

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Misura sperimentale della temperatura
critica nella condensazione di Bose-Einstein
di atomi

Relatore:
Prof. Francesco Minardi

Presentata da:
Federica Di Bernardo

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

Il presente lavoro di tesi si concentra sullo studio della condensazione di Bose-Einstein in un gas di atomi di ^{87}Rb confinato in una trappola armonica anisotropa. Regolando la durata del processo di raffreddamento evaporativo, finalizzato alla riduzione della temperatura del sistema, il gas è stato analizzato in presenza di una frazione condensata variabile tra l'1% e il 25%. Tramite procedure di fitting, i dati sperimentali ottenuti per la distribuzione di densità sono stati confrontati con i profili previsti teoricamente per il condensato e per la componente termica, ricavati adottando la descrizione semiclassica degli stati eccitati e l'approssimazione di Thomas-Fermi nella condizione di gas diluito. Dai valori ottimali dei parametri restituiti dai fit, si è calcolata la temperatura critica nell'ipotesi di gas ideale, ottenendo valori dell'ordine di 100 nK, variabili in funzione della durata dell'evaporazione secondo un andamento qualitativamente compatibile con la previsione teorica. Per stimare la temperatura critica con maggiore accuratezza, si sono valutate le correzioni da apportare ai risultati ottenuti, dovute al numero finito di particelle del gas e alle interazioni interatomiche.

Indice

Introduzione	1
1 Teoria della condensazione di Bose-Einstein	3
1.1 Gas di Bose ideale in una trappola armonica	3
1.1.1 Condensazione in un gas di Bose ideale	3
1.1.2 Confinamento in una trappola armonica anisotropa	4
1.2 Effetti del numero finito di particelle	10
1.3 Effetti delle interazioni	12
1.3.1 Parametro d'ordine e descrizione di campo medio	12
1.3.2 Approssimazione di Thomas-Fermi	14
1.3.3 Variazione della temperatura critica e della frazione condensata	18
1.4 Espansione libera	21
2 Apparato sperimentale e analisi della nube atomica	23
2.1 Apparato e procedure sperimentali	23
2.1.1 Trappole magnetiche	26
2.1.2 Trappole ottiche	28
2.1.3 Raffreddamento evaporativo	30
2.2 Rilevazione della nube atomica	33
2.3 Misurazioni	35
2.4 Analisi delle immagini	36
2.5 Calcolo della temperatura critica e della frazione condensata	39
3 Risultati dell'analisi e discussione	41
3.1 Risultati dei fit	41
3.1.1 Approssimazione della densità della componente termica	42
3.2 Profili di temperatura critica e frazione condensata	43
3.3 Accuratezza delle approssimazioni e correzioni alla temperatura critica	49
Conclusioni	51
Bibliografia	53

Introduzione

La previsione teorica della condensazione di Bose-Einstein risale al 1925, quando Einstein estese alle particelle massive i concetti introdotti per lo studio dei fotoni in un articolo del 1924 del fisico S. N. Bose, elaborando una nuova statistica, detta di Bose-Einstein, alla quale obbediscono particelle aventi spin intero, denominate bosoni. Nel regime quantistico, infatti, le proprietà termodinamiche di un sistema vengono modificate significativamente dall'indistinguibilità intrinseca delle particelle identiche che lo compongono. La funzione d'onda di un sistema di bosoni identici è simmetrica rispetto allo scambio di una qualsiasi coppia di particelle. Tale caratteristica rende possibile l'occupazione del medesimo stato di singola particella da parte di più di un bosone del sistema, condizione proibita ai fermioni, aventi spin semintero, per i quali la funzione d'onda del sistema è antisimmetrica rispetto allo scambio di una qualsiasi coppia di particelle. Considerando un gas di bosoni massivi e non interagenti, Einstein prevede il verificarsi di una transizione di fase ad una temperatura, dipendente dal sistema, al di sotto della quale una frazione finita di bosoni occupa lo stato di singola particella di minima energia. Questo fenomeno, noto come "condensazione di Bose-Einstein" e conseguenza della statistica dei bosoni, comporta la formazione di una nuova fase della materia, il condensato di Bose-Einstein, che coesiste con la restante parte dei bosoni del gas negli stati eccitati. Per estendere la trattazione a sistemi di particelle reali, nel 1947 Bogoliubov sviluppò la prima teoria microscopica per gas di Bose interagenti, osservando che il fenomeno di condensazione non viene alterato sensibilmente nell'ipotesi di sistema diluito e debolmente interagente.

La realizzazione sperimentale di un condensato di Bose-Einstein richiede procedure di raffreddamento che mantengano le sostanze studiate allo stato gassoso, evitando la formazione di solidi e liquidi, per i quali gli effetti delle interazioni sono significativi. A partire dagli anni '70, gli avanzamenti della fisica atomica nelle tecniche di intrappolamento magnetico e ottico e nei meccanismi di raffreddamento, favorirono il concentrarsi degli studi sperimentali su gas di atomi neutri diluiti. In particolare, i principali candidati per la realizzazione della condensazione di Bose-Einstein divennero gli atomi alcalini, aventi una struttura di livelli energetici adatta al raffreddamento per mezzo di transizioni ottiche eccitabili dalle luci laser disponibili sperimentalmente. Combinando il confinamento in trappole magnetiche e differenti tecniche di raffreddamento, fino a temperature dell'ordine di frazioni di microkelvin, nel 1995 vennero raggiunte condizioni di temperatura e densità adatte ad ottenere la condensazione in gas di atomi di ^{87}Rb [1] e ^{23}Na [2]. Per questi sistemi di bosoni in trappola, fortemente non omogenei, la condensazione di Bose-Einstein si mostra non solo nello spazio degli impulsi, ma anche in quello delle coordinate, rendendo

possibile l'analisi sperimentale del condensato e fornendo nuove opportunità di studio. La condizione di intrappolamento, infatti, oltre ad intensificare gli effetti delle interazioni nel condensato, consente di indagare altre proprietà, come la dipendenza della frazione condensata dalla temperatura e la distribuzione di densità del gas.

Lo studio dei condensati di Bose-Einstein rappresenta una delle aree più attive della ricerca in fisica contemporanea, per l'opportunità che questi sistemi offrono di esplorare fenomeni quantistici su scala macroscopica e per la ricchezza di configurazioni realizzabili, grazie alle quali si continuano ad ottenere risultati rilevanti, sia sul piano teorico che su quello sperimentale.

Il presente elaborato, a seguito di una trattazione teorica della condensazione di Bose-Einstein, sviluppata nel primo capitolo, si concentra su un esperimento condotto presso il laboratorio LENS del Polo scientifico e tecnologico di Sesto Fiorentino, finalizzato alla realizzazione e allo studio della condensazione in un gas di atomi di ^{87}Rb . L'apparato sperimentale, descritto nel secondo capitolo, esegue il confinamento degli atomi tramite trappole magnetiche e ottiche. La successiva procedura di raffreddamento evaporativo, funzionale a ridurre il numero di atomi e la temperatura, fino a valori dell'ordine delle centinaia di nK, consente di raggiungere le condizioni necessarie alla formazione di una componente di condensato. Nella presa dati a cui ho partecipato, il gas viene esaminato in condizioni di temperatura e confinamento differenti, in modo da valutare la variazione della frazione condensata e ottenere informazioni sulla temperatura di transizione del sistema. Per analizzare i dati raccolti, ho implementato un programma in Python che esegue opportune routine di fit, presentate nel secondo capitolo, al fine di confrontare i valori sperimentali di densità del gas con le previsioni teoriche. Nel terzo capitolo, i risultati ottenuti per gli andamenti delle grandezze analizzate sono discussi in riferimento alle ipotesi formulate per la descrizione teorica del sistema.

Capitolo 1

Teoria della condensazione di Bose-Einstein

La trattazione teorica della condensazione di Bose-Einstein, presentata in questo capitolo, si sviluppa a partire dalla descrizione delle proprietà di un gas di bosoni identici non interagenti, confinati in una trappola armonica. Vengono ricavate la distribuzione di densità della componente termica e la temperatura critica, impiegando la descrizione semiclassica per gli stati eccitati. Segue una discussione sulle conseguenze del numero finito di particelle che compongono le nubi atomiche realizzate sperimentalmente. Per studiare il profilo di densità del condensato, nel paragrafo successivo sono introdotte le interazioni tra bosoni in un gas diluito, concentrandosi su quelle repulsive, per le quali si tratta l'approssimazione di Thomas-Fermi. Infine, viene illustrata la variazione dei profili di densità dovuta all'espansione libera della nube seguente lo spegnimento della trappola.

1.1 Gas di Bose ideale in una trappola armonica

1.1.1 Condensazione in un gas di Bose ideale

Per un sistema di bosoni identici non interagenti, noto come gas di Bose ideale, all'equilibrio termodinamico a temperatura T , il numero medio di occupazione di uno stato di singola particella con energia ϵ_α è dato dalla funzione di distribuzione di Bose-Einstein,

$$f^0(\epsilon_\alpha) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\alpha - \mu)/kT} - 1}, \quad (1.1)$$

dove k è la costante di Boltzmann e μ è il potenziale chimico, parametro dovuto al vincolo di conservazione del numero totale N di particelle. I livelli energetici di singola particella, denotati con ϵ_α nell'ipotesi di spettro interamente discreto, dipendono dalla forma del potenziale a cui i bosoni sono soggetti. Il numero totale di particelle si ottiene dalla somma dei numeri medi di occupazione dei livelli energetici,

$$N = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{e^{(\epsilon_{\alpha} - \mu)/kT} - 1}, \quad (1.2)$$

dove g_α è la molteplicità del corrispondente livello ϵ_α , pari al numero di stati di singola particella con energia ϵ_α .

Ad alte temperature, il numero medio di occupazione di ogni stato è molto minore dell'unità; pertanto risulta $e^{(\mu-\epsilon_\alpha)/kT} \ll 1$, da cui $\mu \ll \epsilon_0$, dove ϵ_0 indica l'energia dello stato fondamentale di singola particella. Se si considera un sistema composto da un numero fissato di bosoni, al diminuire della temperatura il potenziale chimico aumenta in modo da mantenere N costante, come si deduce dalla (1.2). Al contempo, μ deve rispettare il vincolo fisico $\mu < \epsilon_0$ che, secondo la (1.1), esclude numeri medi di occupazione negativi. Dunque, diminuendo la temperatura, si raggiunge il limite $\mu \rightarrow \epsilon_0^-$. In questa condizione, il numero medio di occupazione del livello energetico più basso,

$$N_0 \equiv g_0 f^0(\epsilon_0) = \frac{g_0}{e^{(\epsilon_0-\mu)/kT} - 1}, \quad (1.3)$$

crece fino a divenire confrontabile con N . L'occupazione macroscopica dello stato fondamentale $N_0 \sim N$, ossia la disposizione di una frazione finita di particelle del gas nel livello di energia ϵ_0 , consiste nella condensazione di Bose-Einstein (BEC). La più alta temperatura alla quale il fenomeno si verifica è detta temperatura critica o temperatura di transizione T_c . Al diminuire della temperatura al di sotto di T_c , una porzione crescente di bosoni occupa lo stato fondamentale, fino a raggiungere a $T = 0$ il minimo valore di energia per il gas, in corrispondenza del quale tutti i bosoni sono disposti nel livello energetico più basso. Per gas di atomi alcalini con densità di 10^{14} – 10^{15} atomi/cm³, raggiunte nei recenti esperimenti, le temperature di transizione variano tipicamente tra 100 nK e qualche μ K. Per $T < T_c$, il sistema comprende due fasi distinte: una composta dalle N_0 particelle nello stato fondamentale, nota come condensato, e l'altra contenente i restanti N_T bosoni disposti negli stati eccitati, indicata come componente termica.

1.1.2 Confinamento in una trappola armonica anisotropa

Per lo studio della condensazione di Bose-Einstein, si utilizzano prevalentemente nubi di atomi alcalini contenenti 10^4 – 10^7 particelle, a temperature di qualche microkelvin. Le usuali tecniche di analisi di sistemi fisici a basse temperature non sono applicabili a questi gas, dato il ridotto numero di atomi e la vita media dell'ordine di secondi o minuti. Attualmente, le principali procedure sperimentali per la realizzazione della BEC impiegano trappole magnetiche e ottiche per il confinamento della nube atomica e realizzano la riduzione di temperatura tramite fasci laser e fasi di raffreddamento evaporativo. A causa di questi processi, gli atomi sono soggetti a specifiche forme di potenziale, da cui dipende la distribuzione statistica.

Le trappole comunemente impiegate per il confinamento di atomi di massa m generano un potenziale approssimabile con la forma quadratica

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (1.4)$$

corrispondente al potenziale di un oscillatore armonico tridimensionale anisotropo, noto come trappola armonica, con frequenze ω_x , ω_y e ω_z nelle tre direzioni spaziali. Tramite la

meccanica quantistica non relativistica, è possibile studiare gli effetti del confinamento di un sistema di N bosoni puntiformi e identici in un potenziale di questa forma, trascurando in prima approssimazione le interazioni. Gli autovalori dell'Hamiltoniana di singola particella corrispondono ai livelli energetici

$$\epsilon_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z, \quad (1.5)$$

dove i numeri quantici n_x , n_y e n_z assumono tutti i valori interi non negativi. Nello stato fondamentale del sistema tutti i bosoni sono collocati nello stato di singola particella a minore energia, descritto dalla funzione d'onda [3]

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega_{\text{ho}}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}, \quad (1.6)$$

in cui si introduce la media geometrica delle frequenze dell'oscillatore:

$$\omega_{\text{ho}} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}. \quad (1.7)$$

Pertanto, la funzione d'onda del sistema nello stato fondamentale è $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i \varphi_0(\mathbf{r}_i)$ e la distribuzione di densità $n(\mathbf{r})$ cresce con N secondo $n(\mathbf{r}) = N|\varphi_0(\mathbf{r})|^2$.

La scala di lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico quantistico,

$$a_{\text{ho}} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{\text{ho}}}\right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

corrisponde alla larghezza media della Gaussiana nell'equazione (1.6), indicando la dimensione della nube atomica nello stato fondamentale, indipendente da N . Nelle configurazioni sperimentali impiegate attualmente, in genere a_{ho} è dell'ordine di $1 \mu\text{m}$. A temperatura finita, a causa dell'energia termica, solo una porzione degli N bosoni occupa lo stato fondamentale, con densità $n_0(\mathbf{r})$. I restanti atomi sono termicamente distribuiti negli stati eccitati, generando una componente termica di densità $n_T(\mathbf{r})$ e raggio superiore ad a_{ho} . Una stima approssimativa di questo raggio può essere derivata assumendo che la densità della componente termica obbedisca alla distribuzione classica di Boltzmann, ossia $n_T(\mathbf{r}) \propto e^{-V_{\text{ext}}(\mathbf{r})/kT}$. In particolare, si ottiene [4]

$$n_T(\mathbf{r}) = \frac{N_T}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-x^2/2\sigma_x^2} e^{-y^2/2\sigma_y^2} e^{-z^2/2\sigma_z^2}, \quad (1.9)$$

dove i parametri σ_i sono dati da $\sigma_i^2 = kT/m\omega_i^2$, con $i = x, y, z$, mentre la larghezza media della Gaussiana è $\sigma_T = (kT/m\omega_{\text{ho}}^2)^{1/2}$. Nelle tipiche condizioni sperimentali, il rapporto σ_T/a_{ho} , pari a $(kT/\hbar\omega_{\text{ho}})^{1/2}$, è molto maggiore dell'unità. Ne consegue un'estensione spaziale della componente termica maggiore di quella del condensato. L'utilizzo della distribuzione di Bose-Einstein per gli atomi della componente termica non modifica significativamente questa stima. Pertanto, la condensazione di Bose-Einstein nei gas di atomi confinati in trappole armoniche si manifesta con la comparsa di un picco marcato nella

regione centrale della distribuzione di densità, dovuto al condensato, il cui peso aumenta al diminuire della temperatura, sovrapposto al profilo di densità della componente termica di larghezza maggiore.

La densità delle nubi atomiche è misurabile tramite l'imaging in assorbimento, principale tecnica di rilevazione del condensato, nella quale un fascio luminoso avente una frequenza risonante per gli atomi viene diretto sulla nube. Dal profilo di intensità del fascio a seguito dell'attraversamento del gas, si ricava la distribuzione di densità. In particolare, questa tecnica restituisce la densità di colonna della nube $n(y, z) = \int dx n(x, y, z)$, ricavata dall'integrazione della densità lungo la direzione spaziale x del fascio luminoso. Il confronto dei valori di densità di colonna ottenuti sperimentalmente con le previsioni teoriche consente di verificare l'avvenuta condensazione e di calcolare la temperatura critica. Ad esempio, in Fig. 1.1 sono mostrati i profili attesi per le densità di colonna del condensato e della componente termica, relativi ad una nube di 5000 bosoni non interagenti confinati in una trappola armonica isotropa, avente frequenze analoghe nelle tre direzioni spaziali, alla temperatura $T = 0.9T_c$.

La funzione d'onda $\varphi_0(\mathbf{p})$ che descrive lo stato fondamentale di singola particella nello spazio degli impulsi, ottenuta determinando la trasformata di Fourier della (1.6), consente di ricavare la distribuzione degli impulsi per gli atomi del condensato. Per il gas ideale, la densità del condensato nello spazio degli impulsi segue una Gaussiana centrata nel punto di impulso nullo e avente larghezza proporzionale ad a_{ho}^{-1} ; mentre la distribuzione di densità della componente termica, anche in questo caso, presenta una larghezza maggiore. In particolare, per un gas ideale in una trappola armonica, i profili di densità hanno esattamente la stessa forma di quelli nello spazio delle coordinate, presentati in Fig. 1.1.

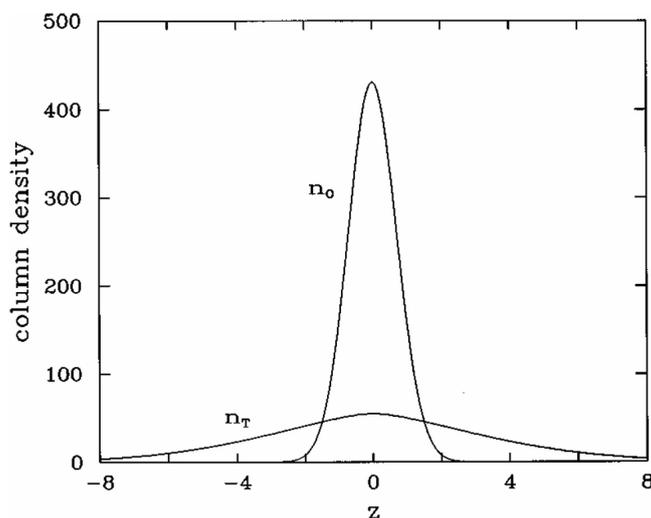


Figura 1.1: Densità di colonna valutata in $y = 0$ per 5000 bosoni non interagenti in una trappola armonica isotropa alla temperatura $T = 0.9T_c$. Il picco centrale, dovuto al condensato e sovrapposto alla distribuzione della componente termica più estesa, indica la condensazione in trappola armonica. Le distanze e le densità sono in unità di a_{ho} e a_{ho}^{-2} , rispettivamente. La densità è normalizzata al numero di atomi. Immagine tratta da [3].

Temperatura critica e frazione condensata in approssimazione semiclassica

Per un gas ideale di N bosoni nella trappola armonica (1.4), l'equazione (1.2) diventa

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{e^{(\epsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)/kT} - 1}, \quad (1.10)$$

mentre l'energia totale del sistema è ottenuta dalla sommatoria

$$E = \sum_{n_x, n_y, n_z} \epsilon_{n_x n_y n_z} \frac{1}{e^{(\epsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)/kT} - 1}. \quad (1.11)$$

Al diminuire della temperatura, il potenziale chimico si avvicina dal basso al valore energetico dello stato fondamentale, ossia $\mu \rightarrow \mu_c \equiv \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega}$, dove $\bar{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ è la media aritmetica delle frequenze di trappola. La condensazione si realizza alla temperatura critica, quando $\mu \simeq \mu_c$ e N_0 diviene macroscopico, fornendo un contributo ad N distinguibile da quello degli atomi nei restanti livelli energetici. Pertanto, l'equazione (1.10) viene convenientemente riscritta come

$$N - N_0 = \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{e^{\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)/kT} - 1}. \quad (1.12)$$

Per valutare esplicitamente questa sommatoria, si assume che la spaziatura tra i livelli energetici, fissata dalle frequenze dell'oscillatore, sia molto piccola rispetto alle energie di eccitazione rilevanti nel sistema. L'accuratezza di questa approssimazione, corrispondente alla descrizione semiclassica degli stati eccitati, è elevata qualora risulti $N \gg 1$ e $kT \gg \hbar\omega_{\text{ho}}$. In tali condizioni, si può considerare lo spettro energetico continuo e sostituire la sommatoria dell'equazione (1.12) con l'integrale sui valori energetici

$$N - N_0 = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}, \quad (1.13)$$

dove $g(\epsilon) = (1/2)(\hbar\omega_{\text{ho}})^{-3}\epsilon^2$ è la densità di stati con energia tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ [4]. Dal calcolo dell'integrale per valori di T inferiori alla temperatura critica, in corrispondenza dei quali $\mu \simeq \mu_c$, e considerando μ_c nullo nell'approssimazione semiclassica, si ottiene [4]

$$N - N_0 = \zeta(3) \left(\frac{kT}{\hbar\omega_{\text{ho}}} \right)^3, \quad (1.14)$$

in cui $\zeta(n) = \sum_{k=1}^\infty 1/k^n$ è la funzione zeta di Riemann [5]. Inoltre, si nota come l'approssimazione semiclassica non sia applicabile agli atomi del condensato. Dato che $g(0) = 0$, infatti, l'integrale nell'equazione (1.13) non conteggia la popolazione di bosoni nello stato fondamentale, macroscopica al di sotto della temperatura critica, che occorre aggiungere separatamente all'integrale per ottenere il valore di N fissato.

La temperatura critica T_c^0 del sistema si ricava dalla (1.14) ponendo $N_0 \rightarrow 0$, condizione verificata alla transizione, quando lo stato fondamentale smette di avere occupazione macroscopica. Secondo l'equazione così ottenuta,

$$kT_c^0 = \hbar\omega_{\text{ho}} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \simeq 0.94\hbar\omega_{\text{ho}} N^{1/3}, \quad (1.15)$$

il limite termodinamico appropriato per questi sistemi richiede che il prodotto $N\omega_{\text{ho}}^3$ sia mantenuto costante quando $N \rightarrow \infty$ e $\omega_{\text{ho}} \rightarrow 0$, affinché la temperatura critica sia ben definita. Inserendo l'espressione per T_c^0 nell'equazione (1.14), si ricava l'andamento della frazione condensata N_0/N in funzione della temperatura, valido per $T \leq T_c^0$:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^3. \quad (1.16)$$

Per $T > T_c^0$, invece, la frazione condensata è nulla nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$. Infatti, in questo intervallo di temperatura, nello stato fondamentale è disposto un numero ridotto di particelle, trascurabile per grandi valori di N .

Densità della componente termica tramite la distribuzione semiclassica

La distribuzione di densità per un sistema di bosoni non interagenti, nella trattazione quanto-meccanica, è data da [4]

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} f_{\nu} |\phi_{\nu}(\mathbf{r})|^2, \quad (1.17)$$

dove f_{ν} indica il numero di occupazione dello stato ν di singola particella, determinabile dalla conoscenza della rispettiva funzione d'onda $\phi_{\nu}(\mathbf{r})$, dipendente dal potenziale di trappola. Data la difficoltà nella somma degli autostati dell'Hamiltoniana con il potenziale armonico riportato nella (1.4), si impiega comunemente una descrizione semplificata in termini della funzione di distribuzione semiclassica $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, definita in modo che $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})d\mathbf{p}d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$ rappresenti il numero medio di particelle contenute nell'elemento di volume $d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ dello spazio delle fasi. Tale descrizione è accurata per gli atomi della componente termica, la cui lunghezza d'onda di de Broglie è piccola rispetto alla scala di lunghezza su cui il potenziale di trappola varia significativamente.

La funzione di distribuzione semiclassica per un sistema di bosoni all'equilibrio termodinamico è data da

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{e^{[\epsilon(\mathbf{p},\mathbf{r})-\mu]/kT} - 1}, \quad (1.18)$$

dove

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (1.19)$$

è l'energia semiclassica di un singolo bosone nello spazio delle fasi, pari all'energia di una particella classica libera nel punto \mathbf{r} soggetta al potenziale esterno $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Dunque, in

questa descrizione, la densità della componente termica ad ogni valore di temperatura è ricavabile direttamente dall'integrale nello spazio degli impulsi,

$$n_T(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{[\epsilon(\mathbf{p},\mathbf{r})-\mu]/kT} - 1}. \quad (1.20)$$

Calcolando l'integrale con il cambio di variabile $x = p^2/2mkT$ e definendo $z(\mathbf{r})$ tramite l'equazione

$$z(\mathbf{r}) = e^{[\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})]/kT}, \quad (1.21)$$

si ottiene [4]

$$n_T(\mathbf{r}) = \frac{g_{3/2}(z(\mathbf{r}))}{\lambda_T^3}, \quad (1.22)$$

dove λ_T è la lunghezza d'onda termica di de Broglie, definita convenzionalmente da

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

La funzione di Bose standard di ordine $3/2$, $g_{3/2}(z)$, appartiene alla classe [6]

$$g_\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\gamma} \quad (1.24)$$

ed è una funzione monotona crescente di z , positiva e limitata, per i valori reali tra 0 e 1 che z assume secondo l'equazione (1.21).

Per $T \leq T_c^0$, il potenziale chimico raggiunge il valore critico $\mu \simeq \mu_c = 0$, minimo del potenziale nell'approssimazione semiclassica. Pertanto, la (1.21) diventa $z(\mathbf{r}) = e^{-V_{\text{ext}}(\mathbf{r})/kT}$ e la densità della componente termica nel centro della trappola soddisfa l'equazione

$$n_T(\mathbf{0})\lambda_T^3 = \zeta(3/2) \simeq 2.61. \quad (1.25)$$

Nel medesimo intervallo di temperatura, integrando nello spazio l'espressione (1.22) per $n_T(\mathbf{r})$, si ottiene il numero di atomi della componente termica $N - N_0 = N(T/T_c^0)^3$, consistente con l'equazione (1.16). In Fig. 1.2 è mostrato il profilo di densità per le particelle eccitate di un gas di bosoni in una trappola armonica isotropa, in unità di $1/\lambda_T^3$, con μ pari al minimo del potenziale. La descrizione tramite la funzione di distribuzione semiclassica non è applicabile, invece, alla popolazione dello stato fondamentale, la cui funzione d'onda presenta variazioni spaziali su scale di lunghezza confrontabili con quelle su cui il potenziale di trappola cambia apprezzabilmente.

Dalla precedente trattazione si deduce l'esistenza di due scale energetiche rilevanti per il gas ideale in una trappola armonica: l'energia legata alla temperatura di transizione kT_c^0 e la spaziatura media tra i livelli $\hbar\omega_{\text{ho}}$. Nelle trappole comunemente realizzate, impiegando un numero totale di atomi dell'ordine di 10^3 – 10^6 , la temperatura di transizione è dalle 20 alle 200 volte maggiore di $\hbar\omega_{\text{ho}}$, tipicamente dell'ordine di qualche nK in unità di temperatura. Tale condizione consente di ritenere l'approssimazione semiclassica valida su

un ampio intervallo di temperatura. Tuttavia, gli ordini di grandezza indicati dipendono significativamente dalle interazioni interatomiche, che occorre considerare, insieme alle correzioni dovute al numero finito di particelle, al fine di eseguire un confronto quantitativo più accurato dei risultati sperimentali con i modelli teorici.

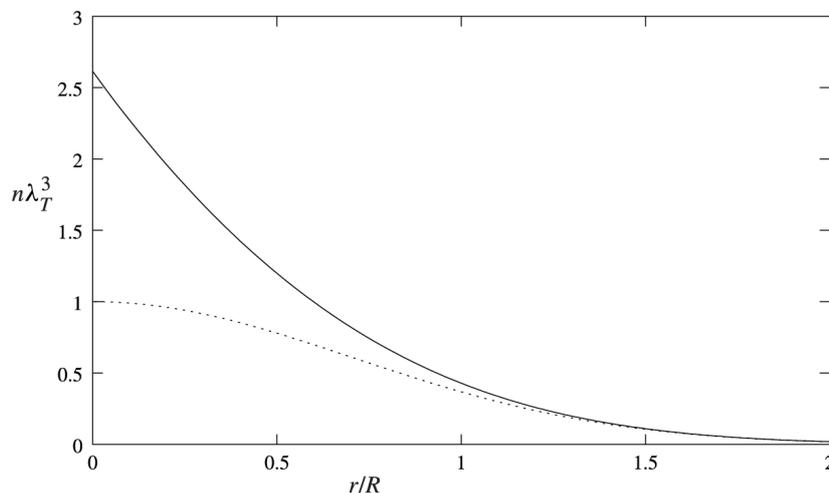


Figura 1.2: Profilo di densità in unità di $1/\lambda_T^3$ della componente termica di un gas in una trappola armonica isotropa, $V(r) = m\omega_0^2 r^2/2$. La coordinata radiale è espressa in unità di $R = (2kT/m\omega_0^2)^{1/2}$. La linea tratteggiata rappresenta il primo termine della sommatoria nell'equazione (1.24). Immagine tratta da [4].

1.2 Effetti del numero finito di particelle

Nella realizzazione sperimentale della condensazione di Bose-Einstein, il limite termodinamico $N \rightarrow \infty$ non è raggiungibile esattamente e la dimensione finita del sistema rende necessario apportare delle correzioni alla temperatura critica e all'andamento della frazione condensata, stimati nel precedente paragrafo adottando l'approssimazione semiclassica.

Come primo effetto del numero finito di particelle, si assiste alla mancanza di una discontinuità netta nelle funzioni termodinamiche in corrispondenza della temperatura critica. Inoltre, come mostrato in Fig. 1.3, il grafico della frazione condensata in funzione della temperatura è arrotondato in prossimità del punto di transizione, a differenza della previsione teorica nel limite $N \rightarrow \infty$. Tuttavia, l'occupazione macroscopica dello stato fondamentale si verifica piuttosto bruscamente al variare della temperatura. L'effetto di arrotondamento, inoltre, è abbastanza ridotto da permettere di trattare la comparsa di una frazione condensata finita come una transizione di fase e di individuare un valore di temperatura critica.

Per stimare l'entità della correzione da apportare alla frazione condensata rispetto al limite $N \rightarrow \infty$, si valuta numericamente la sommatoria nell'equazione (1.10) per un numero fissato di particelle ad una data temperatura. Il calcolo è possibile, noto lo spettro energetico di singola particella, dato che il potenziale chimico è funzione di N e T .

Quando si verifica la condensazione, μ uguaglia il minimo del potenziale, che non viene approssimato a zero, a differenza della trattazione nel limite termodinamico. La frazione condensata $N_0(T)/N$, ottenuta in questo modo, risulta più piccola di quella prevista nel limite $N \rightarrow \infty$, compatibilmente con l'arrotondamento del grafico della funzione in prossimità della transizione.

In alternativa, la correzione all'equazione (1.16) può essere valutata analiticamente studiando il limite per grandi N della sommatoria (1.10), da cui si ottiene [7]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 - \frac{3\bar{\omega}\zeta(2)}{2\omega_{\text{ho}}[\zeta(3)]^{2/3}} \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^2 N^{-1/3}. \quad (1.26)$$

Il confronto della frazione condensata ricavata tramite questo metodo con quella prevista dal calcolo esplicito della sommatoria è mostrato in Fig. 1.4 per $N = 1000$. I risultati sono indistinguibili ad eccezione di una regione stretta in prossimità della temperatura T_c^0 , dove è necessario includere correzioni di ordine superiore per riprodurre l'andamento esatto. Entrambe le previsioni sono confrontate con la curva corrispondente all'equazione (1.16), ottenuta nel limite termodinamico. Dato che la differenza tra le funzioni (1.16) e (1.26) decresce secondo $N^{-1/3}$ al crescere di N , la correzione all'andamento della frazione condensata diventa trascurabile con un numero di atomi sufficientemente grande.

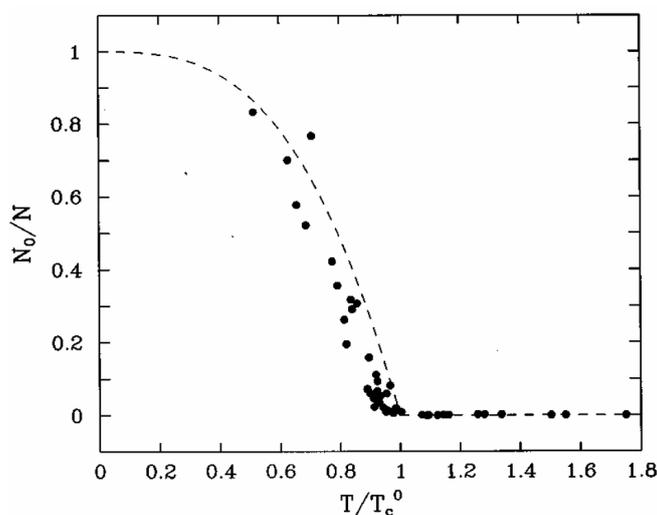


Figura 1.3: *Frazione condensata in funzione di T/T_c^0 . La linea tratteggiata rappresenta la previsione teorica nel limite termodinamico, corrispondente all'equazione (1.16). I punti sono i risultati sperimentali ottenuti per il sistema descritto nell'articolo [8]. Immagine tratta da [3].*

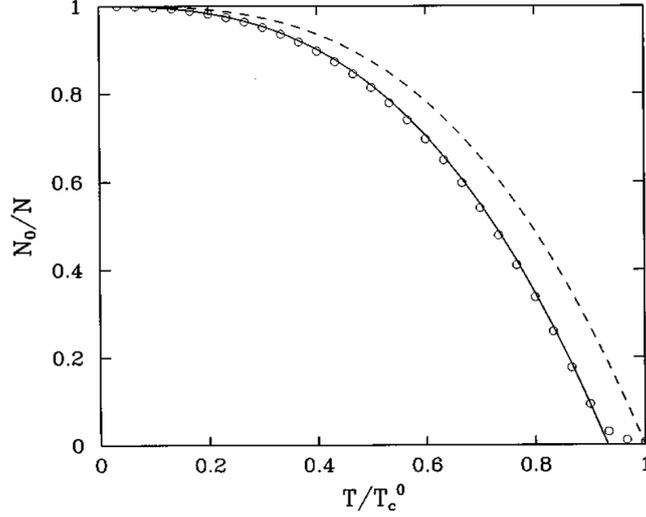


Figura 1.4: *Frazione condensata in funzione di T/T_c^0 per $N = 1000$ atomi in una trappola armonica isotropa. I punti corrispondono al calcolo esatto della sommatoria (1.10), mentre la linea continua rappresenta la previsione ottenuta dal limite per grandi N della stessa sommatoria, riportata nell'equazione (1.26). La linea tratteggiata mostra la stima teorica nel limite termodinamico, corrispondente all'equazione (1.16). Immagine tratta da [3].*

La riduzione della frazione condensata, dovuta alla dimensione finita, comporta una diminuzione della temperatura di transizione rispetto al limite $N \rightarrow \infty$. Ponendo $N_0/N = 0$ nell'equazione (1.26), si stima la variazione della temperatura critica all'ordine $N^{-1/3}$ rispetto al valore T_c^0 ottenuto nel limite termodinamico [7]:

$$\frac{\delta T_c^0}{T_c^0} = -\frac{\bar{\omega}\zeta(2)}{2\omega_{\text{ho}}[\zeta(3)]^{2/3}}N^{-1/3} \simeq -0.73\frac{\bar{\omega}}{\omega_{\text{ho}}}N^{-1/3}. \quad (1.27)$$

Per una nube contenente 10^6 atomi, la dimensione finita del sistema comporta una riduzione della temperatura di transizione tipicamente dell'1%, mentre con 10^4 atomi la variazione ammonta in genere al 5%.

1.3 Effetti delle interazioni

1.3.1 Parametro d'ordine e descrizione di campo medio

Nei gas di atomi alcalini impiegati per lo studio della BEC, la separazione media d tra particelle, tipicamente dell'ordine di 10^2 nm, supera di circa un ordine di grandezza la lunghezza di scattering a , che caratterizza l'intensità delle interazioni. Ad esempio, per gli atomi di rubidio $a \sim 100a_0 \sim 5$ nm, dove a_0 indica il raggio di Bohr. Pertanto, i gas utilizzati soddisfano la condizione di diluizione $a \ll d$, in cui gli effetti dominanti delle interazioni sono dovuti agli incontri tra due particelle, mentre i contributi provenienti dalle

interazioni simultanee di tre o più corpi possono essere trascurati. In ambito sperimentale, questa richiesta è sempre soddisfatta, in quanto una densità ridotta del sistema è necessaria ad evitare che il gas condensi in fase liquida durante il raffreddamento, impedendo il raggiungimento della BEC.

Nella condizione di diluizione, l'Hamiltoniana a molti corpi che descrive N bosoni interagenti confinati nel potenziale V_{ext} , in seconda quantizzazione, è data da [3]

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (1.28)$$

dove $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ sono gli operatori di campo che distruggono e creano un bosone nella posizione \mathbf{r} , rispettivamente, mentre $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ è il potenziale interatomico a due corpi.

Per sistemi con alti valori di N , si impiegano teorie di campo medio che evitano la risoluzione esatta dell'equazione di Schrödinger con l'Hamiltoniana (1.28) e consentono di prevedere il comportamento del gas in trappola in termini di un insieme di parametri con un chiaro significato fisico. In generale, l'operatore di campo può essere espresso come $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{r}) a_\alpha$, dove $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$ è la funzione d'onda di singola particella per lo stato identificato dall'insieme di numeri quantici α , mentre a_α e a_α^\dagger sono rispettivamente gli operatori di distruzione e creazione per il suddetto stato [3]. La condensazione di Bose-Einstein si verifica quando il numero di atomi dello stato fondamentale di singola particella soddisfa $N_0 \gg 1$ e il rapporto N_0/N resta finito nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$. In queste condizioni, dato che gli stati del sistema con N_0 o $N_0 \pm 1 \simeq N_0$ bosoni nello stato fondamentale di singola particella corrispondono essenzialmente alla stessa configurazione fisica, gli operatori a_0 e a_0^\dagger possono essere trattati come numeri classici, in particolare $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N_0}$.

La descrizione di campo medio per un gas di Bose diluito, formulata da Bogoliubov nel 1947, si basa sulla distinzione del contributo all'operatore di campo dovuto al condensato. Per un sistema il cui stato dipende dal tempo, nella rappresentazione di Heisenberg si ottiene [3]

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t), \quad (1.29)$$

dove $\Phi(\mathbf{r}, t)$ è una funzione complessa, nota come “funzione d'onda del condensato” e definita come il valore di aspettazione dell'operatore di campo: $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Inoltre, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ è un campo classico e rappresenta un parametro d'ordine per il sistema, in quanto il suo modulo fissa la densità del condensato n_0 , secondo $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$. In un gas a temperatura estremamente bassa, la frazione di particelle negli stati eccitati è ridotta; pertanto nella (1.29) $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ è trattabile come una piccola perturbazione e si considera l'approssimazione di campo medio: $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) \approx 0$.

Per valutare l'evoluzione temporale della funzione d'onda del condensato, viene impiegata l'equazione di Heisenberg per $\hat{\Psi}$ con l'Hamiltoniana (1.28),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (1.30)$$

ottenuta dalle relazioni di commutazione $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0$ [9]. In approssimazione di campo medio, nella (1.30) si sostituisce $\hat{\Psi}$ con Φ e si assume

che la funzione Φ vari lentamente su distanze dell'ordine del raggio d'azione delle forze interatomiche, in modo da poter rimpiazzare \mathbf{r}' con \mathbf{r} nell'argomento di Φ . Inoltre, in un gas diluito a bassa temperatura, si suppone che i dettagli del potenziale a due corpi non siano rilevanti nella descrizione delle proprietà macroscopiche del gas, che dipendono unicamente dalla lunghezza di scattering. Tale ipotesi consente di sostituire $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ con il potenziale efficace $g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, dove la costante di accoppiamento g è legata alla lunghezza di scattering secondo la relazione [9]

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (1.31)$$

Inserendo il potenziale efficace nella (1.30), si ottiene l'equazione chiusa per il parametro d'ordine

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.32)$$

nota come equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), della forma di un'equazione di Schrödinger con un termine di interazione aggiuntivo che la rende non lineare. La validità dell'equazione è limitata dalle condizioni di diluizione e di temperatura del gas sufficientemente ridotta, in modo che per il numero di atomi del condensato risulti $N_0 \gg 1$. Assumendo di poter trascurare il numero di atomi della componente termica, il parametro d'ordine è normalizzato al numero totale di atomi, $\int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = N$, e la densità del condensato coincide con quella del gas, $n(\mathbf{r}) = |\Phi(\mathbf{r})|^2$. Inoltre, la GPE è utilizzabile unicamente nello studio di fenomeni che si verificano su distanze molto maggiori della lunghezza di scattering, per i quali valgono le ipotesi richieste per la derivazione della (1.32) dalla (1.30).

1.3.2 Approssimazione di Thomas-Fermi

La condizione di diluizione, richiesta per la derivazione della GPE, può essere espressa in termini del parametro adimensionale $\bar{n}|a|^3$, pari al numero di particelle nel volume di scattering $|a|^3$, dove \bar{n} è la densità media del gas. Quando $\bar{n}|a|^3 \ll 1$ il sistema è detto diluito o debolmente interagente. Tuttavia, anche in questo caso, gli effetti delle interazioni possono essere significativi qualora l'energia di interazione E_{int} domini sull'energia cinetica E_{kin} degli atomi in trappola, dell'ordine di $N\hbar\omega_{\text{ho}}$. Una stima di E_{int} può essere ottenuta dal valore assunto nello stato fondamentale, pari a $gN\bar{n}$, con \bar{n} dell'ordine di N/a_{ho}^3 [3], da cui $E_{\text{int}} \propto N^2|a|/a_{\text{ho}}^3$. Il confronto tra le scale energetiche introdotte è quantificato dal parametro

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{N|a|}{a_{\text{ho}}}, \quad (1.33)$$

che esprime l'importanza delle interazioni atomo-atomo rispetto all'energia cinetica.

Per un gas di atomi in una trappola armonica, se $N|a|/a_{\text{ho}} \gg 1$, le interazioni interatomiche modificano il profilo di densità del condensato rispetto alla forma Gaussiana prevista dalla (1.6) per un sistema non interagente. In particolare, la densità nel centro

della trappola, proporzionale ad N_0 nel gas ideale, aumenta in presenza di interazioni attrattive ($a < 0$) e decresce per interazioni repulsive ($a > 0$).

Se il termine di potenziale della (1.32) è indipendente dal tempo, come per le trappole armoniche analizzate, la funzione d'onda del condensato soluzione stazionaria della GPE evolve nel tempo secondo

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} \phi(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

dove la parte spaziale della fattorizzazione è soluzione della GPE indipendente dal tempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (1.35)$$

In assenza di interazioni ($g = 0$), la (1.35) si riduce all'equazione di Schrödinger con l'Hamiltoniana di singola particella $-\hbar^2 \nabla^2/2m + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ e, nel caso di confinamento in una trappola armonica, la soluzione per lo stato fondamentale del sistema coincide con la funzione Gaussiana dell'equazione (1.6), a meno di un fattore di normalizzazione: $\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \varphi_0(\mathbf{r})$. Data la forma non lineare, la GPE indipendente dal tempo richiede una risoluzione numerica nel caso generale, i cui risultati sono in eccellente accordo con i profili di densità del condensato ottenuti sperimentalmente. In particolare, dalla risoluzione numerica della (1.35) per un gas di atomi con $a > 0$ in una trappola armonica isotropa a temperatura nulla, si ricava la funzione d'onda del condensato mostrata in Fig. 1.5. Al crescere del parametro Na/a_{ho} si osserva un aumento dell'estensione spaziale del condensato, il cui profilo di densità diviene piuttosto piatto nella regione centrale.

Per i gas di atomi soggetti ad interazioni repulsive comunemente studiati in ambito sperimentale, i parametri N , a e a_{ho} soddisfano la relazione $Na/a_{\text{ho}} \gg 1$, che rende l'energia cinetica trascurabile rispetto all'energia di interazione e consente di ottenere una soluzione analitica dell'equazione (1.35). A tale scopo, si impiega l'approssimazione di Thomas-Fermi, che consiste nel trascurare il termine di energia cinetica nell'equazione (1.35), proporzionale a $\nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{r})}$, il quale fornisce un contributo significativo solo in prossimità del contorno della nube. Altrove, come si osserva in Fig. 1.5, il profilo di densità è talmente piatto che il termine $\nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{r})}$, che ne quantifica la variazione spaziale, è trascurabile. In questo modo, si ricava la soluzione analitica della GPE indipendente dal tempo corrispondente al profilo di densità

$$n(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2 = g^{-1}[\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})], \quad (1.36)$$

nella regione in cui $\mu > V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, mentre $n = 0$ altrove. Considerando il potenziale armonico nella (1.4), $n(\mathbf{r})$ assume la forma di un paraboloide ellittico che si annulla per \mathbf{r} tale che $\mu \leq V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$:

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{g}(\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})) = n_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) & \text{se } V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) < \mu \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.37)$$

I parametri R_i , raggi di Thomas-Fermi della funzione densità, indicano l'estensione della nube nelle tre direzioni spaziali e sono definiti da

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}. \quad (1.38)$$

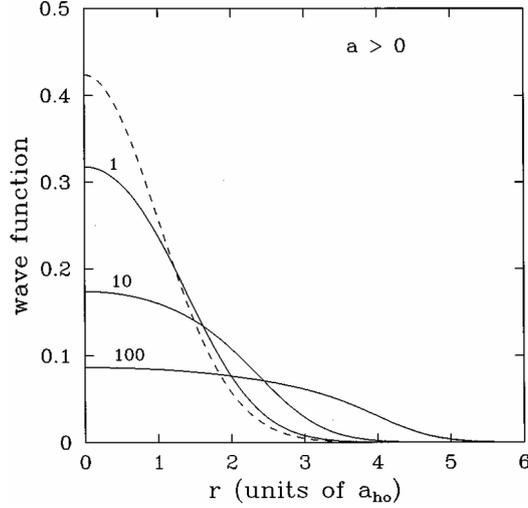


Figura 1.5: Funzione d'onda del condensato a $T = 0$, ottenuta dalla risoluzione numerica della GPE indipendente dal tempo (1.35), per un gas di atomi soggetti ad interazioni repulsive ($a > 0$) in una trappola armonica isotropa. Le linee continue corrispondono ai valori del parametro $Na/a_{\text{ho}} = 1, 10, 100$, mentre la linea tratteggiata rappresenta l'andamento previsto per il gas ideale non interagente. La coordinata radiale è espressa in unità di a_{ho} . Per normalizzare ad 1 le curve, viene rappresentata la funzione $(a_{\text{ho}}^3/N)^{1/2}\phi(r)$. Immagine tratta da [3].

La condizione di normalizzazione su $n(\mathbf{r})$ fornisce la relazione tra il potenziale chimico e il numero di particelle:

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{\text{ho}}}{2} \left(\frac{15Na}{a_{\text{ho}}} \right)^{2/5}. \quad (1.39)$$

Al crescere di N , il potenziale chimico ottenuto dalla risoluzione numerica della (1.35) diventa sempre più simile al valore calcolato tramite la (1.39) nell'approssimazione di Thomas-Fermi. Nei recenti esperimenti compiuti su gas di atomi di rubidio, le due soluzioni sono praticamente indistinguibili con N maggiore di 10^5 . Il confronto con i risultati sperimentali, quindi, conferma il ruolo determinante delle interazioni a due corpi nel caratterizzare la forma del profilo di densità per lo stato fondamentale. Inoltre, integrando la relazione termodinamica $\mu = \partial E / \partial N$, si ottiene l'energia totale per particella nell'approssimazione di Thomas-Fermi:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7}\mu. \quad (1.40)$$

Usando la relazione per il potenziale chimico (1.39), i raggi di Thomas-Fermi possono essere espressi come

$$R_i = a_{\text{ho}} \left(\frac{15Na}{a_{\text{ho}}} \right)^{1/5} \frac{\omega_{\text{ho}}}{\omega_i} \quad (1.41)$$

e la loro media geometrica $\bar{R} = (R_x R_y R_z)^{1/3} = a_{\text{ho}} (15Na/a_{\text{ho}})^{1/5}$ fornisce una stima dell'estensione spaziale del condensato, crescente con Na/a_{ho} , come atteso teoricamente.

Secondo la (1.37), la densità della nube nel centro della trappola è $n(\mathbf{0}) = \mu/g$, molto minore del valore previsto per particelle non interagenti: $n_{\text{ho}}(\mathbf{0}) = N/(\pi^{3/2}a_{\text{ho}}^3)$, ricavabile dall'equazione (1.6). Nelle trappole comunemente impiegate per il confinamento di atomi di rubidio, per le quali Na/a_{ho} è dell'ordine di $10\text{--}10^4$, la repulsione interatomica riduce questa densità di uno o due ordini di grandezza.

In Fig. 1.6(a) è mostrato il profilo di densità in approssimazione di Thomas-Fermi per un gas di atomi in una trappola armonica isotropa con $Na/a_{\text{ho}} = 100$. Il confronto con la soluzione numerica della (1.35) mostra l'elevata accuratezza dell'approssimazione, ad eccezione di una regione stretta attorno ai punti in cui la densità del condensato si annulla. In questa zona, infatti, il termine cinetico della (1.35) mantiene un contributo energetico rilevante. La densità di colonna valutata in $y = 0$, $n(z) = \int dx n(x, 0, z)$, ricavata dalla (1.37), risulta

$$n(z) = \frac{4}{3g\omega_x} \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\mu - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \right)^{3/2}. \quad (1.42)$$

Come si osserva in Fig. 1.6(b), l'accuratezza dell'approssimazione di Thomas-Fermi è ancora maggiore per la densità di colonna, dal momento che l'integrazione riduce la discontinuità della derivata nel punto di annullamento della densità.

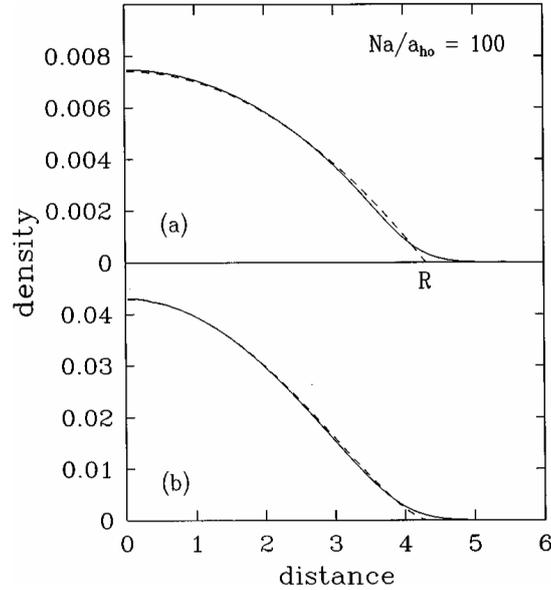


Figura 1.6: *Profilo di densità per un condensato di atomi soggetti ad interazioni repulsive in una trappola armonica isotropa, con $Na/a_{\text{ho}} = 100$. La linea continua rappresenta la soluzione della GPE indipendente dal tempo (1.35), mentre la linea tratteggiata corrisponde alla soluzione analitica nell'approssimazione di Thomas-Fermi. Nella parte (a), la densità di atomi è riportata in unità arbitrarie, mentre la distanza dal centro della trappola è in unità di a_{ho} . Il punto di annullamento della densità è previsto dalla (1.35) ad $R \simeq 4.31a_{\text{ho}}$. Nella parte (b) è riportata la densità di colonna valutata in $y = 0$ per il medesimo sistema, secondo la (1.42). Immagine tratta da [3].*

L'equazione (1.37) fornisce il profilo di densità totale della nube di atomi interagenti nella condizione di temperatura nulla, in cui la descrizione di campo medio, che trascura il contributo della componente termica, è applicabile con esattezza, e il numero di atomi del condensato coincide con N . All'aumentare della temperatura, l'accuratezza dell'approssimazione di campo medio si riduce; tuttavia, la GPE resta valida per la descrizione della distribuzione di densità n_0 del condensato. Inoltre, finché la condizione $N_0(T)a/a_{\text{ho}} \gg 1$ è verificata e ignorando l'interazione con la componente termica degli atomi del condensato, l'equazione (1.37) rappresenta accuratamente la distribuzione di densità del solo condensato. Infatti, a causa del confinamento nella trappola armonica, nella regione in cui si estende il condensato, n_T è molto minore di n_0 , anche quando il numero di atomi di entrambe le componenti è confrontabile. Per tale ragione, la densità della componente termica può essere trascurata in prima approssimazione.

In generale, gli effetti delle interazioni a due corpi in un gas di Bose diluito sono significativi solo in presenza del condensato, quando la densità diviene relativamente alta nella regione centrale della trappola. Per la componente termica, avente densità inferiore, anche al di sotto della temperatura critica la distribuzione di densità può essere considerata analoga a quella ottenuta per il gas ideale, riportata nella (1.22).

1.3.3 Variazione della temperatura critica e della frazione condensata

Le interazioni interatomiche in un gas ne modificano la temperatura critica rispetto alla previsione ottenuta nell'ipotesi di gas ideale, riportata nella (1.15). Come descritto nel precedente sottoparagrafo, in un sistema intrappolato la presenza di interazioni repulsive determina l'espansione della nube atomica, con una conseguente diminuzione della densità nella regione centrale della trappola. La riduzione di altezza del picco, nel profilo di densità del condensato, indica la presenza di una frazione condensata inferiore a quella del gas ideale a parità di temperatura, che spiega la diminuzione di temperatura critica. Questo effetto delle interazioni è caratteristico dei gas di Bose in trappola e non si verifica in un gas uniforme, la cui densità è fissata dal limite termodinamico.

La variazione della temperatura critica può essere valutata trattando le interazioni nell'approssimazione di campo medio. Il modello più semplice è rappresentato dalla teoria di Hartree-Fock (HF) [9], che descrive il moto dei bosoni della componente termica tramite l'Hamiltoniana di singola particella

$$H_{\text{HF}} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}), \quad (1.43)$$

dove il termine $2gn(\mathbf{r})$, che contribuisce al potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\mathbf{r})$, è generato dalle interazioni della particella con gli altri bosoni. Quando si realizza la BEC, l'equazione di Schrödinger con Hamiltoniana H_{HF} deve essere risolta insieme all'equazione per il parametro d'ordine, tramite una procedura auto-consistente, per ottenere la densità totale del sistema $n(\mathbf{r})$.

Se $kT \gg \hbar\omega_{\text{ho}}$, si impiega l'approssimazione semiclassica per esprimere la funzione di distribuzione di una particella della componente termica come

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{e^{(p^2/2m+V_{\text{eff}}(\mathbf{r})-\mu)/kT} - 1}, \quad (1.44)$$

in accordo con la (1.18). L'integrazione nello spazio degli impulsi fornisce l'espressione per la densità della componente termica del sistema

$$n_T(\mathbf{r}) = \frac{g_{3/2}(e^{[\mu-V_{\text{eff}}(\mathbf{r})]/kT})}{\lambda_T^3}, \quad (1.45)$$

che generalizza l'equazione (1.22). La condensazione di Bose-Einstein si verifica a partire dalla temperatura per la quale la condizione di normalizzazione

$$N = \int d\mathbf{r} n_T(\mathbf{r}, T_c, \mu_c), \quad (1.46)$$

che trascura il contributo delle particelle nello stato fondamentale, è soddisfatta con il valore critico del potenziale chimico μ_c corrispondente al minimo autovalore dell'Hamiltoniana (1.43). Per sistemi con un elevato numero di atomi, il contributo dominante all'Hamiltoniana proviene dalle interazioni. Pertanto, si trascura il termine di energia cinetica nella (1.43), ottenendo

$$\mu_c = 2gn(\mathbf{0}), \quad (1.47)$$

dove, lavorando al più basso ordine per g , la densità centrale $n(\mathbf{0})$ è calcolabile utilizzando il modello non interagente. Espandendo il lato destro dell'equazione (1.46) attorno $\mu_c = 0$ e $T_c = T_c^0$, si ricava il seguente risultato per lo spostamento $\delta T_c = T_c - T_c^0$ della temperatura critica rispetto al valore previsto per il gas non interagente nel limite termodinamico [10]:

$$\frac{\delta T_c}{T_c^0} = -1.33 \frac{a}{a_{\text{ho}}} N^{1/6}. \quad (1.48)$$

L'equazione mostra che, al più basso ordine nella costante di accoppiamento, la variazione relativa della temperatura critica è lineare nella lunghezza di scattering e negativa per interazioni repulsive ($a > 0$). I valori previsti per lo spostamento relativo nelle tipiche configurazioni impiegate sperimentalmente sono dell'ordine di qualche per cento. Tuttavia, le incertezze sperimentali spesso sono troppo elevate per consentire un confronto quantitativo del risultato (1.48) con le variazioni di temperatura critica misurate sperimentalmente. Inoltre, la formula (1.48) ignora le correzioni dovute alla dimensione finita del sistema, rilevanti per gas con un numero di atomi relativamente ridotto. Per valori di N di ordine superiore a 10^5 , comunque, le correzioni dovute alla dimensione finita sono trascurabili rispetto alla variazione di temperatura critica determinata dalle interazioni.

L'entità degli effetti delle interazioni repulsive dipende dal confronto dell'energia di interazione per particella E_{int}/N con l'energia termica kT , principali scale energetiche rilevanti per il sistema interagente. In particolare, l'energia di interazione per particella a temperatura nulla può essere stimata impiegando l'approssimazione di Thomas-Fermi, da

cui si ottiene $E_{\text{int}}/N = (2/7)\mu$, dove il potenziale chimico è calcolato secondo la (1.39). Se kT è inferiore a μ , si prevede di osservare degli effetti significativi delle interazioni sul comportamento termodinamico del gas. Al contrario, se kT supera μ , le interazioni comportano solo correzioni perturbative. Per quantificare il confronto tra le scale energetiche considerate, si introduce il parametro [11]

$$\eta = \frac{\mu}{kT_c^0} = \alpha \left(N^{1/6} \frac{a}{a_{\text{ho}}} \right)^{2/5}, \quad (1.49)$$

dove $\alpha = 15^{2/5}[\zeta(3)]^{1/3}/2 \simeq 1.57$ è un coefficiente numerico. Nelle configurazioni sperimentali impiegate attualmente, in cui η varia in genere tra 0.35 e 0.40, si prevede che gli effetti delle interazioni siano visibili anche per valori di T dell'ordine di T_c^0 . Per temperature inferiori al valore critico, impiegando l'approssimazione di Thomas-Fermi per descrivere la distribuzione di densità del condensato, il potenziale chimico può essere stimato a partire dalla (1.39), ottenendo [3]

$$\frac{\mu(N_0, T)}{kT_c^0} \simeq \frac{\mu(N, T=0)}{kT_c^0} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{2/5} = \eta(1-t^3)^{2/5}, \quad (1.50)$$

dove $t = T/T_c^0$ è la temperatura ridotta del sistema e si utilizza la relazione (1.16).

La dipendenza della frazione condensata dalla temperatura ridotta viene modificata dalle interazioni interatomiche rispetto al profilo previsto per il gas ideale, riportato nell'equazione (1.16). Per valutare la diminuzione della frazione condensata dovuta alle interazioni repulsive, si impiega l'approssimazione di campo medio tramite la teoria di Hartree-Fock. Ignorando il contributo alla densità $n(\mathbf{r})$ dovuto alla componente termica e valutando la densità del condensato nell'approssimazione di Thomas-Fermi, dall'equazione (1.37) per $n(\mathbf{r})$ si ricava la seguente relazione per il potenziale efficace:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu = |V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu|, \quad (1.51)$$

valida nei punti \mathbf{r} tali che $\mu > V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, in cui si estende il condensato. Tuttavia, la maggior parte degli atomi della componente termica occupa la regione di spazio in cui $n \sim 0$, dove $\mu < V_{\text{ext}}$ e $V_{\text{eff}} = V_{\text{ext}}$. Pertanto, in prima approssimazione, il potenziale effettivo di cui gli atomi della componente termica risentono è analogo a quello a cui sono soggetti in assenza di interazioni. Nonostante tale risultato, gli effetti delle interazioni non sono trascurabili, dato che il potenziale chimico, riportato nella (1.50), differisce apprezzabilmente dal valore previsto per il gas ideale. Ne consegue una variazione significativa del contributo degli atomi della componente termica alle grandezze termodinamiche. A partire dalla densità della componente termica riportata nella (1.45), si integra esplicitamente l'equazione

$$N = \int d\mathbf{r} n_T(\mathbf{r}, T, \mu), \quad (1.52)$$

che generalizza la (1.46) per temperature inferiori al valore critico. Utilizzando la relazione (1.51), si ottiene il risultato [3]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - t^3 - \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \eta t^2 (1-t^3)^{2/5}, \quad (1.53)$$

valido al più basso ordine nel parametro di interazione η . L'equazione (1.53) mostra la dipendenza lineare da η della variazione di frazione condensata rispetto alla previsione per il gas ideale. Pertanto, gli effetti delle interazioni si manifestano in misura maggiore sulla modificazione del profilo di frazione condensata, che sulla variazione relativa della temperatura critica, proporzionale a $\eta^{5/2}$ secondo la (1.48). Ad esempio, con $\eta = 0.4$ e $t = 0.6$, si stima una riduzione del valore di N_0 del 20%. La diminuzione della frazione condensata dovuta alle interazioni repulsive è un effetto caratteristico dei gas di Bose in trappola, in cui la componente termica è in gran parte separata spazialmente dal condensato. In un sistema uniforme, invece, le due componenti si sovrappongono completamente e il potenziale efficace si intensifica rispetto a V_{ext} , a causa del termine di interazione $2gn$, secondo la (1.43). Questo effetto è solo parzialmente compensato dal potenziale chimico e complessivamente si osserva una riduzione della componente termica, con un conseguente incremento della frazione condensata rispetto al gas ideale.

1.4 Espansione libera

In alcuni apparati sperimentali impiegati per lo studio della BEC, la procedura di imaging in assorbimento non è realizzabile con il gas di atomi confinato nella trappola, a causa delle ridotte dimensioni del sistema. Per studiare il gas con maggiore precisione e ottenere ulteriori informazioni sulla condensazione, in genere, la nube di atomi viene lasciata espandere liberamente spegnendo la trappola. Atteso un intervallo temporale prefissato, noto come tempo di volo (TOF), si misura la densità del sistema tramite l'imaging in assorbimento.

Per un gas ideale, l'espansione libera è descrivibile analiticamente a partire dalla funzione d'onda di una particella del condensato, la cui espressione all'istante $t = 0$ di spegnimento della trappola è riportata nella (1.6). Negli istanti successivi, l'evoluzione temporale si ottiene dalla trasformata di Fourier della funzione d'onda nello spazio degli impulsi $\varphi_o(\mathbf{p})$, fatta evolvere tramite il fattore moltiplicativo $e^{-iEt/\hbar}$, dove E indica l'energia semiclassica della particella:

$$\varphi_o(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \varphi_o(\mathbf{p}) e^{-ip^2t/2m\hbar} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}. \quad (1.54)$$

Inserendo l'espressione per $\varphi_o(\mathbf{p})$, si ottiene [9]

$$\varphi_o(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{m\omega_{\text{ho}}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1+i\omega_k t)^{1/2}} e^{-\frac{m\omega_k}{2\hbar} \frac{1-i\omega_k t}{1+\omega_k^2 t^2} r_k^2}, \quad (1.55)$$

dove r_k indica la coordinata spaziale, da cui si ricava il profilo di densità del condensato

$$n_o(\mathbf{r}, t) = N_0 \left(\frac{m\omega_{\text{ho}}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1+\omega_k^2 t^2)^{1/2}} e^{-\frac{m\omega_k}{\hbar(1+\omega_k^2 t^2)} r_k^2}. \quad (1.56)$$

Mentre a $t = 0$ la larghezza del condensato nella direzione i è data da $a_i = (\hbar/m\omega_i)^{1/2}$, secondo l'equazione (1.56) la larghezza nella medesima direzione, dopo un tempo di volo

t tale che $\omega_i t \gg 1$, è pari a $a_i \omega_i t / \sqrt{2} = (\hbar \omega_i / 2m)^{1/2} t$. Pertanto, il condensato si espande al trascorrere del tempo, in misura maggiore nella direzione corrispondente alla frequenza di trappola più grande.

Per studiare il comportamento della componente termica durante l'espansione, si considera la funzione di distribuzione semiclassica dipendente dal tempo $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$, ottenuta a partire dalla (1.18). Spegnendo la trappola all'istante $t = 0$, $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ evolve nel tempo secondo la legge

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = f_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m} t \right). \quad (1.57)$$

Integrando questa espressione nello spazio degli impulsi, come nella (1.20), si ricava la dipendenza temporale della densità della componente termica

$$n_T(\mathbf{r}, t) = \frac{g_{3/2}(\tilde{z}(\mathbf{r}, t))}{\lambda_T^3} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1 + \omega_k^2 t^2)^{1/2}}, \quad (1.58)$$

dove $\tilde{z}(\mathbf{r}, t) = e^{[\mu - \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)]/kT}$ e

$$\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m \sum_{k=x,y,z} \frac{\omega_k^2}{1 + \omega_k^2 t^2} r_k^2 \quad (1.59)$$

agisce come potenziale efficace, determinando ad ogni istante la forma della distribuzione termica. Per $t = 0$, l'equazione (1.58) si riduce alla (1.22), ottenuta per il gas ideale ancora in trappola.

Per un gas di Bose non ideale, i cui atomi sono soggetti ad interazioni repulsive, la densità del condensato in approssimazione di Thomas-Fermi è descritta dall'equazione (1.37). Durante l'espansione libera, la forma funzionale resta invariata mentre i raggi di Thomas-Fermi evolvono nel tempo secondo [9]

$$R_i(t) = R_i(0) b_i(t), \quad (1.60)$$

dove $b_i(t)$ sono fattori di scala la cui dipendenza temporale è regolata dalle equazioni differenziali accoppiate

$$\ddot{b}_i + \omega_i^2 b_i - \frac{\omega_i^2}{b_i b_x b_y b_z} = 0, \quad (1.61)$$

risolvibili nel caso generale solo numericamente.

Capitolo 2

Apparato sperimentale e analisi della nube atomica

In questo capitolo viene descritto l'apparato sul quale è stata effettuata la presa dati e le principali tecniche sperimentali impiegate per il confinamento e il raffreddamento degli atomi, finalizzate alla realizzazione della condensazione di Bose-Einstein. In seguito, si illustrano le misurazioni eseguite e la procedura di analisi dei dati ottenuti. In particolare, vengono descritte le routine di fit che ho implementato per confrontare i risultati delle misure con le previsioni teoriche, al fine di ricavare la temperatura critica e la frazione condensata della nube atomica studiata.

2.1 Apparato e procedure sperimentali

Nell'apparato sperimentale impiegato per la presa dati e rappresentato schematicamente in Fig. 2.1, la condensazione di Bose-Einstein viene realizzata con atomi di ^{87}Rb , intrappolati e raffreddati all'interno di due camere a vuoto, tramite campi magnetici e fasci laser opportunamente calibrati, fino a temperature dell'ordine di 100 nK.

Gli atomi di rubidio sono conservati in un serbatoio costituito da un campione metallico, avente una pressione di vapore dell'ordine di 10^{-7} mbar a temperatura ambiente (25 °C). Gli atomi in fase gassosa vengono caricati nella prima camera, direttamente a contatto con il serbatoio, dove una pompa ionica mantiene una pressione dell'ordine di 10^{-8} mbar. All'interno di questa camera, una trappola magneto-ottica bidimensionale (MOT 2D) di forma ellittica realizza il confinamento e il raffreddamento trasversale degli atomi della nube tramite una combinazione di fasci laser e un campo magnetico variabile nello spazio. Utilizzando la MOT 2D, si riesce a produrre un fascio di atomi collimato lungo la direzione congiungente le due camere, indicata come asse x in Fig. 2.1. In particolare, gli atomi caricati dal serbatoio, le cui velocità seguono inizialmente una distribuzione di Maxwell-Boltzmann con valore medio dell'ordine di 100 m/s a 25 °C, vengono rallentati dalla MOT 2D nelle direzioni ortogonali all'asse x , raggiungendo una distribuzione di velocità meno dispersa attorno al valore centrale. L'effetto di raffreddamento trasversale risulta maggiormente efficace sugli atomi aventi velocità iniziali

numeri quantici relativi allo spin nucleare e al momento angolare elettronico, dalla regola di somma dei momenti angolari si ricavano i possibili valori del numero quantico F del momento angolare totale, corrispondenti a stati atomici energeticamente distinti. Per gli atomi di ^{87}Rb , aventi $I = 3/2$, la separazione iperfine dei livelli energetici $5^2\text{S}_{1/2}$ e $5^2\text{P}_{3/2}$ è rappresentata in Fig. 2.2. A causa della struttura iperfine, nella MOT 3D si utilizzano due laser, noti come *repumper* e *cooler*, con lunghezze d'onda tali da indirizzare rispettivamente le transizioni $|5^2\text{S}_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5^2\text{P}_{3/2}, F = 2\rangle$ e $|5^2\text{S}_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2\text{P}_{3/2}, F = 3\rangle$, come indicato in Fig. 2.2. Tali transizioni provocano una riduzione dell'energia degli atomi per effetto Doppler [4], che risulta nel raffreddamento della nube atomica fino ad una temperatura di circa $100 \mu\text{K}$.

Segue una fase di funzionamento speciale della MOT, nota come Compressed MOT (CMOT), della durata di 20 ms in cui, tramite riduzione del gradiente di campo magnetico, la nube viene ulteriormente raffreddata in modo da preparare gli atomi per lo stadio successivo. Terminata la CMOT, il raffreddamento prosegue a temperature sub-Doppler tramite una melassa ottica della durata di 2 ms, nei quali lo spegnimento dei campi magnetici genera una lieve espansione della nube e si raggiunge approssimativamente la temperatura di $20 \mu\text{K}$.

Successivamente, si avvia una procedura di pompaggio ottico, necessaria a confinare gli atomi in una trappola magnetica. In particolare, in presenza di un campo magnetico esterno, all'interazione iperfine si aggiunge l'interazione con il campo [13], responsabile della separazione del livello di struttura iperfine indicato da F , in $2F + 1$ sottolivelli indicizzati dal numero quantico m_F , che assume i valori $-F, -F + 1, \dots, F - 1, F$. Il pompaggio ottico utilizza un laser propagante in una sola direzione, con opportune polarizzazioni circolari, per realizzare transizioni tra i sottolivelli della struttura iperfine indicati in Fig. 2.2. Gli atomi, portati negli stati eccitati da queste transizioni, decadono dopo qualche millisecondo, fino a raggiungere lo stato $F = 2, m_F = 2$ di $5^2\text{S}_{1/2}$, in cui smettono di interagire con la luce del laser e non sono più eccitabili. Al termine del pompaggio ottico, quindi, tutti gli atomi si trovano in questo stato, in cui possono essere intrappolati da un campo magnetico esterno.

Concluso il pompaggio ottico, viene nuovamente acceso il campo magnetico di quadrupolo, con un gradiente di 157 G/cm e si attiva un laser polarizzato linearmente, con lunghezza d'onda di 1064 nm . Il laser viene suddiviso in due fasci distinti, opportunamente allineati con la trappola magnetica, noti come *dimple* e *crossed*, aventi intensità relativa regolabile e intersecati nel piano orizzontale ad un angolo di 45° . Quando gli atomi vengono caricati nella trappola magnetica, la temperatura della nube cresce fino a circa $100 \mu\text{K}$. Per diminuire la temperatura fino al raggiungimento della condensazione, è richiesta una fase di raffreddamento evaporativo, realizzata impiegando una radiazione di microonde e modificando il gradiente del campo magnetico e l'intensità dei fasci *dimple* e *crossed*. Al termine di questo processo, gli atomi sono soggetti unicamente al potenziale ottico, di forma approssimativamente armonica, e la nube contiene una componente di condensato.

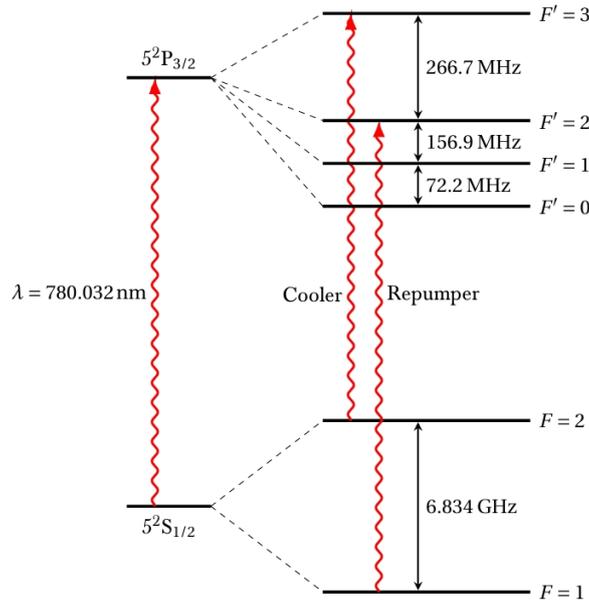


Figura 2.2: Struttura iperfine dei livelli energetici $5^2S_{1/2}$ e $5^2P_{3/2}$ dell'atomo di ^{87}Rb . Sono indicate le transizioni della linea D2 indirizzate dai laser repumper e cooler della MOT 3D. Immagine tratta da [12].

2.1.1 Trappole magnetiche

Il confinamento di atomi neutri nelle trappole magnetiche è reso possibile dall'effetto Zeeman, che consiste nella separazione energetica di livelli atomici inizialmente degeneri, dovuta all'interazione del momento magnetico totale dell'atomo con un campo magnetico esterno. Assumendo che l'energia in uno stato dipenda linearmente dall'intensità del campo magnetico B e che il momento magnetico segua la direzione del campo, l'energia dell'atomo nello stato i può essere espressa come [4]

$$E_i = C_i - \mu_i B, \quad (2.1)$$

dove μ_i è la componente del momento magnetico dell'atomo nello stato i lungo il vettore del campo, mentre C_i è una costante. Pertanto, in presenza di un campo magnetico non omogeneo, l'atomo in un dato stato possiede un'energia variabile nello spazio a causa del contributo di energia potenziale $-\mu_i B$. Se nello stato atomico considerato μ_i è positivo, l'atomo risente di una forza che tende a portarlo verso regioni di campo magnetico più intenso, dove l'energia è minore. Questi stati sono noti come *high-field seekers*. Al contrario, un atomo in uno stato con μ_i negativo tende a muoversi verso zone in cui il campo è più debole. Stati di questo tipo sono indicati come *low-field seekers*. Dato che in regioni prive di correnti elettriche è impossibile generare una configurazione di campo magnetico avente un massimo locale, gli atomi negli stati *high-field seekers* non possono essere intrappolati magneticamente. Per gli atomi in stati *low-field seekers*, invece, il confinamento richiede la costruzione di una trappola magnetica progettata in modo che la configurazione di campo prodotta abbia un minimo locale, verso cui gli atomi tendono a muoversi.

La profondità energetica della trappola è determinata dall'energia $\mu_i B$. In particolare, i momenti magnetici atomici sono dell'ordine del magnetone di Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m_e$, approssimativamente pari a 0.67 K/T in unità di temperatura, mentre i campi magnetici prodotti in laboratorio sono generalmente molto inferiori ad 1 T. Ne consegue una profondità delle trappole magnetiche molto minore di un kelvin; quindi, gli atomi richiedono un precedente raffreddamento per poter essere intrappolati magneticamente.

In una trappola magnetica di quadrupolo, il campo varia linearmente con la distanza in tutte le direzioni e si annulla in un punto dello spazio. Questa configurazione, impiegata dai primi esperimenti che raggiunsero la BEC, può essere realizzata tramite una coppia di bobine anti-Helmholtz, ossia tramite due bobine circolari identiche poste faccia a faccia e attraversate da corrente in verso opposto. Considerando una condizione di simmetria assiale lungo l'asse z e denotando il gradiente del campo magnetico nelle direzioni degli assi x e y con B' , il gradiente lungo z deve essere $-2B'$, affinché la divergenza del campo si annulli, come richiesto dall'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Scegliendo la posizione del minimo nell'origine del sistema di coordinate, in prossimità di questo punto il campo è approssimabile al primo ordine come

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B'(x, y, -2z). \quad (2.2)$$

L'intensità del campo, data da $B = B'(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}$, si annulla nell'origine, dove gli atomi in stati *low-field seekers* vengono attratti, e varia linearmente con la distanza dall'origine, con una pendenza dipendente dalla direzione.

Lo stato iperfine $F = 2$, $m_F = 2$ del livello $5^2S_{1/2}$ del ^{87}Rb , per il quale la relazione (2.1) è valida ad eccezione della regione in prossimità del punto di campo nullo, è *low-field seeker*. Pertanto, gli atomi di rubidio in questo stato possono essere confinati in una trappola magnetica. In particolare, nell'apparato sperimentale utilizzato, per realizzare le MOT necessarie all'intrappolamento e al raffreddamento degli atomi nella *science chamber*, si impiega una coppia di bobine anti-Helmholtz che genera il campo di quadrupolo dato al primo ordine da

$$\mathbf{B}_1(x, y, z) = Ib' \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, z \right), \quad (2.3)$$

dove I è la corrente che scorre nelle bobine, mentre $b' = 0.56 \text{ G/cm/A}$. L'asse di simmetria delle bobine coincide con la direzione verticale e il punto di minimo del campo di quadrupolo si trova approssimativamente al centro della camera. Al campo magnetico nella (2.3) viene aggiunto il contributo dovuto ad una seconda coppia di bobine, in configurazione Helmholtz, coassiali con le bobine anti-Helmholtz, al fine di ottenere un campo uniforme lungo l'asse di simmetria. Il campo prodotto dalle due bobine Helmholtz, identiche e percorse da corrente nello stesso verso, è della forma

$$\mathbf{B}_2(x, y, z) = I \begin{pmatrix} -b_2 x z \\ -b_2 y z \\ b_0 + b_2 \left(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

dove $b_0 = 2.40 \text{ G/A}$ e $b_2 = 0.168 \text{ G/cm}^2/\text{A}$. Inoltre, per completare la trappola magnetica, vengono aggiunte tre coppie addizionali di bobine, impiegate per la compensazione dei campi magnetici esterni.

Dato che il campo magnetico delle trappole descritte non è omogeneo, un atomo in moto risente di un campo dipendente dal tempo. Se il campo sperimentato varia lentamente nel tempo, l'atomo rimane nello stesso stato quantico rispetto alla direzione istantanea del campo. In questa condizione, si afferma che l'atomo segue le variazioni di campo magnetico adiabaticamente; ad esempio, il momento magnetico atomico resta sempre allineato al campo. In caso contrario, il campo può indurre transizioni tra diversi stati atomici. In particolare, atomi in stati *low-field seekers* possono transire verso stati *high-field seekers* in cui, spinti verso regioni di campo più intenso, vengono espulsi dalla trappola. La riduzione del numero di atomi in trappola dovuta a questo fenomeno, noto come spin flip di Majorana, è rilevante quando la frequenza di variazione del campo raggiunge o supera le frequenze di transizione tra sottolivelli magnetici. Queste ultime sono dell'ordine di $\mu_B B$, ossia decrescono al diminuire del campo. Pertanto, le perdite di atomi dalla trappola possono essere apprezzabili in prossimità del punto di campo nullo, regione in cui la trappola magnetica non riesce più a confinare gli atomi. La diminuzione del numero di atomi dovuta a questo effetto è significativa a basse temperature, quando la dimensione del gas è più piccola. Quindi, affinché le trappole magnetiche di quadrupolo siano efficienti per la realizzazione della BEC, è richiesta l'introduzione di ulteriori meccanismi di confinamento. Ad esempio, le perdite di atomi possono essere limitate aggiungendo una trappola ottica, ossia applicando un opportuno campo laser, nella regione prossima al minimo del campo magnetico.

2.1.2 Trappole ottiche

Le trappole ottiche impiegano fasci laser, i cui campi di radiazione variano nel tempo con frequenze opportune, per confinare gli atomi.

Quando un atomo viene illuminato dal fascio, l'interazione con la radiazione dipende dalla differenza tra la frequenza del campo elettrico prodotto dal laser ω_L e la frequenza di risonanza dell'atomo ω_0 , corrispondente alla spaziatura energetica tra due livelli. Un laser è detto *far-detuned* quando ω_L si discosta significativamente da ω_0 , in particolare quando $|\Delta| \gg \Gamma$, dove $\Delta = \omega_L - \omega_0$ è noto come *detuning*, mentre Γ è la larghezza naturale della linea spettrale della transizione considerata. In questa condizione si minimizza l'assorbimento, mentre l'interazione con il campo di radiazione comporta uno spostamento energetico dei livelli atomici, che può essere interpretato come un termine di potenziale efficace V in cui l'atomo è in moto. Se la media temporale dell'intensità del campo elettrico prodotto dal laser dipende dalla posizione, la variazione energetica dovuta al campo dà origine alla forza [4]

$$\mathbf{F}_{\text{dip}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \alpha'(\omega_L) \nabla \langle \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t, \quad (2.5)$$

dove \mathcal{E} rappresenta il modulo del vettore campo elettrico del laser, $\langle \dots \rangle_t$ indica una media temporale e α' è la parte reale della polarizzabilità atomica α . Il potenziale efficace considerato generalizza lo spostamento energetico dei livelli dovuto all'effetto Stark [13], approssimabile a $-\alpha \mathcal{E}^2/2$ per lo stato fondamentale, in presenza del campo elettrico statico di modulo \mathcal{E} e direzione indicata dal vettore unitario $\hat{\mathbf{e}}$. In questo caso, la polarizzabilità

atomica per lo stato fondamentale, rappresentato dal ket $|g\rangle$ e di energia E_g , è definita dalla relazione [4]

$$\alpha = 2 \sum_e \frac{|\langle e|\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}|g\rangle|^2}{E_e - E_g}, \quad (2.6)$$

dove \mathbf{d} è l'operatore di momento di dipolo elettrico. La sommatoria è dominata dagli stati eccitati, indicati dal bra $\langle e|$ e di energia E_e , la cui separazione energetica rispetto allo stato fondamentale corrisponde ad una frequenza prossima a quella della radiazione ω_L . In presenza di un campo elettrico dipendente dal tempo e considerando un solo stato eccitato nella sommatoria, l'equazione (2.6) si generalizza ottenendo [4]

$$\alpha(\omega_L) \approx \frac{|\langle e|\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}|g\rangle|^2}{E_e - i\hbar\Gamma_e/2 - E_g - \hbar\omega_L}, \quad (2.7)$$

dove $1/\Gamma_e$ corrisponde alla vita media dello stato eccitato. La forza \mathbf{F}_{dip} , definita secondo la (2.5) e nota come forza di dipolo, è fisicamente dovuta all'interazione tra il momento di dipolo indotto dell'atomo e il campo elettrico non omogeneo. Se la frequenza del laser è inferiore a quella di risonanza, $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$, il laser è detto *red-detuned* e lo stato fondamentale subisce uno spostamento negativo in energia. In questo caso, la forza di dipolo è diretta verso regioni con campo elettrico più intenso. Dato che focalizzando il fascio laser si genera un campo la cui intensità ha un massimo in un punto dello spazio, il potenziale prodotto è attrattivo e l'energia nello stato fondamentale ha un minimo spaziale, attorno al quale è possibile confinare gli atomi. Al contrario, se $\omega_L > \omega_0$, il laser è detto *blue-detuned* e il potenziale è repulsivo.

La profondità delle trappole ottiche dipende dall'entità dello spostamento energetico dei livelli dovuto al campo e in genere è dell'ordine dei μK in unità di temperatura. Quindi, come per le trappole magnetiche, prima di confinare gli atomi in una trappola ottica è richiesto un processo di raffreddamento.

Nell'apparato sperimentale utilizzato, i fasci laser *dimple* e *crossed* sono *red-detuned*, in quanto la lunghezza d'onda del campo elettrico generato, di 1064 nm, supera quella corrispondente alla separazione energetica tra i livelli atomici $5^2\text{S}_{1/2}$ e $5^2\text{P}_{3/2}$, di 780.0 nm (linea D2) e quella tra i livelli $5^2\text{S}_{1/2}$ e $5^2\text{P}_{1/2}$, primo sottolivello di struttura fine, di 794.8 nm (linea D1). I fotoni del laser, quindi, hanno energia inferiore a quella richiesta per qualsiasi transizione ottica che coinvolge il livello fondamentale. Per questa ragione, è possibile ignorare il contributo energetico dovuto all'assorbimento dei fotoni da parte degli atomi. In prima approssimazione, le uniche transizioni che contribuiscono significativamente al potenziale di interazione sono quelle relative alle linee D1 e D2, mentre le altre sono trascurabili. Con queste ipotesi, il potenziale attrattivo di dipolo ottico per l'atomo di ^{87}Rb è dato da [14]

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2} \left(\frac{2}{\omega_2^3(\omega_L - \omega_2)} + \frac{1}{\omega_1^3(\omega_L - \omega_1)} \right) I(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

dove ω_1 e ω_2 sono le frequenze delle transizioni corrispondenti rispettivamente alle linee D1 e D2. La distribuzione di intensità $I(\mathbf{r})$ della luce della trappola è approssimabile con

il fascio Gaussiano [14]

$$I(x, y, z) = I_0 e^{-2\frac{z^2+y^2}{w(x)^2}}, \quad (2.9)$$

dove il raggio del fascio varia secondo l'equazione

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2}, \quad (2.10)$$

con w_0 corrispondente al raggio minimo e $x_R = \pi w_0^2 / \lambda$ nota come lunghezza di Rayleigh, dipendente dalla lunghezza d'onda λ del laser nel mezzo in cui avviene la propagazione. Il potenziale U_{dip} , ottenuto inserendo l'espressione dell'intensità (2.9) nella (2.8), è approssimabile armonicamente come

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{H}(U_{\text{dip}})(\mathbf{r}_0) \mathbf{r}, \quad (2.11)$$

dove $\mathbf{H}(U_{\text{dip}})(\mathbf{r}_0)$ è la matrice Hessiana del potenziale valutata nel punto di minimo \mathbf{r}_0 . Dal calcolo degli autovalori della matrice h_i , con $i = x, y, z$, è possibile ricavare le frequenze ω_i della trappola armonica (1.4) [12]:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{h_i}{m}}. \quad (2.12)$$

2.1.3 Raffreddamento evaporativo

Le temperature raggiunte tramite raffreddamento laser non sono sufficientemente ridotte per realizzare la condensazione di Bose-Einstein nel gas di atomi di rubidio. Per diminuire ulteriormente la temperatura, viene attuata una procedura di raffreddamento evaporativo, che prevede l'espulsione dalla trappola delle particelle aventi un'energia superiore alla media energetica del sistema. In questo modo, l'energia media delle particelle rimaste diminuisce, ossia la temperatura si riduce, producendo un raffreddamento della nube.

Nello studio del raffreddamento evaporativo, per gli atomi nella trappola si può considerare in prima approssimazione una distribuzione termica di energia, rappresentata in Fig. 2.3. Generando un'apertura ai lati della trappola, solo gli atomi aventi energia pari o superiore a quella della trappola all'apertura, valore energetico di soglia per l'evaporazione, possono uscire dal potenziale confinante. Sperimentalmente, la modificazione della trappola si realizza in genere tramite una radiazione di radio-frequenza che varia lo stato atomico da uno *low-field seeker*, che consente l'intrappolamento, ad uno *high-field seeker*, in cui l'atomo viene espulso dalla trappola. Dato che l'energia nello stato dipende dalla posizione, a causa dell'effetto Zeeman prodotto da un campo magnetico di trappola non omogeneo, la collocazione esatta dell'apertura nella trappola può essere selezionata sintonizzando la frequenza della radiazione, in modo da indirizzare le transizioni tra i livelli energetici degli atomi in quella data posizione. Una volta raffreddata la nube con una radiazione, il sistema ritermalizza, ossia gli atomi scambiano energia tra loro mediante collisioni, fino a ripristinare una distribuzione termica ad una temperatura di equilibrio inferiore a quella iniziale.

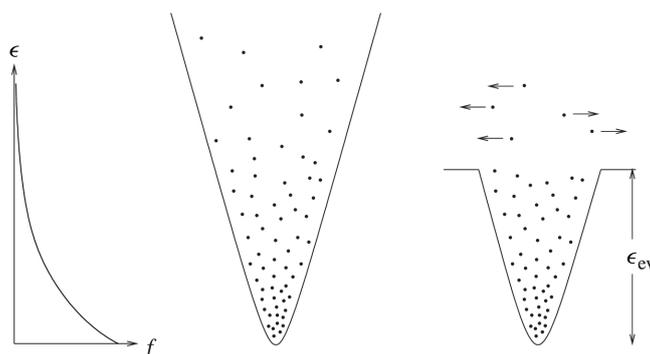


Figura 2.3: *Rappresentazione schematica della procedura di raffreddamento evaporativo. Il grafico a sinistra mostra la distribuzione di Maxwell-Boltzmann per l'energia degli atomi nella trappola, proporzionale a $e^{-\epsilon/kT}$. Quando viene generata un'apertura nel potenziale in cui sono intrappolati gli atomi, raffigurato nel centro, le particelle con energia superiore al valore di soglia ϵ_{ev} sono espulse dalla trappola, come mostrato nella parte destra della figura. Immagine tratta da [4].*

Per studiare l'andamento della temperatura in dipendenza dal tasso di evaporazione e dalla soglia energetica della trappola, si può considerare un gas isolato di atomi con energia media $\bar{\epsilon}$. Se l'energia media di una particella evaporata è $(1 + \beta)\bar{\epsilon}$, con $\beta > 0$, e dN indica la variazione del numero totale di particelle del sistema dovuta all'evaporazione ($dN < 0$), l'energia totale delle particelle evaporate risulta $-(1 + \beta)\bar{\epsilon}dN$. Per il principio di conservazione dell'energia, gli $N + dN$ atomi rimasti nella trappola hanno energia totale $E + (1 + \beta)\bar{\epsilon}dN$, dove E è l'energia iniziale del gas. Quindi, l'energia media per particella intrappolata, a seguito dell'evaporazione, risulta

$$\bar{\epsilon} + d\bar{\epsilon} = \frac{E + (1 + \beta)\bar{\epsilon}dN}{N + dN}, \quad (2.13)$$

da cui

$$\frac{d \ln(\bar{\epsilon})}{d \ln(N)} = \beta. \quad (2.14)$$

Se β è indipendente da N e $\bar{\epsilon}(0)$ e $N(0)$ indicano i valori iniziali, l'equazione

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}(0)} = \left(\frac{N}{N(0)} \right)^\beta \quad (2.15)$$

mostra la diminuzione dell'energia media $\bar{\epsilon}$ per atomo nella trappola dovuta alla riduzione del numero di particelle. La relazione tra l'energia media e la temperatura dipende dal potenziale di trappola. Ipotizzando di poter trattare il sistema classicamente, per un potenziale armonico si dimostra che la temperatura del gas ha una dipendenza funzionale dal numero di particelle analoga a quella dell'energia media [4]. Pertanto, dalla (2.14) segue l'equazione

$$\frac{d \ln(T)}{d \ln(N)} = \beta, \quad (2.16)$$

che mostra come, all'aumentare di β , quindi dell'energia delle particelle che evaporano, la temperatura decresca più rapidamente, fissato il numero di particelle perse. Inoltre, il tasso di evaporazione dipende dalla soglia energetica e dal tasso delle collisioni elastiche tra gli atomi del gas, responsabili del raggiungimento di energie superiori alla soglia. In particolare, più alta è l'energia di soglia, determinabile scegliendo opportunamente la frequenza della radiazione, più lenta è l'evaporazione.

Nell'apparato sperimentale utilizzato, il raffreddamento evaporativo si esegue attraverso fasi successive, la cui sequenza temporale è mostrata in Fig. 2.4. Nello stadio iniziale di evaporazione, si utilizza una radiazione di microonde incidente sugli atomi, la cui frequenza viene fatta variare da 6.894 GHz a 6.840 GHz in 4 s. La radiazione induce transizioni di dipolo magnetico tra stati atomici, grazie all'interazione del campo magnetico oscillante della radiazione con il momento di dipolo magnetico dell'atomo. Le frequenze più alte sono risonanti con gli atomi nelle regioni in cui il campo magnetico è più intenso, ossia nella parte superiore del potenziale di trappola. Al diminuire della frequenza si riduce la soglia energetica e vengono rimossi atomi con energia sempre minore. Inoltre, la variazione avviene lentamente per garantire al sistema un tempo sufficiente per ritermalizzare. Contemporaneamente all'inizio dell'evaporazione tramite microonde, viene accesa la trappola ottica con potenze di 3 W e 500 mW rispettivamente del *dimple* e del *crossed*. Alle temperature presenti in questa condizione, il potenziale ottico è pressoché trascurabile rispetto a quello magnetico, avente una profondità molto maggiore. Segue una fase di evaporazione magnetica in cui il gas viene raffreddato da una decompressione del quadrupolo, ossia riducendo gradualmente il gradiente di campo magnetico della trappola, per 500 ms. Successivamente, la corrente nelle bobine viene portata a zero in 7 s. Questo processo consente di caricare gli atomi nella trappola ottica. Infatti, al diminuire della temperatura, gli atomi non ancora evaporati si trovano nella regione prossima al minimo di intensità del campo magnetico, in cui si verifica lo spin flip di Majorana. Per evitare le perdite di atomi in questa regione, la trappola ottica viene centrata a distanza di 76 μm lungo z dal punto di minimo del campo magnetico. In questo modo, quando la temperatura viene ridotta, gli atomi risentono della forza di dipolo che li attrae verso il centro della trappola ottica, dato che il laser è *red-detuned*, allontanandoli dal punto di minimo della trappola magnetica. Dopo 2 s dal termine della decompressione del quadrupolo, si avvia la fase di evaporazione ottica, caratterizzata dalla riduzione di profondità e dalla variazione di curvatura del potenziale ottico di trappola, tramite una diminuzione di potenza del *dimple* da 3 W a 200 mW in circa 4 s. Con questa fase si conclude la procedura di raffreddamento evaporativo a temperature del gas dell'ordine di 100 nK. La nube, raggiunta tale condizione, presenta una porzione di condensato in aggiunta alla componente termica e risente solo del potenziale approssimativamente armonico dovuto alla trappola ottica, dato che il campo di quadrupolo ha completato lo spegnimento.

La rampa di diminuzione di potenza del *dimple* può essere interrotta prima del raggiungimento di 200 mW. In questo modo, il processo di evaporazione viene concluso a temperature superiori e la frazione condensata ottenuta è più piccola. La regolazione dell'evaporazione ottica si effettua fissando la durata temporale della rampa, al termine della quale, il fascio *dimple* mantiene la potenza costante.

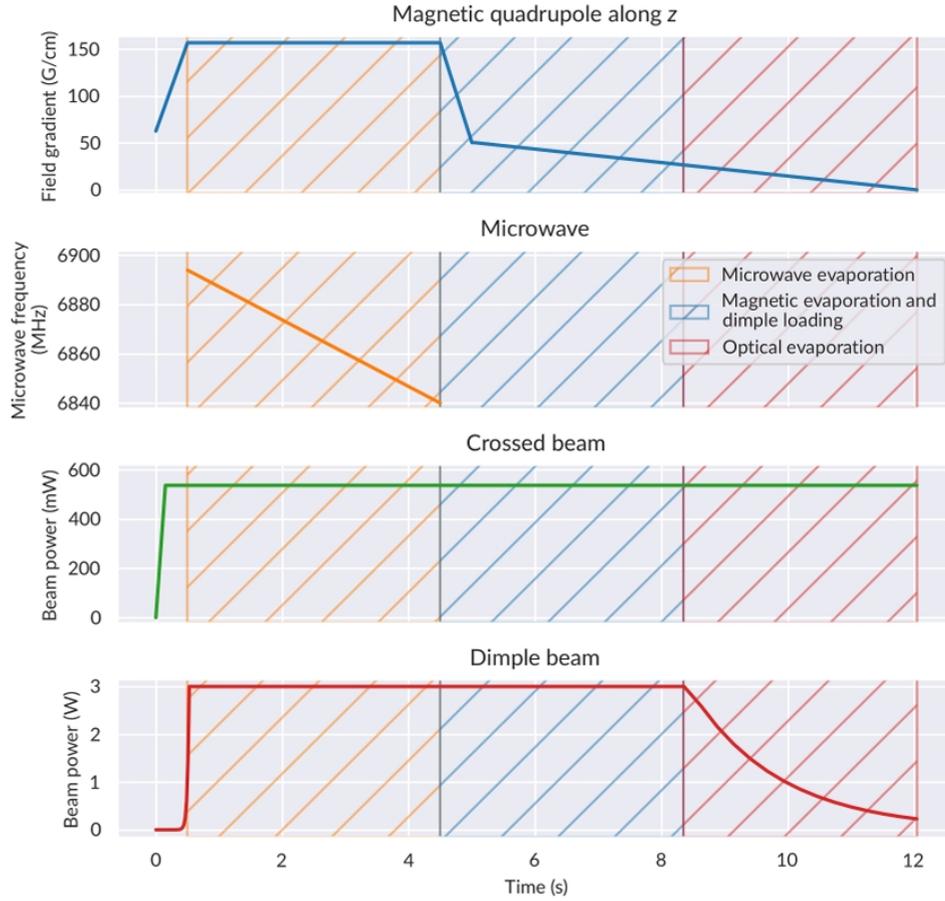


Figura 2.4: *Diagramma temporale della sequenza di raffreddamento evaporativo attuata nell'apparato sperimentale. Sono mostrati gli andamenti delle grandezze di interesse per le componenti responsabili del processo: campo magnetico di quadrupolo, radiazione di microonde e fasci laser crossed e dimple. Vengono distinte le fasi di evaporazione tramite microonde, evaporazione magnetica ed evaporazione ottica. Immagine tratta da [12].*

2.2 Rilevazione della nube atomica

Per analizzare la nube atomica, si misura la densità tramite un processo di imaging in assorbimento che utilizza un fascio laser, detto *di probe*, risonante con la transizione atomica $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F = 3\rangle$ del ^{87}Rb . Il fascio si propaga nella direzione dell'asse z attraversando la nube, fino a raggiungere una camera CCD (Charge Coupled Device) con sensore di 1024×1024 pixel, attraverso un insieme di specchi e lenti impiegati per aumentare la risoluzione. La camera CCD restituisce immagini del fascio laser in cui a ciascun pixel è attribuito un valore proporzionale all'intensità luminosa ricevuta, misurata tramite un fotodiodo. In corrispondenza della regione in cui si estende la nube, l'intensità è attenuata a causa dell'assorbimento di luce da parte degli atomi, dovuto all'interazione con i fotoni del fascio. Tale processo è regolato dalla legge di Lambert-Beer, secondo

2. Apparato sperimentale e analisi della nube atomica

cui l'intensità trasmessa di un fascio di luce monocromatica, di intensità I_0 e propagante lungo z , a seguito dell'attraversamento di un gas di atomi assorbente, è data da [12]

$$I(x, y) = I_0 e^{-OD(x, y)}. \quad (2.17)$$

La densità ottica OD per un atomo a due livelli è ottenuta dalla relazione

$$OD(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{\text{at}}(x, y, z) \sigma_{\text{abs}} dz, \quad (2.18)$$

dove n_{at} indica la densità di atomi, dipendente dal punto dello spazio, e l'integrale può essere limitato alla sola porzione dell'asse z in cui si estende la nube atomica. La sezione d'urto di assorbimento σ_{abs} per l'atomo a due livelli si ricava da

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}, \quad (2.19)$$

in cui λ è la lunghezza d'onda di risonanza, pari a 780.0 nm considerando i due livelli dell'atomo di ^{87}Rb coinvolti nella transizione indirizzata dal fascio *di probe*. Integrando lungo gli assi x e y l'equazione (2.18), si ricava il numero totale di atomi nella nube N_{at} , secondo la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} OD(x, y) dx dy = N_{\text{at}} \sigma_{\text{abs}}. \quad (2.20)$$

Tuttavia, dato che l'atomo di ^{87}Rb non è descrivibile come un atomo a due livelli, il risultato (2.20) deve essere corretto dividendo σ_{abs} per il fattore di calibrazione C del ^{87}Rb , il cui valore, ottenuto tramite prove sperimentali effettuate in precedenza, risulta $C = (4.63 \pm 0.30)$.

Per ogni misura eseguita con la camera CCD sono automaticamente acquisite tre immagini distinte. Un'immagine è ottenuta in assenza del fascio *di probe* per rilevare il rumore di fondo, noto come *background* e dovuto all'eventuale luce proveniente dall'ambiente circostante, con intensità luminosa I_1 . La seconda immagine viene acquisita in presenza del fascio *di probe* ma in assenza di atomi, al fine di ottenere il profilo di intensità del fascio laser e del *background*, indicato con I_2 . Infine, nella terza immagine il fascio illumina la nube atomica e l'intensità raccolta, comprensiva del *background*, è indicata con I_3 . Pertanto, l'intensità del solo fascio I a seguito dell'attraversamento della nube dipende da quella precedente l'attraversamento I_0 secondo la relazione

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_3 - I_1}{I_2 - I_1}. \quad (2.21)$$

Le immagini raccolte vengono elaborate per generare un'unica immagine finale nella quale si individua la forma e la distribuzione della nube di atomi. Da questa immagine, la densità ottica può essere ricavata sostituendo la (2.21) nella (2.17):

$$OD(x, y) = -\ln \left(\frac{I_3(x, y) - I_1(x, y)}{I_2(x, y) - I_1(x, y)} \right). \quad (2.22)$$

Tramite la tecnica di imaging descritta, è possibile rilevare gli atomi ancora in trappola. Tuttavia, per studiare il gas con maggiore precisione, le immagini vengono acquisite dopo una fase di espansione libera seguente lo spegnimento della trappola. Il tempo di volo corrisponde sperimentalmente all'intervallo temporale compreso tra lo spegnimento dei fasci laser responsabili della trappola ottica e l'inizio della rilevazione. Al termine del TOF, impostato a 30 ms, le dimensioni della nube raggiungono all'incirca i 60–70 μm . Inoltre, la tecnica di imaging in assorbimento è distruttiva per la nube atomica, in quanto gli atomi, fortemente riscaldati dall'interazione con la radiazione del fascio *di probe*, si disperdono nella *science chamber*. Pertanto, una volta ottenuta un'immagine, occorre ripristinare le condizioni di partenza della nube in trappola. A tale scopo, vengono ricaricati gli atomi nella MOT, la trappola ottica viene riattivata alla potenza nominale e si ripete la procedura di raffreddamento evaporativo. Dopo un intervallo temporale di circa 30 s, è possibile ottenere una nuova immagine della nube. Il processo può essere iterato in modo da effettuare cicli consecutivi di creazione e rilevazione del gas nelle condizioni desiderate, grazie ad una sequenza di operazioni temporizzate gestite da un software apposito ed eseguite automaticamente.

2.3 Misurazioni

Per studiare la nube atomica con diversi valori della frazione condensata, è stata modificata la temperatura del gas nel momento di acquisizione dell'immagine, variando la durata della rampa di diminuzione di potenza del *dimple*, indicata con t_{evap} . In particolare, tramite il software che gestisce l'acquisizione, la diminuzione è stata interrotta dopo un tempo trascorso dal suo inizio variabile tra 1800 ms e 2350 ms, con un passo di 50 ms. Tali valori corrispondono a frazioni condensate della nube comprese all'incirca tra l'1% e il 25%. Il software esegue ripetutamente il processo di creazione e rilevazione della nube, modificando t_{evap} ad ogni iterazione secondo i valori impostati, per ciascuno dei quali viene acquisita un'immagine. La sequenza viene ripetuta più volte per ottenere altre immagini della nube ricreata nelle medesime condizioni, in modo da disporre di un campione statistico più ampio su cui effettuare l'analisi dei dati.

Variando la durata dell'evaporazione ottica tramite regolazione del *dimple*, oltre al numero totale di atomi nella nube, si modifica il potenziale della trappola ottica di cui le particelle risentono al termine del raffreddamento. In particolare, le frequenze ω_i del potenziale armonico (1.4) cambiano a seconda dei valori di t_{evap} . Il gas di atomi, quindi, sottoposto ad un potenziale esterno differente e con un numero di atomi modificato, ad ogni valore di t_{evap} rappresenta un sistema diverso, caratterizzato da un proprio valore della temperatura critica. Per misurare la frequenza di trappola lungo la direzione z in cui agisce la gravità, la trappola ottica viene mantenuta spenta per un intervallo temporale di circa 300 μs , in cui si verifica un lieve spostamento della nube atomica verso il basso, dovuto alla forza di gravità. Alla riaccensione della trappola ottica, gli atomi, soggetti al potenziale approssimativamente armonico, iniziano ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio, ossia al centro del potenziale, nella direzione z . Tramite una procedura di fitting delle oscillazioni nel tempo del centro di massa della nube, con il profilo sinusoidale

atteso nel regime di piccole oscillazioni, si ottiene la frequenza ω_z . Le frequenze nelle restanti direzioni vengono ricavate dalla dimensione misurata dei fasci laser, con l'utilizzo di software implementati a tale scopo. La procedura di misurazione delle frequenze viene ripetuta impostando la potenza del fascio *dimple*, nella riattivazione della trappola ottica, ai valori corrispondenti ai diversi t_{evap} utilizzati nell'acquisizione delle immagini. In questo modo, si ottiene una corrispondenza tra t_{evap} e le frequenze di trappola.

2.4 Analisi delle immagini

Le immagini raccolte possono essere analizzate per ricavare informazioni in merito alla densità e alla temperatura della nube. A questo scopo, ho implementato un programma nel linguaggio Python che confronta l'intensità luminosa ottenuta dalle immagini con le distribuzioni di densità attese per il condensato e per la componente termica.

Le immagini acquisite dalla camera CCD vengono salvate nel formato FITS, che consente di memorizzare in sequenza i dati relativi ad ogni pixel. I file FITS vengono aperti e letti tramite il pacchetto `astropy.io.fits` della libreria `astropy.io` per Python, che restituisce un array bidimensionale contenente 1024x1024 elementi. Ciascuno di questi corrisponde ad un pixel dell'immagine acquisita ed è un numero naturale pari alla densità ottica OD , ottenuta dall'intensità misurata su quel pixel secondo la (2.22), moltiplicata per il fattore 1000. In Fig. 2.5 è riportata una rappresentazione bidimensionale della distribuzione di densità ottica ottenuta, tramite il programma in Python, a partire da una delle immagini acquisite. Dato che la densità ottica è proporzionale alla densità di colonna del gas, come indicato dall'equazione (2.18), la grandezza riportata negli elementi dell'array segue la stessa distribuzione spaziale della densità di colonna della nube.

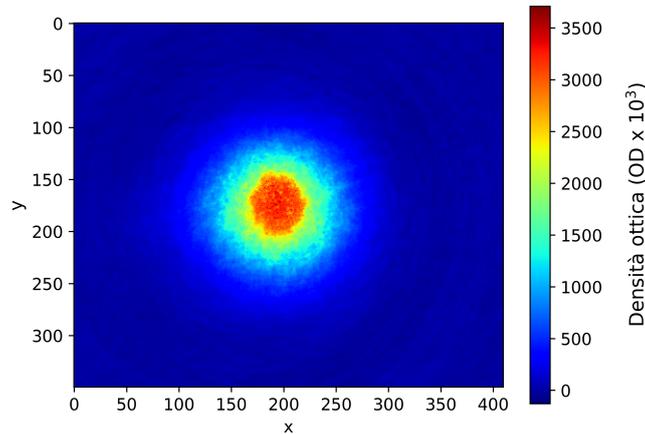


Figura 2.5: *Distribuzione bidimensionale della densità ottica ottenuta dalla lettura tramite il programma in Python di un'immagine della nube atomica con $t_{\text{evap}} = 2100$ ms, acquisita dalla camera CCD. La presenza del condensato è evidente dal picco centrale nella distribuzione, sovrapposto al profilo relativo alla componente termica, di densità inferiore e larghezza maggiore. I valori delle coordinate x e y sono espressi in numero di pixel.*

Per ricavare la frazione condensata, nota la densità di colonna totale, occorre distinguere il contributo della componente termica da quello del condensato. Secondo la trattazione teorica riportata nel capitolo precedente, la densità della componente termica nel momento di acquisizione dell'immagine obbedisce all'equazione (1.58), in cui t corrisponde al TOF fissato. Il potenziale chimico, nell'approssimazione semiclassica impiegata per ricavare la (1.58), è nullo in tutte le immagini acquisite, per le quali la frazione di condensato è finita, ossia la temperatura è inferiore al valore critico. Sostituendo l'espressione per il potenziale efficace (1.59) nella (1.58), con $\mu = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} n_T(x, y, z) &= \frac{1}{\lambda_T^3} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1 + \omega_k^2 t^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\tilde{V}_{\text{ext}}(x,y,z)/kT}}{n^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1 + \omega_k^2 t^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2/2\tilde{\sigma}_x^2} e^{-ny^2/2\tilde{\sigma}_y^2} e^{-nz^2/2\tilde{\sigma}_z^2}}{n^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dunque, la densità della componente termica, a meno di costanti moltiplicative, è data dalla somma di infinite Gaussiani tridimensionali anisotrope, per l' n -esima delle quali il quadrato della deviazione standard nella direzione spaziale $i = x, y, z$ si ottiene come $\tilde{\sigma}_i^2/n$, dove

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{kT(1 + \omega_i^2 t^2)}{m\omega_i^2} \quad (2.24)$$

è il quadrato della deviazione standard della Gaussiana corrispondente al primo termine della sommatoria nell'equazione (2.23). Inoltre, si può notare come $\tilde{\sigma}_i^2$ sia ricavabile dal quadrato della deviazione standard σ_i^2 della corrispondente Gaussiana nella formula per la densità della componente termica del gas ancora in trappola (1.22), secondo la relazione

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2(1 + \omega_i^2 t^2). \quad (2.25)$$

Integrando la (2.23) nella direzione dell'asse z , si ricava la distribuzione per la densità di colonna

$$\begin{aligned} n_T(x, y) &= \frac{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_z}{\lambda_T^3} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1 + \omega_k^2 t^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2/2\tilde{\sigma}_x^2} e^{-ny^2/2\tilde{\sigma}_y^2}}{n^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_z}{\lambda_T^3} \prod_{k=x,y,z} \frac{1}{(1 + \omega_k^2 t^2)^{1/2}} g_2(e^{-x^2/2\tilde{\sigma}_x^2} e^{-y^2/2\tilde{\sigma}_y^2}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

La funzione di Bose standard di ordine 2, g_2 , coincide con la funzione dilogaritmica Li_2 , implementabile in Python tramite il pacchetto `scipy.special` della libreria `scipy`. Per quanto riguarda il condensato, in approssimazione di Thomas-Fermi la densità segue la distribuzione riportata nell'equazione (1.37), in cui i raggi dipendono dai fattori di scala secondo la (1.60) a causa dell'espansione libera. Pertanto, la densità del condensato n_C risulta

$$n_C(x, y, z) = \begin{cases} n_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2(t)} - \frac{y^2}{R_y^2(t)} - \frac{z^2}{R_z^2(t)} \right) & \text{se } \frac{x^2}{R_x^2(t)} + \frac{y^2}{R_y^2(t)} + \frac{z^2}{R_z^2(t)} < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.27)$$

2. Apparato sperimentale e analisi della nube atomica

La densità di colonna si ottiene integrando questa espressione nella direzione dell'asse z :

$$n_C(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3}n_0R_z(t) \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2(t)} - \frac{y^2}{R_y^2(t)}\right)^{3/2} & \text{se } \frac{x^2}{R_x^2(t)} + \frac{y^2}{R_y^2(t)} < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Per confrontare la distribuzione di densità misurata sperimentalmente con i profili attesi, ho implementato delle routine di fit opportune, che impiegano come dati sperimentali i valori contenuti nell'array ricavato dall'immagine. Il codice in Python utilizza la funzione `curve_fit`, definita nel modulo `scipy.optimize` della libreria `scipy`, per eseguire fit non lineari tramite il metodo dei minimi quadrati. Il sistema di coordinate, fissato dalla lettura dell'immagine, ha origine nel primo pixel in alto a sinistra, mentre ogni pixel corrisponde ad un'unità, per entrambe le direzioni x e y dell'immagine. Per la componente termica, la funzione di fit è della forma

$$f_T(x, y) = y_0 + A \operatorname{Li}_2 \left(q e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \right), \quad (2.29)$$

che corrisponde alla (2.26) con il termine aggiuntivo y_0 , che tiene conto di un eventuale offset nei dati. Per la Gaussiana contenuta nell'argomento della funzione dilogaritmica, occorre introdurre i valori medi μ_x e μ_y , non nulli dato che il sistema di coordinate non ha origine nel punto di minimo del potenziale, come si assume per ricavare la (2.23). Inoltre, il fattore q , unitario secondo la previsione teorica, viene introdotto nella (2.29) come parametro vincolato nell'intervallo $(0,1]$ per ragioni di convergenza del fit. I parametri di fit sono y_0 , q , μ_x , μ_y , l'ampiezza A e le deviazioni standard σ_x e σ_y della Gaussiana. Per il condensato, invece, si utilizza la funzione di fit

$$f_C(x, y) = y_0 + B \left(1 - \frac{(x - m_x)^2}{R_x^2} - \frac{(y - m_y)^2}{R_y^2} \right)^{3/2}, \quad (2.30)$$

corrispondente alla (2.28) con l'aggiunta dell'offset iniziale y_0 e dei parametri m_x e m_y dovuti allo spostamento del sistema di coordinate. I parametri di fit sono y_0 , m_x , m_y , l'ampiezza B e i raggi di Thomas-Fermi R_x e R_y . Dato che la densità di colonna totale della nube atomica obbedisce alla distribuzione bimodale ottenuta dalla somma $n_T(x, y) + n_C(x, y)$, il programma esegue un fit ai dati sperimentali con la funzione

$$f_B(x, y) = y_0 + A \operatorname{Li}_2 \left(q e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \right) + B \left(1 - \frac{(x - m_x)^2}{R_x^2} - \frac{(y - m_y)^2}{R_y^2} \right)^{3/2}, \quad (2.31)$$

che tiene conto di entrambe le componenti della nube. Per favorire la convergenza del fit ed evitare risultati scorretti, come valori iniziali stimati per i parametri, ho utilizzato i valori ottimali ricavati dai fit eseguiti separatamente con le funzioni f_T e f_C . In Fig. 2.6 è rappresentato il risultato del fit con la funzione f_B per la distribuzione di densità ottica relativa ad un'immagine della nube.

Per ogni immagine acquisita, ho eseguito un secondo fit bimodale, in cui la componente termica viene confrontata con un'unica funzione Gaussiana bidimensionale, che riproduce soltanto il primo termine della sommatoria nell'equazione (2.26). Dal confronto dei risultati dei due fit bimodali, è possibile valutare l'accuratezza dell'approssimazione della distribuzione relativa alla componente termica con un profilo puramente Gaussiano. La funzione impiegata per questo fit bimodale è

$$f_G(x, y) = y_0 + Ae^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} + B \left(1 - \frac{(x-m_x)^2}{R_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{R_y^2} \right)^{3/2}, \quad (2.32)$$

dove i parametri relativi alla componente termica sono l'offset iniziale y_0 , l'ampiezza A , le deviazioni standard σ_x e σ_y e le medie μ_x e μ_y della Gaussiana bidimensionale.

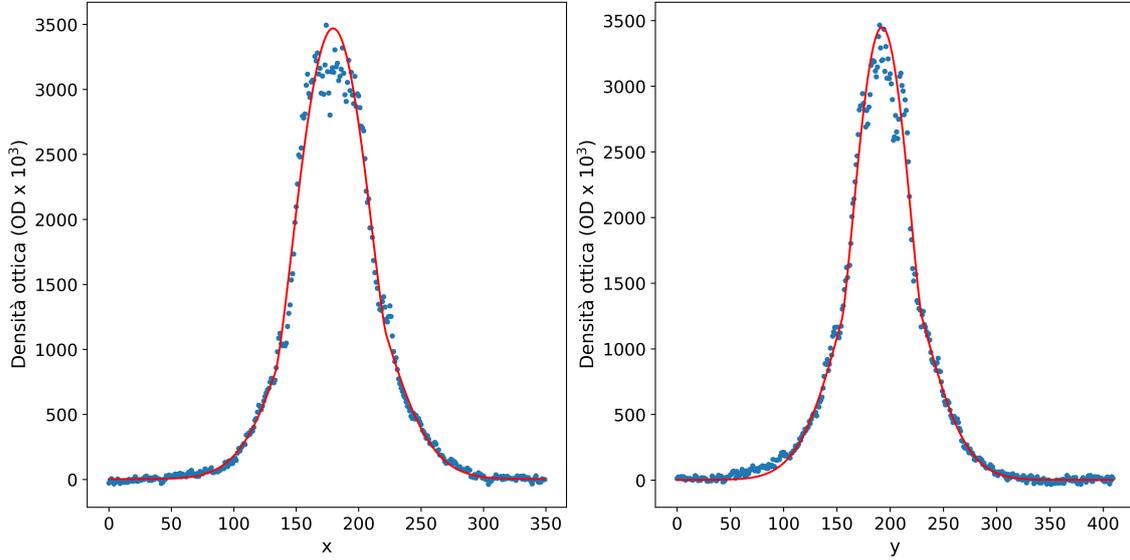


Figura 2.6: Distribuzione della densità ottica ottenuta dal programma in Python a partire da un'immagine della nube atomica con $t_{\text{evap}} = 2250$ ms. La densità ottica è rappresentata in funzione della coordinata x , nell'immagine di sinistra, o della coordinata y , nell'immagine di destra. In entrambi i casi, l'altra coordinata è fissata al valore che assume nel punto in cui la densità ottica misurata è massima. La curva rossa corrisponde alla funzione f_B del fit bimodale (2.31) che meglio approssima i dati sperimentali, rappresentati dai punti blu in figura. I valori delle coordinate x e y sono espressi in numero di pixel.

2.5 Calcolo della temperatura critica e della frazione condensata

Dai valori ottimali dei parametri ottenuti tramite il fit con la funzione f_B , riportata nell'equazione (2.31), ho calcolato il numero di atomi della componente termica N_T e il numero di atomi del condensato N_C .

2. Apparato sperimentale e analisi della nube atomica

Nota la distribuzione di una densità di colonna, il numero di atomi si ottiene integrando in entrambe le direzioni spaziali. Pertanto, ho ricavato N_T e N_C a partire dagli integrali delle funzioni di fit definite con i valori ottimali dei parametri. Dato che i fit vengono eseguiti sugli elementi dell'array, ossia su valori di densità ottica moltiplicata per il fattore 1000, gli integrali ottenuti devono essere opportunamente scalati, in accordo con la (2.20), per avere il numero di atomi. Si ricava

$$\begin{aligned} N_T &= 2\pi \frac{\sigma_x \sigma_y d^2}{\sigma_{\text{abs}}} \frac{A}{1000} \text{Li}_3(q) C \\ N_C &= \frac{2\pi}{5} \frac{R_x R_y d^2}{\sigma_{\text{abs}}} \frac{B}{1000} C, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove Li_3 è la funzione polilogaritmica di ordine 3, coincidente con la funzione di Bose standard di ordine 3. I valori delle grandezze con dimensioni di una lunghezza, σ_x , σ_y , R_x e R_y , ottenuti dal fit, sono espressi in numero di pixel; pertanto vanno moltiplicati per la dimensione fisica del pixel d nello spazio oggetto, dipendente dalla risoluzione della camera CCD e dal fattore di ingrandimento. Il valore utilizzato è $d = (3.8470 \pm 0.0060) \mu\text{m}$, ottenuto da precedenti misure sperimentali. Una volta ricavati N_T e N_C , la frazione condensata si calcola come N_C/N , dove $N = N_T + N_C$ è il numero totale di atomi della nube.

La temperatura del gas viene ricavata dai valori ottimali dei parametri σ_x e σ_y ottenuti dal fit bimodale, secondo l'equazione (2.24). Dato che nelle condizioni sperimentali considerate risulta $\omega_i^2 t^2 \gg 1$, l'espressione per la temperatura può essere semplificata ottenendo

$$T_i \approx \frac{m\sigma_i^2}{kt^2} d^2, \quad (2.34)$$

dove $i = x, y$ e il parametro σ_i è riportato alle dimensioni reali tramite il fattore d ; mentre t corrisponde al tempo di volo, pari a 30 ms. L'errore relativo su t^2 , ottenuto da precedenti misure sperimentali e legato al tempo richiesto per lo spegnimento dei laser della trappola ottica, risulta di 0.005.

La temperatura critica della nube, nell'approssimazione semiclassica per il gas ideale, è calcolabile dall'equazione (1.15) per ogni immagine acquisita, con valori di ω_{ho} diversi a seconda di t_{evap} . Le correzioni da apportare ai valori di temperatura ottenuti, dovute alla dimensione finita del sistema e alle interazioni interatomiche, vengono calcolate secondo le equazioni (1.27) e (1.48). Per gli atomi di ^{87}Rb , soggetti ad interazioni repulsive, la lunghezza di scattering a è pari a $100.4a_0$.

Capitolo 3

Risultati dell'analisi e discussione

I risultati ottenuti dall'analisi delle immagini, presentati in questo capitolo, vengono confrontati con le previsioni teoriche per il sistema studiato. Si descrivono gli andamenti della temperatura critica e della frazione condensata della nube, al variare della durata del processo di evaporazione ottica, con particolare attenzione alle conseguenze della modificazione di temperatura e numero di atomi. Segue una discussione sull'accuratezza delle approssimazioni impiegate per ottenere il profilo di densità della nube e si valuta l'entità delle correzioni alla temperatura critica dovute alla dimensione finita del sistema e alle interazioni interatomiche.

3.1 Risultati dei fit

Per ogni immagine acquisita, dall'analisi eseguita tramite il programma in Python, ho ricavato i valori ottimali dei parametri del fit bimodale con la funzione f_B , definita nell'equazione (2.31). L'andamento della frazione condensata ottenuta da questi valori, in funzione di t_{evap} , risulta qualitativamente compatibile con la previsione teorica per le immagini acquisite quando la procedura di evaporazione ottica viene arrestata a $t_{\text{evap}} > 2050$ ms. Per le restanti immagini, invece, la differenza significativa tra i valori di frazione condensata ottenuti e quelli attesi suggerisce una scarsa affidabilità dei risultati del fit con f_B . In particolare, quando la componente condensata della nube è abbastanza ridotta, il programma non riesce a riconoscere la presenza del condensato e la funzione f_B viene adattata ai dati in modo scorretto. Per questa ragione, nell'analisi di tutte le immagini acquisite con $t_{\text{evap}} \leq 2050$ ms, ho impiegato i risultati del fit eseguito con f_G , definita nella (2.32), che restituisce valori di frazione condensata compatibili con le previsioni teoriche.

In tutti i fit effettuati, le incertezze associate ai valori ottimali dei parametri corrispondono agli errori standard, valutabili tramite il metodo dei minimi quadrati e calcolati dalla matrice di covarianza restituita dal fit. I dati sperimentali di densità ottica, ottenuti dalla lettura delle immagini, e i valori di t_{evap} sono considerati privi di errore.

3.1.1 Approssimazione della densità della componente termica

Per le immagini acquisite quando la procedura di evaporazione ottica viene interrotta a $t_{\text{evap}} > 2050$ ms, i risultati del fit con la funzione f_B , che descrive l'andamento teorico atteso per la densità di colonna della nube, sono stati confrontati con quelli ottenuti tramite il fit con f_G . Entrambe le funzioni, definite con i valori ottimali dei parametri, riproducono in modo qualitativamente accurato i dati sperimentali. In Fig. 3.1 sono presentati i valori ottimali dei parametri σ_x e σ_y ottenuti da entrambi i fit, la cui differenza relativa è inferiore al 2% in tutte le immagini analizzate. Il calcolo dell'integrale del termine che descrive la componente termica della nube nelle funzioni di fit, definite con i valori ottimali dei parametri, fornisce i risultati confrontati in Fig. 3.2.

Secondo l'equazione (2.26), l'accuratezza dell'approssimazione della funzione di Bose g_2 con il primo termine della sommatoria, corrispondente ad una Gaussiana bidimensionale, cresce al diminuire dell'argomento. Per temperature inferiori al valore critico, come quelle delle nubi atomiche nelle immagini analizzate, l'approssimazione si mantiene buona nelle regioni più distanti dal centro della trappola, in cui il potenziale presenta valori maggiori. Nella zona centrale, invece, i valori assunti dalla funzione di Bose aumentano apprezzabilmente a causa dell'aggiunta dei restanti termini della sommatoria, come si evince dall'equazione (1.25).

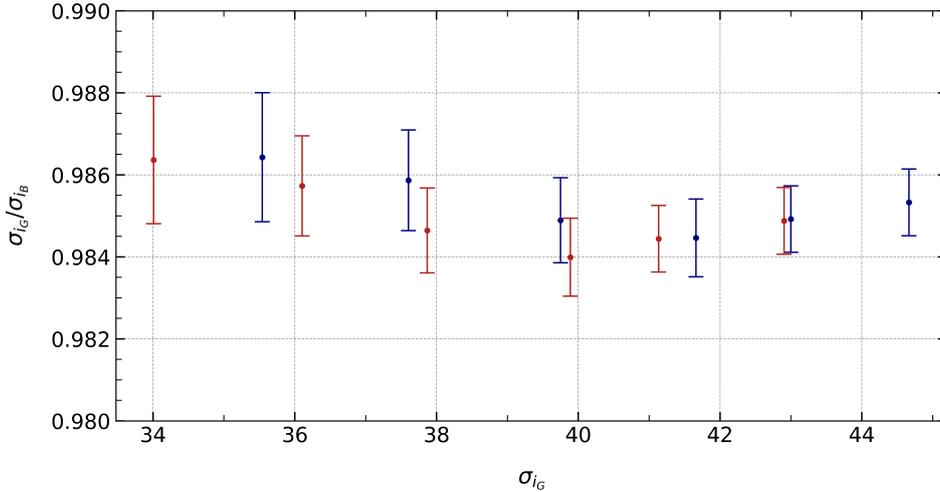


Figura 3.1: Confronto dei valori ottimali dei parametri σ_x e σ_y ottenuti dai fit con la funzione f_B (2.31) o con la funzione f_G (2.32). I parametri delle funzioni f_B e f_G sono indicati rispettivamente da σ_{iB} e σ_{iG} , con $i = x$ (punti in blu) o $i = y$ (punti in rosso). Per ogni valore di $t_{\text{evap}} > 2050$ ms usato nella presa dati, è riportato un punto sperimentale, risultato dell'analisi di un'unica immagine. I valori di deviazione standard sono espressi in numero di pixel. Le incertezze su σ_{iG} , dell'ordine di 10^{-2} , non sono apprezzabili alla scala utilizzata.

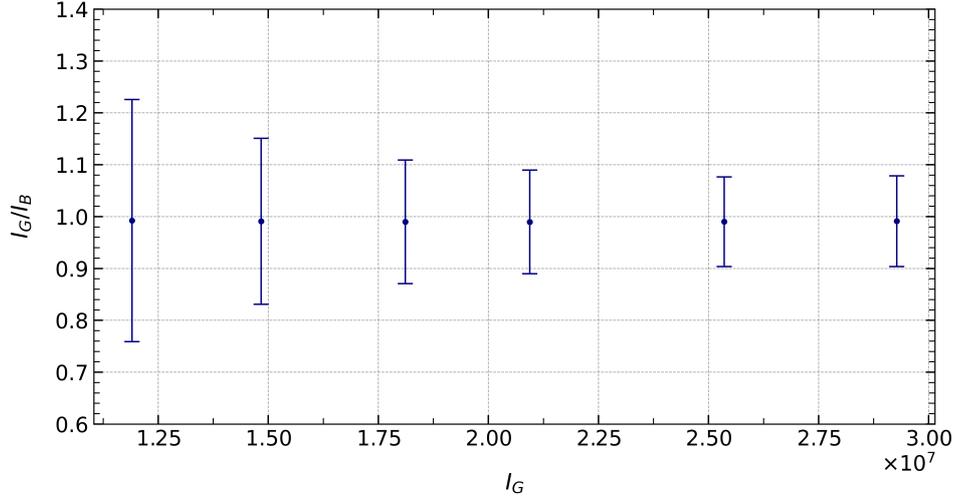


Figura 3.2: Confronto degli integrali I_B e I_G del termine che descrive la componente termica della nube rispettivamente nelle funzioni di fit f_B (2.31) e f_G (2.32), definite con i valori ottimali dei parametri, le cui incertezze sono sommate linearmente. Per ogni valore di $t_{\text{evap}} > 2050$ ms usato nella presa dati, è riportato un punto sperimentale, risultato dell'analisi di un'unica immagine. Le incertezze su I_G , dell'ordine di 10^4 , non sono apprezzabili alla scala utilizzata.

Il confronto dei risultati dei due fit bimodali, tuttavia, mostra come il profilo della funzione di Bose g_2 non si discosti sensibilmente da quello di una singola funzione Gaussiana, avente una larghezza, quantificata dalla deviazione standard, prossima a quella del primo termine della sommatoria che definisce la g_2 . Tale considerazione giustifica il confronto della densità di colonna della componente termica con una Gaussiana bidimensionale, eseguito tramite i fit con f_G , anche per le immagini con valori di t_{evap} inferiori o uguali a 2050 ms.

3.2 Profili di temperatura critica e frazione condensata

Per le immagini acquisite quando l'evaporazione ottica viene arrestata a $t_{\text{evap}} \leq 2050$ ms, a partire dai valori ottimali dei parametri ottenuti dal fit con f_G , il numero di atomi del condensato N_C viene calcolato come indicato nella (2.33); mentre per il numero di atomi della componente termica si utilizza l'espressione

$$N_T = 2\pi \frac{\sigma_x \sigma_y d^2}{\sigma_{\text{abs}}} \frac{A}{1000} C, \quad (3.1)$$

ricavata dall'integrale della funzione Gaussiana. Per tutte le immagini acquisite, ho utilizzato la propagazione lineare delle incertezze per calcolare il limite superiore dell'errore da associare agli integrali delle distribuzioni, contenenti i parametri di fit. Le incertezze su

C e d , indipendenti dal fit, sono aggiunte propagando in quadratura. Complessivamente, all'aumentare di t_{evap} , si riscontra una crescita di N_C , il cui ordine di grandezza varia da 10^5 a 10^6 , e una diminuzione di N_T , con ordine di grandezza variabile da 10^7 a 10^6 . Il numero totale di atomi che forma la nube al momento di acquisizione dell'immagine diminuisce all'aumentare di t_{evap} , compatibilmente con quanto atteso. Quando si prolunga l'evaporazione ottica, infatti, l'energia di soglia si riduce, provocando la rimozione di ulteriori atomi della nube dalla trappola.

Le frequenze del potenziale di trappola ottica al termine dell'evaporazione, misurate per i diversi valori di t_{evap} usati nella presa dati, sono riportate in Tab. 3.1. Ad ogni valore di frequenza è associata un'incertezza relativa del 5%, stimata dall'errore sulla misura della potenza dei fasci *dimple* e *crossed* e considerando la presenza di ulteriori sorgenti di incertezza.

In Fig. 3.3 è mostrato il profilo di temperatura critica T_c^0 della nube in approssimazione semiclassica per il gas ideale, al variare di t_{evap} , ottenuto dall'analisi di tutte le immagini acquisite. Le incertezze su N e ω_{ho} sono propagate in quadratura secondo la (1.15), per ricavare l'errore associato alla temperatura critica in ogni immagine. L'andamento decrescente, osservato in Fig. 3.3, è dovuto alla riduzione del numero di atomi della nube prodotto dal prolungamento dell'evaporazione, e favorito, fino a $t_{\text{evap}} = 2250$ ms, dalla diminuzione della media geometrica delle frequenze di trappola, come si deduce dall'equazione (1.15).

La frazione condensata, calcolata per ogni immagine acquisita, aumenta all'incirca dall'1% al 25% al crescere di t_{evap} , con l'andamento mostrato in Fig. 3.4 e coerente con quanto previsto. Infatti, secondo la trattazione teorica riportata nel primo capitolo, per un gas con numero totale di atomi fissato e nelle medesime condizioni di confinamento, il numero medio di occupazione del livello energetico di singola particella più basso cresce al diminuire della temperatura, provocando un aumento della frazione condensata. Nel sistema analizzato, all'aumentare di t_{evap} , la nube si raffredda, favorendo la disposizione delle particelle nello stato fondamentale. Contestualmente, si verifica la rimozione dalla nube degli atomi nei livelli energetici più alti, a causa della riduzione dell'energia di soglia. La combinazione di entrambi gli effetti spiega l'incremento del peso della componente condensata sul totale di atomi della nube. La modificazione della curvatura del potenziale di trappola durante l'evaporazione non altera significativamente questi processi.

La variazione della frazione di condensato può essere analizzata in funzione della temperatura ridotta del sistema t_i , definita dal rapporto tra la temperatura della nube T_i , calcolata secondo l'espressione (2.34), e la temperatura critica T_c^0 . Le incertezze sui parametri di fit sono sommate linearmente, mentre per le altre grandezze si impiega la propagazione in quadratura. I profili ottenuti, presentati in Fig. 3.5, evidenziano un andamento generale di diminuzione della frazione condensata al crescere della temperatura ridotta. Quando t_{evap} decresce, infatti, l'aumento della temperatura della nube prevale su quello di T_c^0 , producendo un incremento della temperatura ridotta. Al contempo, come osservato in Fig. 3.4, la frazione condensata diminuisce, giustificando l'andamento mostrato in Fig. 3.5. I punti sperimentali ottenuti possono essere confrontati con la previsione teorica riportata nell'equazione (1.53) per il gas di atomi interagenti analizzato.

Il parametro di interazione η dipende dal numero di atomi e dalle frequenze di trappola, variabili con t_{evap} , secondo la (1.49). In Tab. 3.2 è riportata la corrispondenza tra i valori di t_{evap} impiegati nella presa dati e quelli di η , calcolati per le immagini dalla cui analisi si ottengono i grafici di Fig. 3.5. Pertanto, la dipendenza funzionale attesa della frazione condensata dalla temperatura ridotta varia per ogni punto sperimentale mostrato in Fig 3.5. Il confronto dei valori di frazione condensata ottenuti dall'analisi delle immagini con la previsione teorica riportata nella (1.53), è presentato in Fig. 3.6. La mancata compatibilità dei dati sperimentali con i valori attesi richiede ulteriori approfondimenti. Tra le principali cause occorre considerare la forma effettiva del potenziale al termine dell'evaporazione. In particolare, la forza di gravità, di cui gli atomi della nube risentono, introduce un termine lineare nel potenziale, il cui peso risulta significativo a temperature ridotte, quando la profondità del potenziale dovuto alla trappola ottica decresce. Pertanto, al di sotto della temperatura critica, l'approssimazione del potenziale di trappola con la forma armonica (1.4) diminuisce di accuratezza nelle regioni in cui si estende la nube più distanti dal punto di minimo del potenziale ottico. Le previsioni teoriche formulate assumendo il confinamento in una trappola armonica, per la frazione condensata e per la distribuzione di densità della nube, dunque, possono richiedere delle correzioni dovute alla gravità, per descrivere accuratamente il gas nelle condizioni sperimentali impiegate.

t_{evap} (ms)	f_x	f_y	f_z	f_{ho}
1800	87.3	81.4	27.7	58.1
1850	86.6	79.7	27.0	57.1
1900	85.9	78.1	26.4	56.2
1950	85.8	77.8	26.3	56.0
2000	85.2	76.3	25.6	55.0
2050	84.5	74.8	24.9	54.0
2100	83.9	73.1	24.1	52.9
2150	83.4	71.9	23.4	52.0
2200	83.1	71.2	22.8	51.3
2250	82.9	70.1	22.7	50.9
2300	82.8	67.3	24.8	51.7
2350	83.0	69.6	24.7	52.3

Tabella 3.1: *Frequenze in Hz del potenziale di trappola ottica in approssimazione armonica al termine dell'evaporazione, ottenute a partire dalla misurazione delle oscillazioni della nube in trappola, per i valori di t_{evap} usati nella presa dati. Ad ogni valore di frequenza è associata un'incertezza relativa del 5%. Le frequenze ω_i nell'espressione del potenziale armonico (1.4) corrispondono a $2\pi f_i$, con $i = x, y, z$. f_{ho} indica la media geometrica delle frequenze f_i .*

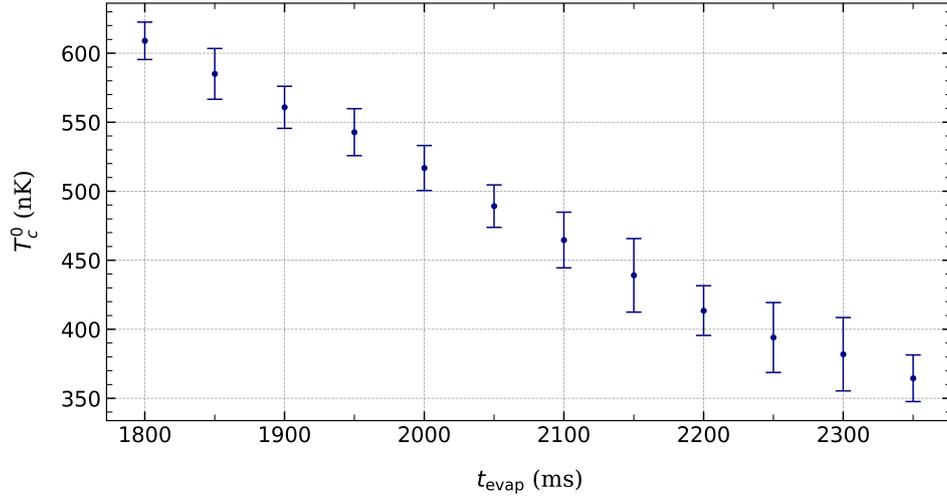


Figura 3.3: *Andamento della temperatura critica della nube in approssimazione semiclassica per il gas ideale, calcolata secondo la (1.15) dai valori ottimali dei parametri di fit, in funzione della durata dell'evaporazione ottica. Ogni punto corrisponde alla media pesata dei valori di temperatura critica ottenuti dalle immagini acquisite con la stessa durata dell'evaporazione.*

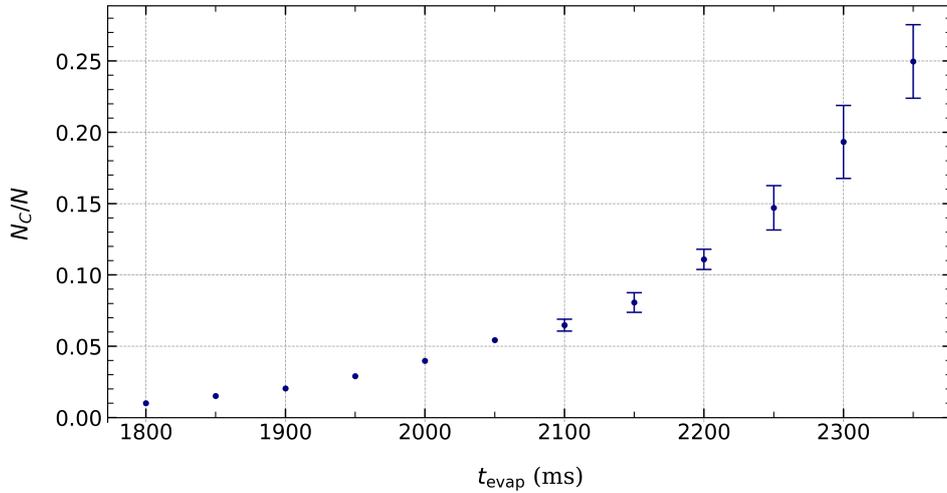
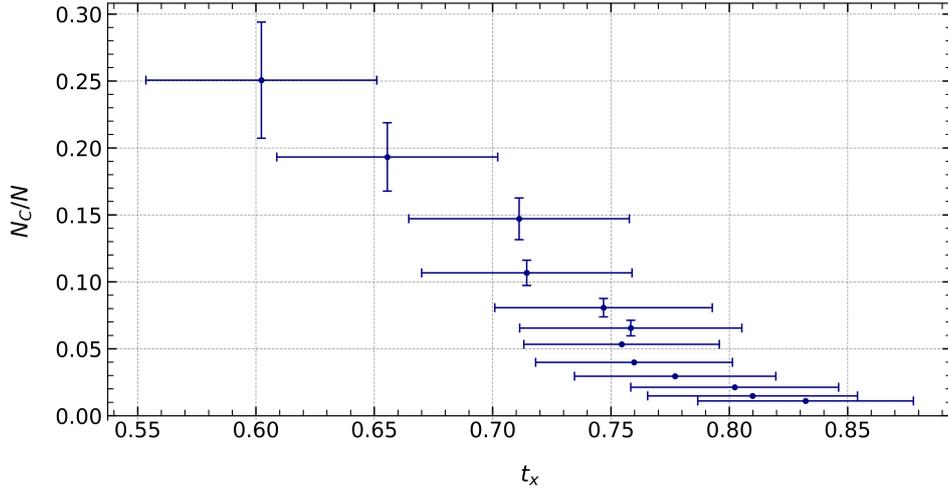
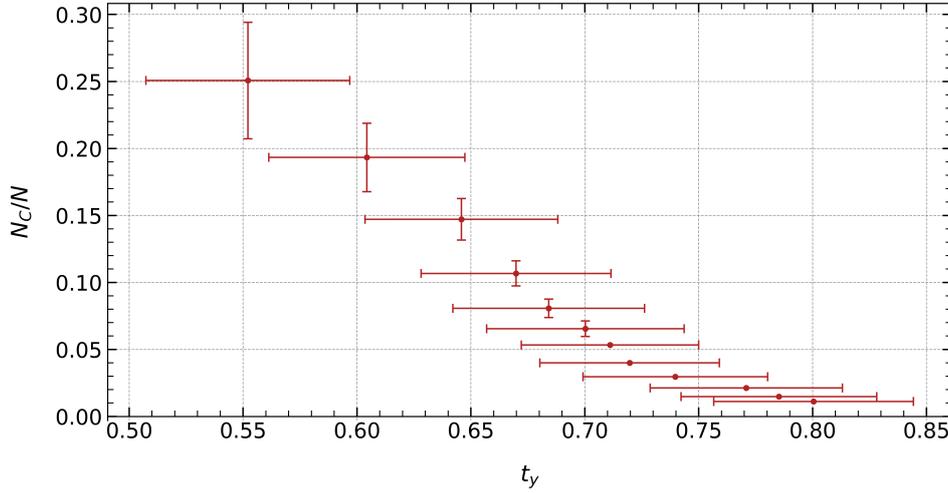


Figura 3.4: *Andamento della frazione condensata della nube, calcolata dai valori ottimali dei parametri di fit, in funzione della durata dell'evaporazione ottica. Ogni punto corrisponde alla media pesata dei valori di frazione condensata ottenuti dalle immagini acquisite con la stessa durata dell'evaporazione. Le incertezze su N_C/N dei punti con $t_{\text{evap}} < 2100$ ms, dell'ordine di 10^{-4} , non sono apprezzabili alla scala utilizzata.*



(a)



(b)

Figura 3.5: Andamento della frazione condensata della nube, calcolata dai valori ottimali dei parametri di fit, in funzione della temperatura ridotta $t_i = T_i/T_c^0$, con $i = x$ (a) o $i = y$ (b). La temperatura della nube T_i è ricavata secondo la (2.34), mentre T_c^0 è la temperatura critica, ottenuta dalla (1.15). Per ogni valore di t_{evap} usato nella presa dati, è riportato un punto sperimentale, risultato dell'analisi di un'unica immagine. Le incertezze su N_C/N dei punti con $t_{\text{evap}} < 2100$ ms, dell'ordine di 10^{-4} , non sono apprezzabili alla scala utilizzata.

3. Risultati dell'analisi e discussione

t_{evap} (ms)	η
1800	0.5001 ± 0.0054
1850	0.4961 ± 0.0054
1900	0.4925 ± 0.0054
1950	0.4891 ± 0.0053
2000	0.4843 ± 0.0053
2050	0.4792 ± 0.0052
2100	0.4743 ± 0.0058
2150	0.4686 ± 0.0057
2200	0.4633 ± 0.0057
2250	0.4586 ± 0.0059
2300	0.4557 ± 0.0063
2350	0.4517 ± 0.0071

Tabella 3.2: Parametro di interazione η per i valori di t_{evap} usati nella presa dati. Ogni valore di η è ottenuto dall'analisi di un'unica immagine, secondo la (1.49). Le incertezze sono propagate in quadratura.

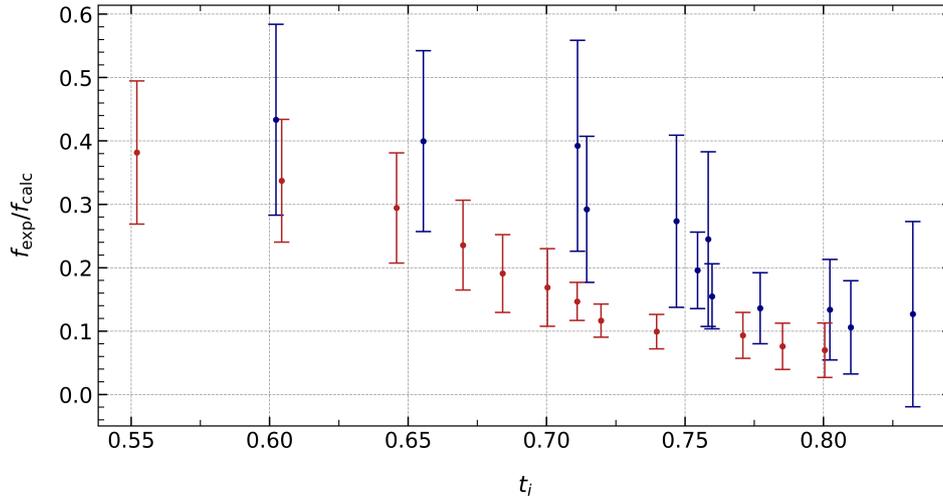


Figura 3.6: Confronto dei valori di frazione condensata f_{exp} e f_{calc} ottenuti rispettivamente dall'analisi delle immagini e dal calcolo della (1.53), in funzione della temperatura ridotta $t_i = T_i/T_c^0$, con $i = x$ (punti in blu) o $i = y$ (punti in rosso). La temperatura della nube T_i è ricavata secondo la (2.34), mentre T_c^0 è la temperatura critica, ottenuta dalla (1.15). Per ogni valore di t_{evap} usato nella presa dati, è riportato un punto sperimentale, risultato dell'analisi di un'unica immagine. Gli errori associati ai valori di t_i , non indicati nel grafico, sono visibili in Fig. 3.5. Le incertezze sul rapporto $f_{\text{exp}}/f_{\text{calc}}$ sono ottenute tramite propagazione lineare.

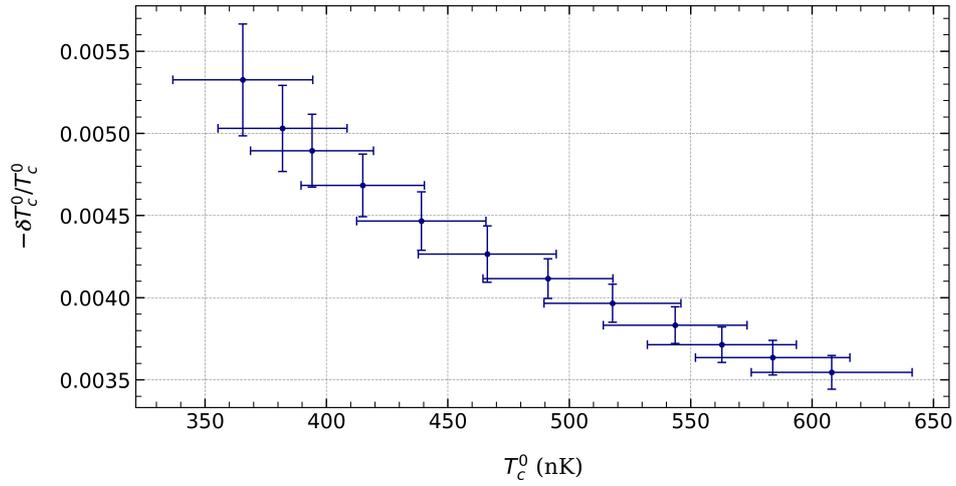
3.3 Accuratezza delle approssimazioni e correzioni alla temperatura critica

Nell'analisi delle immagini effettuata, si è implicitamente assunta la validità dell'approssimazione semiclassica per la componente termica; mentre gli effetti delle interazioni sono stati considerati assumendo l'ipotesi di diluizione del sistema e la dominanza dell'energia di interazione tra atomi sull'energia cinetica. Come spiegato nel primo capitolo, queste premesse sono necessarie per ricavare le distribuzioni di densità di colonna della componente termica (2.26) e del condensato (2.28), con le quali si sono confrontati i dati sperimentali tramite i fit. Nell'intervallo di temperatura del gas nelle immagini acquisite, il prodotto kT risulta tra le 80 e le 200 volte maggiore del corrispondente valore di $\hbar\omega_{\text{ho}}$, dell'ordine di qualche nK in unità di temperatura. Tale condizione, insieme ai valori di N dell'ordine di 10^6 o 10^7 , consente di ritenere accurata l'approssimazione semiclassica per il sistema studiato. Per quanto riguarda gli effetti delle interazioni interatomiche, dalle dimensioni della nube in trappola di qualche micron, osservate sperimentalmente per gli stati di confinamento usati nella presa dati, si ottiene $\bar{n}a^3$ dell'ordine di 10^{-1} o 10^{-2} . Con questi valori, l'ipotesi di diluizione del sistema si considera verificata. Inoltre, il rapporto Na/a_{ho} , dell'ordine di 10^4 per tutte le immagini acquisite, assicura l'accuratezza dell'approssimazione di Thomas-Fermi.

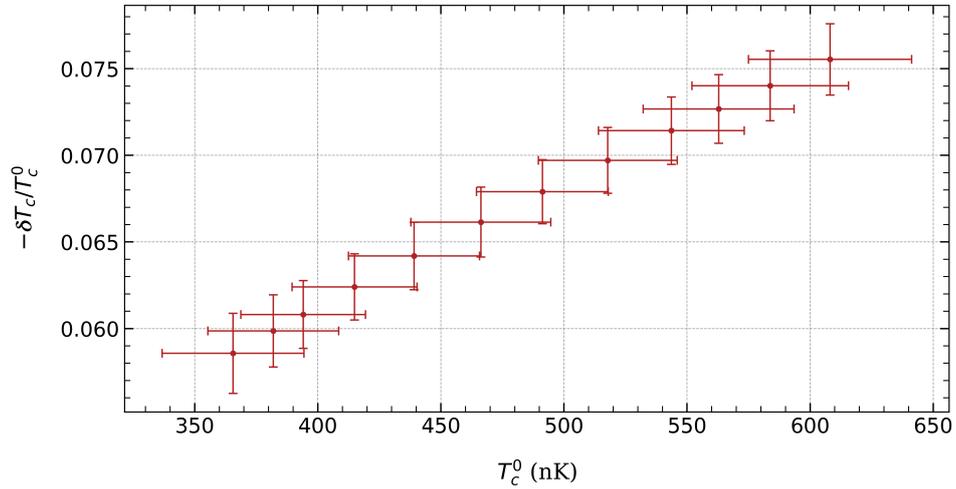
Nel sistema studiato, la temperatura critica T_c^0 del gas ideale in approssimazione semiclassica, calcolata dalle immagini secondo la (1.15), deve essere corretta tenendo conto del numero finito di particelle e delle interazioni interatomiche. Le variazioni relative ottenute sono presentate in Fig. 3.7 in funzione di T_c^0 . La dimensione finita del sistema comporta una diminuzione percentuale della temperatura critica, con valori prossimi allo 0.5% in tutte le immagini e decrescenti all'aumentare di T_c^0 . Tale andamento può essere spiegato, in accordo con la (1.27), osservando che valori crescenti di T_c^0 corrispondono a durate inferiori dell'evaporazione, come mostrato in Fig. 3.3, per le quali N è maggiore. Per i punti sperimentali con $t_{\text{evap}} \leq 2250$ ms, questo effetto è favorito dal corrispondente decremento dei valori del rapporto $\bar{\omega}/\omega_{\text{ho}}$.

Il valore assoluto dello spostamento di temperatura critica prodotto dalle interazioni interatomiche, con valori compresi tra il 5% e l'8%, invece, mostra un andamento crescente con T_c^0 , dovuto all'aumento di N quando t_{evap} diminuisce, secondo la (1.48). L'effetto è favorito, per $t_{\text{evap}} \leq 2250$ ms, dal corrispondente aumento della media geometrica delle frequenze di trappola, da cui a_{ho} dipende, come indicato nella (1.8). Complessivamente, la correzione dovuta alla dimensione finita è trascurabile rispetto a quella relativa alle interazioni, in accordo con la previsione teorica per nubi con N di ordine superiore a 10^5 . I valori di T_c^0 ottenuti dall'analisi delle immagini, quindi, vanno ridotti per ottenere una stima più accurata della temperatura critica della nube studiata, considerando variazioni relative dell'ordine di 10^{-1} , che aumentano al crescere di T_c^0 .

3. Risultati dell'analisi e discussione



(a)



(b)

Figura 3.7: Andamento delle variazioni relative della temperatura critica rispetto al valore T_c^0 ottenuto in approssimazione semiclassica per il gas ideale dalla (1.15), in funzione di T_c^0 . I punti in (a) corrispondono alle correzioni dovute al numero finito di particelle, secondo l'equazione (1.27); mentre quelli in (b) rappresentano le variazioni prodotte dalle interazioni interatomiche, descritte dalla (1.48). Per ogni valore di t_{evap} usato nella presa dati, è riportato un punto sperimentale, risultato dell'analisi di un'unica immagine. Le incertezze sono ottenute dalla somma lineare degli errori sulle frequenze nelle tre direzioni, propagata in quadratura con l'incertezza su N .

Conclusioni

Nel presente elaborato si è descritto lo studio di un gas di atomi di ^{87}Rb confinato in una trappola armonica anisotropa, in condizioni di temperatura e densità per le quali si realizza la condensazione di Bose-Einstein.

La trattazione teorica presentata nel primo capitolo si è concentrata sulla descrizione di un sistema composto da un numero fissato di bosoni identici, soggetti al potenziale di forma armonica riportato nella (1.4). In tali condizioni di confinamento, si è mostrato come l'avvenuta condensazione sia testimoniata dalla comparsa di un picco marcato nella distribuzione di densità della nube, in corrispondenza della regione centrale della trappola, dovuto al condensato e sovrapposto alla distribuzione più larga della componente termica, come osservato in Fig. 1.1. Impiegando la descrizione semiclassica per gli stati eccitati, nell'ipotesi di gas ideale, è stato ottenuto l'andamento della frazione condensata in funzione della temperatura (1.16), tramite l'espressione per la temperatura critica della nube (1.15). Inoltre, si è ricavato il profilo di densità della componente termica, riportato nella (1.22). Nei seguenti paragrafi, si sono illustrate le correzioni che occorre apportare a questa descrizione per lo studio di sistemi reali di atomi, a causa delle interazioni interatomiche e della presenza di un numero finito di particelle, responsabile della variazione della temperatura critica (1.27). Tramite l'ipotesi di diluizione del gas e la descrizione di campo medio, si è ricavata l'equazione di Gross-Pitaevskii (1.32), successivamente risolta, nella forma stazionaria, impiegando l'approssimazione di Thomas-Fermi per ottenere la distribuzione di densità del condensato (1.37). Come principali effetti delle interazioni, si sono discusse le variazioni della temperatura critica (1.48) e della dipendenza della frazione condensata dalla temperatura ridotta (1.53), rispetto alle stime ottenute per il gas ideale. Infine, sono state considerate le modificazioni dei profili di densità della componente termica e del condensato dovute all'espansione libera della nube, che si verifica per il gas di atomi di ^{87}Rb studiato, nell'intervallo temporale compreso tra lo spegnimento della trappola e l'acquisizione dell'immagine.

Dalla discussione dei fenomeni fisici responsabili del funzionamento di trappole magnetiche e ottiche, si è compresa l'efficacia dei meccanismi di raffreddamento e intrappolamento per la nube di atomi di ^{87}Rb . La seguente descrizione dettagliata del processo di raffreddamento evaporativo ha mostrato la possibilità di realizzazione sperimentale del condensato. Inoltre, si è evidenziato come la diminuzione di temperatura sia accompagnata dal decremento del numero di atomi della nube e dalla modificazione di profondità e curvatura del potenziale di trappola.

Nelle immagini acquisite modificando la durata dell'evaporazione ottica, in modo che

la nube contenga una porzione di condensato variabile, si è osservata la presenza di un picco nella distribuzione di densità, in accordo con la previsione teorica, come mostrato in Fig. 2.5. Dall'analisi dei profili di densità della componente termica e del condensato, sono stati ottenuti i parametri delle funzioni di fit, definite secondo la trattazione teorica, che meglio approssimano i dati sperimentali. A partire da questi risultati, il calcolo della temperatura critica, secondo l'espressione (1.15), ha fornito valori dell'ordine di 100 nK; mentre la frazione condensata della nube risulta variabile all'incirca tra l'1% e il 25%, in funzione della durata dell'evaporazione ottica. Gli andamenti ottenuti, mostrati in Fig. 3.3 e Fig. 3.4, risultano qualitativamente coerenti con le previsioni teoriche, basate sulla riduzione della temperatura e del numero di atomi della nube, dovuta al prolungamento dell'evaporazione. Tuttavia, la mancata compatibilità dei risultati sperimentali per la frazione condensata in funzione della temperatura ridotta, presentati in Fig. 3.5, con i valori attesi secondo la (1.53), richiede ulteriori approfondimenti. Considerando i valori delle frequenze di trappola, nell'intervallo di temperature in cui è avvenuta la presa dati, si è verificata la validità della descrizione semiclassica per gli stati eccitati e dell'approssimazione di Thomas-Fermi, che conferma la correttezza delle funzioni di fit impiegate nel corso dell'analisi. Infine, si sono valutate le correzioni alla temperatura critica dovute alle interazioni e alla dimensione finita, ottenendo valori compresi tra il 5% e l'8%, coerenti con le stime teoriche.

Bibliografia

- [1] M. H. Anderson et al., “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science*, vol. 269, n. 5221, pp. 198–201, 1995. DOI: 10.1126/science.269.5221.198.
- [2] K. B. Davis et al., “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Physical Review Letters*, vol. 75, pp. 3969–3973, 1995. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3969.
- [3] F. Dalfovo et al., “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, n. 3, 1999. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.463.
- [4] C. J. Pethick e H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [6] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2^a ed. John Wiley & Sons, 1987.
- [7] S. Grossmann e M. Holthaus, “On Bose-Einstein condensation in harmonic traps”, *Physics Letters A*, vol. 208, pp. 188–192, 1995. DOI: 10.1016/0375-9601(95)00766-V.
- [8] J. R. Ensher et al., “Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 4984–4987, 25 1996. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.4984.
- [9] L. P. Pitaevskii e S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003.
- [10] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari, “Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas”, *Physical Review A*, vol. 54, n. 6, R4633–R4636, 1996. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.R4633.
- [11] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari, “Scaling and Thermodynamics of a Trapped Bose-Condensed Gas”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 3987–3990, 21 1997. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.3987.
- [12] L. Cavicchioli, *From superfluids to droplets: quantum phenomena with a tunable Bose-Bose mixture*. Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Firenze, 2024.
- [13] B. H. Bransden e C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*. Longman Scientific & Technical, 1983.

- [14] R. Grimm, M. Weidemüller e Y. Ovchinnikov, “Optical Dipole Traps for Neutral Atoms”, *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 42, 2000. DOI: 10.1016/S1049-250X(08)60186-X.
- [15] M. P. Kennet, *Essential Statistical Physics*. Cambridge University Press, 2002.
- [16] A. P. Albus et al., “Critical temperature of Bose-Einstein condensation in trapped atomic Bose-Fermi mixtures”, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 35, pp. L511–L519, 2002. DOI: 10.1088/0953-4075/35/23/102.
- [17] L. Ferrari, “Approaching Bose–Einstein condensation”, *European Journal of Physics*, vol. 32, pp. 1547–1557, 2011. DOI: 10.1088/0143-0807/32/6/009.
- [18] B. Wang, “Review on Bose-Einstein Condensation”, *Highlights in Science, Engineering and Technology*, vol. 38, 2023. DOI: 10.54097/hset.v38i.5689.
- [19] W. Ketterle, D. S. Durfee e D. M. Stamper-Kurn, “Making, Probing and Understanding Bose-Einstein Condensates”, in *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases, Course CXL - Enrico Fermi Summer School*, M. Inguscio, S. Stringari e C. E. Wieman, cur., Società Italiana di Fisica, 1999.
- [20] A. Griffin, “A Brief History of Our Understanding of BEC: From Bose to Beliaev”, in *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Volume 140: Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, M. Inguscio, S. Stringari e C. E. Wieman, cur., Società Italiana di Fisica, 1999.
- [21] M. Mansuripur, “Quantization of the electromagnetic field, entropy of an ideal monoatomic gas, and the birth of Bose-Einstein statistics”, in *Proceedings of SPIE 13376, Quantum Sensing and Nano Electronics and Photonics XXI*, 2025, 133760G. DOI: 10.1117/12.3052584.