

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Applicazioni delle Strutture Lagrangiane Coerenti per lo studio dei flussi turbolenti

Relatore:

Dott. Carlo Cintolesi

Presentata da:

Chiara Baldelli

Correlatore:

Prof. Marco Lenci

Voglio dedicare questa tesi a Wladimiro Gradi, un amico importante che mi ha accompagnata durante tutto il percorso liceale e per i primi due anni di università e che purtroppo non è più fra noi.

Eri una persona speciale Wlad e sotto la dura scorza che ti eri faticosamente costruito nascondevi tanta dolcezza, gentilezza, affetto sincero e altruismo nei confronti di tutti i tuoi cari e una fragilità che probabilmente nessuno di noi ha mai capito davvero. La tua assenza mi accompagna ogni giorno ma sono orgogliosa di poter dire di aver conosciuto una persona come te. Sarai per sempre il mio migliore amico.

Senza di te non ce l'avrei mai fatta ad arrivare qui oggi a discutere la mia tesi di laurea. Grazie per tutto quello che hai fatto per me, questa tesi è un po' anche la tua.

Crediti

Desidero ringraziare il mio relatore, Dott. Carlo Cintolesi, per la guida competente e per il sostegno costante nello sviluppo di questo lavoro, fornendomi materiale prezioso e consigli sempre puntuali. Un sentito grazie va anche al Prof. Marco Lenci, mio correlatore, per la revisione attenta e la disponibilità mostrata durante la stesura della tesi.

Affidarmi un tema complesso, non affrontato nei corsi della Laurea Triennale in Fisica, ha rappresentato un'importante occasione di crescita scientifica e personale. Il loro sostegno è stato determinante nell'affrontare con fiducia la complessità del materiale e nella realizzazione di questo lavoro, a loro va tutta la mia gratitudine.

Sommario

La turbolenza rappresenta uno dei fenomeni più complessi e ancora in larga parte irrisolti della fluidodinamica, con un ruolo centrale nei processi naturali e tecnologici che governano il trasporto di energia, massa e quantità di moto. Le equazioni di Navier–Stokes costituiscono il quadro teorico di riferimento, ma la loro risoluzione generale rimane fuori portata. Se per i flussi laminari gli approcci numerici più avanzati quali RANS, LES e DNS risultano efficienti nella descrizione del comportamento del fluido, le scale di moto della turbolenza sono così complesse e variabili che, anche con i metodi sopra citati, è estremamente difficile catturare in modo completo e accurato tutti i dettagli del flusso.

In questo contesto, l’analisi delle strutture coerenti dal punto di vista lagrangiano ha assunto negli ultimi decenni un ruolo sempre più rilevante. Seguendo le traiettorie delle particelle fluide, è possibile identificare le Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS), superfici materiali che organizzano il trasporto e il mescolamento. Le LCS offrono una chiave interpretativa innovativa, capace di superare i limiti di una descrizione puramente statistica e di mettere in relazione la teoria dei sistemi dinamici con applicazioni concrete nella fisica dei fluidi.

Il presente lavoro di tesi si propone principalmente di fornire una revisione critica della letteratura dedicata alle LCS, analizzandone i fondamenti teorici, i criteri di identificazione e le applicazioni nei diversi ambiti della fluidodinamica. L’approccio euleriano, discusso per completezza e come termine di confronto, è stato posto in dialogo con la prospettiva lagrangiana per evidenziare le potenzialità di quest’ultima nello studio della turbolenza.

Accanto a questa analisi teorica, è stato inoltre avviato lo sviluppo di un software preliminare per il calcolo dell’esponente di Lyapunov a tempo finito (FTLE). Pur non essendo stato oggetto di una validazione sistematica, questo strumento ha permesso di mettere in luce alcune delle difficoltà computazionali connesse alla modellizzazione delle LCS, ponendo le basi per futuri miglioramenti.

Dalla revisione svolta emerge chiaramente come le LCS rappresentino un efficace strumento concettuale per collegare modelli matematici astratti a fenomeni fisici concreti; anche se va sottolineato come, nonostante i progressi compiuti, l’impiego delle LCS in fluidodinamica rimane in larga parte pionieristico: le metodologie disponibili sono state testate in diversi contesti, ma non hanno ancora raggiunto un grado di maturità paragonabile agli approcci più consolidati. Le prospettive future più promettenti riguardano l’approfondimento teorico dei criteri di identificazione, l’applicazione a flussi complessi come quelli atmosferici e oceanici, nonché l’integrazione con metodi numerici ad alta risoluzione.

In definitiva, questa tesi si configura come un contributo di sintesi e riflessione critica sull’approccio lagrangiano allo studio della turbolenza, affiancato da un primo tentativo metodologico, che prepara il terreno per sviluppi futuri sia in ambito teorico sia applicativo.

Indice

Introduzione	iv
1 Cenni di fluidodinamica	1
1.1 Quadro teorico di riferimento	2
1.1.1 Aspetti descrittivi e caratterizzazione dei flussi	2
1.1.2 Equazioni di Navier-Stokes	5
1.2 Il problema della turbolenza	7
1.2.1 Caratteristiche della turbolenza	8
1.2.2 Transizione alla turbolenza	10
1.2.3 Le sfide della modellizzazione dei flussi turbolenti	11
2 Approccio Lagrangiano allo studio della turbolenza	15
2.1 Strutture coerenti	15
2.1.1 Definizione e concetti di base	15
2.1.2 Tipi di strutture coerenti nei flussi turbolenti	15
2.2 Approccio Euleriano allo studio delle strutture coerenti	19
2.2.1 Criteri diagnostici	19
2.3 Approccio Lagrangiano allo studio delle strutture coerenti: le LCS	23
2.3.1 Definizione e concetti fondamentali	23
2.3.2 Criteri per l'identificazione delle LCS	27
3 Applicazioni delle LCS in fluidodinamica	29
3.1 Applicazioni in dinamica atmosferica	29
3.2 Applicazioni in oceanografia	31
3.3 Applicazioni in ingegneria dei fluidi	33
3.4 Altri esempi di applicazioni	34
3.4.1 Biomedicina	34
3.4.2 Astrodinamica	35
Sintesi e conclusioni	38
Appendice	39
A Prototipo di software per la modellazione numerica delle LCS	39
A.1 Il caso studio: strato limite atmosferico	39
A.2 Metodologia di lavoro	40
B Codice Python utilizzato	41
C Struttura del formato OpenFOAM dei dati utilizzati	47
Bibliografia	52

Introduzione

Tra i fenomeni più complessi e affascinanti della fisica dei fluidi, il moto turbolento rappresenta da sempre una sfida sia teorica sia sperimentale. Esso emerge in sistemi naturali e tecnologici estremamente diversi, governando il trasporto di energia, massa e quantità di moto in contesti che spaziano dall’atmosfera e dagli oceani, all’ingegneria aerospaziale, fino a processi biologici e industriali. Nonostante la lunga storia di studi e le sofisticate metodologie sviluppate, comprendere e prevedere il comportamento turbolento rimane un obiettivo parzialmente irrisolto.

Il quadro teorico classico è fornito dalle equazioni di Navier–Stokes, che descrivono in modo rigoroso la dinamica dei fluidi. Tuttavia, la loro soluzione analitica continua a rappresentare una delle grandi sfide della matematica e della fisica moderna, tanto da comparire tra i sette problemi del millennio (Clay Mathematics Institute, 2000); allo stesso modo, la complessità multiscala della turbolenza limita l’efficacia degli approcci numerici più avanzati, come RANS, LES e DNS. I contributi fondamentali di Kolmogorov (1941) hanno permesso di descrivere la turbolenza in termini statistici, introducendo la nozione di cascata energetica. Approcci più recenti hanno evidenziato la necessità di strumenti geometrici e dinamici capaci di andare oltre le sole medie statistiche (Pope 2000, E. Ottino 2002), sottolineando come la turbolenza richieda un’analisi a più livelli e prospettive diverse.

Negli ultimi decenni, il focus si è spostato sull’analisi delle strutture coerenti, superfici materiali che organizzano il trasporto e il mescolamento in flussi apparentemente caotici (A. K. M. F. Hussain 1983). In particolare, l’approccio lagrangiano ha acquisito un ruolo sempre più centrale nello studio di queste strutture, permettendo di identificare le Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) (George Haller 2000). Le LCS hanno trovato applicazioni concrete nello studio di vortici atmosferici, correnti oceaniche e nella dispersione di sostanze in ambito ambientale e biomedico.

Questa tesi nasce dall’esigenza di chiarire e sintetizzare la letteratura esistente, approfondendo i concetti teorici alla base delle LCS e degli strumenti lagrangiani. In particolare, il lavoro si propone di mettere in relazione la descrizione euleriana tradizionale delle strutture coerenti con le più moderne prospettive lagrangiane, evidenziandone punti di forza, limiti e potenzialità. A completamento dell’analisi teorica, è stata sviluppata una proposta metodologica sotto forma di software numerico in Python per il calcolo degli esponenti di Lyapunov a tempo finito, concepito come riferimento concettuale per futuri sviluppi. Tuttavia, a causa dell’elevato onere computazionale, il programma non è stato oggetto di test sperimentali.

L’obiettivo principale di questo lavoro è di fornire un’analisi critica e un approfondimento teorico, valorizzando la revisione della letteratura e le connessioni concettuali tra approcci differenti, e preparando il terreno per possibili sviluppi applicativi futuri.

La struttura della tesi è la seguente:

-
- il **primo capitolo** introduce i fondamenti della dinamica dei fluidi e i concetti chiave della turbolenza;
 - il **secondo capitolo** analizza i metodi per l'identificazione delle strutture coerenti, con particolare attenzione a LCS e FTLE;
 - il **terzo capitolo** presenta applicazioni teoriche e casi studio significativi, mentre l'appendice raccoglie dettagli metodologici e indicazioni sul framework numerico proposto.
 - infine, le **conclusioni** sintetizzano i principali risultati emersi dal lavoro, discutendone i limiti e le possibili prospettive di sviluppo futuro.

Capitolo 1

Cenni di fluidodinamica

La materia può assumere differenti stati di aggregazione, determinati dal modo in cui le molecole si organizzano e interagiscono tra loro. Tra questi, gli stati solido e fluido costituiscono le forme più immediate e riconoscibili, già note fin dall'antichità e successivamente approfondite con la teoria atomica (Dalton 1808) e con lo sviluppo della termodinamica e dei concetti di temperatura e pressione (Clausius 1850). La meccanica statistica (Boltzmann 1872; Maxwell 1860) fornì poi una prima sistematizzazione del concetto di stato di aggregazione, definito come *“modo di associarsi e d’interagire delle molecole costituenti un corpo o una sostanza, che determina parte delle proprietà macroscopiche del corpo stesso”* (Treccani n.d.). Storicamente, si sono distinti tre stati fondamentali: solido, liquido e gassoso. Nel corso del XX secolo verranno introdotti altri stati di aggregazione, come il plasma, lo stato superconduttivo e il condensato di Bose-Einstein. I due stati liquido e gassoso presentano delle caratteristiche comuni che li distinguono nettamente dallo stato solido e per questo vengono spesso trattati insieme sotto il nome di fluidi.

Dal punto di vista intuitivo, la distinzione tra solido e fluido appare evidente anche senza un’analisi rigorosa: un solido è "duro" e possiede una forma propria, a cui torna automaticamente quando non soggetto a sollecitazioni esterne. Un fluido, invece non possiede una forma propria e se sottoposto a sforzi esterni tende a deformarsi indefinitamente. A livello microscopico queste caratteristiche sono interpretabili sulla base della struttura molecolare: gli elementi che consideriamo "allo stato solido" sono caratterizzati da una disposizione molecolare particolarmente densa e caratterizzata da forze di coesione intermolecolari molto intense. Di contro, i fluidi hanno una struttura molecolare molto meno densa e delle forze di coesione intermolecolari inferiori, il che si traduce in una maggiore libertà di movimento.

Tutte queste distinzioni qualitative convergono nella definizione rigorosa di fluido, basata sul comportamento della materia a sforzi deformativi (o di taglio, i cosiddetti "shear stress"): si definisce fluido una sostanza che si deforma indefinitamente sotto l’azione di uno sforzo di taglio di qualsiasi intensità, come evidenziato in Figura 1.1 (Belardinelli 2024). Lo studio dei fluidi ha iniziato a strutturarsi scientificamente a partire dal Seicento, con le prime formulazioni di concetti chiave da parte di Torricelli, Pascal, Newton e Bernoulli. Tuttavia, è con lo sviluppo delle equazioni di Navier-Stokes che nasce la vera formalizzazione della fluidodinamica, una disciplina ancora oggi al centro della ricerca per la sua complessità e le sue implicazioni applicative, soprattutto per quel che riguarda il cosiddetto regime *turbolento*. È in questo contesto che emergono fenomeni come la formazione di strutture coerenti, la separazione delle scale e la complessità del trasporto,

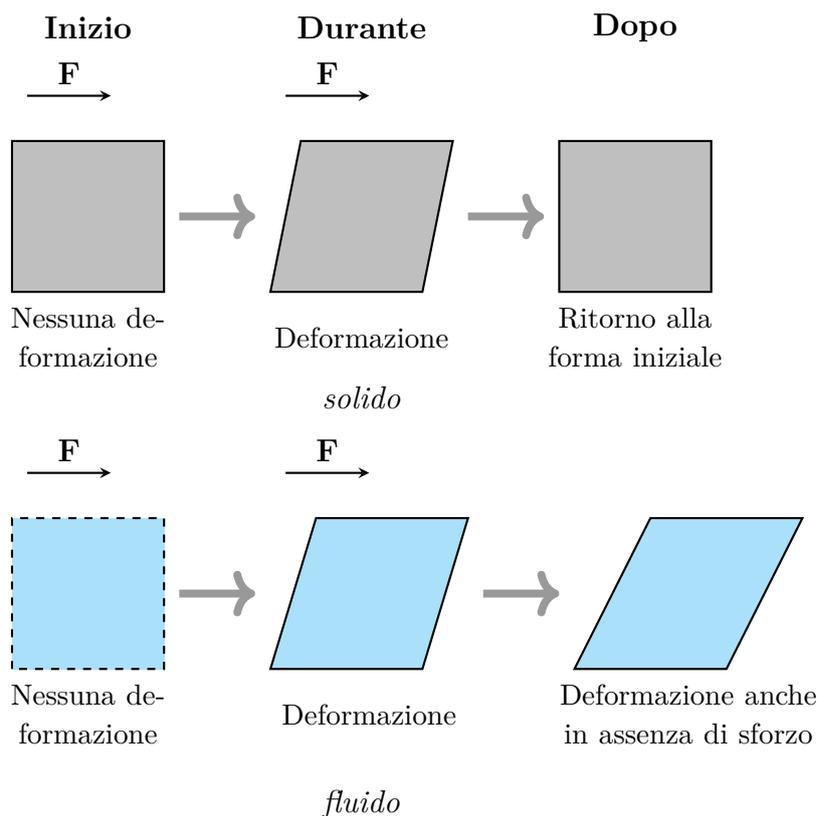


Figura 1.1: Deformazione nel tempo di un solido (in alto) e di un fluido (in basso) sottoposti a sforzo di taglio.

che verranno discussi nei capitoli successivi.

1.1 Quadro teorico di riferimento

1.1.1 Aspetti descrittivi e caratterizzazione dei flussi

Lo studio dei fluidi, sia in condizioni statiche che dinamiche, prende forma a partire da pochi concetti fondamentali che ne guidano l'analisi e la comprensione:

Flussi laminari e flussi turbolenti

Il regime in cui si presentano i fluidi può essere sostanzialmente di due tipi: laminare o turbolento. La distinzione rigorosa tra i due regimi è stata illustrata dal fisico britannico Osborne Reynolds attraverso l'introduzione di un sottile getto di colorante in un flusso d'acqua attraverso un tubo. Al variare della velocità si sono osservati due comportamenti completamente differenti: a basse velocità il getto di colorante seguiva un percorso ben definito e rettilineo, evidenziando un moto del fluido per strati paralleli senza mescolamento tra strati. All'aumentare della velocità il getto di colorante si rompeva diffondendosi lungo tutta la sezione trasversale del tubo, evidenziando la presenza di movimenti di mescolamento macroscopici nel fluido. Il passaggio dal regime laminare a quello turbolento non avviene in modo brusco, ma attraverso una fase intermedia nota come *transizione turbolenta*. La differenza tra fluido in regime laminare e fluido in regime turbolento è illustrata in Figura 1.2.

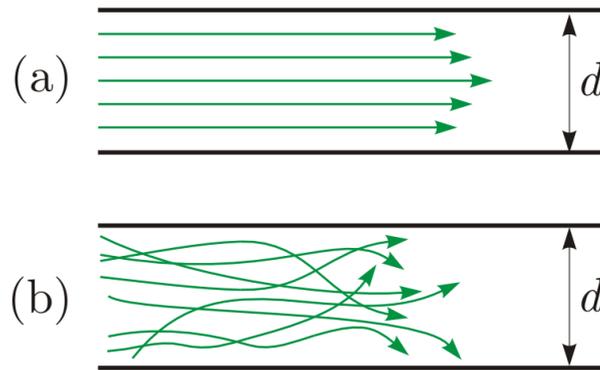


Figura 1.2: Linee di flusso in regime laminare (a) e in regime turbolento (b). Fonte: *Dubaj, Opera propria presumibilmente, Wikimedia Commons, pubblico dominio* (Dubaj commonswiki 2025).

Pressione

In un fluido in condizioni statiche la pressione si definisce come rapporto fra la forza normale e l'unità di area:

$$P := \frac{|\vec{F}_\perp|}{A} \quad (1.1)$$

Essa è dunque una quantità scalare che agisce uniformemente in tutte le direzioni grazie al **principio di Pascal** che afferma che in un fluido in quiete la pressione è isotropa e uniforme sull'intero volume di fluido. Nell'ambito della fluidostatica la pressione dipende solo dalla posizione del campo di forze.

Questa definizione si rivela tuttavia insufficiente per i fluidi in movimento, nei quali la pressione non rappresenta più un effetto locale di "schiacciamento" ma entra in gioco attivamente già a partire dall'equazione di Bernoulli per la conservazione dell'energia nei flussi incomprimibili, inviscidi e in regime stazionario:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = C \quad (1.2)$$

È dunque evidente che il campo di pressione non dipende solamente dal campo di forze esterno ma anche da parametri ulteriori come il campo di velocità. Il concetto di pressione viene in seguito ulteriormente raffinato con l'introduzione del tensore degli sforzi, che tiene conto della natura diversa delle forze normali e di taglio. Siano dunque $\tau_n \equiv \frac{dF_n}{dA}$ e $\tau_t \equiv \frac{dF_t}{dA}$ rispettivamente le definizioni scalari degli sforzi normali e degli sforzi di taglio (Kundu 2015). Questi si possono arrangiare in un tensore 3×3 detto **tensore degli sforzi** che descrive compiutamente lo stato di sforzo in ogni punto del volume di fluido:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Gli elementi diagonali τ_{11} , τ_{22} e τ_{33} rappresentano gli sforzi normali o **isotropi** (ovvero la pressione lungo le 3 direzioni) mentre gli elementi fuori dalla diagonale rappresentano gli sforzi di taglio o **deviatorici**.

Viscosità dinamica

La viscosità dinamica di un fluido è una misura della sua resistenza a fluire sotto l'azione di uno sforzo di taglio. La definizione rigorosa viene solitamente data per fluidi lami-

nari di tipo newtoniano ¹per semplicità Si consideri dunque la situazione in Figura 1.3.

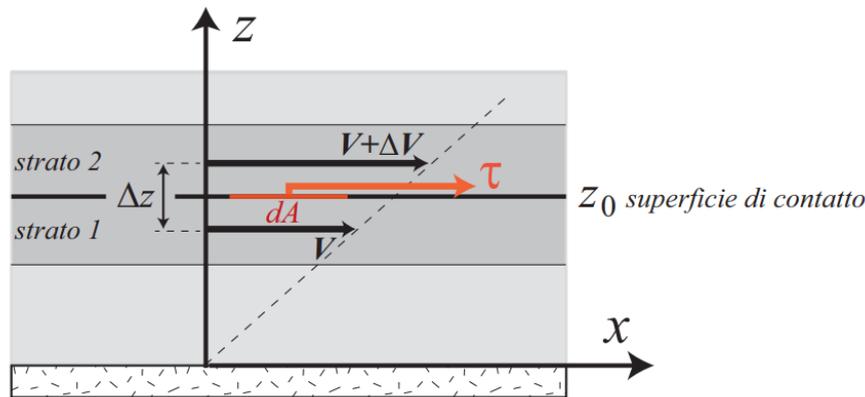


Figura 1.3: Interazione fra stati di fluido adiacenti in moto relativo. Fonte: *Appunti del corso di Fisica dei Solidi e dei Fluidi, AA 2023/2024 a cura della professoressa Maria Elina Belardinelli* (Belardinelli 2024)

L'equazione fenomenologica che descrive la relazione tra due strati di fluido adiacenti è:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

dove τ_{ij} è il tensore di sforzo introdotto in (1.3) e gli indici i, j sono da interpretarsi nel modo seguente: il primo indice rappresenta la direzione dello sforzo, il secondo indice rappresenta il vettore normale al piano su cui viene applicato lo sforzo. Il coefficiente μ è proprio il coefficiente di viscosità dinamica (Belardinelli 2024).

Quando si entra in regime turbolento, l'equazione fenomenologica (1.4) non si può più applicare e il concetto stesso di viscosità diventa scivoloso e difficile da maneggiare. La natura caotica del movimento si traduce in drastici cambi del campo di velocità e il concetto di viscosità così formulato non riesce a descrivere le variazioni di energia nel fluido. Si preferisce dunque introdurre la **viscosità apparente** o **viscosità turbolenta**, definita come:

$$\mu_t = \rho v_t l \quad (1.5)$$

dove v_t è la velocità turbolenta (una misura della velocità di fluttuazione turbolenta del fluido), l è la lunghezza turbolenta, ovvero la distanza caratteristica associata alle scale turbolente, e ρ è la densità del fluido. La viscosità turbolenta descrive l'energia dissipata durante le fluttuazioni turbolente e fornisce una stima più precisa del comportamento del fluido in condizioni turbolente. Va notato che questa viscosità non è una proprietà intrinseca ma dipende dallo stato del flusso e dalle caratteristiche specifiche del regime turbolento.

Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds, denotato con Re , è un parametro adimensionale che fornisce una misura relativa delle forze di inerzia rispetto alle forze viscosive in un fluido in movimento.

¹Per **fluido newtoniano** si intende un fluido in cui la relazione tra sforzo di taglio e gradiente di velocità. Sebbene la maggior parte dei fluidi esistenti in natura sia newtoniana ne esistono di altre tipologie, come quelli tissotropici e reopettici.

Esso gioca un ruolo fondamentale nella determinazione del regime del flusso: se il numero di Reynolds è basso, il flusso è laminare, mentre se è alto, il flusso tende a diventare turbolento. La formula analitica per il calcolo del numero di Reynolds è:

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (1.6)$$

dove ρ è la densità, v è la velocità media del fluido, d è la dimensione caratteristica e μ è la viscosità dinamica del fluido. Per valori di $\text{Re} \lesssim 2000$, il flusso è laminare; per $\text{Re} \gtrsim 4000$, il flusso è turbolento. In mezzo a questi valori si verifica una zona di transizione tra i due regimi.

Approccio Euleriano e approccio Lagrangiano

Nel contesto della fluidodinamica, l'analisi del moto del fluido può essere affrontata da due punti di vista distinti: l'approccio euleriano e quello lagrangiano (Kundu 2015). L'approccio euleriano osserva le proprietà del fluido in punti fissi dello spazio, trattando le grandezze fisiche come funzioni della posizione \mathbf{x} e del tempo t , ad esempio la velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. In questo modo si analizza come le caratteristiche del fluido variano nel tempo in una determinata posizione. Al contrario, l'approccio lagrangiano segue singole particelle fluide lungo le loro traiettorie, rappresentando la posizione delle particelle come funzione del tempo $\mathbf{x}(t; \mathbf{X}_0)$, dove \mathbf{X}_0 indica la posizione iniziale. Le proprietà del fluido vengono quindi studiate lungo il percorso di ciascuna particella, fornendo una descrizione dinamica del moto. Dal punto di vista matematico, mentre l'approccio euleriano utilizza la derivata parziale temporale $\partial/\partial t$, quello lagrangiano fa uso della derivata materiale

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

che tiene conto del trasporto delle particelle nel campo di velocità. Questa differenza concettuale e formale è fondamentale per l'analisi delle strutture coerenti nel fluido.

1.1.2 Equazioni di Navier-Stokes

Tutte le grandezze fin'ora introdotte convergono nelle **equazioni di Navier-Stokes** o equazioni di bilancio, che rappresentano la formalizzazione matematica di tre importanti principi fisici: il principio di conservazione della massa, il secondo principio della dinamica e il principio di conservazione dell'energia.

Per arrivare a questo sistema di equazioni, si parte da un insieme di assunti relativamente semplici ma essenziali, che definiscono il quadro entro cui si sviluppa il modello matematico:

1. **Fluido continuo:** La natura discontinua della materia viene ignorata. Il parametro di riferimento per stabilire quando un fluido si può considerare continuo è il **numero di Knudsen**:

$$\text{Kn} \equiv \frac{\lambda}{l}$$

dove λ è il libero cammino medio e l una grandezza caratteristica del fluido. Per

$$\text{Kn} \ll 1$$

l'ipotesi di fluido continuo viene considerata appropriata (Pope 2000)

2. **Fluido chimicamente omogeneo e non reagente:** Si assumono trascurabili le perturbazioni dovute a disomogeneità o reazioni chimiche
3. **Fluido elettricamente neutro:** Si assumono trascurabili le perturbazioni di tipo elettromagnetico

A partire da queste ipotesi, è possibile formulare un sistema di equazioni alle derivate parziali che descrivono il comportamento di un fluido viscoso newtoniano. Le equazioni risultanti, note come equazioni di Navier-Stokes, possono essere espresse in forma compatta usando la notazione indiciale:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right) \quad (1.7)$$

dove e_{ij} è il tensore di strain rate, definito come:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

e $\frac{D}{Dt}$ è la **derivata materiale**². Per flussi in 2D le equazioni prendono la forma :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u_j)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + 2\mu e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad (1.10)$$

dove e è l'energia interna per unità di massa e k è la conducibilità termica. La prima equazione è la cosiddetta **equazione di continuità** che esprime la conservazione della massa, la seconda equazione esprime la conservazione della quantità di moto e la terza equazione esprime la conservazione dell'energia.

Le equazioni di Navier-Stokes rappresentano la sintesi di secoli di ricerca sui fluidi in movimento. Tuttavia, per essere applicate con successo, richiedono una grande precisione nelle condizioni iniziali, in particolare per quanto riguarda il campo di velocità del fluido, specialmente quando si tratta di flussi turbolenti. La turbolenza, infatti, introduce un comportamento altamente caotico nel sistema, rendendo estremamente difficile l'utilizzo delle equazioni di Navier-Stokes in maniera diretta. Per affrontare la complessità e la variabilità delle fluttuazioni turbolente, sono stati sviluppati metodi computazionali avanzati come il RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) e il LES (Large Eddy Simulation), che permettono di semplificare e risolvere il problema. Questi approcci, rispetto al più diretto ma computazionalmente oneroso metodo DNS (Direct Numerical Simulation), offrono un compromesso tra precisione e costo computazionale, rendendo la simulazione della turbolenza più gestibile.

²La derivata materiale, detta anche **derivata sostanziale**, è un operatore differenziale ottenuto attraverso l'applicazione di un opportuno cambio di coordinate alla derivata totale. Dato un campo vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, la derivata materiale rispetto al tempo di un campo vettoriale $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

1.2 Il problema della turbolenza

La maggior parte dei fluidi che osserviamo in natura si trova tipicamente in regime turbolento. Basti pensare al fumo che esce da un camino, al fumo della sigaretta, ai flussi d'aria e di acqua che si formano attorno ai mezzi in movimento (automobili, treni, aerei) e persino ai flussi all'interno dei macchinari, come l'acqua nelle condotte e il carburante nei motori a combustione. Esempi di flussi turbolenti sono illustrati in Figura 1.4 e Figura 1.5. La turbolenza è dunque naturalmente presente nella vita quotidiana dell'uomo, oltre ovviamente a essere responsabile della dinamica atmosferica e oceanica, con importanti effetti sulla diffusione di inquinanti e sulla meteorologia e climatologia. In virtù della sua importanza, la turbolenza è stata oggetto di studio da parte di molti scienziati sin dalla prima formulazione della fluidodinamica e ad oggi sta tornando un problema di prim'ordine nell'ambito della fusione nucleare all'interno di tokamak, in cui la dinamica del plasma è cruciale. Tuttavia, la modellizzazione dei fluidi turbolenti è ancora oggi estremamente problematica. Le equazioni di Navier-Stokes nel caso generale risultano **analiticamente irrisolvibili** e addirittura la loro soluzione analitica è uno dei 7 problemi del millennio istituiti dal Clay Institute. Comprendere e descrivere pienamente la turbolenza rimane dunque una delle sfide più ardue della scienza moderna.

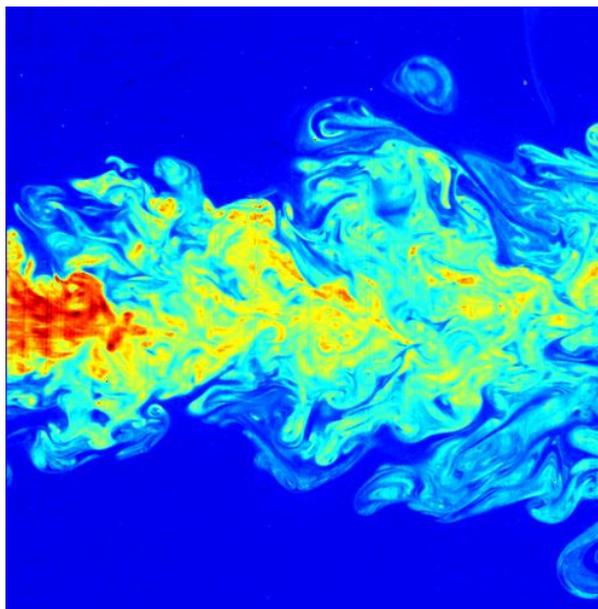


Figura 1.4: Visualizzazione del campo di velocità di un flusso turbolento tramite Particle Image Velocimetry (PIV). Le particelle traccianti illuminate da un laser permettono di analizzare la struttura del flusso. Fonte: *C. Fukushima and J. Westerweel, TU Delft, Own work, CC BY 3.0* (Fukushima e Westerweel 2006)



Figura 1.5: Visualizzazione qualitativa della turbolenza indotta dal rotore di un elicottero durante un'operazione di irrorazione. I vortici generati sono chiaramente visibili nella scia, evidenziando le intense strutture turbolente create dall'interazione tra il flusso propulsivo e l'ambiente circostante. Fonte: *Jahons Brad E., U.S. Fish and Wildlife Service, Public Domain* (E. n.d.).

1.2.1 Caratteristiche della turbolenza

I flussi turbolenti presentano caratteristiche fisiche ben definite:

- Caoticità e natura statistica
- Non linearità
- Diffusività
- Vorticità
- Dissipazione

Tra queste, la caratteristica più peculiare della turbolenza è il meccanismo attraverso cui essa dissipa l'energia, strettamente legato alla sua natura vorticoso. Le perdite di energia lungo il moto di un fluido sono dovute principalmente alla viscosità — già approfondita nella Sezione 1.1.1 — che agisce a livello microscopico opponendosi allo scorrimento tra strati adiacenti di fluido. Tuttavia, nei flussi turbolenti, la dissipazione dell'energia non avviene direttamente a queste scale: è il risultato di un processo a cascata, in cui l'energia viene trasferita progressivamente dalle strutture turbolente più grandi verso quelle più piccole, fino a raggiungere scale sufficientemente ridotte da permettere alla viscosità di dissiparla sotto forma di calore. Questo meccanismo è stato formalizzato dal matematico Andrej Kolmogorov ed è oggi noto come **cascata di energia** ed è rappresentato graficamente nello spettro energetico turbolento riportato in Figura 1.6, che evidenzia l'intervallo inerziale teorizzato da Kolmogorov.

Cascata di energia

Questo processo si ripete su scale sempre minori, generando una cascata continua di energia dalle grandi strutture (dette anche scale integrali) verso le piccole. Lo spettro

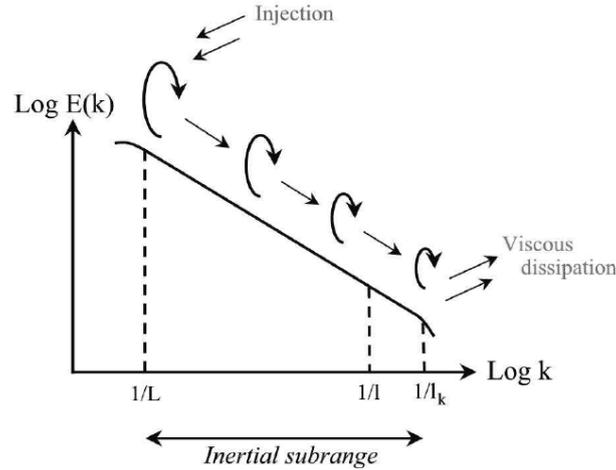


Figura 1.6: Rappresentazione della cascata di energia di Kolmogorov. Fonte: *Aakash30jan, Opera propria, CC BY-SA 4.0* (Aakash 2020).

energetico del moto turbolento, nella regione chiamata intervallo inerziale, segue una legge di potenza approssimativamente proporzionale a $k^{-\frac{5}{3}}$, dove k è il numero d'onda spaziale. Tale comportamento riflette il trasferimento conservativo di energia tra le scale senza perdite viscosse significative, che diventano rilevanti solo a scale più piccole. Quando la scala dei vortici diventa sufficientemente ridotta, la viscosità molecolare del fluido inizia ad agire in modo significativo, smorzando i gradienti di velocità e convertendo l'energia cinetica turbolenta in calore. Le scale alle quali la dissipazione viscosa diventa efficace sono chiamate **microscale di Kolmogorov**, e sono descritte dalla seguente relazione dimensionale:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.11)$$

dove ν è la viscosità cinematica del fluido ed ε è il tasso di dissipazione dell'energia turbolenta. È fondamentale notare che la viscosità non controlla il valore di ε , bensì la scala alla quale essa agisce. Il tasso di dissipazione ε è determinato dalle proprietà inviscide delle grandi strutture turbolente, che alimentano le scale inferiori attraverso il meccanismo di trasferimento energetico non lineare (Kundu 2015).

Intermittenza

Un aspetto fondamentale e complesso della turbolenza è rappresentato dall'**intermittenza**, ossia la distribuzione spaziale e temporale fortemente disomogenea della dissipazione dell'energia cinetica turbolenta a scala microscopica. Questo fenomeno si manifesta con la formazione di strutture vorticosi localizzate ad alta intensità, come filamenti e fogli di taglio, dove i gradienti di velocità raggiungono valori estremi.

L'intermittenza sfida le ipotesi classiche di isotropia e omogeneità su cui si basano molte teorie tradizionali della turbolenza, come la teoria di Kolmogorov del 1941 (K41), e si traduce in deviazioni statistiche significative nelle distribuzioni di scala e negli esponenti di struttura rispetto ai modelli semplici (Frisch 1995; Sreenivasan e Antonia 1997). Per affrontare tali complessità sono stati sviluppati modelli avanzati basati sulla multifrattalità e approcci statistici non gaussiani, che riescono a catturare meglio le caratteristiche intermittenti del campo turbolento (Mandelbrot 1974; Meneveau e Sreenivasan 1991).

Caoticità e statisticità

La turbolenza è intrinsecamente un fenomeno **caotico**, caratterizzato da una sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali e da una dinamica fortemente non lineare che rende il moto del fluido altamente imprevedibile nel tempo (E. Ottino 2002). Questa complessità impone di adottare una descrizione di tipo **statistico**, in cui le quantità fisiche vengono rappresentate tramite medie, correlazioni spaziali e temporali, e funzioni di distribuzione di probabilità (Pope 2000). Tali approcci consentono di superare le limitazioni deterministiche e di sviluppare modelli predittivi utili per l'analisi di fenomeni turbolenti in molteplici applicazioni pratiche e teoriche.

1.2.2 Transizione alla turbolenza

Come accennato in Sezione 1.1.1, il passaggio da regime laminare a regime turbolento non avviene in modo netto, ma attraverso una fase intermedia detta *transizione turbolenta*. In questa fase, il flusso inizia a perdere stabilità e si manifestano fenomeni di amplificazione non lineare di piccole perturbazioni. La Figura 1.7 mostra una visualizzazione schlieren³ di questo processo in un flusso d'aria perturbato. La transizione



Figura 1.7: Fotografia schlieren del flusso generato dalla rottura di un palloncino. L'immagine rivela le variazioni di densità dell'aria causate dall'onda d'urto e dalla successiva insorgenza della turbolenza. Fonte: *Gary Settles, Own work, CC BY-SA 3.0* (Settles 2012).

rappresenta una rottura di simmetria dinamica, in cui il comportamento ordinato e deterministico del regime laminare lascia spazio a dinamiche complesse, fortemente sensibili

³Il **metodo schlieren** è una tecnica di visualizzazione delle disomogeneità ottiche dei campi di moto dei fluidi basato sulla variazione dell'indice di rifrazione in conseguenza di un gradiente di densità.

alle condizioni iniziali. Questo passaggio può essere descritto teoricamente come una sequenza di biforcazioni: il modello di Landau e successivamente quello di Hopf interpretano la transizione come l'evoluzione di un sistema dinamico che attraversa vari stadi di instabilità ciclica e quasi-periodica fino al caos deterministico. La mappa logistica, illustrata in Figura 1.8, è un esempio paradigmatico di questo comportamento. All'in-

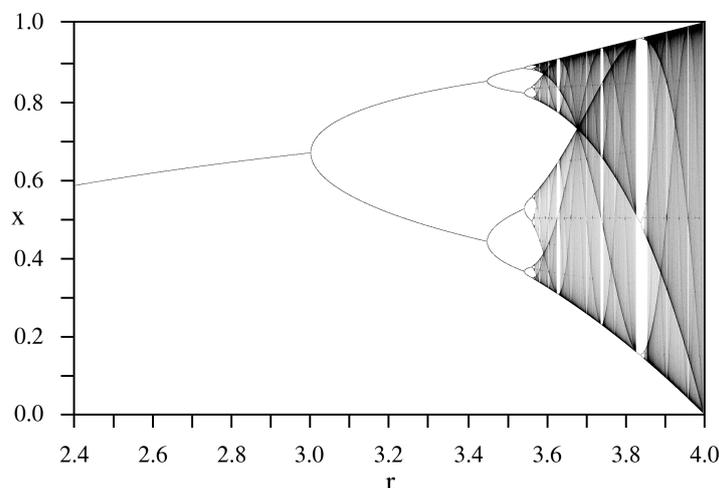


Figura 1.8: Esempio di mappa delle biforcazioni per la mappa logistica $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, al variare del parametro r . Fonte: *Wikimedia Commons, dominio pubblico*.

terno di questo quadro teorico, la turbolenza non è più vista come un disordine puro e imprevedibile, ma come il prodotto emergente della complessità dinamica di un sistema non lineare dissipativo. In particolare, la fase di transizione è cruciale perché segna la nascita delle *strutture coerenti*: vortici, streaks, pacchetti vorticali e shear layers che, pur emergendo in un contesto caotico, mantengono un certo grado di organizzazione spaziale e temporale. Queste strutture fungono da elementi chiave nel trasporto e nella redistribuzione di quantità di moto, energia e scalari passivi, e costituiscono il ponte naturale tra la descrizione deterministica della meccanica dei fluidi e la teoria dei sistemi dinamici complessi.

1.2.3 Le sfide della modellizzazione dei flussi turbolenti

Nonostante secoli di studi e l'evoluzione delle capacità di calcolo, una descrizione esatta e universalmente valida dei flussi turbolenti rimane tuttora fuori portata. Le equazioni di Navier-Stokes, pur descrivendo formalmente il comportamento dei fluidi turbolenti, diventano rapidamente intrattabili in regime turbolento, a causa della non linearità e dell'accoppiamento tra le scale spaziali e temporali del moto. I modelli analitici tendono a semplificare il problema, ma inevitabilmente introducono ipotesi che ne limitano la validità in scenari realistici. D'altra parte, anche le simulazioni numeriche dirette (DNS) dei flussi turbolenti richiedono una risoluzione spaziale e temporale finissima, comportando costi computazionali proibitivi, specialmente in domini tridimensionali e ad alti numeri di Reynolds.

Per far fronte a questi limiti, si ricorre spesso a modelli di turbolenza semplificati, che introducono nuove approssimazioni e parametri empirici. Tuttavia, anche questi approcci non sono esenti da criticità, soprattutto quando si applicano a flussi complessi,

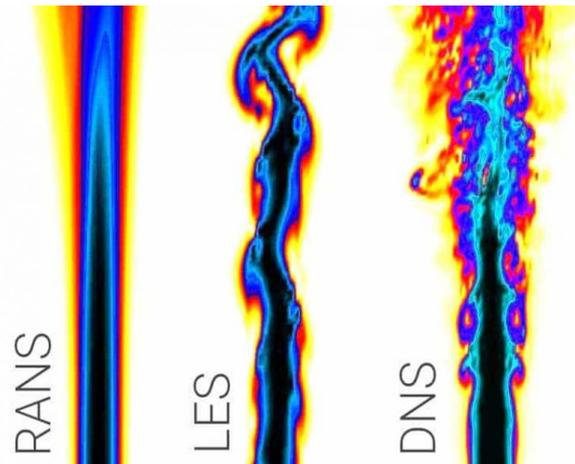


Figura 1.9: Confronto tra diverse simulazioni CFD di un getto turbolento ottenute con vari approcci di modellizzazione della turbolenza (DNS, LES e RANS). Fonte: *FB CFD Solutions n.d., Turbulence Models in CFD, Ideal Simulations Resources* (Ideal Simulations 2023)

anisotropi o altamente instabili, come quelli presenti in ambito atmosferico, oceanografico o industriale.

In genere, si parte dalle equazioni di Navier-Stokes nella loro forma completa (1.7), applicando l'assunzione di incomprimibilità e la cosiddetta **approssimazione di Boussinesq**, che permette di trascurare le variazioni di densità legate alla pressione, mantenendo però quelle dovute alla temperatura. Questo porta a una formulazione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - (1 - \beta \Delta T) g \delta_{i3} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.14)$$

dove $\nu = \mu/\rho$ è la viscosità dinamica, β è il coefficiente di espansione termica e α è il coefficiente di diffusività termica.

Sebbene questa formulazione semplificata renda il problema più trattabile dal punto di vista computazionale, rimane comunque impossibile da risolvere analiticamente. Per questo motivo, l'approccio numerico è imprescindibile. Le principali strategie numeriche adottate per la simulazione della turbolenza includono la DNS, la LES e la RANS, ciascuna con i propri compromessi tra accuratezza, generalità e costo computazionale Cintolesi 2025. La Figura 1.9 offre una visualizzazione delle differenze tra questi 3 approcci.

Equazioni di Navier-Stokes mediate da Reynolds (RANS)

Il metodo delle equazioni di Navier-Stokes mediate da Reynolds (RANS) consiste nell'applicare un'operazione di media temporale alle equazioni di Navier-Stokes, con l'obiettivo di descrivere il comportamento medio del flusso turbolento. Si assume che ogni variabile, come la velocità u_i , possa essere scomposta in una componente media e una fluttuante

secondo la decomposizione di Reynolds:

$$u_i(x, t) = \langle u_i(x, t) \rangle + u'_i(x, t)$$

Applicando questa decomposizione alle equazioni di Navier-Stokes, si ottiene un sistema per la parte media del campo, che include un termine aggiuntivo noto come tensore degli sforzi di Reynolds $\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Il sistema risulta non chiuso, poiché introduce più incognite che equazioni. Una chiusura comune è il modello a viscosità turbolenta, come il modello $k - \varepsilon$, che introduce due equazioni di trasporto per l'energia cinetica turbolenta k e per la sua dissipazione ε , con:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

I modelli RANS risultano particolarmente adatti a flussi ingegneristici stazionari e sono ampiamente utilizzati per la loro efficienza computazionale.

Simulazioni delle grandi vorticità (LES)

Il metodo delle simulazioni delle grandi velocità (LES) si basa sull'idea di separare le strutture turbolente del flusso in scale grandi, che vengono risolte direttamente, e scale piccole, che vengono modellate. Questa separazione è ottenuta mediante un'operazione di filtraggio spaziale delle equazioni di Navier-Stokes. La velocità istantanea viene scomposta come:

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) + u''_i(x, t)$$

dove \bar{u}_i rappresenta la parte filtrata (risolta) e u''_i le fluttuazioni sub-grid. Le equazioni LES risultanti per un fluido incomprimibile assumono la forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}$$

dove $\tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ è il tensore delle sottoscale (sub-grid scale). Questo termine viene tipicamente modellato usando il modello di Smagorinsky:

$$\nu_{SGS} = C_s^2 \Delta^2 |\bar{S}_{ij}|$$

con \bar{S}_{ij} il tensore della deformazione filtrata e Δ la dimensione del filtro (tipicamente la griglia numerica). LES è particolarmente utile per simulazioni dove le strutture turbolente dominano il comportamento del flusso, ma richiede una risoluzione spaziale e temporale più fine rispetto a RANS.

Simulazione numerica diretta (DNS)

La simulazione numerica diretta (DNS) rappresenta l'approccio più rigoroso per la simulazione della turbolenza, in quanto risolve le equazioni di Navier-Stokes senza alcun

modello di chiusura, catturando direttamente tutte le scale di moto turbolento, comprese quelle dissipative. Le equazioni risolte sono quelle classiche per un fluido incomprimibile:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Affinché tutte le scale siano risolte, la dimensione della griglia deve essere dell'ordine della lunghezza di Kolmogorov η , la scala più piccola della turbolenza. Il numero totale di punti richiesti cresce rapidamente con il numero di Reynolds secondo una legge del tipo:

$$N \sim Re^{9/4}$$

Ciò rende il DNS impraticabile per flussi realistici ad alto Reynolds, ma estremamente utile come riferimento per validare modelli più approssimati. Il DNS trova quindi impiego quasi esclusivamente in ambiti accademici o in simulazioni su geometrie semplificate.

Capitolo 2

Approccio Lagrangiano allo studio della turbolenza

2.1 Strutture coerenti

A causa della sua natura caotica e casuale, la turbolenza presenta (come visto in Figura 1.2.3) grandi difficoltà di modellizzazione, solo in parte risolte dalla grande potenza di calcolo raggiunta dai moderni computer. Esistono dei casi, tuttavia, in cui è possibile affrontare il problema della turbolenza in modo geometrico, a partire da strutture energeticamente dominanti che si formano durante i fenomeni turbolenti, le cosiddette **strutture coerenti**.

2.1.1 Definizione e concetti di base

Nonostante il concetto di strutture coerenti sia oggi ampiamente diffuso, manca ancora una definizione rigorosa e universalmente accettata. In generale, la turbolenza può essere scomposta in una componente coerente, associata a vorticità spazialmente correlata, e in una componente casuale, non organizzata, che si sovrappone alla prima. Le strutture coerenti possono quindi essere definite come *masse fluide caratterizzate da vorticità organizzata su larga scala e localizzata nel tempo* (A. K. M. F. Hussain 1983). Sebbene il loro ruolo nella dinamica dei fluidi sia considerato cruciale, queste strutture sono difficili da identificare in modo netto: i loro confini non coincidono necessariamente con le variazioni locali di velocità o pressione, ma dipendono dalla distribuzione spaziale della vorticità — una grandezza più complessa da misurare sperimentalmente.

La loro rilevanza deriva dal fatto che, nei flussi turbolenti pienamente sviluppati, esse rappresentano i principali meccanismi responsabili del trasporto su larga scala di massa, energia, quantità di moto e calore, determinando in larga misura il comportamento globale del flusso.

2.1.2 Tipi di strutture coerenti nei flussi turbolenti

Vortici

I vortici sono strutture rotazionali del flusso in cui il fluido ruota attorno a un asse centrale, come illustrato in Figura 2.1, spesso associati a un'elevata concentrazione di



Figura 2.1: Studio NASA-FAA sui vortici di scia: il fumo colorato evidenzia il flusso d'aria attorno all'ala di un aereo agricolo, con il vortice di punta ben visibile. Esperimento condotto a Wallops Island per analizzare le turbolenze post-volo. Fonte: *NASA Langley Research Center, pubblico dominio* (NASA Langley Research Center 1996).

vorticità. Possono presentarsi in molteplici forme e scale, da piccoli vortici caotici in flussi turbolenti fino a strutture coerenti come i tornado o i vortici a hairpin.

Nei flussi turbolenti, i vortici giocano un ruolo fondamentale nel trasporto di quantità di moto e energia, nella generazione di mescolamento e nella dinamica di interazione tra scale diverse del moto (Pope 2000). La presenza di vortici è strettamente legata a fenomeni di instabilità idrodinamica, come quelli di Kelvin-Helmholtz ¹ o Tollmien-Schlichting ², che possono amplificare piccole perturbazioni fino a generare turbolenza sviluppata. In regime turbolento, i vortici tendono a rompersi e a interagire tra loro, formando un campo caotico multiscala che caratterizza il comportamento complesso e imprevedibile del flusso. L'identificazione e l'analisi delle strutture vorticali sono fondamentali nello studio della dinamica dei fluidi, sia in ambito teorico che computazionale e sperimentale.

Vortici a forcina Un vortice a forcina è un vortice tridimensionale che si forma, solitamente, in flussi turbolenti a parete o in transizione, in cui una testa vorticoso è seguita da due gambe inclinate che si estendono lungo la direzione streamwise (Sabatino e Rossmann 2015), ben visibile in Figura 2.2. Questo vortice è prodotto principalmente da interazioni viscosive tra il fluido nelle vicinanze della parete e il flusso turbolento, ed è un elemento centrale nella rigenerazione e nel mantenimento della turbolenza negli strati limite. Le gambe del vortice interagiscono con altre strutture, generando eiezioni di fluido e formando striature (strisce di velocità) a bassa velocità. In presenza di un flusso turbolento già sviluppato, i vortici a forcina possono organizzarsi in pacchetti, aumentando la complessità e la stabilità della turbolenza.

¹L' **instabilità di Kevin-Helmholtz** è un tipo di instabilità che si presenta quando i diversi strati di fluido sono in moto relativo gli uni rispetto agli altri.

²L' **instabilità di Tollmien-Schlichting** è un fenomeno fluidodinamico che descrive la transizione da un flusso laminare a un flusso turbolento in uno strato limite su superficie piana. È una transizione caratterizzata dalla crescita di piccole perturbazioni dette onde di Tollmien-Schlichting.

Il vortice a forcina può agire come un precursore alla transizione turbolenta, poiché la sua instabilità e la produzione di vortici secondari possono contribuire alla formazione di macchie turbolente.

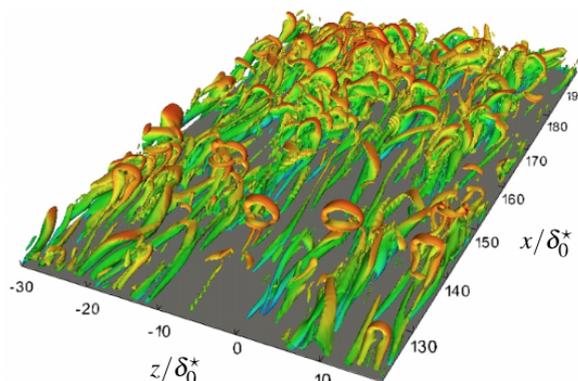


Figura 2.2: Isosuperfici del criterio λ_2 che evidenziano strutture vorticali a forma di forcina durante la transizione in uno strato limite. Queste strutture coerenti rappresentano un meccanismo chiave nell'evoluzione verso la turbolenza nei flussi laminari. Fonte: *Shekar & Graham (2020)* (Shekar e Graham 2020).

Pacchetti di vortici I pacchetti di vortici sono insiemi organizzati di strutture vorticali, spesso simili tra loro, che si propagano in modo coerente lungo la direzione del flusso. Un esempio emblematico è rappresentato dai pacchetti di vortici a forcina, osservati negli strati limite turbolenti, dove più vortici a forma di ferro di cavallo si allineano e interagiscono tra loro (Adrian 2007). Queste configurazioni collettive amplificano i meccanismi di trasporto e mescolamento rispetto al singolo vortice, contribuendo in maniera significativa al mantenimento della turbolenza. La testa dei vortici nei pacchetti è tipicamente sollevata rispetto alla parete, mentre le gambe restano ancorate più in basso, favorendo eiezioni di fluido lento e intrusioni discendenti di fluido veloce che alimentano le strisce di velocità (striature) e rafforzano il ciclo di rigenerazione turbolento. L'organizzazione in pacchetti è indice di una certa coerenza spaziale e temporale anche all'interno di un flusso altamente caotico, ed è spesso sfruttata in modelli di turbolenza a scala ridotta o in tecniche di controllo del flusso.

Striature

Le striature sono strutture allungate nella direzione del flusso (streamwise), caratterizzate da variazioni della velocità nella direzione trasversale (spanwise), e sono una delle manifestazioni più evidenti delle strutture coerenti negli strati limite turbolenti. Si formano principalmente a causa del cosiddetto meccanismo di *lift-up*, in cui vortici streamwise deboli sollevano porzioni di fluido a bassa velocità dalle zone vicine alla parete verso l'interno del flusso, creando regioni alternate di alta e bassa velocità (Andersson, Berggren e Henningson 2001). Le striature di bassa velocità sono particolarmente importanti perché rappresentano una sede privilegiata per l'innesco di instabilità secondarie che possono innescare la transizione turbolenta.

Queste strutture sono stabili per un certo tempo, ma diventano instabili se raggiungono un'ampiezza critica. La loro rottura è uno dei meccanismi che portano alla formazione

di strutture vorticali tridimensionali, come i vortici a forcina, e più in generale all'intensificazione della turbolenza. Negli strati limite turbolenti completamente sviluppati, le striature possono presentarsi in configurazioni organizzate e autosostenute, contribuendo al cosiddetto ciclo autosostenuto della turbolenza a parete.

Pennacchi e getti

I pennacchi (plumes) e i getti (jets) sono strutture coerenti fondamentali nei flussi turbolenti, caratterizzate da zone localizzate di fluido che si muovono prevalentemente in una direzione per effetto di gradienti di quantità di moto, temperatura o densità, come illustrato in Figura 2.3. Un jet è un getto di fluido ad alta velocità che si propaga in un fluido più lento o statico, ed è spesso associato a forti gradienti di velocità e turbolenza sviluppata. I pennacchi, invece, sono tipicamente generati da forzanti termiche o di densità, come nel caso della convezione naturale, e tendono a salire (o scendere) verticalmente per effetto della flottabilità (Turner 1973). Entrambi i fenomeni presentano una struttura centrale ad alta velocità o alta temperatura, circondata da strati di taglio turbolenti dove avviene il mescolamento con il fluido circostante. I pennacchi e jets possono innescare o amplificare la turbolenza, interagendo con altre strutture del flusso e contribuendo al trasporto di quantità di moto e di scalari passivi (come temperatura o concentrazione). La loro evoluzione spaziale è caratterizzata da un'espansione laterale e da un decadimento progressivo dell'intensità, ma in ambienti confinati o stratificati possono assumere comportamenti complessi e non lineari.



Figura 2.3: Pennacchio di vapore bianco generato dal Pagami Creek Fire, che si solleva attraverso uno strato di fumo preesistente. Fonte: *Stephen Handler, U.S. Forest Service, pubblico dominio* (Handler e Service 2018).

Strati di taglio

Gli strati di taglio sono regioni di forte gradiente di velocità che si sviluppano tra due flussi adiacenti aventi velocità differenti. Queste zone di taglio si formano comunemente sia in condizioni laminari che turbolente, ad esempio nei getti liberi, negli strati limite o nelle scie dietro corpi solidi. Nei flussi turbolenti, gli strati limite rappresentano una delle principali sorgenti di instabilità, dando origine a vortici Kelvin-Helmholtz che possono evolvere in strutture più complesse e tridimensionali (Pope 2000). A livello dinamico, queste regioni facilitano l'amplificazione delle fluttuazioni di velocità e la generazione di mescolamento turbolento, risultando quindi essenziali nel trasporto di quantità di moto e scalari passivi. In molti contesti ingegneristici e geofisici, gli strati limite sono responsabili della generazione di onde, instabilità e turbolenza su larga scala. La loro evoluzione è fortemente non lineare e dipende da fattori come la viscosità, la densità del fluido e la geometria del dominio.

2.2 Approccio Euleriano allo studio delle strutture coerenti

L'approccio euleriano all'identificazione delle strutture coerenti si basa sull'analisi di proprietà locali del campo di velocità in corrispondenza di punti fissi nello spazio. Tale metodo consente di individuare configurazioni strutturate all'interno del flusso attraverso indicatori derivati istantanei, quali la vorticità, il campo del tasso di deformazione del fluido o criteri diagnostici come il criterio Q e il criterio λ_2 . Le strutture coerenti vengono quindi riconosciute come regioni spaziali in cui tali quantità assumono configurazioni geometricamente o dinamicamente significative, ad esempio aree in cui prevalgono la rotazione rispetto alla deformazione o la presenza di simmetrie nei gradienti del campo. Questo approccio, pur essendo intrinsecamente locale e istantaneo, offre un'efficace rappresentazione dell'organizzazione del flusso in un dato momento temporale, rendendolo uno strumento utile per l'analisi qualitativa preliminare e per la caratterizzazione strutturale dei campi fluidodinamici in condizioni stazionarie o quasi-stazionarie.

2.2.1 Criteri diagnostici

Criterio di isopressione

Un criterio intuitivo e fisicamente motivato per l'identificazione delle strutture vorticali nei flussi incomprimibili tridimensionali si basa sulla presenza di minimi locali della pressione. L'idea alla base di questo approccio è che una regione dominata da un vortice presenta tipicamente una pressione più bassa rispetto all'ambiente circostante, a causa della forza centrifuga che agisce all'interno della struttura rotante.

Questo concetto si appoggia sull'analisi dell'equazione di bilancio della quantità di moto in forma non lineare, dalla quale si può derivare che, in un riferimento inerziale, la curvatura del campo di pressione può fornire informazioni sulle forze centripete necessarie a mantenere una traiettoria circolare del fluido. In assenza di forze viscosive dominanti, un minimo locale di pressione tende a coincidere con il centro di un vortice coerente. Tuttavia, l'utilizzo diretto del campo di pressione come criterio diagnostico presenta limiti significativi. Innanzitutto, la pressione è una variabile non locale, governata dalla

seguinte equazione di Poisson accoppiata al campo di velocità:

$$\nabla^2 p = -\rho \operatorname{tr}[(\nabla \mathbf{u})(\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.1)$$

Essa implica che perturbazioni lontane possono influenzare il valore locale della pressione e questo rende il criterio poco robusto in configurazioni turbolente complesse o in presenza di rumore numerico.

Per questo motivo, il criterio basato sui minimi di pressione è stato progressivamente affiancato o sostituito da metodi più oggettivi e localmente definiti, come il criterio- Q , il criterio- λ_2 e il criterio di Okubo-Weiss. Tuttavia, il minimo di pressione resta un'idea guida utile, specialmente nelle visualizzazioni qualitative e negli studi su flussi a bassa turbolenza o a simmetria imposta.

Criterio di Okubo-Weiss

Il criterio di Okubo-Weiss nasce nel contesto dell'analisi dei flussi bidimensionali quasi-geostrofici ³, con l'obiettivo di distinguere le regioni dominate dalla deformazione da quelle dominate dalla rotazione (Okubo 1970, Weiss 1991). Pur essendo stato sviluppato per flussi atmosferici e oceanici a grande scala, trova applicazione anche in altri contesti in cui il moto è approssimativamente bidimensionale.

Nel caso di un flusso incomprimibile 2D con campo di velocità $\mathbf{u} = (u, v)$, si considera il gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$ e lo si decompone in componenti simmetriche e antisimmetriche. A partire da esse, si definisce il parametro di Okubo-Weiss:

$$W = s_n^2 + s_s^2 - \omega^2 \quad (2.2)$$

dove $s_n = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$ e $s_s = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ sono le componenti della deformazione (normale e di taglio), mentre $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ rappresenta la vorticità. La regione è considerata vorticoso se $W < 0$, ovvero quando la vorticità domina sulle componenti deformanti: in queste aree, le particelle tendono a ruotare coerentemente, suggerendo la presenza di strutture coerenti. Viceversa, se $W > 0$, la deformazione è prevalente, indicando zone in cui il flusso tende a separarsi o a convergere in modo instabile.

Il criterio di Okubo-Weiss è particolarmente apprezzato per la sua semplicità computazionale e per l'interpretazione intuitiva che offre, specialmente nei flussi quasi-2D. Tuttavia, presenta limitazioni importanti: è strettamente valido solo in contesti bidimensionali e stazionari, e la soglia $W = 0$ non sempre separa chiaramente regioni coerenti da zone caotiche. Inoltre, in presenza di flussi tridimensionali o con forti variazioni temporali, il criterio perde parte della sua efficacia descrittiva.

Nonostante ciò, rimane uno strumento di riferimento nell'analisi qualitativa dei moti geofisici, ed è spesso utilizzato in combinazione con tecniche più avanzate per la rilevazione delle strutture coerenti.

Criterio- Δ

Il criterio- Δ rappresenta uno dei primi tentativi formali di identificazione automatica delle strutture vorticali in flussi tridimensionali, introducendo un approccio basato sull'analisi degli autovalori del tensore $\nabla \mathbf{u}$ (Chong, Perry e Cantwell 1990). L'idea centrale

³I flussi quasi-geostrofici sono dei flussi in cui la forza di Coriolis e il gradiente di pressione sono quasi in equilibrio.

è che una regione possa essere considerata vorticoso se il gradiente del campo di velocità genera un comportamento localmente rotazionale, identificabile tramite la presenza di autovalori complessi con parte immaginaria non nulla. Il criterio si fonda sull'analisi del polinomio caratteristico del tensore $\nabla\mathbf{u}$:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (2.3)$$

dove P , Q e R sono invarianti del tensore, definiti in funzione delle sue componenti. Il discriminante di questo polinomio cubico è data da:

$$\Delta = \left(\frac{27}{4}\right) R^2 + Q^3 \quad (2.4)$$

Il criterio afferma che una regione è sede di moto vorticoso se $\Delta > 0$, condizione che implica l'esistenza di due autovalori complessi coniugati e uno reale. Questo corrisponde a un comportamento locale spiraleggiante del flusso, tipico dei vortici.

Dal punto di vista fisico, la positività della discriminante identifica zone in cui il tensore del gradiente di velocità induce una dinamica locale dominata dalla rotazione e non solo dalla deformazione pura. Tuttavia, il criterio- Δ presenta alcune criticità. Innanzitutto, l'identificazione del moto vorticoso si basa sulla natura complessa degli autovalori, che non garantisce di per sé la presenza di una struttura coerente e localizzata. Inoltre, la sensibilità numerica nel calcolo degli autovalori può generare falsi positivi in presenza di rumore o flussi poco strutturati.

Nonostante questi limiti, il criterio- Δ conserva un interesse storico e teorico, ed è ancora oggi utilizzato per confronti qualitativi o come filtro preliminare in analisi più sofisticate delle strutture vorticali.

Criterio-Q

Il criterio- Q rappresenta uno dei metodi più diffusi per l'identificazione delle strutture vorticali nei flussi incomprimibili tridimensionali. Introdotto da Hunt et al. (Hunt, Wray e Moin 1988), esso si basa sull'analisi del bilancio locale tra le componenti rotazionali e deformanti del gradiente del campo di velocità. Il criterio- Q parte dalla decomposizione del tensore $\nabla\mathbf{u}$ nelle sue componenti simmetrica e antisimmetrica:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

dove S_{ij} rappresenta il rateo di deformazione (strain rate), mentre Ω_{ij} descrive la rotazione locale del fluido. Il criterio è formalmente definito come:

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (2.7)$$

La regione viene considerata vorticoso se $Q > 0$, ovvero se la rotazione locale domina sulla deformazione: ciò suggerisce una tendenza del flusso a "conservare" la coerenza della struttura piuttosto che a deformarla. Dal punto di vista fisico, un valore positivo di Q indica che l'energia cinetica associata alla rotazione locale del fluido è maggiore di quella associata alla deformazione. Questo permette di identificare le regioni in cui il moto vorticoso è prevalente e quindi, potenzialmente, sede di strutture coerenti.

Tuttavia, il criterio- Q presenta alcune limitazioni. In particolare, la soglia $Q > 0$ non sempre garantisce l'individuazione di un vortice ben definito, specialmente in regioni in cui il gradiente di velocità è debole o in presenza di forte rumore numerico. Inoltre, essendo basato su un bilancio energetico tra due quantità scalari derivate da normali tensoriali, il criterio può risultare poco discriminante in configurazioni complesse o altamente tridimensionali.

Nonostante queste criticità, il criterio- Q rimane uno strumento molto utilizzato per la sua semplicità computazionale e la facilità di implementazione nei codici numerici, rappresentando spesso un primo passo per l'analisi qualitativa delle strutture vorticali.

Criterio- λ_2

Le limitazioni riscontrate nei criteri Δ e Q hanno portato all'introduzione di un nuovo metodo diagnostico per identificare la natura vorticosa dei flussi incomprimibili tridimensionali: il criterio- λ_2 (Jeong e F. Hussain 1995). Questo criterio si basa esclusivamente sul tensore $\nabla\vec{u}$, ovvero il gradiente del campo di velocità, e in particolare sulla sua decomposizione nelle componenti simmetrica e antisimmetrica, indicate rispettivamente con \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$.

L'idea alla base del criterio- λ_2 è che una regione vorticosa, per effetto della forza centrifuga, presenta tipicamente un minimo locale della pressione nel piano ortogonale all'asse del vortice. Tuttavia, l'impiego diretto del campo di pressione risulta problematico a causa della sua natura non locale come mostrato in Eq. 2.1. Essendo di natura globale, tale equazione implica che un minimo locale di pressione può essere influenzato anche da regioni remote del dominio, rendendo la pressione una variabile poco affidabile per l'identificazione oggettiva di vortici.

Per superare questa limitazione, si lavora direttamente sul gradiente di velocità $\nabla\vec{u}$, che è una quantità puramente locale. Tale tensore può essere scomposto nelle sue componenti simmetrica S_{ij} e antisimmetrica Ω_{ij} come in (2.6). A partire da queste si costruisce il tensore $J_{ij} = S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj}$ che è simmetrico per costruzione in quanto somma di due tensori simmetrici. In virtù del teorema spettrale, questo garantisce che J_{ij} ammetta solo autovalori reali. Diagonalizzando J_{ij} , si ottengono tre autovalori reali $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Il criterio si basa sull'analisi del secondo autovalore λ_2 , da cui prende il nome: se $\lambda_2 < 0$, significa che esistono almeno due direzioni ortogonali nel piano normale all'asse del vortice lungo cui la curvatura del campo di pressione è negativa. Ciò indica la presenza di una "sella" di pressione e, quindi, di una struttura vorticosa coerente.

È importante sottolineare che, sebbene il criterio- λ_2 si basi sull'assunto teorico che le regioni ad alta vorticità siano caratterizzate da selle di pressione, questo non è sempre vero, in particolare per flussi con numeri di Reynolds molto bassi in cui le forze viscosive vincono nettamente sulle forze inerziali. Tuttavia, anche se il profilo di pressione è quasi piatto, si possono comunque creare delle strutture vorticose coerenti. In questi casi, il criterio- λ_2 si dimostra particolarmente robusto, offrendo una diagnosi più affidabile rispetto ad altri metodi o alla semplice analisi del campo di pressione.

2.3 Approccio Lagrangiano allo studio delle strutture coerenti: le LCS

L'idea di studiare il trasporto e il mescolamento caotico nei fluidi con l'approccio lagrangiano ha iniziato ad affermarsi nella seconda metà del Novecento grazie ai lavori del fisico G.I. Taylor (Taylor 1954) e del matematico E.N. Lorenz (Lorenz 1963), che ha gettato le basi per la moderna teoria del caos. Questi primi concetti vennero in seguito formalizzati dall'ingegnere J.M. Ottino (J. M. Ottino 1989) e furono infine ripresi dal matematico George Haller, che nei primi anni Duemila ha formalizzato in modo rigoroso la teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti (Lagrangian Coherent Structures, LCS) (George Haller 2000, George Haller 2001). Seguendo la definizione data da Haller e Yuan in (George Haller 2000), per Strutture Lagrangiane Coerenti si intendono delle strutture materiali che organizzano il trasporto nel flusso non stazionario, agendo come un confine dinamico che separa regioni con dinamiche di mescolamento distinte.

Inizialmente si sono distinte due tipologie di LCS: quelle definite attrattive, ovvero superfici materiali che agiscono come varietà attrattivi nel flusso lagrangiano; e quelle repulsive, che invece sono superfici materiali che funzionano come varietà repulsive nel flusso lagrangiano. Queste due tipologie di LCS sono oggi note complessivamente come LCS iperboliche, ben distinte dalle LCS ellittiche (vortici) e paraboliche (nuclei di getti) introdotte in studi successivi (George Haller 2015). Una visualizzazione grafica delle LCS è visibile in Figura 2.4.

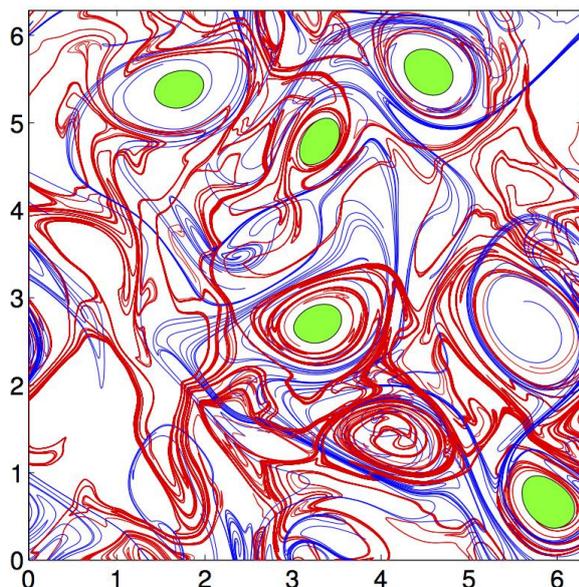
2.3.1 Definizione e concetti fondamentali

Come illustrato in Sezione 1.1.1, la descrizione lagrangiana dei fluidi parte dall'analisi del moto di una particella fluida in un determinato campo di velocità. Matematicamente, questo si traduce nello studio della seguente equazione differenziale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

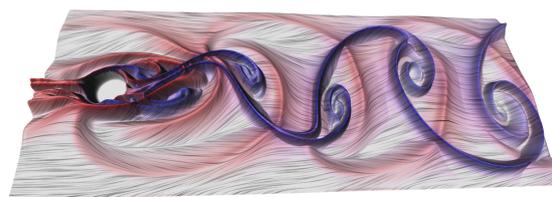
La teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti cerca di indagare le cause della formazione di strutture coerenti all'interno del flusso, focalizzandosi sull'analisi di particolari superfici di traiettorie di fluido che organizzano il resto del fluido stesso in pattern ordinati (George Haller 2015). Al fine di trovare queste superfici si utilizza la teoria dei sistemi dinamici, tenendo tuttavia presente che nel mondo fisico difficilmente si trovano flussi autonomi, periodici o quasi-periodici ai quali è possibile applicare direttamente i risultati della teoria dei sistemi dinamici cercando punti fissi o varietà stabili e/o instabili. La maggior parte dei fenomeni turbolenti osservabili in natura è infatti di natura temporale finita e non presenta periodicità o quasi-periodicità trattabili ad esempio per mezzo del teorema KAM.

Per poter analizzare rigorosamente l'evoluzione temporale della particella fluida descritta dall'equazione differenziale (2.8), è necessario inquadrare il problema nell'ambito della già citata teoria dei sistemi dinamici. Tale teoria fornisce un insieme di strumenti matematici, come la nozione di varietà differenziale, spazio delle fasi e flusso di fase, che permettono di descrivere e studiare il comportamento qualitativo e quantitativo delle soluzioni del sistema. Di seguito vengono introdotti i concetti fondamentali necessari per questa analisi, basati principalmente sulla trattazione di Arnold (Arnold 1997).



(a) Strutture coerenti lagrangiane in una simulazione bidimensionale di turbolenza. Le LCS iperboliche attrattive (in rosso) e repulsive (in blu) delimitano zone di forte separazione del flusso, mentre le LCS ellittiche (bordi delle regioni verdi) evidenziano vortici coerenti che intrappolano il fluido.

Fonte: *M. Farazmand, opera propria, licenza CC BY-SA 4.0*



(b) LCS attrattive (in blu) e repulsive (in rosso) estratte come creste del campo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito da una simulazione bidimensionale della scia di von Kármán. L'immagine mostra l'organizzazione coerente del trasporto lagrangiano in presenza di turbolenza vorticoso.

Fonte: *Jens Kasten et al., Kasten et al. 2013*

Figura 2.4: Esempi di strutture coerenti lagrangiane (LCS) in simulazioni bidimensionali. A sinistra, identificazione variazionale di LCS iperboliche ed ellittiche; a destra, identificazione tramite creste di FTLE.

- **Varietà differenziale:** Sia M un insieme. Una *varietà differenziale* di dimensione n è una coppia (M, \mathcal{A}) , dove $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante differenziale su M tale che:

1. Gli $U_\alpha \subseteq M$ sono aperti che coprono M , cioè $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.
2. Ogni $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbf{R}^n$ è una biiezione *liscia* (differenziabile con inversa differenziabile) tra U_α e un aperto di \mathbf{R}^n .
3. Per ogni coppia di carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la mappa di transizione

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è una funzione liscia da un aperto di \mathbf{R}^n a un altro aperto di \mathbf{R}^n .

Questa struttura permette di definire nozioni di differenziabilità su M , estendendo il calcolo differenziale dallo spazio euclideo a spazi più generali.

- **Spazio delle fasi:** Lo *spazio delle fasi* è lo spazio matematico che contiene **tutte le possibili configurazioni complete** di un sistema meccanico, ovvero tutte le informazioni necessarie per descrivere completamente il suo stato in un dato istante. Per un sistema con n gradi di libertà, lo spazio delle fasi è una varietà di dimensione $2n$, in cui ogni punto è descritto da:

- le coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, che indicano la posizione del sistema;
- i momenti coniugati $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, che rappresentano la quantità di moto associata a ciascuna coordinata.

Ogni stato completo del sistema corrisponde quindi a un punto (\mathbf{q}, \mathbf{p}) nello spazio delle fasi, e il moto del sistema nel tempo si rappresenta come una traiettoria all'interno di questo spazio. Per la trattazione delle LCS verrà usato spesso uno spazio delle fasi esteso dato da $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$ dove \mathcal{P} è lo spazio delle fasi standard e $\mathcal{I} = [t_0, t_1]$ è un intervallo temporale.

- **Flusso di fase:** Sia M una varietà differenziale e sia X un campo vettoriale liscio su M . Il *flusso di fase* associato a X è una famiglia di applicazioni differenziabili

$$\varphi_t : M \rightarrow M, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

definite su un intervallo I contenente zero, tali che per ogni punto $x \in M$, la curva

$$t \mapsto \varphi_t(x)$$

è la soluzione massimalmente estesa del sistema dinamico

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0(x) = x.$$

Il flusso soddisfa inoltre le proprietà di gruppo a un parametro:

$$\varphi_0 = \text{id}_M, \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \quad \forall t, s, t+s \in I.$$

In altre parole, il flusso di fase descrive l'evoluzione nel tempo degli stati $x \in M$ guidata dal campo vettoriale X .

Alla luce di questi strumenti matematici, l'equazione (2.8) è caratterizzata da un flusso di fase indicato con

$$F_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad \mathbf{x} \in U \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2.9)$$

Si consideri inoltre un'ipersuperficie $\mathcal{M}(t_0)$ di posizioni iniziali del fluido, tale per cui la superficie materiale $\mathcal{M}(t) := F_{t_0}^t(\mathcal{M}(t_0))$ rappresenta la posizione al tempo t dell'ipersuperficie iniziale che si evolve con il flusso di fase (2.9), come illustrato in Figura 2.5. La teoria delle LCS si propone di trovare quelle superfici materiali $\mathcal{M}(t)$ che hanno un

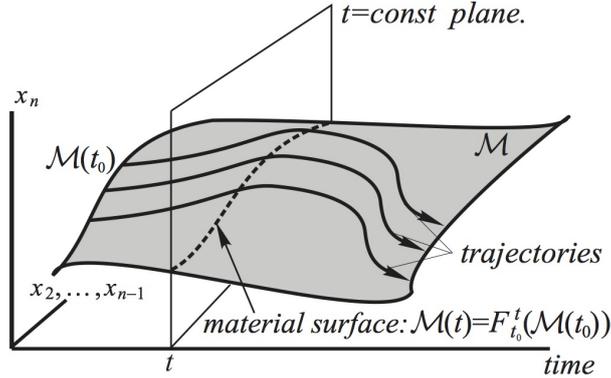


Figura 2.5: Varietà invariante nello spazio delle fasi esteso, generato dall'evoluzione di una superficie materiale. L'immagine illustra come una struttura coerente lagrangiana possa essere interpretata come superficie invariante che organizza il trasporto all'interno del flusso. Fonte: *G. Haller, opera propria, distribuita con licenza CC BY-SA 4.0 (George Haller 2014)*

particolare impatto sulla deformazione del materiale fluido vicino, dove la deformazione si può descrivere attraverso lo studio dell'evoluzione di un'infinitesima perturbazione $y(t)$ che evolve secondo l'equazione variazionale:

$$\dot{\mathbf{y}} = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\mathbf{y} \quad (2.10)$$

Si può dimostrare (Arnold 1973) che la soluzione fondamentale di (2.10) si può scrivere attraverso la matrice invertibile $\nabla F_{t_0}^t$, ottenendo dunque la seguente espressione per il modulo quadrato della perturbazione al tempo finale t_1 :

$$|y(t_1)|^2 = \langle \nabla F_{t_0}^{t_1}(x_0)y(t_0), \nabla F_{t_0}^{t_1}(x_0)y(t_0) \rangle = \langle y(t_0), C(x_0)y(t_0) \rangle \quad (2.11)$$

dove si è introdotto il *tensore di Cauchy-Green*, definito come:

$$C(\mathbf{x}_0) = [\nabla F_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}_0)]^T \nabla F_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}_0) \quad (2.12)$$

Il tensore di Cauchy-Green è un tensore che descrive in modo quantitativo la deformazione subita da un elemento infinitesimale di materiale fluido durante il suo moto. In pratica, misura come le distanze e le forme tra particelle vicine si modificano nel tempo a causa del flusso. Grazie alla sua natura simmetrica e definita positiva, il tensore è diagonalizzabile in virtù del Teorema Spettrale e la sua decomposizione spettrale fornisce informazioni sulle direzioni e sugli intensi allungamenti (stretch) o compressioni, rappresentate dagli autovettori e dagli autovalori rispettivamente. L'analisi di questo tensore è fondamentale per capire come si evolve la struttura del fluido e per identificare superfici materiali che influenzano la dinamica e la coerenza del flusso.

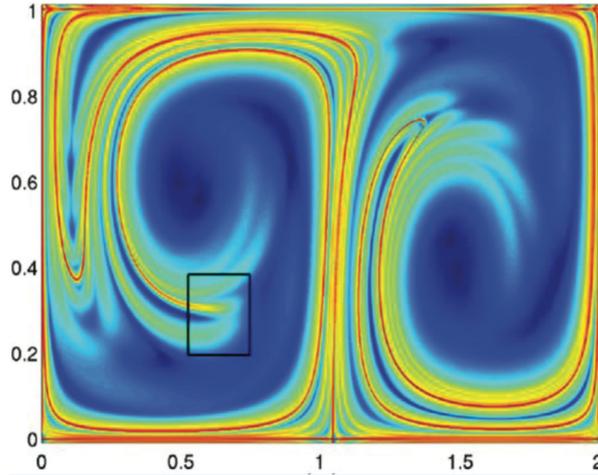


Figura 2.6: Visualizzazione dell'esponente di Lyapunov a tempo finito calcolato a partire da un flusso a doppio giro. Fonte: *Mohammad Farazmand, CC BY-SA 4.0* (Farazmand 2011)

2.3.2 Criteri per l'identificazione delle LCS

Esponenti di Lyapunov a tempo finito (FTLE)

Uno dei metodi diagnostici più utilizzati per individuare le LCS è l'analisi degli esponenti di Lyapunov, concetto centrale nello studio dei sistemi dinamici (Goldstein, Poole e Safko 2002). Questi esponenti misurano la sensibilità del sistema alle condizioni iniziali e sono particolarmente efficaci nell'analizzare la stabilità di traiettorie in sistemi non lineari e caotici. Nel contesto delle LCS si impiega una variante nota come esponenti di Lyapunov a tempo finito (FTLE), che risulta più adatta all'analisi di fenomeni turbolenti, fortemente aperiodici e limitati nel tempo.

L'idea alla base di questo approccio è individuare le superfici materiali iniziali soggette a massima (o minima) deformazione, ovvero quelle lungo le quali una sfera infinitesima viene deformata più delle altre. Queste superfici $\mathcal{M}(t_0)$ sono stimate a partire dalle estremali del campo scalare $\Lambda_{t_0}^{t_1}(x_0)$, definito come:

$$\Lambda_{t_0}^{t_1}(x_0) = \frac{1}{t_1 - t_0} \log \sqrt{\lambda_n(x_0)}, \quad (2.13)$$

dove $\lambda_n(x_0)$ rappresenta il massimo autovalore del tensore di Cauchy-Green. Le creste del campo $\Lambda_{t_0}^{t_1}$ vengono comunemente interpretate come LCS repulsive, mentre le creste backward ($\Lambda_{t_1}^{t_0}$) sono associate a LCS attrattive. In Figura 2.6 è visibile il campo FTLE associato a un flusso double gyre. Tuttavia, come sottolineato da Haller (George Haller 2015), è fondamentale ricordare che le creste dell'FTLE *non corrispondono in modo univoco e rigoroso* alle LCS. Alcune creste possono essere artefatti numerici o transitori, e non rappresentano vere barriere al trasporto. Inoltre, il campo FTLE:

- dipende fortemente dalla durata della finestra di integrazione ($t_1 - t_0$): intervalli troppo brevi non catturano le strutture, mentre finestre troppo lunghe possono distorcerle o sovrapporle;
- è sensibile al rumore nei dati, il che può portare a risultati fuorvianti soprattutto in contesti sperimentali;

- non fornisce informazioni sulla direzione dello *stretching* massimo, rendendo impossibile la classificazione delle LCS in tipologie distinte (attrattive, repulsive, shearless);
- non è oggettivo, cioè i risultati possono cambiare a seconda del sistema di riferimento scelto.

In sintesi, l'FTLE è uno strumento utile per una prima identificazione qualitativa delle regioni dinamicamente rilevanti, anche grazie alla bassa difficoltà computazionale, ma presenta limitazioni intrinseche che ne riducono l'affidabilità come metodo rigoroso per la determinazione delle LCS. Per un'identificazione più precisa e oggettiva, sono stati sviluppati metodi alternativi basati su formulazioni variazionali e geodetiche.

Approccio variazionale globale

Un'alternativa all'identificazione delle LCS nei flussi fluidi si basa su un approccio variazionale di tipo globale. Alcune strutture possono emergere anche tramite criteri locali, ma queste analisi risultano insufficienti a catturare configurazioni più complesse — come i nuclei di getti parabolici — che richiedono una descrizione più estesa. L'approccio globale consente quindi di rivelare nuove forme di organizzazione coerente all'interno del flusso. In questo contesto, le LCS vengono interpretate come curve materiali stazionarie rispetto alla deformazione relativa: tra tutte le possibili curve inizialmente vicine, esse sono quelle per cui la variazione dello stiramento relativo è nulla. Più precisamente, se si considerano due curve separate da una distanza infinitesima ϵ , la loro evoluzione temporale non presenta differenze significative in termini di deformazione relativa. Dal punto di vista matematico, queste curve stazionarie risultano essere geodetiche rispetto a una metrica Lorentziana costruita a partire dal tensore di Cauchy-Green $C(x_0)$. In particolare, per le strutture iperboliche e paraboliche, la metrica si definisce come:

$$g(u, v) = \langle u, Dv \rangle, \quad D(x_0) = \frac{1}{2} [C(x_0)\Omega - \Omega C(x_0)], \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

dove u e v sono vettori tangenti alla curva materiale.

Per quanto riguarda invece le strutture ellittiche, si richiede che sia nulla la variazione dello stiramento tangenziale medio. In quest'ottica, la metrica adottata è:

$$g_\lambda(u, v) = \langle u, E_\lambda v \rangle, \quad \lambda > 0 \quad (2.15)$$

dove $E_\lambda(x_0)$ è il tensore di Green-Lagrange generalizzato, dipendente da λ , che rappresenta un livello prefissato di stiramento. In altri termini, le LCS sono curve che estremizzano una misura variazionale della separazione tra particelle materiali, secondo una geometria pseudo-Riemanniana indotta dal campo di deformazione. Questo punto di vista geometrico consente di identificare le strutture coerenti come entità invarianti rispetto alla dinamica del flusso, con un alto grado di generalità.

Capitolo 3

Applicazioni delle LCS in fluidodinamica

La teoria delle *Strutture Lagrangiane Coerenti* (LCS) rappresenta uno strumento estremamente potente nell'analisi del trasporto e della dinamica dei fluidi. Come tutta la fluidodinamica computazionale, le LCS trovano applicazione in un ampio spettro di contesti, che vanno dalla fisica atmosferica e oceanografica fino all'ingegneria e alla biomedicina.

Nonostante la formulazione teorica delle LCS sia stata sviluppata solo in tempi relativamente recenti e sia tuttora oggetto di ricerca attiva, negli ultimi anni sono emersi numerosi studi che ne dimostrano l'efficacia applicativa. Le LCS vengono impiegate per individuare strutture dinamiche all'interno di flussi complessi, permettendo di identificare barriere al trasporto, regioni di mescolamento, e strutture vorticali persistenti.

In questa sezione vengono analizzati alcuni casi studio reali che mostrano l'applicazione della teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti. Per garantire maggiore leggibilità e mantenere distinto il livello teorico da quello tecnico, il tentativo di modellistica numerica sviluppato in questa tesi è stato riportato in Appendice A.

3.1 Applicazioni in dinamica atmosferica

La Fisica dell'Atmosfera è lo sbocco applicativo più naturale per le LCS. Sin dalla prima formulazione della teoria si sono susseguiti numerosi studi che hanno cercato di individuare le LCS nell'atmosfera e di chiarire il loro ruolo sia nel trasporto di nanoparticelle e inquinanti sia nella pura dinamica atmosferica. Lo sviluppo e il perfezionamento di criteri diagnostici sempre più robusti hanno permesso di raggiungere risultati sempre più importanti, confermando il ruolo di primo piano giocato dalle LCS nella dinamica dei flussi turbolenti.

Buco nell'ozonosfera

Le LCS sono state largamente utilizzate per studiare fenomeni atmosferici coinvolgenti il vortice polare, comunemente noto come *buco nell'ozono*. Per buco nell'ozono o buco nell'ozonosfera si intende un fenomeno stagionale di riduzione e assottigliamento dello strato di ozono presente nella stratosfera (l'ozonosfera appunto) (INGV, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia 2020), fenomeno tristemente noto degli anni '80 del 1900 e causato dalla presenza di una regione vorticoso sopra l'Antartide e l'Artide nel periodo invernale. I venti all'interno di questo vortice raggiungono temperature molto

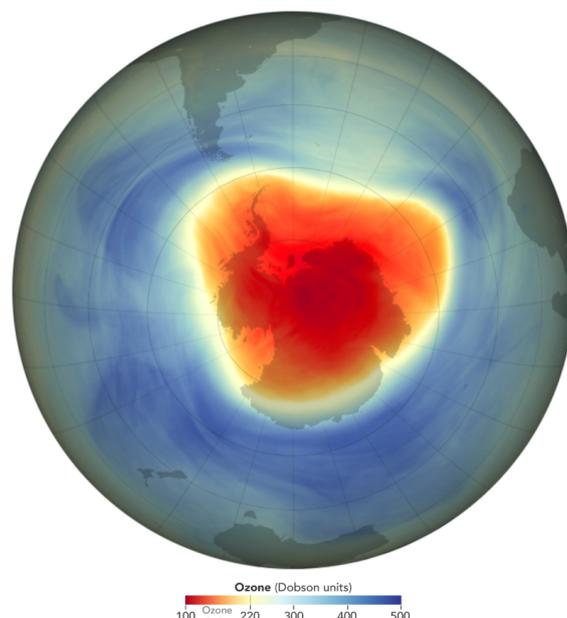


Figura 3.1: Mappa a falsi colori dell'estensione del buco dell'ozono sopra l'Antartide il 28 settembre 2024. Fonte: *NASA Earth Observatory* (Dauphin 2024).

basse a causa della quasi totale assenza di Sole, permettendo la formazione delle nubi stratosferiche polari, sulla cui superficie si innescano reazioni di attivazione che portano le molecole di bromo e cloro in uno stato fortemente reattivo. Con l'inizio della primavera e la ricomparsa del Sole, queste molecole attivate iniziano a "distruggere" l'ozono, portando a un vistoso assottigliamento dell'ozonosfera, come visibile in Figura 3.1. Il fenomeno è problematico perché l'ozono è responsabile della schermatura dai raggi ultravioletti (UV) del Sole, particolarmente dannosi per la pelle e per gli occhi e proprio per questo è tenuto sotto stretto controllo (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia 2020).

Le LCS sono state largamente utilizzate per comprendere meglio le dinamiche di diffusione e trasporto legate a questo fenomeno. In particolare, numerosi studi hanno dimostrato che i bordi del vortice polare possono essere interpretati come vere e proprie strutture coerenti lagrangiane, capaci di agire come barriere dinamiche al trasporto tra la massa d'aria interna al vortice (ozono-povera) e l'ambiente esterno (ozono-rica). Queste barriere non sono fisse, ma si evolvono nel tempo, e possono in certe condizioni rompersi o riorganizzarsi, permettendo l'infiltrazione o l'espulsione selettiva di masse d'aria.

Uno dei primi lavori rilevanti in questo contesto è quello di Waugh e Plumb 1994, che ha mostrato la presenza di confini netti al trasporto nelle simulazioni del vortice antartico. Studi successivi, come quello di Francisco J. Beron-Vera et al. 2013, hanno formalizzato il concetto di LCS ellittiche per identificare il nucleo stabile e coerente del vortice. Ancora più recentemente, lavori come Serra et al. 2017 e Curbelo, Yao Chen e Mechoso 2021 hanno utilizzato strumenti Lagrangiani avanzati per studiare la scissione del vortice polare artico del 2020, un evento eccezionale associato a una significativa perdita di ozono nella regione artica. Questi studi hanno evidenziato come le LCS iperboliche — strutture materiali associate a traiettorie iperboliche e alle loro varietà — abbiano giocato un ruolo fondamentale nell'organizzazione del trasporto e nella separazione dell'aria ozono-povera e ozono-rica.

Infine, lavori come Cámara et al. 2012 hanno mostrato che la dinamica del bordo del

vortice può essere efficacemente descritta tramite dinamica a lobi: intersezioni tra manifolds stabili e instabili che definiscono vere e proprie “porte di scambio” attraverso cui masse d’aria possono entrare o uscire dal vortice. Queste scoperte hanno migliorato radicalmente la nostra comprensione della dinamica del buco dell’ozono, fornendo strumenti diagnostici più affidabili per la previsione e il monitoraggio della sua evoluzione.

Trasporto atmosferico di inquinanti e nanoparticelle

Un altro ambito in cui l’analisi Lagrangiana e, in particolare, le LCS hanno trovato ampia applicazione è lo studio del trasporto atmosferico di inquinanti e nanoparticelle. In un sistema dinamico e tridimensionale come l’atmosfera terrestre, il comportamento di sostanze passive (come CO, NO_x, SO₂, black carbon, o aerosol ultrafini) dipende fortemente dalla struttura del campo di velocità e dalle barriere dinamiche al trasporto. In questo contesto, le LCS forniscono uno strumento unico per identificare i confini dinamici che delimitano masse d’aria con comportamenti differenti, facilitando l’individuazione delle traiettorie preferenziali lungo cui queste sostanze si muovono o si accumulano.

In particolare, l’utilizzo delle cosiddette Strutture Lagrangiane Coerenti generalizzate (gLCS) ha permesso di rappresentare inquinanti atmosferici come traccianti passivi pesati, evidenziando come diverse specie chimiche tendano a formare pattern di trasporto distinti, controllati dalla morfologia delle strutture coerenti del flusso (Nolan, Foroutan e Ross 2020). Tali strutture agiscono come veri e propri “binari invisibili” lungo i quali la massa si muove, o barriere che impediscono la dispersione laterale.

Un’altra area di crescente interesse è quella della dinamica delle nanoparticelle atmosferiche. Le particelle ultrafini, spesso originate da processi di nucleazione e crescita a partire da precursori gassosi, sono particolarmente sensibili alla dinamica del flusso. Studi recenti hanno evidenziato che la formazione di nanoparticelle in prossimità del suolo o nelle alte quote può essere fortemente influenzata dalla presenza di LCS iperboliche, che ne modulano la diffusione e la permanenza in atmosfera (Kulmala, Petäjä, Nieminen et al. 2023). Un’applicazione pratica di grande rilievo è lo studio del trasporto stagionale degli inquinanti nella regione della Baia del Bengala, dove le LCS sono state utilizzate per prevedere la diffusione degli aerosol marini e dei contaminanti provenienti dal subcontinente indiano. Le LCS identificate mostrano una persistenza significativa nel tempo e nello spazio, rivelando canali preferenziali di trasporto e zone di confinamento particellare (Rao et al. 2024).

3.2 Applicazioni in oceanografia

Le Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) hanno trovato ampie applicazioni nell’ambito dell’oceanografia, dove vengono utilizzate per analizzare fenomeni complessi nei flussi oceanici, come la circolazione, il trasporto di nutrienti, e la dinamica dei vortici. Questi strumenti permettono di individuare barriere dinamiche e di comprendere meglio il comportamento dei fluidi in contesti altamente turbolenti e variabili.

Circolazione Oceanica e Vortici

Le LCS sono fondamentali per lo studio della circolazione oceanica, poiché permettono di identificare e analizzare la dinamica dei vortici oceanici. I vortici, che si formano in

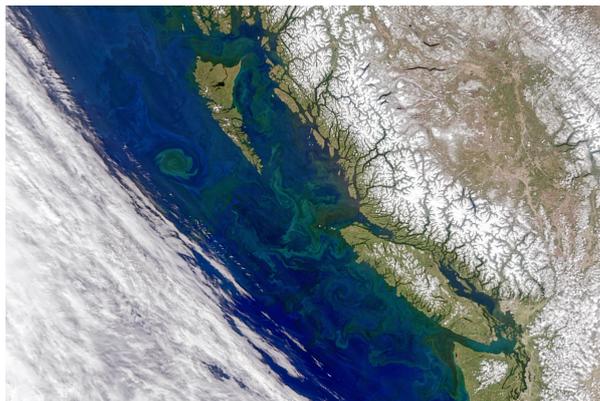


Figura 3.2: Haida Eddy al largo di Haida Gwaii: un vortice oceanico che trasporta acqua calda e ricca di nutrienti verso il largo, stimolando una forte crescita del fitoplancton visibile come una spirale verde. Fonte: *NASA Ocean Color* (NASA Ocean Color 2024).

varie aree degli oceani, giocano un ruolo cruciale nel trasporto di calore, nutrienti e altre sostanze chimiche attraverso gli oceani.

Le LCS sono in grado di rivelare la struttura e l'evoluzione di questi vortici, nonché di identificare le regioni di stabilità e instabilità. Questa capacità è essenziale per comprendere fenomeni come le correnti oceaniche e il loro impatto sul clima globale e sugli ecosistemi marini. Un esempio significativo è lo studio dei vortici oceanici subtropicali, che sono essenziali per il trasporto di nutrienti e per la regolazione del carbonio nell'oceano. Le LCS, applicate a modelli numerici di circolazione, hanno rivelato come questi vortici possano agire come "trappole" per il carbonio, intrappolando il CO_2 per periodi prolungati, riducendo così la concentrazione di gas serra nell'atmosfera (Y. Chen e Zhan 2015).

Trasporto di Nutrienti e Produttività Primaria

Un altro campo di applicazione delle LCS riguarda il trasporto di nutrienti marini e il suo impatto sulla produttività primaria degli oceani. Le LCS sono utilizzate per mappare e analizzare i percorsi preferenziali lungo i quali i nutrienti (come azoto, fosforo e silicio) vengono trasportati dalle zone di risalita verso le regioni di forte attività biologica, dove alimentano la crescita del fitoplancton e di altri organismi marini. Identificare queste strutture dinamiche è cruciale per la gestione delle risorse marine e per la comprensione degli ecosistemi marini. Le LCS consentono di tracciare i flussi di nutrienti e di evidenziare le barriere naturali al loro trasporto, migliorando la nostra capacità di prevedere le zone di fioritura del fitoplancton e gli effetti di fenomeni come l'eutrofizzazione ¹(Tandon e Gnanadesikan 2021).

Tracciamento del Petrolio e Inquinamento Marino

Le LCS sono state impiegate in modo significativo per il tracciamento del petrolio e di altri contaminanti marini, come parte degli studi sui disastri ambientali. Un'applicazio-

¹L'**eutrofizzazione** è il processo di arricchimento di un ecosistema acquatico con nutrienti, principalmente azoto e fosforo, che porta a un aumento eccessivo della biomassa fitoplanctonica. Questo fenomeno può causare la deplezione di ossigeno nell'acqua, portando a zone morte, dove la vita marina è compromessa, e contribuire alla formazione di fioriture algali tossiche. L'eutrofizzazione è spesso associata all'inquinamento da fertilizzanti agricoli, acque reflue e altre fonti di nutrienti.

ne emblematicamente importante riguarda la Deepwater Horizon: l'utilizzo delle LCS ha permesso di ricostruire la diffusione e la dispersione del petrolio rilasciato durante l'incidente, fornendo informazioni dettagliate sulle traiettorie del petrolio in relazione alle correnti oceaniche e alle strutture vorticali presenti nelle acque del Golfo del Messico (G. Haller e F. J. Beron-Vera 2015). Le LCS hanno rivelato come le correnti super-

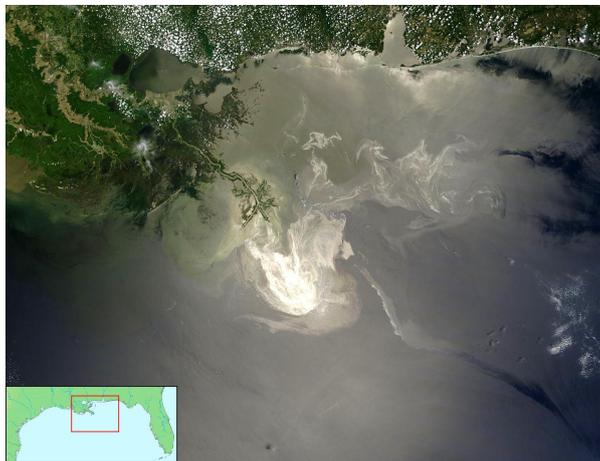


Figura 3.3: Mappa della dispersione del petrolio causata dal disastro della Deepwater Horizon (24 maggio 2010). L'immagine è basata sull'originale con ritagli e include il localizzatore da una mappa topologica degli Stati Uniti. Fonte: *NASA/GSFC, MODIS Rapid Response, pubblico dominio* (NASA/GSFC 2010).

ficiali e le strutture coerenti a profondità maggiori abbiano determinato la dispersione del petrolio, illustrata in Figura 3.3, e l'influenza delle condizioni ambientali sulla sua diffusione, migliorando la comprensione delle dinamiche del trasporto di inquinanti in scenari complessi come i disastri ecologici.

Migrazione di Specie Marine

Le LCS trovano applicazione anche nello studio della migrazione di specie marine. Le correnti oceaniche influenzano in modo significativo le traiettorie migratorie di diverse specie, come pesci, cetacei e tartarughe marine, che si spostano lungo rotte specifiche in base alla struttura delle correnti. Le LCS aiutano a identificare le rotte migratorie e le aree di aggregazione, fornendo un quadro utile per la conservazione delle specie marine e la gestione della pesca. Ad esempio, l'utilizzo delle LCS ha permesso di tracciare il movimento delle tartarughe marine in relazione alle correnti oceaniche, rivelando le principali rotte migratorie e le zone di sosta durante la migrazione (Chassignet e Xu 2017).

3.3 Applicazioni in ingegneria dei fluidi

Le Strutture Lagrangiane Coerenti trovano applicazioni crescenti anche nell'ambito dell'ingegneria dei fluidi, dove offrono strumenti avanzati per comprendere, controllare e ottimizzare i flussi complessi in contesti reali. L'identificazione di strutture coerenti permette una visione dinamica e spazio-temporale del trasporto di massa, momento ed energia, utile in molteplici contesti ingegneristici.

Controllo del flusso e ottimizzazione aerodinamica

Le LCS sono state utilizzate con successo per l'analisi di flussi complessi in prossimità di superfici solide, come nel caso del flusso intorno ad ali, veicoli o turbine. In questi contesti, le strutture iperboliche agiscono da separatori materiali tra regioni a comportamento dinamico differente, identificando con precisione le linee di separazione del flusso, la formazione di vortici di scia e la transizione da regime laminare a turbolento. Queste informazioni sono fondamentali per la progettazione di superfici che minimizzino la resistenza aerodinamica o ottimizzino la portanza.

Un esempio rilevante è lo studio del flusso intorno a profili alari in condizioni di stallo incipiente, dove l'analisi Lagrangiana ha mostrato come le LCS iperboliche traccino con precisione il distacco del flusso e la formazione di vortici nella scia, fornendo spunti per l'attuazione di sistemi di controllo attivo del flusso (Green, Rowley e George Haller 2010). Inoltre, in ambito automobilistico, l'analisi delle LCS nella scia di un veicolo permette di identificare strutture coerenti responsabili della resistenza aerodinamica e del rumore da turbolenza, guidando l'ottimizzazione di appendici aerodinamiche come diffusori, spoiler e deflettori laterali (Shadden, Lekien e Marsden 2005). Anche nella progettazione di turbine eoliche, l'analisi LCS consente di visualizzare e gestire le interazioni tra le scie dei diversi rotori in un parco eolico, riducendo l'effetto di "interferenza di scia" e migliorando l'efficienza complessiva del sistema.

Microfluidica e dispositivi laboratorio su chip

Nel campo della microfluidica, dove i regimi di flusso sono dominati da effetti viscosi e le forze inerziali sono trascurabili, le LCS offrono un modo potente per comprendere e progettare sistemi di trasporto, miscelazione e separazione su scala micrometrica. Nei dispositivi *lab-on-chip*, l'identificazione di strutture coerenti è fondamentale per garantire l'efficienza del trasporto dei reagenti, la separazione di cellule o particelle, e l'ottimizzazione della miscelazione in assenza di turbolenza. A causa della natura lamellare dei flussi microfluidici, la miscelazione efficiente richiede geometrie che inducano una separazione topologica del flusso. Le LCS ellittiche permettono di visualizzare aree di rimescolamento intrappolato, mentre quelle iperboliche evidenziano le barriere al trasporto, rivelando le strutture che controllano l'evoluzione temporale della concentrazione dei reagenti (Mathur, George Haller e Peacock 2007).

Alcuni studi hanno sfruttato l'analisi Lagrangiana per progettare canali microfluidici con ostacoli geometrici disposti strategicamente, capaci di generare allungamento e piegamento delle linee di flusso, in modo da aumentare l'efficienza della miscelazione senza parti mobili o sorgenti di energia aggiuntive. Inoltre, le LCS possono guidare la progettazione di filtri selettivi, in cui particelle di diverse dimensioni o densità seguono traiettorie differenti a seconda della struttura dinamica del flusso.

3.4 Altri esempi di applicazioni

3.4.1 Biomedicina

Le LCS trovano larghissima applicazione nell'ambito della biomedicina, una disciplina scientifica che applica i principi e le metodologie delle scienze biologiche e naturali allo studio dei processi fisiologici, patologici e terapeutici in ambito umano, con l'obiettivo di

comprendere le cause delle malattie, sviluppare nuovi strumenti diagnostici e terapeutici, e migliorare l'assistenza sanitaria attraverso un approccio integrato e basato sull'evidenza (Neal et al. 2008).

Essa rappresenta un punto d'incontro tra medicina, biologia molecolare, chimica, fisica e ingegneria, costituendo la base della medicina moderna e della ricerca traslazionale. In ambito biomedico, le LCS sono state utilizzate per:

- analizzare la dinamica del flusso sanguigno nei ventricoli cardiaci (Töger et al. 2012);
- ottimizzare il trasporto di farmaci tramite particelle in flussi sanguigni (Meschi, Farghadan e Arzani 2021);
- valutare il rischio tromboembolico legato a regioni di stasi nel sangue (May-Newman, Vu e Herold 2016).

In tutti questi studi l'impiego della teoria delle LCS, talvolta accoppiato a tecniche di fluidodinamica computazionale o a strumentazione avanzata come la risonanza magnetica cardiovascolare 4D, ha permesso di identificare con precisione regioni critiche di trasporto, migliorare la comprensione dei meccanismi fisiopatologici coinvolti e supportare lo sviluppo di soluzioni terapeutiche personalizzate.

3.4.2 Astrodinamica

Un'applicazione particolarmente affascinante delle Strutture Lagrangiane Coerenti è quella in astrodinamica, dove le LCS sono utilizzate per analizzare la dinamica del trasporto nello spazio interplanetario. In particolare, sono state impiegate nello studio del problema ellittico ristretto dei tre corpi, un classico modello dinamico che descrive il moto di un oggetto di massa trascurabile sotto l'influenza gravitazionale di due corpi principali in orbita.

In questo contesto, le LCS agiscono come vere e proprie "autostrade spaziali", in grado di delimitare regioni di moto qualitativamente diverse e guidare il trasporto passivo di corpi celesti, detriti o sonde. Questa metodologia offre un vantaggio strategico nella progettazione di traiettorie spaziali a basso consumo energetico, sfruttando le strutture dinamiche naturali del sistema.

Tali risultati evidenziano l'adattabilità della teoria delle LCS anche a regimi completamente privi di viscosità e a campi di forze puramente gravitazionali, ampliando notevolmente il raggio di applicazione della teoria al di fuori dei tradizionali domini fluidodinamici (Tyler e Wittig 2022).

Sintesi e conclusioni

L'analisi condotta ha permesso di mettere in evidenza il potenziale delle Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) come strumento di interpretazione nello studio della turbolenza, ma al tempo stesso ha fatto emergere i limiti e le incertezze che ancora caratterizzano questo approccio. Dalla revisione critica della letteratura è emerso come l'approccio lagrangiano offra una prospettiva concettuale innovativa, capace di descrivere in maniera più chiara fenomeni complessi quali il trasporto di quantità scalari, i processi di mescolamento e l'organizzazione dinamica dei flussi turbolenti. Rispetto a una descrizione puramente statistica – che, sebbene fondamentale per la caratterizzazione media del flusso, tende a smorzare le informazioni sulle strutture spaziali e temporali – le LCS introducono una lettura geometrica e dinamica che integra e completa gli strumenti più tradizionali. Esse permettono di identificare barriere materiali al trasporto, regioni di intrappolamento e canali preferenziali di mescolamento, fornendo una "mappa dinamica" del flusso che collega la teoria dei sistemi dinamici alla fisica dei fluidi. Questa potenzialità spiega l'interesse crescente verso il tema, ma al tempo stesso rende evidente quanto sia ancora fragile il quadro teorico e metodologico disponibile.

Un punto critico che emerge chiaramente è la mancanza di una definizione univoca e operativa di LCS. I diversi criteri proposti in letteratura – dall'identificazione tramite le creste del campo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito (FTLE) agli approcci variazionali – producono risultati non sempre confrontabili, alimentando un'ambiguità concettuale che complica sia l'interpretazione fisica sia l'applicazione pratica. Ad esempio, mentre il metodo FTLE è computazionalmente più accessibile e fornisce una visualizzazione intuitiva, esso è sensibile alla scelta della finestra temporale di integrazione e non è un criterio oggettivo (invariante per cambio di sistema di riferimento). D'altro canto, gli approcci variazionali, sebbene più rigorosi e oggettivi, sono di implementazione più complessa e risultano meno efficaci nell'individuazione di alcuni tipi di strutture. Queste differenze si traducono in rappresentazioni delle strutture talvolta contrastanti e pongono un problema fondamentale di comparabilità tra studi. Una direzione di ricerca urgente è quindi quella di costruire un quadro teorico più unificato, in grado di chiarire le relazioni tra i diversi criteri. Senza questa chiarificazione, si rischia di produrre risultati interessanti ma difficilmente cumulativi, frammentando gli avanzamenti piuttosto che consolidarli.

Un'ulteriore criticità, strettamente legata alla precedente, riguarda l'elevata sensibilità dei metodi di identificazione ai parametri numerici e alla qualità dei dati in input. Come mostrano diversi lavori, variazioni anche minime nella risoluzione spaziale o temporale, nella lunghezza dell'orizzonte di integrazione o nella presenza di rumore nei campi di velocità possono modificare in maniera significativa le strutture individuate. Una finestra temporale troppo breve non permette alle strutture di manifestarsi, mentre una finestra troppo lunga può portare a una sovrapposizione di scale dinamiche e a un'amplificazione degli errori numerici, rendendo il campo FTLE poco interpretabile. Questo

rende estremamente difficile distinguere ciò che appartiene realmente alla dinamica del flusso da ciò che è un artefatto delle scelte numeriche o del rumore. Una prospettiva di ricerca rilevante è lo sviluppo di procedure standardizzate e robuste per la selezione ottimale di questi parametri, possibilmente basate sulle scale caratteristiche del flusso in esame con l'obiettivo di ridurre l'arbitrarietà nelle scelte e aumentare l'affidabilità e la riproducibilità dei risultati.

Dal punto di vista computazionale, la complessità rimane uno degli ostacoli principali per l'applicazione sistematica delle LCS, specialmente in tre dimensioni poichè il calcolo dei campi FTLE richiede l'integrazione di un numero elevatissimo di traiettorie. Questo limite non impedisce l'applicazione delle metodologie a casi di studio specifici, ma ne condiziona fortemente la diffusione, rendendo necessario un costante bilanciamento tra accuratezza e sostenibilità numerica, spesso a discapito della risoluzione spaziale. In prospettiva, lo sviluppo di strumenti più efficienti e scalabili – ad esempio attraverso l'uso di parallelizzazione su GPU – rappresenta una condizione essenziale per trasformare le LCS da concetto teorico a strumento operativo di analisi in ambito ingegneristico e geofisico.

Accanto alla revisione teorica e metodologica, è stato realizzato un prototipo numerico per il calcolo del campo FTLE in domini tridimensionali a partire da dati in formato OpenFOAM. Pur trattandosi di un'implementazione preliminare e interrotta a causa di limiti computazionali, il codice sviluppato ha permesso di delineare una pipeline operativa di base (parsing dei dati, integrazione delle traiettorie, calcolo del tensore di Cauchy-Green, estrazione degli autovalori) e di individuare i principali colli di bottiglia. L'esperienza pratica ha confermato che la fase più onerosa è l'integrazione numerica delle traiettorie per un vasto set di condizioni iniziali. Pur con tutti i suoi limiti, questa fase preliminare costituisce un tassello utile che apre a possibili sviluppi futuri come l'introduzione di forme semplici di parallelizzazione, una gestione più efficiente dei dati in memoria (attraverso tecniche di chunking e streaming), e un affinamento delle procedure di interpolazione spaziale dei campi di velocità, così da rendere il calcolo più robusto e sostenibile anche in scenari di maggiore complessità.

Le applicazioni discusse in letteratura – dallo studio del vortice polare e del trasporto di inquinanti in atmosfera, alla dinamica della dispersione di petrolio in oceano, fino all'ottimizzazione aerodinamica e alla biomedicina – dimostrano il vasto potenziale trasversale delle LCS. Tuttavia, è emerso chiaramente che il loro utilizzo è spesso confinato a studi accademici o a casi di prova relativamente semplici. La sfida per il futuro sarà rendere queste tecniche fruibili e affidabili per l'analisi di flussi complessi, transienti e tridimensionali come quelli che caratterizzano i problemi ingegneristici e geofisici reali.

In conclusione, questo lavoro rappresenta un primo passo nello studio delle LCS, combinando una sintesi critica della letteratura con lo sviluppo di un prototipo numerico preliminare. L'analisi ha mostrato come le LCS offrano un potenziale significativo per comprendere i meccanismi di trasporto e mescolamento nei flussi turbolenti, fornendo un ponte tra la descrizione euleriana e lagrangiana e tra la teoria dei sistemi dinamici e la fluidodinamica. Tuttavia, è altrettanto emerso quanto il quadro teorico e computazionale resti ancora in fase di consolidamento, caratterizzato da sfide aperte che ne limitano l'applicazione sistematica. Le prospettive future riguardano da un lato la necessità di chiarire e raffinare le definizioni e i criteri di identificazione, dall'altro il miglioramento dell'efficienza numerica per rendere queste metodologie più accessibili e applicabili a casi complessi e realistici. La ricerca sulle LCS appare quindi come un campo ancora giovane, dinamico e in rapida evoluzione, con la possibilità concreta di trasformarsi, grazie a uno

sforzo di ricerca interdisciplinare, in uno strumento di analisi sistematico e affidabile per lo studio della turbolenza.

Appendice

A Prototipo di software per la modellazione numerica delle LCS

Come anticipato nella Sezione 3 stato avviato un tentativo di modellizzazione numerica volto all'identificazione delle Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) all'interno di un fluido.

L'obiettivo finale del progetto era la realizzazione di un codice Python per il calcolo dell'Esponente di Lyapunov a tempo finito (FTLE) a partire da campi di velocità derivati da misurazioni atmosferiche. Una volta ottenuto il campo FTLE, esso sarebbe stato visualizzato tramite ParaVIEW², così da evidenziare le creste del campo stesso e consentire l'identificazione delle LCS.

Per verificare il corretto funzionamento del codice si è deciso di testarlo utilizzando dati derivanti da simulazioni CFD di casi noti, in modo da valutare la capacità del programma di riconoscere le strutture coerenti. In particolare, sono stati considerati campi di velocità di uno strato limite atmosferico simulati con Large-Eddy Simulation (LES).

Il progetto si è tuttavia interrotto già nella fase di analisi dei dati dello strato limite a causa di criticità computazionali. L'elevata mole di dati non ha infatti reso possibile il completamento del calcolo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito su una workstation di fascia media (CPU Ryzen 5, 16 GB di RAM). È stato tentato un approccio di parallelizzazione del codice tramite GPU NVIDIA, che ha prodotto un miglioramento delle prestazioni, purtroppo non sufficiente a portare a termine l'intera simulazione. Lo script sviluppato è stato comunque testato su sottoinsiemi ridotti di dati e si è dimostrato funzionante; esso è riportato in appendice come possibile base per futuri sviluppi.

A.1 Il caso studio: strato limite atmosferico

Lo strato limite planetario (o atmosferico, spesso abbreviato in PBL, Planetary Boundary Layer) è lo strato più basso dell'atmosfera, direttamente influenzato dall'interazione con la superficie terrestre. Al di sopra di esso si trova l'atmosfera libera, dove il vento può essere approssimato come quasi geostrofico, mentre all'interno del PBL questa approssimazione non è più valida a causa degli effetti di attrito e turbolenza.

Questo strato si forma a causa del continuo scambio di quantità di moto, calore e umidità tra la superficie e l'atmosfera, generando un profilo di vento con un marcato gradiente di velocità e influenzando la dinamica della bassa troposfera. Il PBL è una

²ParaVIEW è una piattaforma multipla open-source per la visualizzazione e l'analisi dei dati, basata sul toolkit VTK.

regione altamente dinamica: tipicamente turbolenta di giorno, a causa del riscaldamento solare che innesca moti convettivi, e più stabile di notte, quando il raffreddamento radiativo favorisce la formazione di inversioni termiche.

La sua altezza è estremamente variabile, sia temporalmente che spazialmente e può ridursi a poche decine di metri in condizioni di forte stabilità (ad esempio, durante notti serene con vento debole) mentre può estendersi fino a 1-3 km (o oltre) in presenza di intensa convezione termica, specialmente in aree continentali e durante le ore più calde. Il 10% inferiore del PBL è definito strato superficiale, dove il flusso turbolento è approssimativamente costante con l'altezza e i processi di scambio superficiale dominano la dinamica.

A.2 Metodologia di lavoro

La metodologia di lavoro seguita è stata articolata in più fasi: dalla definizione del criterio identificativo, allo sviluppo del conseguente codice Python fino all'esportazione e visualizzazione dei risultati. In questa sezione se ne fornisce una descrizione dettagliata.

Criterio di identificazione utilizzato

Come criterio identificativo è stato adottato l'esponente di Lyapunov a tempo finito, scelto per la sua relativa semplicità di implementazione e per la capacità di mettere in evidenza, in modo generale, differenti tipologie di strutture coerenti. Tale approccio è stato ritenuto preferibile rispetto ai metodi variazionali, che in alcuni casi risultano meno efficaci nell'individuazione di strutture sottili o scarsamente definite, come quelle tipiche degli strati limite atmosferici.

Va tuttavia sottolineato che le creste del campo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito non coincidono in maniera univoca con le effettive Strutture Lagrangiane Coerenti. Per questo motivo, l'interpretazione dei risultati richiede un'analisi attenta e critica, volta a distinguere le LCS reali dalle sole discontinuità numeriche del campo calcolato.

Caratteristiche del codice

Il codice è stato sviluppato in Python in collaborazione con Paolo Castellani, laureando in Ingegneria Civile e Ambientale presso l'Università degli Studi di Perugia. La sua struttura prevede:

- una fase iniziale di parsing dei dati in formato OpenFOAM³;
- l'implementazione del calcolo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito a partire dai campi di velocità a diversi istanti temporali;
- l'esportazione del campo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito in formato VTK, così da consentirne la visualizzazione in ParaVIEW.

Nello sviluppo dello script per il calcolo degli esponenti di Lyapunov a tempo finito a partire da simulazioni OpenFOAM, sono state utilizzate diverse librerie Python, ciascuna con un ruolo specifico:

³OpenFOAM è un toolbox C++ per la simulazione CFD, ampiamente utilizzato nell'ambito della meccanica dei continui

- **NumPy**: gestione efficiente di array multidimensionali, essenziali per memorizzare coordinate spaziali, campi di velocità e risultati intermedi.
- **SciPy**: integrazione numerica delle traiettorie delle particelle (`solve_ivp` con metodo Runge-Kutta) e interpolazione spaziale dei campi di velocità (`LinearNDInterpolator`), garantendo precisione nel calcolo del flusso lagrangiano.
- **meshio**: esportazione dei risultati in formato VTK, immediatamente visualizzabili in software come ParaVIEW.
- **os** e **re**: navigazione della struttura delle directory OpenFOAM e identificazione dei file rilevanti.
- **tqdm**: miglioramento dell'interfaccia utente con barre di avanzamento, particolarmente utili durante operazioni lunghe come il caricamento dei passi temporali.
- **time**: monitoraggio delle prestazioni dello script.

Eseguito il codice per la prima volta, si è riscontrato che i punti della mesh non coincidevano con quelli dei campi di velocità. Per risolvere il problema, si è deciso di utilizzare un numero di punti della mesh pari a quello dei campi di velocità, scartando sostanzialmente gli ultimi punti. Inoltre, l'esecuzione ha confermato che il collo di bottiglia del programma è il calcolo del campo dell'esponente di Lyapunov a tempo finito che risulta particolarmente oneroso in termini di tempo di elaborazione, come già anticipato.

L'algoritmo implementato si è dunque rivelato poco adatto alla mole di dati considerata. È ragionevole ritenere che un hardware dotato di maggiori risorse in termini di CPU, memoria RAM e GPU possa gestire più efficacemente la complessità del problema. In effetti, un tentativo preliminare di parallelizzazione su GPU NVIDIA ha mostrato un incremento di efficienza, purtroppo non sufficiente a completare l'intera elaborazione.

Lo script originale è riportato in Appendice B, e può servire come base solida per sviluppi futuri. In Appendice C viene mostrato il formato OpenFOAM dei dati analizzati, utile per comprendere meglio la fase di parsing iniziale del codice.

B Codice Python utilizzato

Listing 1: Script per il calcolo del campo FTLE utilizzando dati provenienti da simulazioni CFD in formato OpenFOAM

```
1 import numpy as np
2 import meshio
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4 from scipy.interpolate import LinearNDInterpolator
5 import time
6 import os
7 from tqdm import tqdm
8 import re
9
10 class FTLECalculator:
11     def __init__(self, case_folder, output_file="fkle_result.vtk"):
12         self.case_folder = case_folder
13         self.output_file = output_file
14         self.mesh = None
```

```
15     self.points = None
16     self.velocity_fields = []
17     self.times = []
18     self.interpolators = []
19
20     def get_valid_time_directories(self):
21         # Find all valid time directories in the time190to200 folder
22         print("Scanning for valid time directories...")
23         valid_times = []
24
25         time_parent = os.path.join(self.case_folder, "time190to200")
26         if not os.path.exists(time_parent):
27             raise FileNotFoundError(f"Time directory not found: {
time_parent}")
28
29         time_pattern = re.compile(r'^\d+(\.\d+)?$')
30
31         for entry in os.listdir(time_parent):
32             if time_pattern.match(entry):
33                 time_path = os.path.join(time_parent, entry)
34                 if os.path.isdir(time_path):
35                     u_file = os.path.join(time_path, 'U')
36                     if os.path.exists(u_file):
37                         try:
38                             time_val = float(entry)
39                             valid_times.append((entry, time_val))
40                         except ValueError:
41                             continue
42
43         valid_times.sort(key=lambda x: x[1])
44         return valid_times, time_parent
45
46     def load_openfoam_field(self, time_path, field_name):
47         # Load a field from OpenFOAM format
48         field_file = os.path.join(time_path, field_name)
49         if not os.path.exists(field_file):
50             raise FileNotFoundError(f"Field file not found: {field_file
}")
51
52         # Read the OpenFOAM file
53         with open(field_file, 'r') as f:
54             lines = [line.strip() for line in f.readlines()]
55
56         # Find the start of data (look for internalField nonUniform
List)
57         start_idx = 0
58         for i, line in enumerate(lines):
59             if line.startswith('internalField') and 'nonuniform List'
in line:
60                 start_idx = i + 1
61                 break
62
63         if start_idx == 0:
64             raise ValueError("Could not find internalField in U file")
65
66         # Find opening and closing braces
67         open_brace = None
68         close_brace = None
```

```

69     for i in range(start_idx, len(lines)):
70         if lines[i] == '(':
71             open_brace = i
72             break
73
74     if open_brace is None:
75         raise ValueError("Could not find opening brace in U file")
76
77     for i in range(open_brace + 1, len(lines)):
78         if lines[i] == ')':
79             close_brace = i
80             break
81
82     if close_brace is None:
83         raise ValueError("Could not find closing brace in U file")
84
85     # Parse the data between braces
86     data = []
87     for line in lines[open_brace+1:close_brace]:
88         # Remove any remaining parentheses
89         line = line.replace('(', '').replace(')', '')
90         if line:
91             data.extend([float(x) for x in line.split()])
92
93     return np.array(data).reshape(-1, 3)
94
95     def load_mesh(self):
96         # Load the mesh using VTK
97         processor_path = os.path.join(self.case_folder, "constant", "
polyMesh")
98         if not os.path.exists(processor_path):
99             raise FileNotFoundError(f"Mesh directory not found: {
processor_path}")
100
101         # Read points
102         points_file = os.path.join(processor_path, "points")
103         with open(points_file, 'r') as f:
104             lines = f.readlines()
105
106         # Parse points
107         points_start = lines.index('\n') + 1
108         points_end = lines.index('\n', points_start)
109         points = []
110         for line in lines[points_start:points_end]:
111             line = line.strip().strip('()')
112             points.append([float(x) for x in line.split()])
113
114         self.points = np.array(points)
115         print(f"Loaded mesh with {len(self.points)} points")
116
117     def load_mesh_and_velocity(self):
118         # Load mesh and velocity fields from OpenFOAM case
119         print("Loading OpenFOAM data...")
120
121         time_dirs, time_parent = self.get_valid_time_directories()
122         if not time_dirs:
123             raise ValueError("No valid time directories with U field
found")

```

```
124
125     print(f"Found {len(time_dirs)} time directories with U field")
126
127     # Load first time step to get the size
128     first_time_path = os.path.join(time_parent, time_dirs[0][0])
129     u_field = self.load_openfoam_field(first_time_path, 'U')
130     expected_size = len(u_field)
131
132     # Now load the mesh but keep only the points that match U field
133     size
134     self.load_mesh()
135
136     if len(self.points) != expected_size:
137         print(f"Warning: Mesh size ({len(self.points)}) doesn't
138 match U field size ({expected_size}). Using first {expected_size}
139 points.")
140         self.points = self.points[:expected_size]
141
142     # Now load all velocity fields
143     for time_dir, time_val in tqdm(time_dirs, desc="Loading time
144 steps"):
145         try:
146             time_path = os.path.join(time_parent, time_dir)
147             u_field = self.load_openfoam_field(time_path, 'U')
148
149             if len(u_field) != len(self.points):
150                 raise ValueError(f"U field size {len(u_field)}
151 doesn't match mesh size {len(self.points)}")
152
153             self.velocity_fields.append(u_field)
154             self.times.append(time_val)
155
156         except Exception as e:
157             print(f"Warning: Failed to load time {time_val}: {str(e)}")
158             continue
159
160     if not self.times:
161         raise ValueError("No time steps successfully loaded")
162
163     def create_interpolators(self):
164         # Create velocity interpolators for each time step
165         print("Creating velocity interpolators...")
166
167         for i, t in enumerate(tqdm(self.times, desc="Creating
168 interpolators")):
169             valid_mask = ~np.isnan(self.velocity_fields[i]).any(axis=1)
170             if valid_mask.sum() == 0:
171                 raise ValueError(f"No valid velocity data at time {t}")
172
173             self.interpolators.append(
174                 LinearNDInterpolator(
175                     self.points[valid_mask],
176                     self.velocity_fields[i][valid_mask],
177                     fill_value=0.0
178                 )
179             )
180         )
```

```

175
176     def compute_ftle(self, integration_time=0.5, sample_size=5000):
177         # Compute FTLE field"
178         if not self.interpolators:
179             raise RuntimeError("Interpolators not initialized")
180
181         print(f"Computing FTLE with integration time {integration_time
182 }...")
183
184         if sample_size > len(self.points):
185             sample_size = len(self.points)
186         sample_indices = np.random.choice(len(self.points), sample_size
187 , replace=False)
188         sample_points = self.points[sample_indices]
189
190     def velocity_func(t, y):
191         y = y.reshape(-1, 3)
192         velocities = np.zeros_like(y)
193         for i in range(y.shape[0]):
194             idx = np.abs(np.array(self.times) - t).argmin()
195             velocities[i] = self.interpolators[idx](y[i])
196         return velocities.flatten()
197
198     print("Advecting particles...")
199     sol = solve_ivp(
200         velocity_func,
201         [self.times[-1], self.times[-1] + integration_time],
202         sample_points.flatten(),
203         method='RK45',
204         rtol=1e-6,
205         atol=1e-8
206     )
207     final_pos = sol.y[:, -1].reshape(-1, 3)
208
209     print("Calculating FTLE...")
210     ftle_values = np.zeros(len(self.points))
211     dx = 1e-4
212
213     for i in tqdm(range(len(sample_points)), desc="Processing
214 particles"):
215         x0 = sample_points[i]
216         J = np.zeros((3, 3))
217
218         for k in range(3):
219             perturbation = np.zeros(3)
220             perturbation[k] = dx
221
222             sol_perturbed = solve_ivp(
223                 velocity_func,
224                 [self.times[-1], self.times[-1] + integration_time
225 ],
226                 (x0 + perturbation).flatten(),
227                 method='RK45',
228                 rtol=1e-6,
229                 atol=1e-8
230             )
231             perturbed_final = sol_perturbed.y[:, -1].reshape(-1, 3)

```

[0]

```
228         J[:, k] = (perturbed_final - final_pos[i]) / dx
229
230
231         C = J.T @ J
232         eigenvalues = np.linalg.eigvals(C)
233         max_eig = max(eig.real for eig in eigenvalues if abs(eig.
imag) < 1e-10)
234
235         if max_eig > 0:
236             ftle = 0.5 / abs(integration_time) * np.log(max_eig)
237             ftle_values[sample_indices[i]] = max(ftle, 0)
238
239         return ftle_values
240
241     def save_results(self, ftle_values):
242         # Save FTLE results to VTK file
243         print(f"Saving results to {self.output_file}...")
244         mesh = meshio.Mesh(
245             points=self.points,
246             cells=[("vertex", np.arange(len(self.points)).reshape(-1,
1))],
247             point_data={"FTLE": ftle_values}
248         )
249         meshio.write(self.output_file, mesh)
250
251     def run(self):
252         # Run complete FTLE calculation pipeline
253         start_time = time.time()
254
255         try:
256             self.load_mesh_and_velocity()
257             self.create_interpolators()
258             ftle_values = self.compute_ftle()
259             self.save_results(ftle_values)
260
261             print(f"FTLE calculation completed in {time.time()-
start_time:.2f} seconds")
262             return True
263
264         except Exception as e:
265             print(f"Error during FTLE calculation: {str(e)}")
266             import traceback
267             traceback.print_exc()
268             return False
269
270 if __name__ == "__main__":
271     case_folder = "/path/to/folder"
272     output_file = "ftle_result.vtk"
273
274     if not os.path.exists(case_folder):
275         raise FileNotFoundError(f"Case directory not found: {
case_folder}")
276
277     calculator = FTLECalculator(case_folder, output_file)
278     success = calculator.run()
279
280     if not success:
281         print("FTLE calculation failed")
```

C Struttura del formato OpenFOAM dei dati utilizzati

Listing 2: Formato dei dati OpenFOAM utilizzati

```
atmBoundaryLayerLES
|-- 0
|  |-- U
|-- constant
|  |-- polyMesh
|  |  |-- boundary
|  |  |-- cellZones
|  |  |-- faces
|  |  |-- faceZones
|  |  |-- neighbour
|  |  |-- owner
|  |  |-- points
|  |  |-- pointZones
|  |-- bodyForce
|  |-- transportProperties
|  |-- turbulenceProperties
|-- statistics
|  |-- ReynoldsStress
|  |-- TKE
|  |-- TKEBudget
|  |-- plotData.m
|  |-- reynoldsStresses.sh
|  |-- scalarSpaceAverage.sh
|  |-- scalarTimeAverage.sh
|  |-- vectorSpaceAverage.sh
|  |-- vectorTimeAverage.sh
|-- windLogProfile.m
|-- system
|  |-- blockMeshDict
|  |-- controlDict
|  |-- decomposeParDict
|  |-- fvSchemes
|  |-- fvSolution
|-- time190to200
|  |-- 190
|  |  |-- nut
|  |  |-- p
|  |  |-- U
|  |-- 190.1
|  |-- 190.2
|  |-- 190.3
|  |-- 190.4
```

Bibliografia

- Aakash (2020). *Energy Cascade di Kolmogorov*. Opera propria, CC BY-SA 4.0. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=64829708>.
- Adrian, Ronald J. (2007). “Hairpin vortex organization in wall turbulence”. In: *Physics of Fluids* 19.4, p. 041301. DOI: 10.1063/1.2717527.
- Andersson, Peder, Martin Berggren e Dan S Henningson (2001). “On the breakdown of boundary layer streaks”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 428, pp. 29–60.
- Arnold, Vladimir I. (1973). *Ordinary Differential Equations*. English. Cambridge, MA: MIT Press.
- (1997). *Modelli matematici per la meccanica classica*. 1^a ed. Traduzione italiana. Torino: Bollati Boringhieri.
- Belardinelli, Maria Elina (2024). *Corso di Fisica dei Solidi e dei Fluidi*. Lezioni del corso, Università di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi", a.a. 2023/2024. Appunti personali.
- Beron-Vera, Francisco J. et al. (2013). “Objective detection of oceanic eddies and the Agulhas leakage”. In: *Journal of Physical Oceanography* 43.7, pp. 1426–1438.
- Boltzmann, Ludwig (1872). “Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen”. German. In: *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien* 66, pp. 275–370.
- Cámara, A. de la et al. (2012). “Routes of transport across the Antarctic polar vortex in the Southern Spring”. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 69.2, pp. 753–767.
- Chassignet, E. P. e L. Xu (2017). “Lagrangian coherent structures and marine animal migration: From oceanographic flow to species movement”. In: *Marine Ecology Progress Series* 579, pp. 213–225. DOI: 10.3354/meps12369.
- Chen, Y. e Z. Zhan (2015). “Coherent structures in the ocean and their role in the transport of carbon”. In: *Geophysical Research Letters* 42.15, pp. 6169–6177. DOI: 10.1002/2015GL064998.
- Chong, Min, Anthony E Perry e Brian J Cantwell (1990). “A general classification of three-dimensional flow fields”. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 2.5, pp. 765–777.
- Cintolesi, Carlo (2025). *Lezioni del secondo modulo del corso di Strato Limite Planetario e Dispersione Turbolenta*. Corso di Laurea in Fisica del Sistema Terra, Università di Bologna. Materiale didattico non pubblicato.
- Clausius, Rudolf (1850). *Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen*. Annalen der Physik.
- Curbelo, Javier, Yao Chen e Carlos R. Mechoso (2021). “Lagrangian Analysis of the Northern Stratospheric Polar Vortex Split in April 2020”. In: *Geophysical Research Letters* 48.21, e2021GL095234. DOI: 10.1029/2021GL095234.
- Dalton, John (1808). *A New System of Chemical Philosophy*. Vol. 1. London: Bickerstaff.

- Dauphin, Lauren (2024). *Ozone Hole Continues Healing in 2024*. <https://earthobservatory.nasa.gov/images/153523/ozone-hole-continues-healing-in-2024>. NASA Earth Observatory, immagine pubblicata il 28 settembre 2024.
- Dubaj commonswiki (2025). *Nessun autore leggibile automaticamente. Dubaj commonswiki presunto (secondo quanto affermano i diritti d'autore). - Nessuna fonte leggibile automaticamente. Presunta opera propria (secondo quanto affermano i diritti d'autore)*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=826329>. Pubblico dominio.
- E., Jahons Brad (n.d.). *Helicopter spraying over open landscape*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helicopter_spraying_on_sky.jpg. U.S. Fish and Wildlife Service, Public Domain. (Visitato il giorno 29/04/2025).
- Farazmand, Mohammad (2011). *Repelling LCS for double gyre flow: FTLE ridge vs. shrink line*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Repelling_LCS_for_double_gyre.tiff. Image licensed under CC BY-SA 4.0.
- Frisch, Uriel (1995). *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fukushima, C. e J. Westerweel (2006). *Particle Image Velocimetry (PIV) visualization*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PIV_flow2.jpg. Own work, Technical University of Delft, The Netherlands, CC BY 3.0. (Visitato il giorno 29/04/2025).
- Goldstein, Herbert, Charles P. Poole e John L. Safko (2002). *Classical Mechanics*. 3rd. Addison-Wesley.
- Green, Melissa A., Clarence W. Rowley e George Haller (2010). “Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 641, pp. 437–471. DOI: 10.1017/S0022112009992671.
- Haller, G. e F. J. Beron-Vera (2015). “Tracking the Deepwater Horizon spill: Lagrangian coherent structures and the diffusion of the oil slick”. In: *Science* 330.6003, pp. 1236–1239. DOI: 10.1126/science.1193033.
- Haller, George (2000). “Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields”. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 10.1, pp. 99–108. DOI: 10.1063/1.166479.
- (2001). “Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 149.4, pp. 248–277. DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00142-6.
- (2014). *An invariant manifold in the extended phase space, formed by an evolving material surface*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39109710>. Licensed under CC BY-SA 4.0.
- (2015). “Lagrangian Coherent Structures”. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 47.1, pp. 137–162. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010313-141322.
- Handler, Stephen e United States Forest Service (2018). *Minnesota Forest Ecosystem Vulnerability Assessment and Synthesis*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Climate_change_impacts_on_Minnesota_forests.png. Public domain image. Source: U.S. Forest Service via Wikimedia Commons.
- Hunt, Julian C.R., Alan A. Wray e Parviz Moin (1988). “Eddies, Streams, and Convergence Zones in Turbulent Flows”. In: *Proceedings of the Summer Program*. Center for Turbulence Research, Stanford University, pp. 193–208.

- Hussain, A. K. M. F. (1983). “Coherent structures—reality and myth”. In: *Physics of Fluids* 26.10, pp. 2816–2850. DOI: 10.1063/1.864048. URL: <https://doi.org/10.1063/1.864048>.
- Ideal Simulations (2023). *Turbulence Models in CFD*. Accessed: 2025-08-03. URL: <https://www.idealsimulations.com/resources/turbulence-models-in-cfd/>.
- INGV, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (2020). *Buco nell’ozono — INGV*. URL: <https://www.ingv.it/newsletter-ingv-n-7-settembre-2020-anno-xiv/il-buco-nello-strato-di-ozono-antologia-di-un-fenomeno-diventato-leggenda>.
- Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (settembre 2020). *Il “buco” nello strato di ozono: antologia di un fenomeno diventato leggenda*. <https://www.ingv.it/newsletter-ingv-n-7-settembre-2020-anno-xiv/il-buco-nello-strato-di-ozono-antologia-di-un-fenomeno-diventato-leggenda>. Newsletter INGV n.7, consultato il 22 aprile 2025.
- Jeong, Jinhee e Fazle Hussain (1995). “On the identification of a vortex”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 285, pp. 69–94. DOI: 10.1017/S0022112095000462.
- Kasten, Jens et al. (2013). *Attracting and repelling LCSs extracted as FTLE ridges from a two-dimensional simulation of a von Kármán vortex street*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LCS_VonKarman_FTLE.png. Image licensed under CC BY-SA 4.0.
- Kulmala, Markku, Tuukka Petäjä, Tuomo Nieminen et al. (2023). “Atmospheric nanoparticle growth”. In: *Reviews of Modern Physics* 95.4, p. 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.95.045002.
- Kundu, P. K. (2015). *Fluid Mechanics*. 5th. Academic Press.
- Lorenz, Edward N. (1963). “Deterministic Nonperiodic Flow”. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 20.2, pp. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNP>2.0.CO;2.
- Mandelbrot, Benoit B (1974). “Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 62.2, pp. 331–358.
- Mathur, Mudit, George Haller e Thomas Peacock (2007). “Uncovering transport barriers in microfluidic flows using Lagrangian coherent structures”. In: *Physics of Fluids* 19.1, p. 013602. DOI: 10.1063/1.2426885.
- Maxwell, James Clerk (1860). “Illustrations of the dynamical theory of gases”. In: *Philosophical Magazine* 19.124, pp. 19–32.
- May-Newman, Karen, Vi Vu e Brian Herold (2016). “Modeling the Link between Left Ventricular Flow and Thromboembolic Risk Using Lagrangian Coherent Structures”. In: *Fluids* 1.4, p. 38.
- Meneveau, Charles e Katepalli R Sreenivasan (1991). “The multifractal nature of turbulent energy dissipation”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 224, pp. 429–484.
- Meschi, Shayan S., Ali Farghadan e Amir Arzani (2021). “Flow topology and targeted drug delivery in cardiovascular disease”. In: *Journal of Biomechanics* 119, p. 110307.
- NASA Langley Research Center (1996). *NASA Langley Research Center image, Photo ID: EL-1996-00130*. A cura di Fir0002. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NASA_Langley_Research_Center_-_Wind_tunnel_testing.jpg. Public domain image catalogued under Photo ID: EL-1996-00130, Alternate ID: L90-5919.
- NASA Ocean Color (apr. 2024). *Haida Eddy off the coast of British Columbia, captured by PACE/OCI*. <https://oceancolor.gsfc.nasa.gov/>. Image acquired by the

- Ocean Color Instrument (OCI) aboard the PACE satellite on April 18, 2024. URL: <https://oceancolor.gsfc.nasa.gov/>.
- NASA/GSFC, MODIS Rapid Response (2010). *Deepwater Horizon oil spill - May 24, 2010*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10671450>. Public domain by author demis.nl.
- Neal, Richard D. et al. (2008). *Introduction to Biomedical Science*. Oxford: Oxford University Press.
- Nolan, Peter J., Hosein Foroutan e Shane D. Ross (2020). “Pollution Transport Patterns Obtained Through Generalized Lagrangian Coherent Structures”. In: *Atmosphere* 11.2, p. 168. DOI: 10.3390/atmos11020168.
- Okubo, Akira (1970). “Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences”. In: *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts* 17.3, pp. 445–454.
- Ottino, Edward (2002). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ottino, Julio M. (1989). *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. ISBN: 978-0521368782.
- Pope, Stephen B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. ISBN: 9780521598866.
- Rao, V. Trinadha et al. (2024). “Extraction of persistent Lagrangian coherent structures for the pollutant transport prediction in the Bay of Bengal”. In: *Scientific Reports* 14, p. 8761. DOI: 10.1038/s41598-024-58783-4.
- Sabatino, Daniel e Tobias Rossmann (dic. 2015). “Tomographic PIV measurements of a regenerating hairpin vortex”. In: *Experiments in Fluids* 57. DOI: 10.1007/s00348-015-2089-1.
- Serra, Mattia et al. (2017). “Uncovering the Edge of the Polar Vortex”. In: *Physical Review Letters* 118.22, p. 224502.
- Settles, Gary (2012). *Schlieren photograph of the flow from a bursting balloon*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Schlieren_photo_of_a_bursting_balloon.jpg. Own work, CC BY-SA 3.0.
- Shadden, Shawn C., Francois Lekien e Jerrold E. Marsden (2005). “Lagrangian coherent structures in fluid transport mechanisms”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 212.3-4, pp. 271–304. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.007.
- Shekar, Ashwin e Michael D. Graham (2020). “Exact coherent states with hairpin-like vortex structure in channel flow”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 882, A10. DOI: 10.1017/jfm.2019.858.
- Sreenivasan, Katepalli R e Robert A Antonia (1997). “The phenomenology of small-scale turbulence”. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 29.1, pp. 435–472.
- Tandon, S. e A. Gnanadesikan (2021). “Generalized Lagrangian Coherent Structures and their role in nutrient transport in the ocean”. In: *Journal of Marine Systems* 205, p. 103344. DOI: 10.1016/j.jmarsys.2020.103344.
- Taylor, Geoffrey I. (1954). “The Dispersion of Matter in Turbulent Flow through a Pipe”. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 223.1134, pp. 446–468. DOI: 10.1098/rspa.1954.0133.
- Töger, Johannes et al. (2012). “Vortex Ring Formation in the Left Ventricle of the Heart: Analysis by 4D Flow MRI and Lagrangian Coherent Structures”. In: *Annals of Biomedical Engineering* 40.12, pp. 2652–2662.

- Treccani (n.d.). *Stato di aggregazione*. <https://www.treccani.it/enciclopedia/stato-di-aggregazione>. Disponibile su: <https://www.treccani.it/enciclopedia/stato-di-aggregazione>.
- Turner, John Stewart (1973). *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge University Press. ISBN: 9780521098179.
- Tyler, Jack e Alexander Wittig (2022). “Three-dimensional Lagrangian Coherent Structures in the Elliptic-Restricted Three-body Problem”. In: *arXiv preprint arXiv:2209.11561*. URL: <https://arxiv.org/abs/2209.11561>.
- Waugh, Darryn W. e R. Alan Plumb (1994). “Contour advection with surgery: A technique for investigating finescale structure in tracer transport”. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 51.5, pp. 530–540.
- Weiss, Jeffrey (1991). “The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 48.2-3, pp. 273–294.

Ringraziamenti

Questo lavoro di tesi non avrebbe mai visto la luce senza la presenza costante accanto a me di tanti, tantissimi compagni di viaggio. Sono arrivata a Bologna sola e tanto spaventata dalla nuova fase di vita che si apriva davanti a me, ma ho avuto la fortuna di conoscere persone meravigliose che porterò sempre nel cuore e che desidero ringraziare non solo per avermi aiutato da un punto di vista accademico, ma soprattutto per avermi permesso di crescere e migliorarmi.

Ringrazio innanzitutto la mia famiglia: i miei genitori **Franco** e **Mariella** per aver creduto in me sin dal giorno zero e per aver sopportato con tanta pazienza tutti i miei scleri; e i miei fratelli **Matteo**, **Sara**, **Tommaso** e **Giacomo** per aver alleggerito le mie giornate di studio distraendomi con interminabili partite di Risiko (che ho sistematicamente perso). Il vostro sostegno sincero e costante è stato essenziale sin dal primo giorno di università. Una menzione d'onore va a mia zia **Ellen**, che ha enormemente contribuito al mio vitto garantendomi almeno tre pasti giornalieri.

Ringrazio i fantastici "membri anziani" dell'Umbria Team: **Silvia** e **Francesco**, che mi hanno sapientemente guidato nel mio percorso liceale delle Olimpiadi della Fisica, alimentando la mia curiosità nei confronti di questa bellissima disciplina; e la mitica **Stefania**, la mia professoressa di Fisica che mi ha insegnato ad amare la Fisica usando come valletta/schiava personale durante gli esperimenti. Siete stati tutti e tre dei professori (e ormai degli amici) fantastici e senza di voi probabilmente il mio percorso accademico sarebbe stato ben diverso.

Ringrazio i miei compagni di viaggio dell'università, i cosiddetti "colleghi": **Yuri**, **Gabri**, **Elia**, **Simone**, **Paolo**, **Giovanni**, **Giorgio**, **Liam** e **Vincenzo**. Senza le vostre discussioni di argomento filosofico o geopolitico e soprattutto senza i tentativi di vincere il gioco "Chi vuol essere milionario?" l'aula studio sarebbe stata un posto molto più triste e noioso.

Un ringraziamento speciale va a **Simone Pasquini**, il mio mentore personale durante questa laurea triennale, che non solo mi ha fornito tutto il materiale possibile e immaginabile per studiare, ma ha anche pazientemente placato tutti i miei deliri da pre-esame. Almeno un decimo della mia laurea ti appartiene.

Ringrazio **Riccardo** detto **Chiodo**, un povero studente di Psicologia che è stato forzatamente costretto a immergersi in un folto gruppo di pazzissimi fisici. Hai portato una ventata di normalità dentro quel delirante ammasso di studenti alle prese con Hamiltoniane e transistor BJT.

Ringrazio le mie compagne di sventure **Asia** ed **Ester**, amiche inaspettate che mi hanno accompagnata nel difficile compito di comprendermi meglio e di accettarmi per quella che sono. È anche grazie al vostro aiuto che sono riuscita a completare il mio percorso universitario.

Ringrazio **Ornella** e **Francesca**, il mio magico team personale di contenimento traumi e follie varie. Mi avete tirato fuori da tante situazioni difficili e siete sempre state al mio fianco. Grazie per aver sempre creduto in me e per avermi dato speranza anche nei momenti più bui.

Un super ringraziamento va a **Mamma Cri**, la mia mamma bolognese, che mi ha accolta in casa sua in uno dei momenti più difficili della mia vita, trattandomi come una figlia. Grazie per avermi salvato da me stessa.

Infine, i ringraziamenti più speciali. Ringrazio il mio ragazzo **Paolo**, che non ha mai perso fiducia in me, ha ascoltato e appoggiato qualsiasi mia idea pazza e folle e mi ha accolta e amata nonostante tante difficoltà. Il tuo amore sincero, la tua dolcezza nei miei confronti, i tuoi abbracci nei giorni più disperati mi hanno permesso di non arrendermi mai.

E per ultime ringrazio le mie girls: **Ilaria**, **Alida**, **Elisa** e **Marta**, le mie compagne di avventure, di pianti, di sorrisi, di scherzi, di studio matto e disperatissimo, di parole crociate durante le lezioni, di discorsi insensati sulla lingua dei delfini. Voi avete reso speciale ogni singolo giorno di università, avete reso il mio studio molto più spensierato, avete reso ogni momento unico e indimenticabile. È soprattutto grazie a voi che la Chiara di oggi è completamente diversa da quella ragazzina timida e impaurita che si è trasferita a Bologna tre anni fa. Siete state con me ogni singolo giorno, in quelli belli, in quelli meno belli e in quelli terribili. Grazie per avermi fatto sempre sentire a casa.

Questi tre anni sono stati lunghi e spesso anche molto difficili. Sin da bambina ho sempre avuto la tendenza a cercare di essere indipendente, di cavarmela da sola, ma grazie a voi ho imparato che *nessun uomo è un'isola, chiuso in sé stesso*. Perciò infinitamente grazie a tutti voi semplicemente per esserci sempre stati.