzione al tempo di rilassamento iniziale a mezza massa dell'ammasso globulare. Le diverse curve corrispondono a diversi valori di N , il numero iniziale di stelle nell'ammasso. Fonte: [12]

3 Algoritmi dinamici

Sebbene i processi fisici all'interno degli ammassi globulari siano relativamente semplici da comprendere, la loro simulazione risulta più complessa rispetto a quella dei sistemi non collisionali, come le galassie. Si manifestano rilevanti complicazioni a causa della natura a lungo raggio della forza gravitazionale, che implica che ogni stella nell'ammasso è in “comunicazione” costante con tutte le altre: il risultato è potenzialmente un numero elevato di interazioni da calcolare, quindi elevati costi computazionali. Si manifestano ulteriori complicazioni a causa dell'enorme estensione delle scale spaziali e temporali intrinseche di un ammasso globulare. La presenza contemporanea di diversi processi fisici che operano su scale spaziali e temporali diverse, unita al consistente carico computazionale richiesto, rende la simulazione numerica degli ammassi globulari tra le sfide più impegnative dell'astrofisica computazionale [13]. In questo capitolo analizzeremo alcuni aspetti critici legati alla modellizzazione numerica degli ammassi globulari.

3.1 Metodi del continuo

Le due principali classi di modelli del continuo sono il modello a gas sferico e il metodo Fokker-Planck. Vengono utilizzati soprattutto per sistemi a simmetria sferica,

ma sono state sviluppate anche estensioni per sistemi rotanti asimmetrici. Entrambi gli approcci partono considerando l'equazione di Boltzmann collisionale come la descrizione di base del sistema stellare. L'equazione di Boltzmann collisionale è un'equazione che in meccanica statistica descrive l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione delle particelle in uno spazio delle fasi quando sono presenti urti/interazioni a breve raggio tra esse. Essa ha la seguente forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f \quad (3.1)$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$ è il termine collisionale, che descrive il cambiamento di f dovuto a urti/interazioni tra particelle, e $\vec{F}$ è la forza esterna su una particella (per esempio quella gravitazionale). Successivamente il problema viene semplificato mediando la funzione di distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v})$ in diversi modi. I metodi "gas-sphere" procedono in una maniera analoga alla derivazione delle equazioni del moto dei fluidi, prendendo la media delle velocità per costruire i momenti di ordine 0, 1 e 2³ della distribuzione. I metodi Fokker-Planck trasformano l'equazione di Boltzmann andando a mediare sulle orbite tutte le quantità, e la riformulano come un'equazione di diffusione⁴ nello spazio $E - J$, dove E è l'energia stellare e J è il modulo del momento angolare. Questi metodi sono stati molto utili in passato per comprendere al meglio i processi fisici che guidano l'evoluzione dinamica dei sistemi stellari, tuttavia al giorno d'oggi il grado di realismo richiesto alle simulazioni è troppo elevato (è necessario considerare uno spettro di massa, l'evoluzione stellare, sistemi binari...), e questi algoritmi sono poco efficienti e spesso inaccurati. In generale quindi non vengono più usati per simulare ammassi globulari.

3.2 Metodi N -body

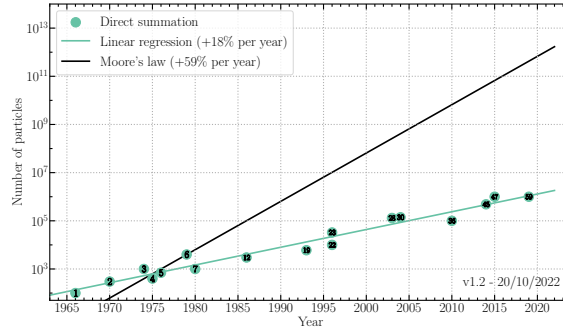


Figura 3.1: Evoluzione nel tempo del numero di particelle usate nelle simulazioni N -body (linea verde), confrontata con la legge di Moore (raddoppio della prestazione hardware ogni ~ 18 mesi, linea nera). La crescita di N nelle simulazioni è sensibilmente più lenta (+18% annuo) rispetto all'aumento delle prestazioni hardware (+59% annuo), a causa della complessità $\mathcal{O}(N^2)$ delle simulazioni N -body. Fonte: [9]

³0: ρ , la densità di massa o numerica: $\rho = \int d^3v f(\vec{x}, \vec{v})$. 1: $\vec{u}$, la velocità media o il campo di velocità: $\vec{u} = \int d^3v \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v})$. 2: σ^2 , la dispersione di velocità: $\sigma^2 = \frac{1}{3} \int d^3v v^2 f(\vec{x}, \vec{v})$

⁴Un'equazione di diffusione è un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive come una quantità si distribuisce nello spazio e nel tempo, sotto l'effetto di processi casuali.

I metodi N -body implementano descrizioni dettagliate della dinamica stellare, usando l'integrazione diretta delle equazioni newtoniane del moto per ogni stella. Il loro grande vantaggio è che sono prive di assunzioni, cioè tutte le interazioni stellari sono automaticamente incluse per tutti gli ordini, senza il bisogno di alcun tipo di approssimazione. Il prezzo da pagare per sfruttare questi vantaggi è la spesa computazionale: ognuna delle N particelle deve interagire con tutte le altre centinaia di volte lungo ogni orbita, e ogni interazione richiede $\mathcal{O}(N)$ calcoli della forza (operazione che va ripetuta per tutte le N particelle), e una tipica simulazione (di durata confrontabile al tempo di rilassamento) copre $\mathcal{O}(N)$ orbite. La conseguente complessità totale $\mathcal{O}(N^3)$ implica che, anche adottando i migliori algoritmi, l'integrazione di un sistema relativamente piccolo, per esempio di $N \approx 10^6$ stelle, richiede un impegno computazionale elevato e tempi di calcolo dell'ordine di mesi, anche utilizzando macchine molto potenti. Notevoli miglioramenti delle prestazioni sono stati ottenuti adottando schemi di integrazione a passo temporale (individuale) più avanzati (in contrasto con i precedenti schemi a passo temporale condiviso), nei quali le particelle evolvono utilizzando passi adeguati alle proprie orbite individuali, piuttosto che un unico passo per tutte. Ulteriori miglioramenti sono stati fatti utilizzando gli schemi “neighbor”, schemi che dividono la forza che agisce su ogni particella in due tipi: irregolare (che cambia rapidamente) e regolare (che cambia lentamente), a seconda che le particelle che generano la forza siano vicine o distanti. Ricalcolando la forza irregolare a ogni time-step della particella, ma estrapolando per la maggior parte dei time-steps la più costosa forza regolare e ricalcolandola solo su scale temporali più lunghe, si ottengono miglioramenti significativi di efficienza⁵. Un altro importante miglioramento è stato introdotto con lo sviluppo dei tree codes. Un tree code è un algoritmo che sfrutta una struttura gerarchica ad albero per approssimare le forze dovute a insiemi di particelle lontane: lo spazio viene diviso ricorsivamente in celle, e ogni nodo dell'albero rappresenta un gruppo di particelle all'interno di una cella; se un gruppo di particelle è sufficientemente lontano, invece di calcolare le forze di ciascuna particella, si sostituisce l'intero gruppo con il suo centro di massa. Questo algoritmo ha un vantaggio computazionale: in media si ha un costo di $\mathcal{O}(N \log N)$ in confronto a un $\mathcal{O}(N^2)$ dei classici algoritmi N -body. Tuttavia a differenza di un sistema non collisionale, dove non è importante seguire con estrema precisione le orbite individuali, ma conta di più la dinamica collettiva, nei sistemi collisionali bisogna seguire con alta precisione gli incontri ravvicinati, perciò si è temuto per alcuni decenni che l'approssimazione dei tree codes accumulasse errori a lungo termine e avesse un'accuratezza molto bassa in sistemi dominati da processi di rilassamento. Tuttavia sono stati recentemente sviluppati metodi tree codes molto promettenti per modellare l'interazione dinamica tra un ammasso e la popolazione galattica circostante [13].

3.3 Il “kitchen sink”

In linea con la nostra crescente comprensione del ruolo delle interazioni stellari e delle binarie nei sistemi stellari collisionali, i programmi più avanzati in questo campo

⁵La forza irregolare dipende solo dalle particelle vicine ($k \ll N$), quindi il costo per passo è molto più contenuto, quella regolare considera tutte le altre, con costo per passo di $\mathcal{O}(\approx N)$.

sono i pacchetti “kitchen sink” ⁶, cioè codici che integrano in un’unica simulazione più aspetti fisici: dinamica gravitazionale N -body, evoluzione stellare e binaria, e idrodinamica delle collisioni tra stelle. L’idea è che non si tratti più di un singolo codice dinamico, ma di un vero ecosistema multifisico, pensato per riprodurre la complessità reale degli ammassi globulari, e non solo. Un esempio noto di pacchetto kitchen sink è il codice **NBODY6++GPU**. In generale i più usati sono i codici N -body **NBODY**, **kira**, una parte del pacchetto **starlab**, e i codici Monte Carlo sviluppati da Giersz, Freitag e Fregean [13]. Nonostante le differenze sulla gestione della dinamica su larga scala, questi codici adottano approcci concettualmente simili per quanto riguarda l’evoluzione stellare e binaria, e le collisioni. Usano tutti descrizioni approssimate dell’evoluzione stellare, generalmente ricavate da tabelle di consultazione basate su modelli evolutivi dettagliati. Si basano inoltre su trattamenti dell’evoluzione binaria di tipo semi-analitico o basati su regole empiriche concettualmente simili da codice a codice, ma significativamente diversi nei dettagli. Nella maggior parte dei casi, le collisioni vengono implementate con la semplice approssimazione a “sticky-sphere”, in cui le stelle (trattate come sfere rigide) si considerano in collisione (e si fondono) se si avvicinano entro la somma dei loro raggi effettivi. I raggi effettivi possono essere calibrati usando simulazioni idrodinamiche, e la perdita di massa può essere inclusa con metodi approssimati. La dinamica su piccola scala di multiple interazioni stellari, come binarie o interazioni di ordine superiore, viene spesso gestita mediante consultazione di sezioni d’urto precalcolate, oppure, più comunemente, tramite integrazione diretta, sia in isolamento, sia come parte di una simulazione N -body più ampia. Codici che implementano l’integrazione diretta possono anche includere termini post-newtoniani⁷ nelle interazioni tra oggetti compatti.

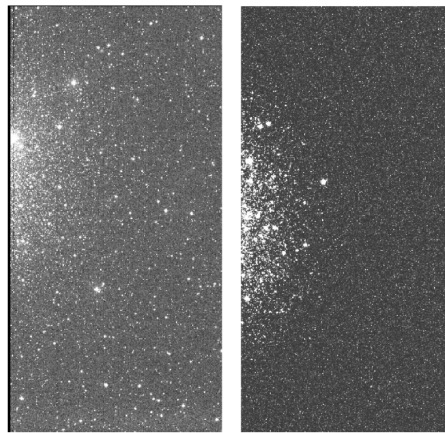


Figura 3.2: A sinistra: immagine osservativa dell’ammasso globulare NGC 2808, ottenuta con lo strumento ESO WFI al telescopio da 2,2 m di La Silla (Cile). A destra: immagine sintetica di una simulazione kitchen sink, che include dinamica ed evoluzione stellare, binarie e interazioni a pochi corpi, calibrata per riprodurre le caratteristiche dello WFI. Fonte: [1]

⁶L’espressione viene dall’inglese colloquiale “*everything but the kitchen sink*”, usata per dire che in un contenitore o pacchetto c’è di tutto.

⁷Le espansioni post-newtoniane sono metodi matematici utilizzati per trovare soluzioni approssimate a problemi che includono effetti di relatività generale.

A Variazione della velocità in due diversi sistemi di riferimento

Supponendo di aver risolto il problema dei due corpi per due particelle m_t e m_f , mostriamo come si può facilmente ricavare il seguente risultato:

$$\Delta \vec{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v} \quad (\text{A.1})$$

dove abbiamo definito $\Delta \vec{v}_t$, la variazione di velocità di m_t a seguito dell'interazione in un sistema di riferimento inerziale S_0 , μ la massa ridotta, $\Delta \vec{v}$ la variazione di velocità di m_t a seguito dell'interazione nel sistema di riferimento di m_f . Per dimostrare l'Eq. A.1 utilizziamo alcune equazioni:

- Date le posizioni $\vec{x}'_t$ e $\vec{x}'_f$ nel sistema di riferimento del centro di massa, per le proprietà del centro di massa vale:

$$m_t \vec{x}'_t + m_f \vec{x}'_f = 0 \quad (\text{A.2})$$

- La distanza tra due punti è un invariante sotto trasformazioni galileiane, per cui:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}_t - \vec{x}_f = \vec{x}'_t - \vec{x}'_f \quad (\text{A.3})$$

Con queste due equazioni si ricava:

$$m_t \vec{r} = m_t \vec{x}'_t - m_t \vec{x}'_f = -m_f \vec{x}'_f - m_t \vec{x}'_f \Rightarrow \vec{x}'_f = -\frac{\mu}{m_f} \vec{r} \quad (\text{A.4})$$

Uguualmente si trova che $\vec{x}'_t = \frac{\mu}{m_t} \vec{r}$. Dunque, utilizzando questi risultati, e indicando $\vec{R}_{\text{CM}}$ come la posizione del centro di massa in S_0 , si intuisce facilmente che vale la seguente uguaglianza:

$$\vec{x}_t = \vec{R}_{\text{CM}} + \frac{\mu}{m_t} \vec{r} \quad (\text{A.5})$$

Andando ora a derivare rispetto al tempo (passando quindi dalla posizione alla velocità), e sapendo che in un sistema conservativo la velocità del centro di massa resta invariata, considerando infine la differenza di velocità tra due tempi diversi, si ritrova immediatamente l'Eq. A.1.

B Il teorema del Viriale per sistemi autogravitanti

Nel caso di sistemi autogravitanti, il teorema del Viriale, nella sua forma più semplice, ci assicura che, affinché un sistema si trovi all'equilibrio, deve valere la seguente equazione:

$$2K = -U \quad (\text{B.1})$$

dove abbiamo introdotto K , l'energia cinetica totale del sistema, e U , l'energia potenziale gravitazionale totale del sistema. Può essere molto utile introdurre il

piano viriale, uno strumento che permette di comprendere appieno le implicazioni dell'Eq. B.1. Esso è un piano dove si confrontano valori di K e $|U|$, mostrato di seguito.

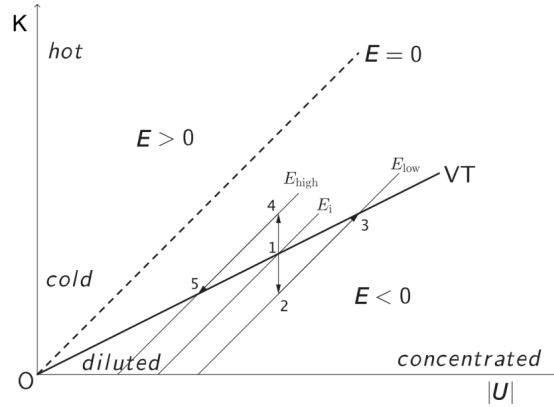


Figura B.1: Piano viriale, la linea tratteggiata separa sistemi con energia positiva a sistemi con energia negativa, il teorema del Viriale implica che è necessario che un sistema abbia energia totale negativa per trovarsi all'equilibrio. La linea continua è la retta del Viriale, retta dove vale l'Eq. B.1

Nel caso di sistemi autogravitanti conservativi, ogni sistema è vincolato a una retta nel piano viriale dove si ha $K + U = \text{cost}$, in Fig. B.1 si possono vedere tre di queste rette. Inoltre si può facilmente osservare che ogni retta con $E = \text{cost} < 0$ ha una sola intersezione con la retta viriale, e perciò, se si considera un sistema autogravitante non all'equilibrio, esso avrà la tendenza a spostarsi, restando sulla retta corrispondente alla sua energia, verso uno stato di equilibrio, quindi verso l'intersezione con la retta viriale. Se l'equilibrio è stabile, una volta raggiunto, il sistema si fermerà e resterà in un punto nel piano viriale. Mostriamo adesso come un sistema autogravitante ha un calore specifico negativo. Consideriamo un sistema all'equilibrio che si trova nel punto 1 in Fig. B.1, il quale, per cause non esplicitate, perde una parte di energia cinetica T , mentre il valore di energia potenziale U resta essenzialmente invariato. Questo processo in Fig. B.1 viene mostrato con la freccia $1 \rightarrow 2$, il sistema è stato quindi “raffreddato”, mantenendo invariata l'energia gravitazionale. Il sistema adesso non si trova più all'equilibrio, perciò la sua posizione nel piano viriale non può restare nel punto 2. Esso tenderà a spostarsi verso il punto 3, corrispondente a una configurazione più concentrata (energia gravitazionale più grande in modulo), e una “temperatura” più alta, senza andare però a modificare il valore della sua energia totale, dal momento che il sistema è conservativo. Quello che viene osservato è quindi che una perdita di energia porta a un “riscaldamento” e un restringimento del sistema. Allo stesso modo vale il contrario, il passaggio di stati $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ (sempre considerando la Fig. B.1) implica che un aumento di energia porta a un “raffreddamento” e un allargamento del sistema. Questo ragionamento porta a dire che sistemi autogravitanti sono caratterizzati da calore specifico negativo.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Askar, M. Giersz, W. Pych, and E. Dalessandro. Cocoa code for creating mock observations of star cluster models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(3):4170–4185, 2018. doi: 10.1093/mnras/sty101.
- [2] M.J. Benacquista and J.M.B. Downing. Relativistic binaries in globular clusters. *Living Reviews in Relativity*, 16(4), 2013. doi: 10.12942/lrr-2013-4.
- [3] L. Ciotti. Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 8*, 5-A(1):97–141, 2002. Sezione A, “La Matematica nella Società e nella Cultura”.
- [4] L. Ciotti. *Appunti di dinamica stellare*. Scuola di Bertinoro, Bertinoro (FC), Italy, 2006. Lezioni tenute presso la Scuola Estiva di Relatività e Cosmologia, Bertinoro, 8–12 maggio 2006.
- [5] L. Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2021. doi: 10.1017/9780511736117.
- [6] L. Ciotti. Astrofisica extragalattica. Appunti personali dal corso di Astrofisica Extragalattica tenuto da L. Ciotti, Università di Bologna, 2025.
- [7] O. Gerhard. Dynamical masses, time-scales and evolution of star clusters. In A. Lançon and C. M. Boily, editors, *Massive Stellar Clusters*, volume 211 of *ASP Conference Series*. Astronomical Society of the Pacific, 2000. Review article; arXiv:astro-ph/0007258.
- [8] D.C. Heggie and M. Giersz. Monte carlo simulations of star clusters – v. the globular cluster m4. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389(4):1858–1870, 2008. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13702.x.
- [9] F. Leclercq. Evolution of cosmological simulations over the last 50 years (plot and data). Blog post and GitHub repository (figures and notebook), 2022.
- [10] M. Mapelli. Lectures on collisional dynamics, 2014. Dispense pubblicate online dal Max Planck Institute for Gravitational Physics (AEI).
- [11] S.L.W. McMillan. The role of binaries in cluster dynamical evolution. In *The Formation and Evolution of Star Clusters*, volume 13 of *Astronomical Society of the Pacific (ASP) Conference Series*, page 324, 1991.
- [12] G. Meylan and D.C. Heggie. Internal dynamics of globular clusters. *Astronomy and Astrophysics Review*, 8(1–2):1–143, February 1997. ISSN 1432-0754. doi: 10.1007/s001590050008.
- [13] S.F. Portegies Zwart, S.L.W. McMillan, and M. Gieles. Young massive star clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48:431–493, 2010. doi: 10.1146/annurev-astro-082708-101726.

- [14] M. Sieni. La cinematica nel core dell’ammasso globulare NGC6441 da osservazioni SINFONI. Tesi di laurea magistrale, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, Bologna, Italia, 2016. Sessione III; A.A. 2014/2015; Relatore: F.R. Ferraro; Correlatori: B. Lanzoni, A. Mucciarelli, C. Pallanca.
- [15] L.J. Spitzer and T.X. Thuan. Evaporation and dynamical evolution of star clusters. *The Astrophysical Journal*, 175:31–61, 1972. doi: 10.1086/151537.
- [16] L.S. Spitzer. *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.
- [17] R. Spurzem and A. Kamlah. Computational methods for collisional stellar systems. *Living Reviews in Computational Astrophysics*, 9(1):1, 2023. doi: 10.1007/s41115-023-00018-w.
- [18] L.L. Watkins, R.P. van der Marel, A. Bellini, M. Libralato, and J. Anderson. Imprints of evolution on the internal kinematics of globular clusters. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 14(S351):544–548, May 2019. ISSN 1743-9221. doi: 10.1017/s1743921319007257.