

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”  
Corso di Laurea in Fisica

Riduzione a *master integrals* in teoria dei  
campi e meccanica quantistica

Relatore:  
Prof. Tiziano Peraro

Presentata da:  
Arianna Zironi

Anno Accademico 2024/2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Il calcolo di Feynman</b>	<b>4</b>
2.1	Vita media e sezione d'urto . . . . .	4
2.2	Regola d'oro di Fermi . . . . .	6
2.2.1	Applicazione ai decadimenti . . . . .	7
2.2.2	Applicazione allo scattering . . . . .	8
2.3	Regole di Feynman . . . . .	8
2.3.1	Esempio di calcolo dell'ampiezza $M$ di un processo di decadimento	11
2.3.2	Esempio di calcolo dell'ampiezza $M$ relativa ad un processo di scattering . . . . .	12
2.4	Diagrammi di Feynman a ordine superiore . . . . .	14
2.5	Regolarizzazione e rinormalizzazione . . . . .	16
2.5.1	Applicazione della regolarizzazione dimensionale . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Relazioni lineari tra integrali di Feynman</b>	<b>19</b>
3.1	Rappresentazioni per gli integrali di Feynman . . . . .	19
3.2	Relazioni lineari . . . . .	22
3.2.1	<i>Integration-by-parts identities</i> (IBPs) . . . . .	22
3.2.2	<i>Lorentz invariance identities</i> . . . . .	23
3.2.3	Relazioni di simmetria . . . . .	24
3.3	Algoritmo di Laporta . . . . .	24
3.3.1	Esempio: <i>one-loop bubble</i> $I[\alpha_1, \alpha_2]$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Applicazione a integrali in meccanica quantistica</b>	<b>33</b>
4.1	Elementi di matrice nell'oscillatore armonico . . . . .	33
4.2	Riduzione degli integrali $I_k^{(n)}$ tramite IBP . . . . .	35
4.3	Applicazioni: dimostrazione di risultati notevoli . . . . .	36
4.3.1	Ortogonalità delle autofunzioni (Eq. 4.6) . . . . .	37
4.3.2	Valore medio di potenze dispari (Eq. 4.7) . . . . .	38
4.3.3	Valor medio di $z^4$ per stati $ n\rangle$ (Eq. 4.8) . . . . .	39

<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>Delta di Dirac</b>	<b>44</b>
<b>B</b>	<b>Polinomi di Hermite</b>	<b>46</b>

## Sommario

In fisica risulta spesso utile determinare relazioni lineari per ridurre la complessità di calcolo di grandezze caratterizzate da un elevato numero di contributi non indipendenti tra loro. Questo è il caso delle *integration-by-parts identities* (IBPs), che consentono di ricondurre un'estesa famiglia di integrali ad un insieme più ristretto di integrali indipendenti, detti *master integrals*, a partire dai quali è possibile ricostruire qualunque altro integrale della famiglia iniziale.

Nella presente tesi tale approccio viene analizzato in due contesti differenti. In teoria dei campi si mostra come gli integrali di Feynman derivanti dall'espressione delle ampiezze di transizione di processi di scattering e decadimento possano essere ridotti a pochi *master integrals* indipendenti. In meccanica quantistica invece, viene applicato lo stesso metodo agli elementi di matrice di operatori tra autostati dell'oscillatore armonico, evidenziando come l'intera famiglia di integrali possa essere espressa in termini di un unico contributo fondamentale.

# Capitolo 1

## Introduzione

La fisica delle particelle fondamentali ha come obiettivo lo studio delle interazioni che governano la natura a livello microscopico. In particolare, gli esperimenti di scattering e decadimento hanno permesso un profondo progresso della fisica delle alte energie, in quanto rappresentano i meccanismi principali attraverso i quali le particelle manifestano le loro proprietà e modalità di interazione.

Nel corso del Novecento tali risultati sperimentali hanno portato allo sviluppo della teoria quantistica dei campi (QFT), strumento matematico cruciale per la descrizione delle interazioni fondamentali. All'interno di tale formalismo teorico, le interazioni fra particelle vengono descritte graficamente dai *diagrammi di Feynman*, schemi costituiti da linee esterne che rappresentano le particelle iniziali e finali, e quelle interne che invece, assieme ai vertici, descrivono l'interazione attraverso le particelle mediatrici. La potenza dei diagrammi di Feynman risiede nel fatto che, attraverso regole ben strutturate, chiamate *regole di Feynman*, ciascun diagramma può essere associato ad un'espressione matematica che contribuisce al calcolo dell'ampiezza di transizione  $M$ , grandezza fondamentale da cui derivano osservabili come la *vita media* di una particella instabile o la *sezione d'urto* di un processo di scattering.

In teoria dei campi il calcolo di un'ampiezza di transizione  $M$  richiede dunque la valutazione di una serie di integrali, detti *integrali di Feynman*, ciascuno associabile ad uno specifico diagramma di Feynman. Essendo tale teoria formulata come perturbativa, l'ampiezza  $M$  può essere espressa come combinazione lineare di singoli contributi ordinati secondo il numero di vertici del diagramma, e dunque corrispondenti a ordini crescenti dello sviluppo perturbativo della grandezza stessa. Di conseguenza, per valutare l'ampiezza con una precisione desiderata, risulterà sufficiente calcolare gli integrali fino ad un certo ordine, e trascurare quelli successivi.

Tuttavia, il calcolo di tali integrali nello spazio dei momenti può spesso presentare l'ostacolo della divergenza ad alte energie. Attraverso i processi matematici di *regolarizzazione* e *rinormalizzazione*, è possibile trattare tali divergenze e rendere l'integrale finito. La tecnica maggiormente utilizzata in teoria dei campi è la *regolarizzazione dimen-*

*sionale*, che consiste nel sostituire il numero di dimensioni (quattro) dello spazio-tempo in cui si integra con un parametro generico  $D$ , ottenendo così integrali dipendenti da tale variabile.

Una volta ottenuta la rappresentazione finita dell'integrale, ci si trova di fronte ad un insieme di integrali ben definiti, ma che presentano comunque una notevole difficoltà nel loro calcolo, rappresentata in particolare dal numero elevato di integrali da calcolare. Risulta dunque necessario delineare un metodo per ridurre la complessità del problema. A tal proposito si possono considerare importanti relazioni lineari soddisfatte da tali integrali: le *Integration-by-parts identities* (IBPs), le *Lorentz invariance identities*, e le relazioni di simmetria. Attraverso queste è possibile costruire un sistema lineare di equazioni in funzione del parametro  $D$  introdotto in precedenza che legano gli integrali della stessa famiglia (cioè che presentano nella loro forma integrale caratteristiche comuni) tra loro. Dalla risoluzione di tale sistema si ricava che tutti gli integrali possono essere espressi come combinazione lineare di un numero ridotto di integrali indipendenti, detti *master integrals*, che costituiscono una base dello spazio vettoriale degli integrali di Feynman considerati che appartengono alla stessa famiglia. In questo modo, la complessità del problema si riduce alla determinazione di un numero limitato di integrali fondamentali.

L'obiettivo della presente tesi è quello di illustrare il metodo di riduzione degli integrali di Feynman basato in particolare sulle relazioni lineari IBPs, evidenziandone la capacità di ricondurre un problema così complesso alla valutazione di un insieme finito di integrali indipendenti, e mostrare come la stessa tecnica possa essere applicata, in modo del tutto analogo, anche ad alcuni integrali tipici della meccanica quantistica.

Dopo aver introdotto le grandezze fisiche di interesse del problema, ossia la vita media e la sezione d'urto, nel Capitolo 2 viene illustrato come dalla *regola d'Oro di Fermi* nasca la necessità di calcolare l'ampiezza  $M$  del processo. In particolare, vengono riportati esempi di calcolo di ampiezze di scattering riferite a diagrammi di Feynman al primo ordine e a ordine successivi. Dal risultato dell'ampiezza calcolata in riferimento ad un diagramma di Feynman ad ordine superiore, viene sottolineato il problema della divergenza, e le diverse tecniche che possono essere utilizzate per affrontarlo.

Successivamente, nel Capitolo 3 viene delineata la struttura generale di un integrale di Feynman su cui è stato applicato il metodo di regolarizzazione dimensionale, e vengono elencate le regole di Feynman utili ad associare ad ogni diagramma il suo integrale corrispondente. Viene poi mostrato l'Algoritmo di Laporta, che attraverso relazioni lineari permette di ridurre la risoluzione degli integrali dello spazio a pochi *master integrals*. A tal proposito, si riporta un esempio di questa tecnica applicata a un diagramma del tipo *one-loop bubble*, nel quale si mostra come la complessità del problema possa essere ridotta al calcolo di soli due *master integrals*, dai quali è possibile ricavare le relazioni che legano tutti gli altri integrali della stessa famiglia.

Infine, nel Capitolo 4 viene mostrata un'applicazione del metodo IBP alla meccanica quantistica, in particolare considerando come integrali protagonisti quelli che emergono

nel calcolo di elementi di matrice di operatori tra autostati dell'oscillatore armonico. Si dimostra dunque che è possibile evidenziare relazioni lineari che permettono di far ricondurre ad un unico *master integral* il calcolo di un qualunque altro integrale dello spazio.

Per comprendere al meglio gli argomenti trattati nella tesi, vengono riportate in Appendice A le principali nozioni riguardanti la funzione delta di Dirac, utile alla risoluzione degli integrali di Feynman, e in Appendice B le proprietà dei polinomi di Hermite, che costituiscono un pilastro fondante delle funzioni d'onda dell'oscillatore armonico.

Tutti i diagrammi di Feynman riportati nella presente tesi sono stati realizzati utilizzando il pacchetto `tikz-feynman` di L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

# Capitolo 2

## Il calcolo di Feynman

L'interazione fra particelle elementari può essere ricondotta allo studio di due processi: decadimenti e scattering. I primi descrivono la trasformazione spontanea di una particella in altre differenti a quella iniziale, mentre il secondo si riferisce a processi che portano particelle incidenti a interagire tra loro, dando origine a nuovi stati finali. Come avviene spesso in fisica, è essenziale individuare l'osservabile di interesse per lo studio del fenomeno, in modo da definire con precisione le grandezze che meglio descrivono il problema. Nei fenomeni considerati, risulteranno particolarmente rilevanti la *vita media* di una particella e la *sezione d'urto* dell'interazione. Entrambe queste quantità sono strettamente legate al modulo quadro dell'*ampiezza di transizione*  $|M|^2$ , a sua volta legata agli *integrali di Feynman*, che costituiscono l'oggetto principale della presente tesi. Risulta dunque utile chiarire il collegamento fra le osservabili sperimentali, quali vita media e sezione d'urto, e il formalismo teorico dell'ampiezza di transizione. Nel seguente capitolo vengono riportate nozioni trattate in [1].

### 2.1 Vita media e sezione d'urto

Nell'analisi di processi come il decadimento e lo scattering, sorgono in modo naturale quesiti riguardanti la caratterizzazione del fenomeno, come quanto può “vivere” una particella prima di decadere, o qual è la probabilità che due particelle con un dato momento incidente possano interagire tra loro.

In particolare, nel caso dei decadimenti, si introduce il concetto di *vita media*  $\tau$ , definito come il tempo medio che una particella instabile impiega a decadere in altre particelle. Tale grandezza viene calcolata nel centro di massa della particella, così da evitare di incorrere in fenomeni relativistici come la dilatazione dei tempi. Tuttavia, tale parametro caratterizza ogni particella in maniera differente, perciò si individua per ciascuna di queste il cosiddetto *tasso di decadimento*  $\Gamma$ , che si definisce come la probabilità per unità di tempo che una data particella incorra in un processo di decadimento. Dato

un campione di particelle dello stesso tipo caratterizzate da un tasso  $\Gamma$ , la legge che governa l'evoluzione temporale del numero di particelle che ancora non sono decadute  $N(t)$  è la seguente:

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}, \quad (2.1)$$

dove  $N(0)$  indica il numero di particelle iniziale del campione. Dall' Eq. 2.1 si evince come il numero di particelle decresce esponenzialmente nel tempo, come ci si aspetta. Da tale relazione si può poi calcolare la vita media della particella:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \quad (2.2)$$

Data una particella  $A$ , questa può decadere producendo set di particelle finali differenti, come nel caso del  $\pi^+$ , che è caratterizzato dai seguenti canali di decadimento:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e,$$

dunque risulta utile definire in tal caso il tasso di decadimento  $\Gamma_i$  per ciascun decadimento che la particella può subire. Quest'ultimo deve chiaramente soddisfare la relazione seguente per il calcolo del tasso di decadimento totale  $\Gamma_{tot}$ :

$$\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i.$$

Per quanto riguarda invece lo scattering, la grandezza che risulta descrivere nel migliore dei modi il fenomeno è la *sezione d'urto*  $\sigma$ , ossia l'area efficace che il bersaglio offre alla particella incidente. Tale quantità non è da considerarsi come una semplice area geometrica caratterizzante un urto classico, dal momento che le particelle elementari possono sperimentare un'interazione anche senza urtarsi concretamente. Intuitivamente però, ci si aspetta che più la particella incidente si avvicina al bersaglio, maggiore è la deflessione alla sua traiettoria. La sezione d'urto dipende dunque da diversi parametri del sistema, come la natura delle particelle stesse, dalla presenza o meno di particelle uscenti e dalla velocità di scattering. Si riporta di seguito l'espressione per il calcolo della *sezione d'urto differenziale*, che corrisponde alla quantità maggiormente ricercata nei processi di scattering:

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin(\theta)} \left( \frac{db}{d\theta} \right) \right|, \quad (2.3)$$

dove  $d\Omega$  è la porzione di angolo solido in cui la particella viene deflessa,  $b$  è il parametro d'impatto e  $\theta$  l'angolo di scattering. Le quantità in gioco per il calcolo di tale grandezza sono indicate in Fig. 2.1.

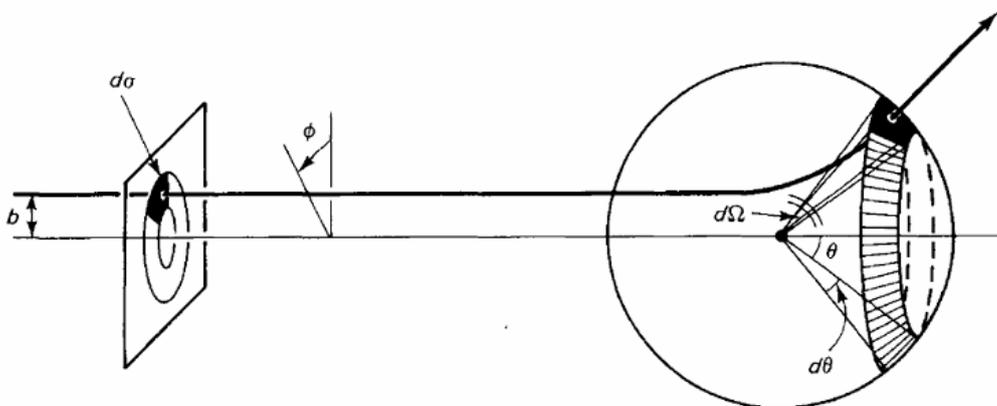


Figura 2.1: Schema di scattering tra una particella incidente e un bersaglio. Immagine presa da [1].

Per comprendere al meglio il significato della  $\sigma$  e le diverse forme che può assumere in relazione alla situazione considerata, si riporta di seguito un caso esemplificativo.

Nello scattering tra sfere di raggio  $R$ , si ottiene:

$$D(\theta) = \frac{R^2}{4}. \quad (2.4)$$

Per trovare la sezione d'urto totale si usa la seguente equazione:

$$\sigma = \int d\sigma = \int D(\theta)d\Omega,$$

che applicata allo scattering tra sfere, produce il seguente risultato:

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4}d\Omega = \pi R^2,$$

che coincide con quanto ci si aspetta: l'area efficace che una sfera di raggio  $R$  offre ad un bersaglio incidente corrisponde a  $\pi R^2$ , e ogni particella all'interno di quest'area subirà un processo di scattering, mentre qualunque particella al di fuori rimarrà indisturbata.

## 2.2 Regola d'oro di Fermi

Avendo introdotto dunque le quantità in gioco per la descrizione di fenomeni di decadimento e scattering - rispettivamente il tasso di decadimento e la sezione d'urto - risulta ora necessario capire come calcolarle. Per entrambi i processi si introducono due nuove entità: l'ampiezza  $M$  e lo spazio delle fasi  $\phi$ . La prima sarà in particolare l'oggetto di

studio della presente tesi, dal momento che è valutata attraverso l'analisi dei relativi diagrammi di Feynman, ciascuno considerato con il giusto peso seguendo le *regole di Feynman*, e contiene principalmente le informazioni dinamiche del processo. Lo spazio delle fasi invece è collegato alla natura cinematica del fenomeno, e dipende quindi dalle masse, velocità ed energie delle particelle coinvolte.

La regola d'oro di Fermi permette di combinare tali grandezze per ottenere il tasso di transizione di un dato processo, ossia la probabilità che, dato uno stato iniziale del sistema di particelle  $i$  con le rispettive grandezze, questo possa transire in uno stato finale  $f$ :

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \phi. \quad (2.5)$$

Risulta di particolare interesse l'applicazione della regola d'oro di Fermi nei casi specifici di decadimenti e scattering.

### 2.2.1 Applicazione ai decadimenti

Si suppone in particolare che una particella  $A$  di massa  $m_1$ , quadrimpulso  $p_1$  ed energia  $E_1$ , decada in altre  $N$  particelle con le relative grandezze associate:

$$A \rightarrow B + C + D + \dots + N.$$

Si riporta in tal caso l'espressione del tasso di decadimento ottenuta applicando la regola di Fermi:

$$d\Gamma = |M|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[ \prod_{i=2}^n \left( \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \right] (2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right), \quad (2.6)$$

dove  $\vec{p}_i = \left( \frac{E_i}{c}, p_i \right)$  corrisponde al quadrimpulso della particella  $i$ -esima, la funzione  $\delta$  garantisce la conservazione dell'energia e dell'impulso,  $S$  è un fattore statistico e  $M$  è l'ampiezza di transizione.

Integrando la Eq. 2.6 su tutti i momenti uscenti delle particelle finali, e considerando il caso specifico di sole due particelle prodotto  $A \rightarrow B+C$ , si ottiene il tasso di decadimento seguente:

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_A} \left( \frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|M|^2}{E_B E_C} \delta(p_1 - p_2 - p_3) d^3 p_B d^3 p_C.$$

In generale, l'ampiezza  $|M|$  è funzione dei momenti  $p_2$  e  $p_3$ , dunque non può essere estratta dall'integrale. Tuttavia, nel caso specifico di un decadimento in due particelle, si può verificare che l'integrale può comunque essere svolto senza conoscere la forma esatta di  $M$ . Infatti  $M$  è una quantità invariante sotto Lorentz, e per un processo del tipo  $1 \rightarrow 2$  gli unici invarianti di Lorentz indipendenti sono le masse: l'ampiezza  $M$  deve risultare una funzione delle masse, e dunque estraibile dall'integrale sui momenti. Considerando ciò, si ottiene:

$$\Gamma = \frac{S \rho_0}{8\pi \hbar m_A^2 c} |M|^2, \quad (2.7)$$

dove  $|p_2| = |p_3| = \rho_0$ .

## 2.2.2 Applicazione allo scattering

Si considera ora il caso particolare di un processo di scattering in cui due particelle  $A$  e  $B$  interagiscono tra loro producendo  $N$  particelle finali:

$$A + B \rightarrow C + D + E + \dots + N,$$

caratterizzate dalle rispettive masse  $m_i$ , impulsi  $p_i$ , ed energie  $E_i$ . La sezione d'urto infinitesima  $d\sigma$  è data dalla seguente equazione:

$$d\sigma = |M|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[ \prod_{i=2}^n \left( \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \right] (2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right), \quad (2.8)$$

dove le grandezze che compaiono sono le stesse della Eq. 2.6. Applicando tale definizione di sezione d'urto ottenuta tramite la regola d'oro di Fermi ad uno scattering tra due particelle del tipo  $A + B \rightarrow C + D$ , che produce solamente due particelle finali, si ottiene la seguente espressione per  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |M|^2 c}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_1|} \frac{d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4}{E_3 E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (2.9)$$

Ponendosi nel centro di massa del sistema, si trova che  $|p_1| = |p_2| = |p_i|$ ,  $|p_3| = |p_4| = |p_f|$ , e che  $|M|^2$  dipende unicamente da  $|p_f|$  e  $\theta$ . Integrando poi l'Eq. 2.9 in coordinate polari, e sfruttando le proprietà della funzione  $\delta$  (App. A), si trova la seguente espressione della sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|p_f|}{|p_i|} |M|^2. \quad (2.10)$$

Si è quindi mostrato come le grandezze di interesse per lo studio dei fenomeni che caratterizzano la fisica delle particelle dipendano strettamente dal modulo quadro dell'ampiezza di transizione  $|M|^2$ , come si può evincere dalle equazioni 2.7 e 2.10 trovate applicando la regola d'oro di Fermi.

## 2.3 Regole di Feynman

Si è dunque illustrato il calcolo del tasso di transizione di decadimento e scattering, ma nelle espressioni ottenute risulta ancora incognito lo sviluppo del termine  $|M|^2$ . L'espressione dell'ampiezza di transizione si ricava dai diagrammi di Feynman del suddetto

processo, tenendo conto delle cosiddette *regole di Feynman*, che associano a ciascun diagramma una forma integrale.

I diagrammi di Feynman sono utili rappresentazioni grafiche che illustrano le varie modalità di avvenimento di processi di scattering o decadimento tra particelle. Ad esempio, si considerino tre particelle  $A$ ,  $B$  e  $C$ , ciascuna dotata di masse differenti,  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_C$  rispettivamente. Nel caso in cui la massa della prima particella risulti maggiore della somma delle masse delle altre due ( $m_A \geq m_B + m_C$ ), può avvenire un processo di decadimento, che intuitivamente può essere rappresentato graficamente nella seguente maniera:

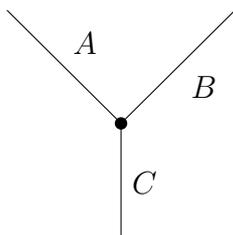


Figura 2.2: Diagramma di Feynman del processo  $A \rightarrow B + C$ .

L'obiettivo è dunque capire come si possono ricavare grandezze fisiche importanti, come la vita media  $\tau_A$  della particella  $A$ , da rappresentazioni grafiche di questo tipo, come nell'esempio in Fig. 2.2.

Potrebbe però anche essere necessario valutare un processo di scattering tra due particelle  $A$  e  $B$ , rappresentabile come segue:

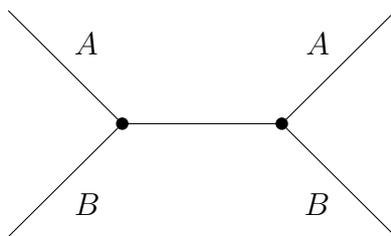


Figura 2.3: Diagramma di Feynman per il processo  $A + B \rightarrow A + B$

per la valutazione dell'ampiezza  $M$ .

Per comprendere al meglio la corrispondenza tra l'ampiezza  $M$  di un fenomeno e il relativo diagramma di Feynman, bisogna tenere conto del fatto che possono esistere infiniti diagrammi di Feynman rappresentanti lo stesso processo, e ciascuno di questi contribuisce con un certo peso alla valutazione del modulo quadro dell'ampiezza  $|M|^2$  per la valutazione del tasso di transizione. Si può dunque associare a ciascun diagramma un contributo  $M_i$  all'ampiezza totale  $M$ . Si troverà poi che alcuni di tali contributi sono più grandi rispetto ad altri.

Arrivati a questo punto risulta utile introdurre le regole utilizzate per calcolare tale grandezza a partire dai diagrammi di Feynman rappresentativi di un dato processo, ossia le regole di Feynman:

1. Si indica ciascun quadrimpulso entrante e uscente con  $p_n$ , e ogni momento interno  $q_n$ , inserendo una freccia sulle linee per indicare il verso positivo, il quale verrà scelto in maniera arbitraria per le sole linee interne;
2. Per ciascun punto di intersezione tra due linee, chiamato vertice, si tiene conto di un fattore pari a :

$$-ig,$$

dove la  $g$  è detta *costante di accoppiamento*, che misura l'entità dell'interazione fra le particelle interagenti. L'unità di misura di tale costante dipende dalla teoria considerata; nel caso preso in esame  $g$  ha le dimensioni di un momento;

3. Per ciascuna linea interna si tiene conto di un fattore:

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2},$$

dove  $q_j^2 = q_j^\mu q_{j\mu}$  è il modulo del quadrimpulso della linea, e  $m_j$  è la massa della particella che la rappresenta. Si noti che  $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$  poiché tali particelle sono virtuali e non reali, per cui non soddisfano la relazione massa-energia  $p^2 = m^2$ . Tale fattore è conosciuto come *propagatore*, e la forma sopra riportata è in particolare riferita alle sole particelle scalari;

4. Per garantire la conservazione dell'energia e del momento totale, per ciascun vertice si inserisce una funzione delta del tipo:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

con le  $k_i$  corrispondenti ai quadrimpulsi relativi alle linee che individuano il vertice, presi con segno positivo se entranti e negativo se uscenti;

5. Per ciascuna linea interna, si tiene conto del fattore:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j,$$

e si integra per ogni momento interno;

6. Applicando le regole sopra, si ottiene la funzione  $\delta$  finale nella forma:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \dots - p_n),$$

che rappresenta la conservazione di energia e momenti per le particelle iniziali e finali. Questo termine può essere eliminato, e quanto resta viene eguagliato ad un fattore  $-iM$ .

Si sono dunque illustrate le regole che permettono di associare ad un diagramma di Feynman il corrispondente integrale di Feynman. Per ottenere l'ampiezza  $M$  di un dato processo risulta necessario valutare tutti i contributi  $M_i$ ; si ricorre dunque alla teoria delle perturbazioni (nel caso in cui il fattore  $g$  sia piccolo), secondo la quale l'ampiezza  $M$  del processo può essere sviluppata in potenze della costante di accoppiamento  $g$ . Ciascun ordine perturbativo corrisponde ad un diagramma di Feynman con un certo numero di vertici: i contributi al primo ordine provengono da diagrammi con un vertice nel caso di decadimenti, o due vertici nel caso di scattering, mentre gli ordini superiori sono rappresentati da diagrammi più complessi con loop interni. In generale, la teoria delle perturbazioni permette di ottenere un'accuratezza di ordine  $\mathcal{O}(g^N)$  considerando tutti i diagrammi con al più  $N$  vertici.

### 2.3.1 Esempio di calcolo dell'ampiezza $M$ di un processo di decadimento

Risulta ora utile riportare un esempio di applicazione delle regole sopra elencate per comprendere al meglio come i diagrammi di Feynman possano rappresentare graficamente integrali che descrivono un dato processo.

Si consideri una particella  $A$  che incorre in un processo di decadimento del tipo  $A \rightarrow B + C$ , il cui diagramma ad ordine minore è rappresentabile in Fig. 2.4:

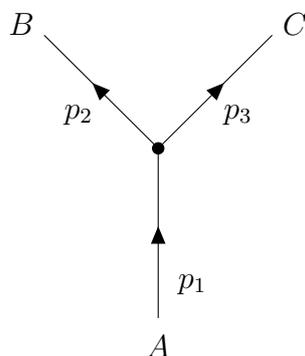


Figura 2.4: Diagramma di Feynman per il processo  $A \rightarrow B + C$ , con i rispettivi momenti  $p_1, p_2, p_3$ .

Si nota nella figura che sono stati etichettati tutti i quadrimpulsi entranti e uscenti come dettato dalla regola n.1. Essendovi un solo vertice, si tiene conto di un unico fattore  $-ig$ , mentre non risulta necessario considerare la presenza di alcun propagatore, non essendovi nel diagramma linee interne. Applicando la regola n.4, per l'unico vertice presente si tiene conto di un fattore:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3),$$

ottenendo infine l'equazione:

$$-ig = -iM, \quad (2.11)$$

da cui si ricava facilmente la forma dell'ampiezza  $M$ , utile per il calcolo del rate di decadimento della particella come riportato in Eq. 2.7:

$$M = g. \quad (2.12)$$

Una volta ottenuta la corretta forma di  $M$ , resta solo da inserirla nell'espressione del rate di decadimento  $\Gamma$ , per poi ottenere la formula della vita media di  $A$  dalla Eq. 2.2.

Tuttavia, per valutare ancora più precisamente l'ampiezza del processo  $M$ , sarebbe opportuno valutare e sommare anche diagrammi più complessi a tre vertici come quello presente in Fig.2.5:

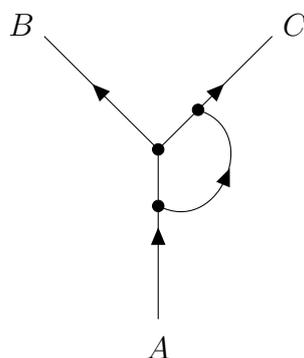


Figura 2.5: Diagramma di Feynman per il processo  $A \rightarrow B + C$  a 3 vertici.

Appellandosi alla teoria delle perturbazioni, e dunque assumendo  $g$  abbastanza piccolo, nel caso di Fig.2.4 si otterrebbe una precisione per l'ampiezza  $M$  pari a  $\mathcal{O}(g)$  essendovi un unico vertice, mentre nel caso di Fig. 2.5 si avrebbe una precisione a ordine  $\mathcal{O}(g^3)$ , avendo 3 vertici disegnati in figura. Accontentandosi però di una precisione al primo ordine, è sufficiente considerare esclusivamente il contributo all'ampiezza dato dal diagramma 2.4, che risulta anche quello maggiore.

### 2.3.2 Esempio di calcolo dell'ampiezza $M$ relativa ad un processo di scattering

Si consideri un processo di scattering del tipo  $A + A \rightarrow B + B$  rappresentato con il rispettivo diagramma di Feynman in Fig. 2.6:

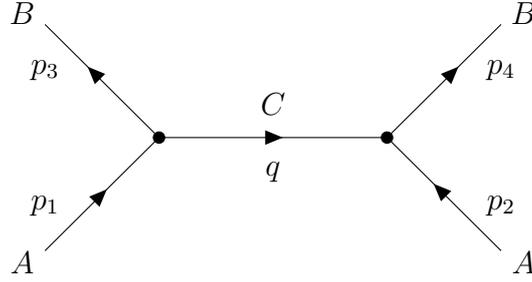


Figura 2.6: Diagramma di Feynman per il processo  $A + A \rightarrow B + B$  mediato da una particella  $C$ .

Si nota dalla rappresentazione grafica che il processo presenta due vertici, per cui bisogna tenere conto di un fattore pari a:

$$(-ig)^2,$$

assieme a due funzioni  $\delta$ :

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q),$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_4 + q).$$

Data la presenza di una linea interna nel diagramma, si conta un propagatore che include la massa  $m_C$  del mediatore  $C$ :

$$\frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2},$$

ed un'integrazione sui momenti interni riferiti al mediatore:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q.$$

L'espressione che rimane dalla trattazione sopra utile al calcolo dell'ampiezza  $M$  caratteristica del processo di scattering risulta:

$$-i(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4 q.$$

Integrando la seconda  $\delta$  e dunque selezionando i contributi di  $q$  tali per cui  $q = p_4 - p_2$ , rispettando così la conservazione del quadrimpulso ad ogni vertice, si perviene all'espressione:

$$-ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 + p_2 - p_4).$$

Applicando così la regola n.6, per la quale l'ultima  $\delta$  rimanente che tiene conto della conservazione di tutti i momenti del diagramma va cancellata e quanto rimane eguagliato ad un fattore pari a  $-iM$ , si trova infine l'equazione risolutiva dell'ampiezza del processo:

$$M = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}. \quad (2.13)$$

Tuttavia, è necessario sottolineare che il diagramma disegnato non costituisce l'unico contributo al suddetto processo. Esistono infatti altri contributi provenienti dai cosiddetti diagrammi *a ordini superiori*, caratterizzati da differenti disposizioni delle linee, oppure dalla presenza di *loop*, cioè rappresentazioni di particelle virtuali che appaiono e scompaiono nel corso di un'interazione. Anche in questo caso, si potrebbe valutare il processo in maniera più precisa considerando diagrammi a 4 vertici come quello in Fig. 2.7:

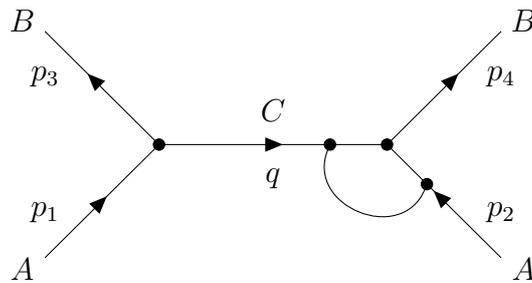


Figura 2.7: Diagramma di Feynman a 4 vertici per il processo  $A + A \rightarrow B + B$  mediato da una particella  $C$ .

Per ottenere una stima più accurata dell'ampiezza del processo risulta dunque necessario tenere conto di tutti i possibili diagrammi di Feynman, compresi quelli a ordine superiore, fermandosi all'ordine di cui si desidera avere la precisione. Dunque, se si vuole stimare l'ampiezza con precisione fino a un certo ordine perturbativo, è sufficiente valutare diagrammi con un numero di vertici pari al massimo all'ordine desiderato. Applicando a questi ultimi le regole esposte in precedenza per trovare l'ampiezza del processo  $M$ , risulterà necessario calcolare integrali che richiedono l'introduzione di tecniche matematiche più avanzate, che saranno oggetto di trattazione del capitolo successivo.

## 2.4 Diagrammi di Feynman a ordine superiore

Fino ad ora si sono considerati diagrammi di Feynman al primo ordine caratterizzati da due vertici, come quello mostrato in Fig. 2.6 relativo allo scattering; tuttavia si possono considerare diagrammi ad ordine superiore che contribuiscono al calcolo dell'ampiezza

del fenomeno  $M$  con termini proporzionali a  $g^4$ . Un esempio significativo è il diagramma che segue in cui compare un loop interno:

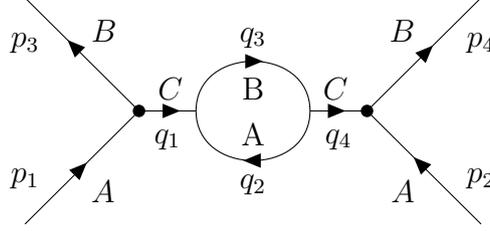


Figura 2.8: Diagramma di Feynman del processo  $A + A \rightarrow B + B$  con loop interno.

Applicando le regole di Feynman elencate precedentemente, si ottiene la seguente espressione per il calcolo dell'ampiezza del processo:

$$(-ig)^4 \int \frac{i^4 (2\pi)^{16} \delta^4(p_1 - q_1 - p_3) \delta^4(q_1 - q_2 - q_3) \delta^4(q_2 + q_3 - q_4) \delta^4(q_4 + p_2 - p_4)}{(q_1^2 - m_C^2 c^2)(q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)(q_4^2 - m_C^2 c^2)} \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{16}} d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4.$$

Si semplifica l'integrale sopra integrando in  $q_1$  e  $q_4$ , semplificando così le prime due  $\delta$  di Dirac che appaiono a numeratore, ottenendo:

$$\frac{g^4}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2][(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - q_2 - q_3)}{(q_2^2 - m_A^2 c^2)} \\ \times \frac{\delta^4(q_2 + q_3 - p_4 + p_2)}{(q_3^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q_2 d^4 q_3,$$

espressione che si può ulteriormente semplificare accorpando le due  $\delta$  rimaste in una sola, ottenendo così:

$$\frac{g^4}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2][(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} \int \frac{(2\pi)^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 q_2 d^4 q_3}{(2\pi)^4 (q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)}.$$

Applicando a questa la regola n.6, si giunge all'equazione:

$$-iM = \frac{g^4 / (2\pi)^2}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2]^2} \int \frac{1}{[(p_1 - p_3 - q)^2 - m_A^2 c^2](q^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q, \quad (2.14)$$

ottenendo così la seguente espressione per l'ampiezza del processo  $M$ :

$$M = i \left( \frac{g}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2]^2} \int \frac{1}{[(p_1 - p_3 - q)^2 - m_A^2 c^2](q^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q. \quad (2.15)$$

Si giunge qui ad un ostacolo nella risoluzione di tale integrale: per quadrimpulsi  $q^\mu$  che tendono ad infinito, questo diverge. Si ricordi infatti che tale risultato è stato raggiunto a partire dall'imposizione della conservazione del quadrimpulso ad ogni vertice del diagramma di Feynman:

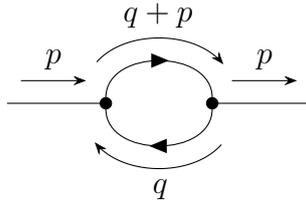


Figura 2.9: Diagramma di Feynman a un loop con quadrimpulso espressamente conservato a ciascun vertice.

Per un loop come quello in Fig. 2.9, che corrisponde ad una semplificazione del problema rappresentato in Fig. 2.8, si ha che il quadrimpulso di loop  $q$  non è fissato, e per questo l'espressione dell'ampiezza del processo relativa a tale diagramma viene integrata sulla stessa variabile  $q$ .

Sviluppando l'Eq. 2.15 asintoticamente per  $q \rightarrow \infty$  la funzione integranda e l'elemento differenziale si comportano rispettivamente come  $1/q^4$  e  $q^3$ , e si ottiene un integrale del tipo:

$$\sim \int \frac{d^4 q}{q^4} \sim \int \frac{1}{q} dq \sim \ln q.$$

Per poter proseguire nello studio degli osservabili e dell'ampiezza  $M$ , diventa necessario superare l'ostacolo di tale divergenza attraverso l'introduzione di due processi matematici volti a rendere integrali divergenti risolvibili in funzione di parametri osservabili.

## 2.5 Regolarizzazione e rinormalizzazione

L'analisi matematica applicata alla fisica offre diversi metodi per eliminare la parte divergente di un integrale, tutti basati sull'introduzione di un parametro esterno al problema considerato, che ha la proprietà di rendere finito l'integrale, e che poi verrà rimosso in fasi successive.

La natura della divergenza di integrali di loop deriva dalla scarsa conoscenza di tali fenomeni ad energie estremamente elevate, dove non se ne conoscono i risultati nemmeno sperimentali; dunque la teoria precedentemente esposta non risulterebbe più valida per momenti tendenti all'infinito. Per procedere nella trattazione, ci si limita dunque allo studio delle osservabili fisiche, cioè dell'ampiezza  $M$ , relative a fenomeni a basse energie.

Per adattare il risultato di integrale divergente allo studio dei fenomeni a bassa energia, si procede introducendo i seguenti due metodi:

1. *regolarizzazione*: è una procedura utile a isolare la parte divergente di un integrale, attraverso l'introduzione di un parametro artificiale, detto *regolarizzatore*, che verrà opportunamente rimosso a fine calcolo.

Esistono diverse tipologie di regolarizzatori, ma tutte queste producono il medesimo risultato sull'integrale. Ad esempio, si può introdurre il cosiddetto *parametro di cutoff*, che viene sostituito agli estremi di integrazione come segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4q \rightarrow \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d^4q,$$

integrando cioè su momenti inferiori a  $\Lambda$  e facendo poi il limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  a fine calcolo.

Altrimenti, la procedura maggiormente utilizzata è la cosiddetta *regolarizzazione dimensionale*, basata sull'inserimento di un generico parametro  $D$  posto in sostituzione alla dimensione dello spazio-tempo su cui si integra. Nel caso preso in esame, si sostituisce la dimensione 4 dello spazio di Minkowski con il parametro  $D$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4q \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d^Dq,$$

che porta il risultato dell'integrale ad essere una funzione analitica in  $D$  con poli in corrispondenza di  $D = 4$ , con il vantaggio però di poter separare i termini divergenti da quelli finiti o nulli. Dopodiché si potrà recuperare lo stato iniziale facendo il limite  $D \rightarrow 4$ .

2. *rinormalizzazione*: processo che permette di riassorbire le divergenze di un integrale all'interno di parametri non osservabili caratteristici della teoria, e rendere così i risultati reali dipendenti da oggetti fisici e misurabili, e non più dal parametro artificiale introdotto nella procedura di regolarizzazione.

### 2.5.1 Applicazione della regolarizzazione dimensionale

Dal momento che in teoria dei campi la regolarizzazione dimensionale rappresenta uno dei metodi di regolarizzazione maggiormente utilizzati oggi, e sarà la base degli integrali protagonisti della presente tesi, si riporta di seguito un esempio di applicazione di tale tecnica. Riprendendo l'integrale divergente dell'Eq. 2.15, tali procedure possono essere applicate come segue:

1. *regolarizzazione dimensionale*: si estende lo spazio-tempo da 4 a  $D = 4 - \epsilon$  dimensioni. In questo modo l'integrale, che in quattro dimensioni risulta divergente, assume la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4q \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d^Dq = I_D.$$

Lo sviluppo attorno a  $D = 4$  mostra che il risultato contiene un termine divergente per  $\epsilon \rightarrow 0$  proporzionale a  $1/\epsilon$ , piú una parte definita che assume valore finito o nullo:

$$I_D \sim \frac{A}{\epsilon} + B + \mathcal{O}(\epsilon),$$

dove  $A$  è il coefficiente del termine divergente e  $B$  è il termine finito. Come si evince dal risultato, la regolarizzazione è servita a isolare la parte divergente dell'integrale, che nella fase successiva verrà eliminata.

2. *rinormalizzazione*: il termine divergente  $A/\epsilon$  viene assorbito nei parametri non osservabili della teoria, cioè massa  $m$  e costante di accoppiamento  $g$ . Questi ultimi sono infatti due parametri che, pur essendo stati introdotti nella lagrangiana con le regole di Feynman, non sono osservabili: la massa a riposo “pura” che gode della relazione *energia-impulso*  $m^2 = p^2$ , risulta differente rispetto quella reale che compare nella lagrangiana  $m_{\text{true}}$ , e vale lo stesso per la costante di accoppiamento  $g_{\text{true}}$ . In particolare, si ridefiniscono i parametri fisici in questo modo:

$$m_{\text{true}} = m + \delta m, \quad g_{\text{true}} = g + \delta g,$$

dove  $\delta m$  e  $\delta g$  contengono proprio i contributi divergenti. Essendo non osservabili, questi parametri vengono eliminati in favore di quelli fisici  $m_{\text{true}}$  e  $g_{\text{true}}$ , che sono finiti e misurabili. Il risultato dell'ampiezza totale, dopo la rinormalizzazione, è quindi indipendente da  $D$  e contiene soltanto contributi finiti.

I termini finiti che rimangono dopo la cancellazione delle divergenze rappresentano le correzioni quantistiche alle masse e alle costanti di accoppiamento. Tali correzioni dipendono dalle energie in gioco, ma a basse energie possono essere trascurate o trattate come piccoli aggiustamenti.

Dunque, una volta giunti a forme di integrali che rappresentano i contributi dei diagrammi di Feynman all'ampiezza  $M$  di un dato processo, si può risolvere il problema della divergenza attraverso la regolarizzazione dimensionale, ottenendo così integrali ben definiti pronti per essere risolti.

# Capitolo 3

## Relazioni lineari tra integrali di Feynman

Per determinare l'ampiezza di un processo, che sia di scattering o decadimento, si è mostrato che si presenta la necessità di calcolare un insieme di integrali, rappresentabili graficamente attraverso i diagrammi di Feynman. Utilizzando la teoria perturbativa sull'ampiezza  $M$ , questa viene sviluppata in una somma di termini rappresentati singolarmente da un diagramma di Feynman a  $N$  vertici. Questi termini, a ordini più alti, sono combinazioni lineari di integrali. Ciascuno di questi ultimi non è generalmente indipendente dagli altri, infatti si può dimostrare che, individuata una famiglia di integrali che condividono alcune caratteristiche, è possibile stabilire relazioni lineari tra questi, dalle quali si può trovare un insieme più ridotto di integrali linearmente indipendenti tra loro, chiamati *master integrals*. Da combinazioni lineari di questi è possibile esprimere tutti gli altri integrali dell'insieme iniziale. Per fare ciò però, risulta necessario anzitutto individuare e dimostrare le relazioni lineari che sussistono tra questi. Nel capitolo seguente sono riportati argomenti trattati in [2] e [3].

### 3.1 Rappresentazioni per gli integrali di Feynman

Nella Sez. 2.4 si è giunti alla forma di un integrale che contribuisce all'ampiezza  $M$  relativa ad un diagramma di Feynman al secondo ordine. Volendo ora generalizzare tale risultato, si riporta la forma di un integrale di Feynman costituito da  $L$  loop con  $E + 1$  momenti esterni:

$$I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \int \prod_{i=1}^L \left( \frac{d^D q_i}{i\pi^{D/2}} \right) \frac{N(q_i^\mu)}{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}}, \quad (3.1)$$

dove  $N(q_i^\mu)$  rappresenta una complessa struttura tensoriale. Attraverso il processo di *riduzione tensoriale*, è possibile fattorizzare quest'ultima e lasciare espressa la dipendenza dai momenti di loop in termini scalari, chiamati *integrali di Feynman scalari*, e indicati

d'ora in avanti semplicemente come integrali di Feynman con simbolo  $I$ . Ciascuno di questi rappresenta un contributo all'espressione completa dell'ampiezza  $M$ , costituita generalmente da una combinazione lineare di tali integrali  $I$ :

$$M = \sum_i c_i I_i.$$

Ora risulta necessario concentrarsi sugli integrali di Feynman  $I$  e trovarne una rappresentazione utile per il loro calcolo.

Dato un diagramma di Feynman con  $E + 1$  momenti esterni, per la conservazione del momento angolare ad ogni vertice, solo  $E$  momenti di questi risultano essere indipendenti. Si consideri infatti il seguente esempio:

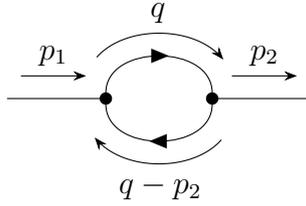


Figura 3.1: Diagramma di Feynman one-loop con quadrimpulso espressamente conservato a ciascun vertice

In Fig. 3.1 sono presenti due momenti esterni al loop, cioè due linee esterne ( $p_1$  e  $p_2$ ), ma essendo  $p_2$  determinato da  $p_1$  e  $q$  per la conservazione del quadrimpulso ai vertici, il momento indipendente esterno risulterà solo uno.

I termini a denominatore  $\frac{1}{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}}$  sono invece i cosiddetti *propagatori*, che si esprimono nella forma seguente:

$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{P_i^2 - M_i^2},$$

dove i  $P_i$  e  $M_i$  sono rispettivamente combinazioni lineari di momenti di loop ed esterni, e masse. Ricordando che  $q_i$  sono i momenti degli  $L$  loop, e che  $p_j$  sono gli  $E$  momenti esterni al loop, le combinazioni lineari dei momenti si possono presentare come segue:

$$q_i \cdot p_j \quad 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq E,$$

$$q_i \cdot q_j \quad 1 \leq i \leq j \leq L.$$

Per cui, il numero  $n$  di prodotti scalari indipendenti risulta:

$$n = LE + \frac{L(L+1)}{2},$$

infatti il primo termine tiene conto delle possibili combinazioni tra momenti di loop e momenti esterni, mentre il secondo delle possibili coppie di momenti di loop.

Considerando un integrale di Feynman nella forma di Eq. 3.1 costituito da  $t$  propagatori, solo  $t$  degli  $n$  prodotti scalari indipendenti si possono scrivere in termini dei propagatori: i soli propagatori non bastano per esprimere tutti i possibili prodotti scalari. Rimarranno dunque  $k = n - t$  prodotti scalari irriducibili, cioè non esprimibili in termini dei propagatori. Per cui, con tale notazione, l'integrale diventa:

$$I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \int \prod_{i=1}^L \left( \frac{d^D q_i}{i\pi^{D/2}} \right) \frac{1}{z_1^{\alpha_1} \dots z_t^{\alpha_t} z_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \dots z_n^{\alpha_n}}, \quad (3.2)$$

con

$$\alpha_i \begin{cases} \geq 0 & \text{per } i = 1, \dots, t \\ \leq 0 & \text{per } i = t + 1, \dots, n \end{cases} .$$

Si noti che in tale forma si è marcata la differenza tra i  $k$  prodotti scalari irriducibili e i veri e propri propagatori, che saranno quelli che rimangono con esponente positivo, e dunque a denominatore.

Si introducano di seguito alcuni concetti utili alla identificazione degli integrali di Feynman:

- *famiglia*: insieme di integrali caratterizzati dallo stesso set di propagatori completo  $\{z_1, \dots, z_n\}$ ;
- *settore*: due integrali fanno parte dello stesso settore se e solo se il loro set di propagatori con potenze positive è lo stesso, cioè se hanno gli stessi denominatori;
- *dots*: se nella rappresentazione grafica dell'integrale appaiono  $n$  *dots* su una linea, ovvero su un propagatore, significa che questo nell'integrale appare elevato alla potenza  $n + 1$ .

Ad esempio, si riporta in Fig. 3.1 la rappresentazione grafica secondo le notazioni riportate sopra di un integrale di loop con 4 propagatori caratterizzati dalle seguenti potenze:  $z_1$  è elevato a esponente 2,  $z_2$  e  $z_4$  a esponente 1 e  $z_3$  a esponente 3.

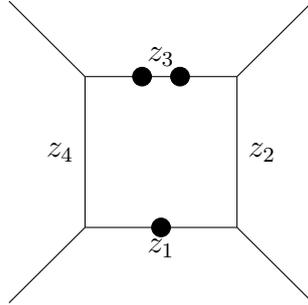


Figura 3.2: Diagramma di Feynman *a box* con tre *dots* e le etichette dei propagatori corrispondenti alle linee di loop.

Si sono dunque espone le varie notazioni utili alla rappresentazione degli integrali di Feynman. Risulta ora necessario descrivere le relazioni a cui questi sottostanno.

## 3.2 Relazioni lineari

Per calcolare l'ampiezza  $M$  di un fenomeno, è dunque necessario calcolare un insieme molto esteso di integrali, che può essere però ridotto ad un insieme di integrali linearmente indipendenti. Per fare ciò, si individuano e si dimostrano le relazioni lineari che caratterizzano una famiglia di integrali di Feynman. Queste si classificano come segue:

- *integration by parts identities* (IBPs)
- *Lorentz invariance identities*
- relazioni di simmetria

D'ora in avanti si ometterà il fattore di normalizzazione per gli integrali di Feynman  $\frac{1}{\pi^{D/2}}$ , in quanto non rilevante per la trattazione che segue.

### 3.2.1 *Integration-by-parts identities* (IBPs)

L'integrazione sui momenti di loop risulta essere invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré, dunque facendo uno shift nello spazio dei momenti si può scrivere la seguente relazione:

$$\int d^D q f(q) = \int d^D q f(q + p). \quad (3.3)$$

Andando ad espandere in serie di Taylor per  $p^\mu \rightarrow 0$  il secondo membro della Eq. 3.3, si ottiene:

$$\int d^D q f(q + p) = \int d^D q f(q) + p^\mu \int d^D q \frac{\partial f(q)}{\partial q^\mu} + \mathcal{O}(p^2). \quad (3.4)$$

Sostituendo la Eq. 3.4 nella Eq. 3.3, risulta:

$$\int d^D q \frac{\partial f(q)}{\partial q^\mu} = 0. \quad (3.5)$$

Considerando ora un set completo di identità, si ottiene un integrale del tipo:

$$\int d^D q_1 \cdots d^D q_L \frac{\partial v_j^\mu}{\partial q_i^\mu} = 0,$$

$$v_j^\mu = \begin{cases} q_1^\mu \cdots q_L^\mu \\ p_1^\mu \cdots p_E^\mu \end{cases},$$

Esplicitando dunque le derivate parziali, si ottengono prodotti scalari tra momenti di loop ed esterni, che si possono esprimere in termini di denominatori e di prodotti scalari irriducibili, ottenendo un'espressione del tipo:

$$\sum_i c_i I[\alpha_1 + \beta_{i,1}, \dots, \alpha_n + \beta_{i,n}] = 0 \quad (3.6)$$

dove  $c_i$  sono dei coefficienti formati da polinomi dipendenti dalla dimensione  $D$ , termini invarianti cinematici e masse dei propagatori, e gli  $I[\dots]$  sono gli integrali di Feynman che appartengono alla stessa famiglia.

### 3.2.2 Lorentz invariance identities

Si consideri una trasformazione di Lorentz infinitesima su un momento esterno:

$$p_i^\mu \rightarrow p_i^\mu + \delta p_i^\mu = p_i^\mu + \omega^{\mu\nu} p_{i\nu},$$

con  $\omega^{\mu\nu}$  un tensore totalmente asimmetrico. Sostituendo tale trasformazione all'integrale 3.2, si ottiene:

$$\begin{aligned} I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] &= I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] + \sum_n \frac{\partial I[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}{\partial p_n^\mu} = \\ &= I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] + \omega^{\mu\nu} \sum_n p_{n\nu} \frac{\partial I[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}{\partial p_n^\mu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sfruttando ora l'antisimmetria del tensore  $\omega^{\mu\nu}$ :

$$\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu},$$

e scambiando gli indici  $\mu$  e  $\nu$  nella Eq. 3.7 si ottiene:

$$\omega^{\mu\nu} \sum_n p_{n\nu} \frac{\partial I[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}{\partial p_n^\mu} + \omega^{\nu\mu} \sum_n p_{n\mu} \frac{\partial I[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}{\partial p_n^\nu} = 0,$$

la quale porta alla relazione:

$$\sum_n (p_{n\nu} \frac{\partial}{\partial p_n^\mu} - p_{n\mu} \frac{\partial}{\partial p_n^\nu}) I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = 0. \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Relazioni di simmetria

Altre importanti relazioni lineari tra integrali di Feynman possono essere ricavate attraverso uno *shift* nello spazio dei momenti. Considerando un integrale generico con due propagatori:

$$I[\alpha_1, \alpha_2] = \int \frac{d^D q}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}},$$

con:

$$\begin{aligned} z_1 &= q^2 - m^2, \\ z_2 &= (q - p)^2 - m^2, \end{aligned}$$

e attuando una traslazione nello spazio dei momenti, che di fatto corrisponde ad un cambio di variabile:

$$q^\mu \rightarrow p^\mu - q^\mu,$$

i propagatori si modificano come segue:

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow (q - p)^2 - m^2 = z_2, \\ z_2 &\rightarrow q^2 - m^2 = z_1. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque che grazie all'invarianza di tali integrali sotto trasformazioni di traslazione, vale la seguente relazione di simmetria:

$$I[\alpha_1, \alpha_2] = I[\alpha_2, \alpha_1]. \quad (3.9)$$

## 3.3 Algoritmo di Laporta

Attraverso l'applicazione delle relazioni dimostrate in precedenza, risulta possibile trovare un set di identità lineari che legano tra loro gli integrali dipendenti dalla dimensione di integrazione  $D$ . Si trova in particolare che non tutti gli integrali sono indipendenti gli uni dagli altri; infatti si può trovare un set di *master integrals*, che se combinati linearmente, possono originare qualunque integrale della famiglia di partenza.

Il procedimento che viene utilizzato per la risoluzione del problema è chiamato *Algoritmo di Laporta*. Quest'ultimo consiste nel ricercare un sistema di identità tra integrali, chiamato *sistema IBP*, che permette di ricondurre un qualunque integrale di Feynman complesso ad una combinazione lineare di *master integrals*. Tale sistema può essere individuato a partire dalle proprietà elencate in Sez. 3.2, ovvero le relazioni di simmetria,

l'invarianza sotto Lorentz e le IBPs. In particolare, si può riassumere l'algoritmo come segue [4]:

1. *Individuazione della famiglia di integrali*: si definisce una famiglia di integrali di Feynman, ossia integrali caratterizzati dallo stesso set di propagatori. Tale famiglia costituisce uno spazio finito-dimensionale, del quale si vuole trovare una base, costituita dai *master integrals*;
2. *Creazione del sistema IBP*: si scrivono le relazioni lineari della Sez. 3.2 che caratterizzano gli integrali della famiglia, ottenendo il cosiddetto sistema IBP, costituito dalle *equazioni template* con generici esponenti  $\alpha_i$ ;
3. *Scelta dei master integrals*: si individua arbitrariamente un set di esponenti numerici detti *seeds* che esplicitano le relazioni del sistema, dalla cui risoluzione si perviene all'insieme di *master integrals* che costituiscono la base dello spazio vettoriale individuato dalla famiglia di integrali.

Alla fine del procedimento, si giunge ad una relazione che lega un generico integrale delle *seed equations*  $I_i$ , ai master integrals  $G_j$ :

$$I_i = \sum_j c_{ij} G_j. \quad (3.10)$$

In Sez. 3.3.1 si riporta un esempio pratico di applicazione dell'Algoritmo di Laporta.

### 3.3.1 Esempio: *one-loop bubble* $I[\alpha_1, \alpha_2]$

Si riporta di seguito un esempio di applicazione dell'algoritmo di Laporta ad un diagramma di Feynman di tipo *one-loop bubble* (Fig. 3.3.1), ossia di un diagramma rappresentante un integrale del tipo  $I[\alpha_1, \alpha_2]$ .

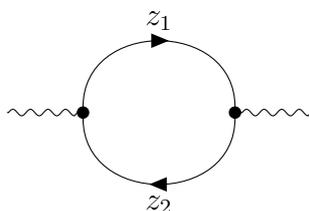


Figura 3.3: Diagramma *one-loop* con due propagatori, rappresentante l'integrale  $I[\alpha_1, \alpha_2]$ .

Si nota innanzitutto che il primo step dell'algoritmo di Laporta è già stato eseguito: si è individuata la famiglia di integrali del tipo  $I[\alpha_1, \alpha_2]$  che costituisce lo spazio vettoriale

di cui si vuole trovare la base. Risulta ora necessario individuare il sistema di equazioni *IBP*, utile poi per trovare le relazioni che legano integrali con valori di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  specifici. La forma generica di un integrale del tipo *one-loop* è la seguente:

$$I[\alpha_1, \alpha_2] = \int d^D q \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} = \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m^2)^{\alpha_1} ((q - p)^2 - m^2)^{\alpha_2}}, \quad (3.11)$$

con

$$\begin{aligned} z_1 &= q^2 - m^2, \\ z_2 &= (q - p)^2 - m^2. \end{aligned}$$

Dalla proprietà di invarianza degli integrali di loop rispetto uno shift nello spazio dei momenti, come indicato in Eq. 3.5, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{q^\mu}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{p^\mu}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Dall'Eq. 3.12 si ricava, applicando la regola del prodotto:

$$\int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{q^\mu}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = \int d^D q \left[ \frac{d}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} + q^\mu \left( \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) \right].$$

Sviluppando poi ulteriormente la derivata del secondo addendo e considerandone il prodotto per  $q^\mu$ , si ottiene:

$$q^\mu \left( \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = -\frac{2\alpha_1 q_\mu q^\mu}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \frac{2\alpha_2 q^\mu (q_\mu - p_\mu)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}},$$

e, dal momento che:

$$\begin{aligned} q_\mu q^\mu &= q^2 = z_1 + m^2, \\ q^\mu (q_\mu - p_\mu) &= q^2 - q^\mu p_\mu = \frac{1}{2} (z_1 + z_2 - p^2 + 2m^2), \end{aligned}$$

si ottiene la seguente forma per il secondo addendo:

$$\frac{2\alpha_2 q^\mu (q_\mu - p_\mu)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} = -\frac{\alpha_2 (z_1 + 2m^2 - p^2)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} - \frac{\alpha_2}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}.$$

Dunque, in definitiva, si può riscrivere l'Eq. 3.12 come:

$$\int \frac{D - 2\alpha_1 - \alpha_2}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{2\alpha_1 m^2}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_2 (z_1 - p^2 + 2m^2)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} = 0. \quad (3.14)$$

Passando ora allo sviluppo dell'Eq. 3.13:

$$\int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{p^\mu}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = \int d^D q \left[ p^\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) \right],$$

dove si è tenuto conto che la derivata rispetto  $q_\mu$  del momento esterno  $p^\mu$  è nulla, poiché quest'ultimo non dipende dai momenti di loop.

Sviluppando la derivata all'interno dell'integrale come derivata di un prodotto si ottiene:

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left( \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \right) = -\frac{2\alpha_1 p^\mu q_\mu}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \frac{2\alpha_2 p^\mu (q_\mu - p_\mu)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}}.$$

Considerando i seguenti prodotti scalari:

$$q_\mu p^\mu = \frac{1}{2} [p^2 + q^2 - (q-p)^2] = \frac{1}{2} (p^2 + z_1 - z_2),$$

$$p^\mu (q_\mu - p_\mu) = \frac{1}{2} (p^2 + z_1 - z_2) - p^2 = \frac{1}{2} (z_1 - z_2 - p^2),$$

l'Eq. 3.13 si può riscrivere in definitiva come:

$$\int \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_1 (p^2 - z_2)}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_2 (z_1 - p^2)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} = 0. \quad (3.15)$$

Si è dunque raggiunti al sistema di equazioni *IBPs*, che si riassume di seguito:

$$\begin{cases} \int \frac{D - 2\alpha_1 - \alpha_2}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{2\alpha_1 m^2}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_2 (z_1 - p^2 + 2m^2)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} = 0 \\ \int \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_1 (p^2 - z_2)}{z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2}} - \int \frac{\alpha_2 (z_1 - p^2)}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1}} = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

che rappresenta le relazioni che legano integrali di loop con propagatori a esponenti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  generici.

Una volta ottenuto il sistema si può passare alla ricerca delle *seed equations*, ossia alle equazioni esplicite che si ottengono sostituendo valori specifici di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Si ricorda che i termini  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  corrispondono alle potenze con cui compaiono i propagatori al denominatore dell'integrale di Feynman, e si possono considerare come una sorta di "molteplicità" del propagatore. Si passa ora alla scelta dei *seeds* attraverso i quali risolvere il sistema. Si scelgono in particolare gli esponenti  $\{1, 0\}$ , e si considerano le coppie di esponenti che si possono realizzare da questo *seed*:

- per  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 1$ , si ottiene il seguente sistema:

$$\int \frac{D-1}{z_2} - \int \frac{z_1 - p^2 + 2m^2}{z_2^2} = 0 \quad (3.17a)$$

$$\int \frac{1}{z_2} - \int \frac{z_1 - p^2}{z_2^2} = 0 \quad (3.17b)$$

Per risolverlo, si sostituisce l'Eq. 3.17b nella Eq. 3.17a, e si ottiene:

$$(D - 2) \int \frac{1}{z_2} = 2m^2 \int \frac{1}{z_2^2}, \quad (3.18)$$

che tradotto nella forma  $I[\alpha_1, \alpha_2]$  diventa:

$$(D - 2)I[0, 1] = 2m^2 I[0, 2]. \quad (3.19)$$

Utilizzando le convenzioni esposte in Sez. 3.1, si può riscrivere la relazione in forma grafica (Fig. 3.4).

$$(D - 2) \cdot \text{diagramma} = 2m^2 \cdot \text{diagramma}$$

Figura 3.4: Identità tra due diagrammi one loop per Eq. 3.19.

- sostituendo nel sistema i valori di  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 1$  si ottiene:

$$\left\{ \int \frac{D-3}{z_1 z_2} - \int \frac{2m^2}{z_1^2 z_2} - \int \frac{z_1 - p^2 + 2m^2}{z_1 z_2^2} = 0 \right. \quad (3.20a)$$

$$\left. \left\{ - \int \frac{p^2 - z_2}{z_1^2 z_2} - \int \frac{z_1 - p^2}{z_1 z_2^2} = 0 \right. \right. \quad (3.20b)$$

Utilizzando la relazione di simmetria  $I[\alpha_1, \alpha_2] = I[\alpha_2, \alpha_1]$  nell'equazione 3.20b dimostrata nella Sez. 3.2.3, e sostituendola nella Eq. 3.20a, si ottiene:

$$(4m - p^2) \int \frac{1}{z_1^2 z_2} = (D - 3) \int \frac{1}{z_1 z_2} - \int \frac{1}{z_2^2}, \quad (3.21)$$

ossia:

$$(4m - p^2)I[2, 1] = (D - 3)I[1, 1] - I[0, 2], \quad (3.22)$$

che può esprimersi anche graficamente (Fig. 3.5):

$$(4m - p^2) \cdot \text{diagramma} = (D - 3) \cdot \text{diagramma} - \text{diagramma}$$

Figura 3.5: Identità tra due diagrammi one loop per Eq. 3.22

- per i valori  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 0$  si ottiene il sistema:

$$\left\{ \int \frac{D-2}{z_1} - \int \frac{2m^2}{z_1^2} = 0 \right. \quad (3.23a)$$

$$\left. \int \frac{1}{z_1} - \int \frac{p^2 - z_2}{z_1^2} = \int \frac{z_1 - z_2 + p^2}{z_1^2} = 0 \right. \quad (3.23b)$$

Dalla Eq. 3.23a si ottiene la seguente relazione:

$$(D-2) \int \frac{1}{z_1} = 2m^2 \int \frac{1}{z_1^2},$$

che si può riscrivere come:

$$(D-2)I[1,0] = 2m^2 I[2,0]. \quad (3.24)$$

Rappresentando la stessa graficamente (Fig. 3.6):

$$(D-2) \cdot \text{diagramma} = 2m^2 \cdot \text{diagramma}$$

Figura 3.6: Identità tra due diagrammi one loop per Eq. 3.24.

Si noti la simmetria tra la Eq. 3.24 e la Eq. 3.19, sia nella loro forma analitica sia nella forma grafica: dal momento che queste si ottengono per una coppia di indici  $[1,0]$  presa in ordine arbitrario, si può effettivamente verificare che le relazioni di simmetria discusse in precedenza possono essere applicate alla risoluzione di tali sistemi, riducendo significativamente i calcoli. Volendo rappresentare graficamente la relazione di simmetria per gli integrali  $I[2,0]$  e  $I[0,2]$ :

$$\text{diagramma} = \text{diagramma}$$

Figura 3.7: Identità tra due diagrammi one loop per la relazione di simmetria  $I[0,2] = I[2,0]$ .

Per completezza si mostri di seguito le relazioni che si otterrebbero scegliendo un *seed* più ampio, quale  $\{0,1,2\}$ :

- per i valori  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = 0$  si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \int \frac{D-4}{z_1^2} - \int \frac{4m^2}{z_1^3} = 0 \\ \int \frac{1}{z_1^2} + \int \frac{p^2 - z_2}{z_1^3} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

dal quale si ottiene la relazione:

$$(D-4) \int \frac{1}{z_1^2} = 4m^2 \int \frac{1}{z_1^3},$$

ovvero:

$$(D-4)I[2, 0] = 4m^2 I[3, 0] \quad (3.26)$$

- per  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = 1$  si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \int \frac{D-5}{z_1^2 z_2} - \int \frac{4m^2}{z_1^3 z_2} - \int \frac{z_1 - p^2 + 2m^2}{z_1^2 z_2^2} = 0 \\ - \int \frac{1}{z_1^2 z_2} = 2 \int \frac{p^2 - z_2}{z_1^3 z_2} + \int \frac{z_1 - p^2}{z_1^2 z_2^2} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

da cui seguono le relazioni:

$$\begin{cases} \int \frac{D-6}{z_1^2 z_2} - \int \frac{4m^2}{z_1^3 z_2} + \int \frac{p^2 - 2m^2}{z_1^2 z_2^2} = 0 \\ -2 \int \frac{1}{z_1^2 z_2} = \int \frac{2p^2}{z_1^3 z_2} - \int \frac{2}{z_1^3} - \int \frac{p^2}{z_1^2 z_2^2} = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} (D-6)I[2, 1] - 4m^2 I[3, 1] + (p^2 - 2m^2)I[2, 2] = 0 \\ -2I[2, 1] - 2p^2 I[3, 1] + 2I[3, 0] + p^2 I[2, 2] = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Il sistema ottenuto, più complesso di quelli precedenti, può essere risolto notando che gli integrali  $I[3, 0]$  e  $I[2, 1]$  che appaiono non sono incogniti, ma possono essere ricavati dalle relazioni trovate in precedenza. Infatti, lasciando per ora questi indicati e risolvendo il sistema nelle incognite  $I[3, 1]$  e  $I[2, 2]$  si ottiene:

$$I[3, 1] = \frac{2(p^2 - 2m^2)I[3, 0] + (-Dp^2 + 4m^2 + 4p^2)I[2, 1]}{2p^2(p^2 - 4m^2)} \quad (3.29)$$

$$I[2, 2] = \frac{(-Dp^2 + 6p^2 - 4m^2)I[2, 1] + 4m^2 I[3, 0]}{p^2(p^2 - 4m^2)} \quad (3.30)$$

Si potrebbe poi continuare a ricercare altre relazioni di integrali per ulteriori valori di  $\alpha_i$ , che produrrebbero un sistema di *seed equations* più esteso, utile per ricavare le espressioni di integrali caratterizzati da propagatori elevati a potenze differenti. Nel caso particolare dell'integrale del tipo *one-loop*, si verifica però che sono sufficienti due integrali per esprimere tutti gli altri della stessa famiglia come combinazione lineare di questi. Si può dunque affermare che per tale problema siano necessari due *master integrals*, la cui scelta è arbitraria. Si scelgono dunque  $I[0, 1]$  e  $I[1, 1]$  come *master integrals*, e si verifica che dal sistema di *IBPs* trovato in precedenza, è possibile ricavare le espressioni degli altri integrali dello spazio  $I[\alpha_1, \alpha_2]$ . Si può dimostrare, ad esempio, che gli integrali con le espressioni 3.29 e 3.30 si possono ricondurre ai due *master integrals* scelti.

Infatti l'integrale  $I[2, 1]$  può essere espresso come combinazione lineare di questi ultimi:

$$I[2, 1] = \frac{(D-3)}{(4m^2-p^2)} I[1, 1] - \frac{1}{(4m^2-p^2)} I[0, 2],$$

ottenuto dalla Eq. 3.22. Dalla Eq. 3.19 si ha:

$$I[2, 0] = \frac{D-2}{2m^2} I[0, 1],$$

che sostituita alla precedente:

$$I[2, 1] = \frac{D-3}{4m^2-p^2} I[1, 1] - \frac{D-2}{2m^2(4m^2-p^2)} I[0, 1], \quad (3.31)$$

ottenendo così una espressione per  $I[2, 1]$  come combinazione lineare dei *master integrals* scelti.

Anche l'integrale  $I[3, 0]$  può facilmente essere espresso come combinazione lineare dei due integrali della base, infatti combinando le Eq. 3.26 e 3.24 si ottiene la relazione:

$$I[3, 0] = \frac{(D-4)(D-2)}{8m^4} I[0, 1]. \quad (3.32)$$

Inserendo le ultime due relazioni trovate nelle Eq. 3.29 e 3.30, si ottengono le seguenti:

$$I[3, 1] = \frac{I[0, 1](D-4)(D-2)(2m^2-p^2)(4m^2-p^2)}{8m^4 p^2 (4m^2-p^2)^2} + \frac{2m^2 [I[0, 1](D-2) - 2m^2(D-3)I[1, 1]] (-Dp^2 + 4m^2 + 4p^2)}{8m^4 p^2 (4m^2-p^2)^2}, \quad (3.33)$$

$$I[2, 2] = \frac{-I[0, 1](D-4)(D-2)(4m^2-p^2)}{2m^2 p^2 (4m^2-p^2)^2} - \frac{[I[0, 1](D-2) - 2m^2(D-3)I[1, 1]] (Dp^2 + 4m^2 - 6p^2)}{2m^2 p^2 (4m^2-p^2)^2}. \quad (3.34)$$

Dunque, le ultime relazioni trovate assieme a quelle provenienti dai *seeds* precedenti, mostrano come sia stato possibile ricondurre tutti gli integrali della famiglia  $I[\alpha_1, \alpha_2]$  ai due *master integrals*  $I[0, 1]$  e  $I[1, 1]$  scelti arbitrariamente, usando solamente le relazioni IBP e di simmetria.

In conclusione, si sono delineati i metodi di riduzione degli integrali di Feynman, che rappresentano i contributi dei diagrammi di Feynman all'ampiezza  $M$  di un processo di interazione tra particelle fondamentali. Introducendo le famiglie di integrali caratterizzate dallo stesso insieme di propagatori, che formano uno spazio vettoriale, è possibile individuare un insieme più piccolo di integrali indipendenti, detti *master integrals*, le cui combinazioni lineari permettono di ricondurre qualunque altro integrale dello spazio a questi. Nel capitolo si è quindi applicato il metodo di riduzione a *master integrals* a integrali di Feynman, sfruttando in particolar modo le relazioni lineari IBPs.

# Capitolo 4

## Applicazione a integrali in meccanica quantistica

Il metodo di *integration-by-parts* esposto nel capitolo precedente si è rivelato uno strumento potente per la semplificazione sistematica di integrali complessi che emergono dai diagrammi di Feynman. In tale contesto, esso consente di stabilire relazioni tra integrali a più loop, riducendo il problema al calcolo di un numero finito di *master integrals*.

L'applicazione del metodo *IBP* non si limita tuttavia alla teoria dei campi: nel capitolo che segue se ne esplora l'utilizzo nel calcolo di integrali tipici della meccanica quantistica. In particolare, ci si concentra sul calcolo apparentemente complesso degli elementi di matrice dell'oscillatore armonico quantistico, individuandone la forma integrale e applicando le relazioni lineari discusse in Sez. 3.2.

### 4.1 Elementi di matrice nell'oscillatore armonico

L'oscillatore armonico quantistico rappresenta un modello fondamentale nella meccanica quantistica, grazie alle sue innumerevoli applicazioni in fisica teorica e sperimentale. Dall'analisi del modello si evince che i livelli energetici dell'oscillatore sono etichettati con il numero quantico  $|n\rangle$  intero e non negativo:

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico nello spazio delle coordinate, assumendo massa e pulsazioni unitarie  $m = \omega = 1$ , sono:

$$\langle z|n\rangle = \psi_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} W_n(z), \quad (4.1)$$

dove si sono definite le funzioni polinomiali  $W_n(z)$  come polinomi di Hermite  $H_n(z)$  (App. B) normalizzati da un fattore  $N_n$ :

$$W_n(z) \equiv N_n H_n(z), \quad (4.2)$$

$$N_n \equiv (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Nello studio del modello di oscillatore armonico, spesso ci si ritrova a dover calcolare delle osservabili o valutare la probabilità che il sistema transisca da uno stato  $|n\rangle$  a uno stato  $|m\rangle$  tramite un operatore dipendente da una potenza della coordinata  $z$ :

$$\langle m|z^k|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_m(z) z^k \psi_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} W_m(z) z^k W_n(z),$$

dove si è sostituita alle autofunzioni la definizione in Eq. 4.1.

D'ora in avanti si trascureranno i termini di normalizzazione dei polinomi  $W_n(z)$ ; in seguito verranno poi reinseriti nelle equazioni ottenute. In particolare, gli elementi di matrice possono essere valutati con la seguente espressione:

$$\langle m|z^k|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^k H_m(z) H_n(z) e^{-z^2}, \quad (4.4)$$

Essendo i polinomi di Hermite  $H_n(z)$  polinomi nella variabile  $z$ , è possibile racchiuderli nel termine  $z^k$ . Dunque, gli integrali da valutare dipenderanno dall'indice  $k$ , ovvero l'esponente a cui è elevata la coordinata  $z$ , e avranno la seguente espressione:

$$I_k^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^k. \quad (4.5)$$

L'Eq. 4.5 rappresenta la famiglia di integrali su cui applicare relazioni lineari come esposto nel capitolo precedente, così da ridurre notevolmente il calcolo di questi a un numero più ridotto. In altre parole, si vuole trovare una base dello spazio vettoriale formato dagli  $I_k^{(n)}(z)$ , che sarà costituita dai relativi *master integrals*  $G_k$ , così da poter esprimere un qualunque integrale dello spazio come combinazione lineare di questi ultimi:

$$I_k = \sum_k c_k G_k.$$

In particolare, attraverso l'applicazione delle relazioni IBPs, si troverà che la base dello spazio è in realtà costituita da un solo *master integral*, che si etichetta con  $I_0$ .

Attraverso l'applicazione dell'algoritmo di Laporta per la famiglia di integrali 4.5, si dimostrano le seguenti relazioni [5]:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (4.6)$$

$$\langle n|z^{2k+1}|n\rangle = 0, \quad (4.7)$$

$$\langle n|z^4|n\rangle = \frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1), \quad (4.8)$$

che saranno dedotte in seguito come applicazioni esplicite del metodo IBP.

## 4.2 Riduzione degli integrali $I_k^{(n)}$ tramite IBP

Si vuole dunque trovare un metodo efficace per risolvere integrali nella seguente forma:

$$I_k^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^k H_n(z)^2 e^{-z^2},$$

che, come anticipato, emergono dal calcolo degli elementi di matrice dell'oscillatore armonico quantistico. In questa sezione ci si concentra in particolare sulla struttura del termine polinomiale  $z^k$ , tralasciando la dipendenza da  $H_n(z)$ , dal momento che si può racchiudere in un unico termine polinomiale.

Si considera dunque la famiglia semplificata di integrali seguente:

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^k e^{-z^2}.$$

Applicando a questa il metodo IBP, si nota innanzitutto che la derivata totale del prodotto:

$$\frac{d}{dz} [z^k e^{-z^2}]$$

è integrabile su tutto  $\mathbb{R}$ , poiché il termine esponenziale  $e^{-z^2}$  domina su ogni potenza di  $z$ , facendo decadere il prodotto in maniera sufficientemente rapida per  $z \rightarrow \pm\infty$ . Di conseguenza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} [e^{-z^2} z^k] = 0.$$

Applicando la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto, si può sviluppare il termine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (kz^{k-1} e^{-z^2} - 2z^{k+1} e^{-z^2}) dz = 0,$$

da cui segue:

$$k \int_{-\infty}^{\infty} z^{k-1} e^{-z^2} dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} z^{k+1} e^{-z^2} dz. \quad (4.9)$$

Riconoscendo gli integrali come definizioni di  $I_k^{(n)}$ , si ottiene la relazione ricorsiva:

$$kI_{k-1} = 2I_{k+1}. \quad (4.10)$$

La Eq. 4.10 rappresenta la relazione lineare cercata attraverso il metodo IBP che permette poi di trovare relazioni esplicite tra integrali con indice  $k$  specifico: si può dunque affermare che quella trovata è la *template equation* risolutiva del problema.

Come è stato fatto nel capitolo precedente, si procede sostituendo all'indice  $k$  valori specifici:

- per  $k = 0$ :

$$I_1 = 0, \quad (4.11)$$

ed esplicitando la forma di  $I_1$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z = 0,$$

come si può facilmente verificare notando la disparità della funzione integranda totale.

- per  $k = 1$ :

$$I_0 = 2I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}I_0. \quad (4.12)$$

- per  $k = 2$ :

$$2I_1 = 2I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 0. \quad (4.13)$$

- per  $k = 3$ :

$$3I_2 = 2I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{3}{4}I_0. \quad (4.14)$$

Dunque, riassumendo quanto emerso nelle Eq. 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, si perviene al seguente risultato:

$$\begin{cases} I_k = 0 & \text{se } k \text{ dispari,} \\ I_{k+2} = \frac{(k+1)}{2}I_k & \text{se } k \text{ pari.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Dunque, il risultato che si è ottenuto mostra come tutti gli integrali della famiglia  $I_k^{(n)}$  possano essere ricondotti al solo integrale  $I_0$ , che in forma esplicita corrisponde all'integrale il cui risultato è tabulato:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Si conclude che lo spazio vettoriale della famiglia di integrali individuata  $I_k$  ha dimensione pari a 1, essendo generato da una base costituita unicamente dal *master integral*  $I_0$ .

### 4.3 Applicazioni: dimostrazione di risultati notevoli

Una volta trovata la relazione di ricorrenza che lega tutti gli integrali dello spazio vettoriale  $I_k$  all'unico *master integral*  $I_0$  attraverso il metodo IBP, si procede con la verifica dei risultati elencati in Sez. 4.1.

### 4.3.1 Ortogonalità delle autofunzioni (Eq. 4.6)

Si dimostra innanzitutto che le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico associate a diversi livelli energetici sono ortogonali tra loro:

$$\langle n|m \rangle = \delta_{nm}.$$

Utilizzando la definizione delle autofunzioni come dato in Eq. 4.1, si ottiene:

$$\langle n|m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z)\psi_m(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} W_n(z)W_m(z) dz. \quad (4.16)$$

Poiché  $W_n(z) \propto H_n(z)$ , e i polinomi di Hermite sono ortogonali rispetto al peso  $e^{-z^2}$ , si riporta direttamente il risultato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz = 0 \quad \text{per } n \neq m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2} dz = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad \text{per } n = m,$$

che si ottiene valutando ulteriori relazioni ricorsive. Includendo poi il fattore di normalizzazione  $N_n$ , si verifica facilmente che:

$$\langle n|m \rangle = \delta_{nm}.$$

Per applicare la relazione trovata nella sezione precedente attraverso il metodo IBP al seguente risultato, si valutano due casi espliciti:

- $n = m = 1$

Si consideri l'integrale che rappresenta il prodotto scalare tra le due autofunzioni uguali del primo livello energetico:

$$\langle 1|1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(z)^2 e^{-z^2} dz.$$

Dalla definizione di polinomi di Hermite si ha  $H_1 = 2z$ , dunque si ottiene:

$$\langle 1|1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (2z)^2 e^{-z^2} dz = 4 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = 4I_2.$$

Sfruttando la relazione ricorsiva dimostrata in precedenza, si ha :

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 \quad \Rightarrow \quad \langle 1|1 \rangle = 4 \cdot \frac{1}{2}I_0 = 2I_0.$$

Come atteso, il risultato risulta essere proporzionale a  $I_0$ , ed esplicitandone il valore noto, e includendo nuovamente il fattore di normalizzazione  $N_n$  che si era trascurato in precedenza, si ottiene:

$$\langle 1|1 \rangle = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = 1.$$

- $n = 1, m = 2$ :

Si consideri ora il prodotto scalare tra due autofunzioni associate a diversi livelli energetici:

$$\langle 1|2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(z)H_2(z)e^{-z^2} dz.$$

Si ha in particolare:

$$H_1(z) = 2z, \quad H_2(z) = 4z^2 - 2.$$

Pertanto:

$$\langle 1|2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2z(4z^2 - 2)e^{-z^2} dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (4z^3 - 2z)e^{-z^2} dz.$$

Scomponendo l'integrale in una combinazione lineare di integrali della famiglia  $I_k$ :

$$\langle 1|2\rangle = 8 \int_{-\infty}^{\infty} z^3 e^{-z^2} dz - 4 \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz = 8I_3 - 4I_1.$$

Ma dalla relazione precedentemente ottenuta, gli integrali con indice  $k$  dispari sono nulli, per cui si ottiene in definitiva:

$$\langle 1|2\rangle = 0.$$

Così si sono verificate alcune relazioni di ortogonalità tra autofunzioni a indici uguali o diversi attraverso le relazioni IBP.

### 4.3.2 Valore medio di potenze dispari (Eq. 4.7)

Un risultato importante emerso dall'applicazione del metodo IBP è che tutti gli integrali della famiglia

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} z^k e^{-z^2} dz$$

si annullano per valori dispari di  $k$ . Da questa relazione è possibile anche verificare che tutti gli elementi di matrice costituiti da potenze dispari di  $z$  si annullano, cioè che  $\langle n|z^{2k+1}|n\rangle = 0$ . Tale fatto può essere dimostrato per tutti gli indici  $k$ , senza considerare casi espliciti, come invece si è fatto nel paragrafo precedente.

Si attua dunque una dimostrazione per induzione: si considera come ipotesi induttiva il fatto che  $\langle n|z^{2k+1}|n\rangle = 0$  vale per  $n$  e  $n - 1$  generici verificando che valga per  $n = 0$  e  $n = 1$ , poi lo si dimostra per  $n + 1$ . Infatti:

- $n = 0$ :

$$\langle 0|z^{2k+1}|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+1} = I_{2k+1} = 0;$$

- per  $n = 1$ :

$$\langle 1|z^{2k+1}|1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+1} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+3} = 4I_{2k+3} = 0,$$

per dimostrazioni precedenti.

Avendo dunque verificato che la relazione  $\langle n|z^{2k+1}|n\rangle = 0$  è vera per  $n = 0$  e  $n = 1$ , si suppone sia vera per  $n$  e  $n - 1$  generici. Dunque, si dimostra per  $n + 1$ :

$$\langle n + 1|z^{2k+1}|n + 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_{n+1}(z)^2 z^{2k+1}$$

e usando per  $H_{n+1}(z)^2$  la formula di ricorrenza:

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle n+1|z^{2k+1}|n+1\rangle &= 4 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+3} H_n(z)^2 + n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+1} H_{n-1}(z)^2 \right. \\ &\quad \left. - 8n \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+2} H_n(z) H_{n-1}(z) \right] \\ &= 4 \left[ \langle n|z^{2k+3}|n\rangle + n^2 \langle n-1|z^{2k+1}|n-1\rangle \right. \\ &\quad \left. - 8n \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^{2k+2} H_n(z) H_{n-1}(z) \right] \end{aligned}$$

Notando che i primi addendi sono riconducibili all'ipotesi induttiva, e dunque pari a 0, e che il terzo addendo corrisponde all'integrale di una funzione dispari su tutto l'asse reale, dal momento che il prodotto di due polinomi di Hermite con indice  $n$  differente risulta dispari, si ottiene che:

$$\langle n+1|z^{2k+1}|n+1\rangle = 0$$

### 4.3.3 Valor medio di $z^4$ per stati $|n\rangle$ (Eq. 4.8)

Si verifica infine che il valor medio dell'operatore  $z^4$  sullo stato individuato da  $|n\rangle$  è riconducibile ad un polinomio in  $n$ :

$$\langle n|z^4|n\rangle = \frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1).$$

Come è stato fatto per la verifica della Eq. 4.6, si verifica per semplicità la relazioni per alcuni valori espliciti di  $n$ :

- $n = 0$ :

$$\langle 0|z^4|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^4.$$

Applicando le relazioni di ricorrenza derivate tramite IBP:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0, \quad I_4 = \frac{3}{4}I_0,$$

e considerando che:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi},$$

si ottiene:

$$\langle 0|z^4|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{4}I_0 = \frac{3}{4},$$

che corrisponde esattamente alla parte destra dell'uguaglianza:

$$\frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1) = \frac{3}{4},$$

per  $n = 0$ .

- $n = 1$ :

$$\langle 1|z^4|1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^4 \cdot 4z^2 = 4 \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} z^6 = 4I_6,$$

e quindi:

$$\langle 1|z^4|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 2} \cdot 4I_6 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}I_6.$$

Per ottenere  $I_6$  si sfrutta la relazione ricorsiva:

$$I_4 = \frac{3}{4}I_0, \quad \Rightarrow \quad I_6 = \frac{5}{2}I_4 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}I_0 = \frac{15}{8}I_0.$$

Pertanto:

$$\langle 1|z^4|1\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{5}{8}I_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{15}{4},$$

che corrisponde alla parte destra dell'uguaglianza da verificare:

$$\frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1) = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}.$$

Tali risultati evidenziano come il metodo *IBP* consenta di ottenere queste quantità evitando il calcolo diretto di integrali complessi. In particolare, in questo capitolo è stato applicato il metodo dell'integrazione per parti (*IBP*) al calcolo di integrali del tipo  $\langle n|z^k|n\rangle$ , che compaiono nello studio dell'oscillatore armonico quantistico.

Attraverso una strategia analoga a quella utilizzata nella riduzione dei diagrammi di Feynman, si è ottenuta una relazione di ricorrenza che ha permesso di esprimere tutti gli integrali della forma  $\int dz e^{-z^2} z^k H_n(z)^2$  in funzione di un solo *master integral*, ovvero  $I_0 = \int dz e^{-z^2}$ . Tale approccio ha permesso di semplificare notevolmente il calcolo dei valori medi di potenze di  $z$ , mostrando come tecniche di calcolo simbolico, ispirate alla fisica delle particelle, possano essere utilmente applicate anche a contesti più semplici e accademici come l'oscillatore armonico.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Il lavoro di tesi ha avuto come obiettivo lo studio delle relazioni lineari che caratterizzano integrali provenienti da due contesti distinti: gli integrali di Feynman in teoria dei campi e gli elementi di matrice dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica. Si è posta particolare attenzione al metodo di *Integration-by-parts* (IBP) per ridurre complessi insiemi di integrali a un numero limitato di questi indipendenti tra loro. In questo modo è stato possibile costruire una base di integrali dalla quale ricavare tutti gli altri, risolvendo così il problema in maniera più veloce.

Nel primo capitolo è stato introdotto il formalismo della teoria dei campi applicata a processi di decadimenti e scattering, attraverso la regola d'oro di Fermi e la sua connessione con le grandezze osservabili di interesse, quali vita media e sezione d'urto. Il calcolo dei tassi di transizione per tali fenomeni ha evidenziato il ruolo centrale dell'ampiezza di transizione  $M$ , grandezza alla quale può essere applicato il calcolo perturbativo, che conduce però inevitabilmente alla risoluzione di un numero elevato di integrali complicati e spesso divergenti. Si è mostrato però come quest'ultimo ostacolo possa essere superato attraverso le tecniche di regolarizzazione e rinormalizzazione, che consentono di trattare gli integrali divergenti e proporre una rappresentazione ben definita utile per la loro risoluzione.

Nel terzo capitolo si è posta l'attenzione sulle relazioni lineari che sussistono tra integrali di Feynman. Dopo aver introdotto le notazioni e le rappresentazioni utili alla risoluzione di tali integrali, si sono dimostrate tali relazioni, con particolare attenzione per il metodo IBP, strumento potente per generare relazioni lineari tra integrali della stessa famiglia. Inoltre, si è mostrato come, attraverso l'algoritmo di Laporta, sia possibile organizzare sistematicamente tali relazioni fino a ridurre intere famiglie di integrali di Feynman a pochi *master integrals*, dai quali poi è possibile ricavare qualunque altro integrale della famiglia di partenza. In particolare, è stato presentato l'esempio del diagramma *one-loop bubble*, in cui si sono ricavate diverse relazioni esemplificative tra integrali della famiglia  $I[\alpha_1, \alpha_2]$  attraverso il metodo di riduzione IBP. Si è dimostrato in particolare che è sufficiente conoscere la forma dei soli due *master integrals*  $I[0, 1]$  e

$I[1, 1]$  per calcolare tutti gli altri integrali della famiglia. Tali risultati sottolineano come la complessità del calcolo perturbativo in teoria dei campi possa essere resa notevolmente più semplice attraverso un approccio algoritmico che individua una base minimale di integrali da valutare.

Nel quarto capitolo il metodo già presentato è stato applicato a un contesto più accademico, ossia quello della meccanica quantistica. Si sono considerati in particolare gli integrali che emergono dal calcolo degli elementi di matrice dell'oscillatore armonico, indicati con  $I_k^{(n)}$ . Attraverso l'utilizzo delle relazioni di ricorrenza dei polinomi di Hermite e delle relazioni derivanti dal metodo IBP, si è dimostrata la formula ricorsiva:

$$kI_{k-1}^{(n)} = 2I_{k+1}^{(n)},$$

che permette di stabilire una struttura di relazioni lineari che risolvono anche in questo caso la complessità del calcolo di un numero elevato di integrali. In particolare, tale risultato ha permesso di verificare l'ortonormalità delle autofunzioni dell'oscillatore armonico, e dimostrare che i valori medi di potenze dispari della coordinata  $z$  si annullano. Infine, si è verificato il risultato esplicito del valore medio di  $z^4$  negli stati  $|n\rangle$ . Tali risultati sono stati ottenuti solo grazie al raggiungimento della conclusione che l'insieme di integrali provenienti dal calcolo di elementi di matrice dell'oscillatore armonico può essere ridotto al calcolo dell'unico *master integral*  $I_0$ .

L'applicazione del metodo al contesto della meccanica quantistica mostra come la struttura concettuale del metodo IBP non sia un artificio della teoria dei campi, ma un principio matematico più generale.

In conclusione, il lavoro ha mostrato come il metodo IBP, inizialmente nato come strumento per la riduzione di integrali di Feynman in teoria dei campi, si riveli in realtà un valido approccio in settori della fisica apparentemente disgiunti.

# Appendice A

## Delta di Dirac

La funzione Delta di Dirac  $\delta(x)$  è una funzione caratterizzata da una forma infinitamente piccata all'origine degli assi e nulla in qualunque altro punto del piano. In particolare, la sua espressione è la seguente:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

e gode della seguente proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{A.2})$$

Per essere precisi, non si può affermare che la Delta di Dirac sia una funzione, dal momento che assume un valore infinito per  $x = 0$ ; piuttosto si indica come una distribuzione di funzioni, o funzione generalizzata.

Si considera ora  $f(x)$  una funzione continua (che non sia un'altra Delta di Dirac), si può affermare che il prodotto  $f(x)\delta(x)$  è nullo ovunque tranne che in  $x = 0$ , da cui segue che:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad (\text{A.3})$$

cioè dal momento che il prodotto è sempre nullo eccetto che in  $x = 0$ , si può sostituire la  $f(x)$  con il valore che assume nell'origine. Quest'ultima rappresenta una delle proprietà più importanti della  $\delta(x)$ , dal momento che permette di ricavare la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0), \quad (\text{A.4})$$

da cui si evince che il ruolo della  $\delta(x)$  sotto il simbolo di integrale è quello di selezionare i valori della funzione  $f(x)$  in  $x = 0$ , cioè nel punto dell'asse delle  $x$  dove la  $\delta(x)$  è diversa da 0.

Considerando una traslazione nell'asse delle  $x$ , si ottiene una Delta di Dirac con il picco centrato in un punto diverso dallo 0. Ad esempio, volendo centrare la Delta sul punto generico  $x = a$ :

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases}, \quad (\text{A.5})$$

da cui le proprietà più generali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (\text{A.6})$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a), \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a). \quad (\text{A.8})$$

Si consideri poi la funzione  $\delta(kx)$ , dove  $k$  è un numero reale diverso da 0, e se ne studi il comportamento sotto integrale moltiplicato per la funzione  $f(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx) dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y) \frac{dy}{k} = \pm \frac{1}{k} f(0) = \frac{1}{|k|} f(0),$$

dove si è applicato il cambiamento di variabile  $y = kx$ , e si è tenuto conto del segno di  $k$  con il valore assoluto nell'ultimo passaggio. Da ciò si ricava che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \frac{1}{|k|} \delta(x) \right] dx, \quad (\text{A.9})$$

che comporta l'uguaglianza:

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x). \quad (\text{A.10})$$

# Appendice B

## Polinomi di Hermite

Il sistema di potenze  $x^n$  risulta essere una base di funzioni regolari completa, tuttavia non ortonormale: calcolando il prodotto scalare  $\langle x^n | x^m \rangle \neq \delta_{n,m}$ . Ortogonalizzando la base con il metodo di Gram Schmidt si definiscono i polinomi ortogonali  $p_n(x)$  con  $n$  pari al grado, tali che:

$$\langle x^n | x^m \rangle = h_n \delta_{n,m},$$

dove  $h_n$  è una costante di normalizzazione. Generalizzando inoltre il prodotto scalare come un integrale svolto su una misura più generica come  $d\mu = w(x)dx$ , dove  $w(x)$  è una funzione detta peso del prodotto scalare generalizzato. In tal caso il prodotto scalare tra due funzioni  $f$  e  $g$  dello spazio di polinomi risulta:

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\mu = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

Le sequenze di polinomi ortogonali si possono ottenere attraverso la formula di Rodrigues:

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) X(x)^n], \quad (\text{B.1})$$

con  $X(x)$  un polinomio al più del secondo grado e  $K_n$  una costante di normalizzazione. I polinomi di Hermite sono polinomi ortonormali e si indicano genericamente come  $H_n(x)$ , con la scelta di:

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Per cui i prodotti scalari tra polinomi nello spazio dei polinomi di Hermite risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_{n'}(x) e^{-x^2} dx = h_n \delta_{n,n'}, \quad (\text{B.2})$$

con

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!. \quad (\text{B.3})$$

In tale contesto la formula di Rodrigues risulta essere:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (\text{B.4})$$

I polinomi di Hermite soddisfano inoltre l'equazione differenziale:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (\text{B.5})$$

e la relazione di ricorrenza:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (\text{B.6})$$

Infine, si riportano le formule esplicite dei polinomi di Hermite:

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 2(2x^2 - 1),$$

$$H_3(x) = 4(2x^3 - 3x).$$

# Bibliografia

- [1] David J. Griffiths: *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc., 1987, ISBN 0-471-60386-4.
- [2] Gaia Fontana: *Rational algorithms for the decomposition of Feynman Integrals via Intersection Theory*, 2023.
- [3] Simon Badger, Johannes Henn, Jan Plefka and Simone Zoia: *Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory*, 15 May 2025.
- [4] S. Laporta, *High-precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations*, Int. J. Mod. Phys. A 15 (2000), 5087-5159 doi:10.1142/S0217751X00002159 [arXiv:hep-ph/0102033 [hep-ph]].
- [5] Sergio L. Cacciatori, Pierpaolo Mastrolia: *Intersection Numbers in Quantum Mechanics and Field Theory*, arXiv:2211.03729 [hep-th], 7 Nov. 2022.