

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Sulla positività del volume simpliciale
nelle varietà iperboliche

Tesi di Laurea in Topologia Geometrica

Relatore:
Dott. Moraschini Marco

Presentata da:
Cerroni Francesco

Anno Accademico 2024-2025

*Una volta era più facile giudicare, come con le scarpe:
c'erano solo alcuni modelli molto caratterizzati.
Erano quel tipo di scarpe e basta. Ora invece è tutto
più confuso, uno stile si intreccia da un altro,
le cose non sono più nette*

Nanni Moretti - Bianca

Introduzione

Lo studio e la classificazione delle varietà, soprattutto in bassa dimensione, è stato un argomento principale di ricerca nel secolo scorso: tra i matematici che hanno dedicato il loro lavoro a questo ambito troviamo nomi importanti come William Thurston e Mikhael Gromov. Fin dai primi Teoremi di Gauss-Bonnet e Riemann, una delle idee fondanti che hanno guidato la ricerca è stata quella di assegnare particolari *metriche* (Definizione 0.6) alle varietà studiate e tramite ciò dedurre informazioni sulla loro topologia. Infatti, come esempio nella Sezione 3.2 vedremo come ogni superficie compatta e orientabile può essere dotata di una metrica con curvatura Gaussiana costante. In dimensione 3 la situazione è molto più complicata: non tutte le 3-varietà ammettono metriche con curvature sezionali costanti. L'idea è di considerare delle varietà Riemanniane modello, dette *geometrie*, come ad esempio lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 con la metrica standard: si dice che una varietà M ammette una certa geometria se esiste una metrica g tale che (M, g) sia localmente isometrica alla varietà modello. Thurston nel 1982 formula la celebre *Congettura di Geometrizzazione*, secondo la quale ogni 3-varietà chiusa può essere divisa in “pezzi” in maniera che ognuno di essi ammetta una di otto possibili geometrie. La sua dimostrazione, da parte di Thurston in un caso particolare e poi estesa da Grigori Perelman a tutte le 3-varietà chiuse, rappresenta uno dei più grandi risultati di sempre nella storia della Matematica. Infatti la sua dimostrazione ha come corollario la risoluzione della congettura di Poincaré in dimensione 3, rimasta aperta per quasi cento anni. Tra le otto geometrie di Thurston compare lo spazio iperbolico \mathbb{H}^3 , non dovrebbe quindi sorprendere che esso ricopra una grande importanza nello studio della topologia in dimensione bassa. Più in generale sono importanti le cosiddette *varietà iperboliche* (che esistono in ogni dimensione $n \geq 2$): si tratta di varietà Riemanniane localmente isometriche allo spazio iperbolico \mathbb{H}^n .

Gromov negli anni '70 introduce un invariante omotopico definito per ogni varietà topologica chiusa, connessa e orientabile noto come *volume simpliciale* (Definizione 2.5). Il

volume simpliciale di una varietà M è un numero reale non negativo che viene indicato con $\|M\|$, può essere interpretato come una misura della difficoltà di rappresentare la classe fondamentale di M (Definizione 0.5). Spesso lo studio del volume simpliciale di una varietà risulta difficile, nonostante esistano criteri per stabilire quando è nullo. Gli sforzi sono giustificati dal fatto che conoscerne il valore per una varietà, in particolare sapere se è nullo o meno, fornisce informazioni non banali sulla sua topologia. Inoltre conoscere il volume simpliciale di due varietà impone forti restrizioni sui gradi delle mappe tra di esse (Corollario 2.9). Il volume simpliciale, data la sua versatilità, ha acquistato sempre più importanza negli anni. Infatti, questo strumento trova applicazioni in campi vicini alla topologia geometrica come la topologia algebrica e la geometria Riemanniana. Nel primo caso un'applicazione importante è la *coomologia limitata*, una teoria coomologica introdotta sempre da Gromov che può essere vista come il duale della norma ℓ^1 sull'omologia usata per definire il volume simpliciale (Definizione 2.1). Per quanto riguarda la geometria Riemanniana, Gromov ha usato questo strumento per studiare l'insieme delle possibili metriche ammissibili da una varietà. Altri strumenti che si collegano al volume simpliciale, legati alla geometria Riemanniana, sono il *volume minimo* (Definizione 4.26) e l'*entropia volumetrica minimale* [Gro82]. Thurston, nell'edizione del 1978 delle sue note [Thu80], dimostra che ogni varietà iperbolica ha volume simpliciale positivo. In particolare esiste una costante C_n , dipendente solo dalla dimensione della varietà, tale che per ogni varietà iperbolica n -dimensionale chiusa, connessa ed orientabile M si ha

$$\text{Vol}(M) \leq C_n \|M\|,$$

dove $\text{Vol}(M)$ è il volume di M . In seguito Gromov mostrerà che in dimensione 2 e 3 vale l'uguaglianza: d'ora in poi ci riferiremo a questo risultato come *Principio di proporzionalità* (Teorema 4.1). Nella sua dimostrazione Gromov sfrutta un risultato chiave di geometria iperbolica, per la precisione il fatto che i semplici iperbolicici di volume massimo in dimensione 3 sono quelli ideali e regolari (Definizione 3.24). Motivati soprattutto dalla possibilità di estendere il Principio di proporzionalità in dimensione arbitraria, Uffe Haagerup e Hans Munkholm riescono a generalizzare il risultato sui semplici di volume massimo [HM81], e di conseguenza il teorema di Gromov, a tutte le dimensioni. La potenza dietro al Principio di proporzionalità è la proporzione tra una quantità metrica (il volume) ed una topologica (il volume simpliciale): questo fatto permette di dedurre informazioni non banali sulla topologia e la geometria delle varietà iperboliche. Ad esempio un diretto corollario del Principio di proporzionalità è l'invarianza omotopica del volume nelle varietà iperboliche (Corollario 4.17).

La tesi è divisa in cinque capitoli. Il Capitolo zero descrive la nomenclatura adottata e richiama alcuni risultati che saranno usati nei capitoli successivi, i lettori e le lettrici esperte possono procedere direttamente con il Capitolo 1. Nel primo capitolo viene brevemente introdotto il concetto di grado di una mappa tra varietà, sia nel caso topologico che differenziale. Dopo aver mostrato che le due definizioni coincidono, deriveremo qualche risultato sui gradi dei rivestimenti e delle mappe prodotte. Nel secondo capitolo verrà introdotto il volume simpliciale e studieremo le sue principali proprietà, descriveremo poi due varianti che in alcuni contesti possono risultare utili. Il terzo capitolo invece riguarderà strettamente argomenti di geometria Riemanniana e iperbolica. Innanzitutto dimostreremo il Teorema di Killing-Hopf (Teorema 3.7), che fornisce una importante caratterizzazione delle varietà Riemanniane con curvature sezionali costanti. Successivamente, per avere esempi concreti di varietà iperboliche, mostreremo che tutte le superfici orientabili e chiuse di genere almeno due ammettono metrica iperbolica (Teorema 3.17). Infine deriveremo alcuni risultati sul volume dei semplici nello spazio iperbolico. Nel quarto capitolo uniremo tutti i risultati ottenuti per dimostrare il Principio di proporzionalità (Teorema 4.1), vista la lunghezza della dimostrazione questa è divisa in due sezioni nelle quali si mostrano separatamente le due disuguaglianze. Infine nell'ultima sezione discuteremo varie conseguenze e risultati collegati al Principio di proporzionalità.

Indice

0	Nozioni preliminari	i
0.1	Orientazione omologica e classe fondamentale	i
0.2	Geometria Riemanniana	iii
0.3	Modelli dello spazio iperbolico	vi
1	Grado di mappe	1
1.1	Il caso di rivestimenti e prodotti	6
2	Introduzione al volume simpliciale	8
2.1	Alcune varianti	14
2.1.1	Volume simpliciale intero	14
2.1.2	Volume simpliciale intero stabile	15
3	Geometria iperbolica	18
3.1	Il Teorema di Killing-Hopf	19
3.2	Geometrizzazione delle superfici	27
3.3	Simplessi nello spazio iperbolico	29
4	Il Principio di proporzionalità	37
4.1	Straightening	38
4.2	Cicli efficienti	42
4.3	Conseguenze e altri risultati	44

Capitolo 0

Nozioni preliminari

In questo breve capitolo richiamiamo alcune definizioni e alcuni risultati che verranno utilizzati spesso nei capitoli a seguire. A scanso di equivoci in questa tesi il termine *varietà* indicherà sempre una varietà topologica, mentre col termine *varietà differenziabile* si intenderà una varietà le cui funzioni di transizione sono di classe C^∞ . Diremo che una varietà è *chiusa* se è compatta e senza bordo, inoltre dove non specificato si intenderà sempre che le varietà sono senza bordo.

Notazione. Vista la necessità di scrivere spesso l'omologia locale adotteremo la seguente notazione: se X è uno spazio topologico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme indichiamo con $(X | A)$ la coppia $(X, X - A)$. Analogamente se $x \in X$ indichiamo con $(X | x)$ la coppia $(X, X - \{x\})$.

0.1 Orientazione omologica e classe fondamentale

In questa sezione richiamiamo la definizione di orientazione e alcuni risultati classici. Rimandiamo al libro di Hatcher [Hat02, Sezione 3.3] per ulteriori dettagli e dimostrazioni. Iniziamo definendo l'orientazione di una varietà tramite l'omologia: questa definizione più astratta non richiede ipotesi di regolarità sulla varietà. Notiamo che se M è una n -varietà, $p \in M$ un punto e $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta contenente p , possiamo determinare l' n -esimo gruppo di omologia locale in p come segue:

$$H_n(M | p; \mathbb{Z}) \cong_{\text{ex}} H_n(U | p; \mathbb{Z}) \cong_{\text{ex}} H_n(\mathbb{R}^n | \varphi(p); \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

dove ex indica che l'isomorfismo è dato dal Teorema di escissione, mentre il penultimo isomorfismo è dato dalla successione esatta lunga di omologia [Hat02, Sezione 2.1].

Definizione 0.1 (orientazione omologica). Sia M una n -varietà, un'orientazione locale nel punto $x \in M$ è la scelta di un generatore $\mu_x \in H_n(M | x; \mathbb{Z})$. Un'orientazione globale di M è il dato di un'orientazione locale in ogni punto $\{\mu_x\}_{x \in M}$ soddisfacente il criterio di compatibilità locale: per ogni $x \in M$ esiste una palla coordinata \mathcal{B} contenente x tale che per ogni $y \in \mathcal{B}$ la composizione degli isomorfismi

$$H_n(M | x; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\cong} H_n(M | \mathcal{B}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n(M | y; \mathbb{Z})$$

mappa μ_x in μ_y . La varietà si dice orientabile se esiste un'orientazione globale.

Proposizione 0.2. Sia M una n -varietà e sia

$$\overline{M} := \{(x, \mu_x) \mid x \in M, \mu_x \text{ è un generatore di } H_n(M | x; \mathbb{Z})\}.$$

Allora esiste una topologia su \overline{M} tale che:

1. \overline{M} è una n -varietà orientabile,
2. la mappa $p: \overline{M} \rightarrow M$, definita da $p(x, \mu_x) = x$, è un rivestimento di grado due,
3. M è orientabile se e solo se \overline{M} è sconnesso.

Osservazione 0.3. Un'orientazione per la varietà M equivale a una sezione di $p: \overline{M} \rightarrow M$, cioè una mappa continua $\mu: M \rightarrow \overline{M}$ tale che $p \circ \mu = id_M$. Equivalentemente μ è un sollevamento dell'identità su M rispetto a p . Per il Teorema di unicità dei sollevamenti deduciamo che se M è connessa e due orientazioni coincidono in un punto, allora devono coincidere su tutta la varietà.

La prossima proposizione è una delle proprietà che contraddistinguono le varietà chiuse.

Teorema 0.4. Sia M una n -varietà chiusa e connessa. Allora $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ per $i > n$. Se M non è orientabile vale anche $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$. Invece se M è orientabile:

- $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$;
- per ogni $x \in M$ la proiezione $H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M | x; \mathbb{Z})$ è un isomorfismo;

- fissato un generatore $\mu \in H_n(M; \mathbb{Z})$, l'insieme $\{\mu_x\}_{x \in M}$ dove μ_x è l'immagine di μ rispetto alla mappa $H_n(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n(M \setminus x; \mathbb{Z})$ è un'orientazione.

Il teorema implica che, se M è orientabile, scegliere un generatore di $H_n(M; \mathbb{Z})$ equivale a scegliere un'orientazione. Questa proprietà è così importante che si dà la seguente definizione.

Definizione 0.5 (classe fondamentale). Sia M una n -varietà chiusa, connessa e orientabile. La scelta di un generatore di $H_n(M; \mathbb{Z})$, indicato con $[M]$, è detta *classe fondamentale* di M .

0.2 Geometria Riemanniana

Richiamiamo in questa sezione alcune definizioni e risultati principali di geometria Riemanniana che verranno usati in seguito. Per le dimostrazioni rimandiamo al libro di Lee [Lee18].

Definizione 0.6 (varietà Riemanniana). Una *varietà Riemanniana* è una coppia (M, g) dove M è una varietà differenziabile e g è un campo liscio di $(0, 2)$ -tensori simmetrici definiti positivi, nel senso che per ogni punto $p \in M$ la forma bilineare simmetrica

$$g_p(-, -): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

è definita positiva. Se la forma bilineare è solamente non degenera si parla di varietà *pseudo-Riemanniana*.

Il campo tensoriale g viene chiamato *metrica Riemanniana*. La prossima definizione è l'operazione più importante per i campi tensoriali covarianti.

Definizione 0.7 (pullback). Siano M e N due varietà Riemanniane e sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia. Sia A un campo di $(0, q)$ -tensori di N (non necessariamente liscio). Si definisce *pullback* di A rispetto ad f , e si indica f^*A , il campo di $(0, q)$ -tensori di M definito come

$$(f^*A)_p(v_1, \dots, v_q) := A_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_q)),$$

per ogni punto $p \in M$ e per ogni $v_1, \dots, v_q \in T_p M$.

Si può dimostrare che il pullback di un campo tensoriale liscio è ancora liscio [Lee18, Prop. B.7]. Grazie al pullback possiamo definire il concetto di isomorfismo tra varietà Riemanniane.

Definizione 0.8 (isometria). Siano (M, g_M) e (N, g_N) due varietà Riemanniane e sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia. Diremo che f è un'*isometria* se è un diffeomorfismo e $f^*g_N = g_M$. Diremo invece che f è un'*isometria locale* se per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto U di p tale che $f: U \rightarrow f(U)$ è un'isometria, ossia l'applicazione $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ è un'isometria di spazi vettoriali per ogni $p \in M$.

Chiaramente un'isometria è un'isometria locale che sia anche un diffeomorfismo. Uno dei più grandi vantaggi dell'introduzione di una metrica è la scelta univoca di una connessione ∇ compatibile con quest'ultima. Se T è un generico (p, q) -campo tensoriale e X è un campo vettoriale, si può verificare che il valore di $\nabla_X T$ in un punto dipende solo dal valore di X in tale punto. Questa proprietà rende la connessione preferibile rispetto alla derivata di Lie $\mathcal{L}_X T$, che dipende dal comportamento locale sia di X che di T [Lee18, p. 112].

Teorema 0.9 (Teorema fondamentale della geometria Riemanniana, [Lee18, Thm. 5.10]). *Sia (M, g) una n -varietà Riemanniana. Esiste ed è unica la connessione ∇ , detta connessione di Levi Civita, tale che per ogni terna X, Y, Z di campi vettoriali su M valga:*

- $\nabla_Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$

D'ora in poi il simbolo ∇ indicherà sempre la connessione di Levi Civita. Ricordiamo che i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k sono definiti in coordinate locali come:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

La seconda richiesta nel teorema precedente può essere riformulata dicendo che i simboli di Christoffel sono simmetrici: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ per ogni i, j, k .

Proposizione 0.10. *Sia (M, g) una n -varietà Riemanniana, in coordinate locali la connessione di Levi Civita è data da*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \quad (0.1)$$

dove (g^{ij}) è la matrice inversa della metrica.

Uno dei concetti più importanti in geometria Riemanniana è quello di *geodetica*, che informalmente può essere descritta come una curva che non accelera.

Definizione 0.11 (geodetiche). Sia (M, g) una varietà Riemanniana, una curva $\gamma: I \rightarrow M$ è detta *geodetica* se soddisfa l'equazione

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

per ogni $t \in I$.

Si può dimostrare che in coordinate locali la condizione $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ equivale ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Ne segue che fissati posizione e velocità iniziali esiste un'unica soluzione locale, che si estende in maniera unica a una soluzione massimale definita su un intervallo aperto [Lee18, p. 103-104].

Definizione 0.12 (mappa esponenziale). Siano (M, g) una varietà Riemanniana e $p \in M$ un punto. Per ogni $v \in T_p M$ sia $\gamma_v(t)$ l'unica geodetica tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$. Chiamiamo \mathcal{E}_p l'insieme dei vettori $v \in T_p M$ tali che il dominio massimale di $\gamma_v(t)$ contiene l'intervallo $[0, 1]$. Si definisce *mappa esponenziale* la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} \exp_p: \mathcal{E}_p &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

Osservazione 0.13. Ogni varietà Riemanniana è naturalmente uno spazio metrico. Siano $p, q \in M$ due punti e consideriamo l'insieme A delle curve lisce a tratti che li connettono. Si definisce la distanza tra p e q come

$$d(p, q) := \inf_{\gamma \in A} L(\gamma),$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ . La distanza costruita è compatibile con la topologia di M [Lee12, Thm. 2.55]. Si parla quindi di varietà *complete* quando lo spazio metrico (M, d) è completo.

Esistono molti teoremi che legano la completezza di una varietà Riemanniana alle proprietà delle geodetiche. Una varietà Riemanniana si dice *geodeticamente completa* se il dominio massimale di ogni geodetica è tutto \mathbb{R} .

Teorema 0.14 (Hopf-Rinow, [Lee18, Thm. 6.19]). *Una varietà Riemanniana è completa se e solo se è geodeticamente completa.*

Proposizione 0.15 ([Lee18, p. 170]). *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa. Allora:*

- per ogni punto $p \in M$ la mappa esponenziale \exp_p ha dominio T_pM ,
- per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una geodetica, detta *minimizzante*, che realizza la distanza.

Ricordiamo le definizioni di tensore di Riemann e curvatures sezionali:

Definizione 0.16 (tensore di Riemann). Sia (M, g) una varietà Riemanniana, il *tensore di Riemann* (o di curvatura) R è il campo di $(1, 3)$ -tensori definito come

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Abbassando il quarto indice si trova la sua versione $(0, 4)$:

$$Rm(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Definizione 0.17 (curvature sezionali). Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Sia $p \in M$ un punto e $\Pi \subset T_pM$ un piano, se $\{v, w\}$ è una base per Π si definisce *curvatura sezionale* in p rispetto a Π il valore

$$\sec(\Pi) := \frac{Rm(v, w, w, v)}{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

Il seguente teorema sarà utile nell'ultimo capitolo per discutere una generalizzazione del Teorema 4.1.

Teorema 0.18 (Cartan-Hadamard, [Lee18, Thm. 12.8]). *Sia M una varietà Riemanniana completa e connessa con curvature sezionali non positive. Allora, per ogni punto $p \in M$, la mappa esponenziale*

$$\exp_p: T_pM \rightarrow M$$

è un rivestimento. In particolare il rivestimento universale di M è diffeomorfo a \mathbb{R}^n , e se M è semplicemente connessa è essa stessa diffeomorfa a \mathbb{R}^n .

0.3 Modelli dello spazio iperbolico

Elenchiamo ora i quattro modelli utilizzati per lo studio dello spazio iperbolico, ognuno dei quali ha i suoi vantaggi e i suoi svantaggi. Si può dimostrare che sono tutti tra loro isometrici [Lee18, Thm. 3.7]. Rimandiamo al libro di Martelli [Mar24, Capitolo 2] per la dimostrazione delle varie proprietà dei quattro modelli.

- **Modello dell'iperboloide** \mathbb{H}^n . Per definirlo si consideri \mathbb{R}^{n+1} col prodotto lorentziano:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1}$$

si definisce *spazio iperbolico* la sottovarietà

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\},$$

con la metrica indotta dal pullback dell'inclusione. Nonostante lo spazio ambiente sia una varietà pseudo-Riemanniana¹ la metrica indotta su \mathbb{H}^n è definita positiva.

- **Disco di Poincaré** \mathbb{D}^n . Lo spazio iperbolico può essere descritto come il disco aperto n -dimensionale \mathring{D}^n con la seguente metrica:

$$g_D = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_E$$

dove g_E è la metrica euclidea. Le geodetiche in questo modello sono archi di circonferenze perpendicolari al bordo di D^n .

- **Modello a semipiano** \mathbb{U}^n . Un'altra definizione dello spazio iperbolico è il semipiano $\mathbb{U}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ dotato della metrica

$$g_U = \frac{1}{x_n^2} g_E,$$

Questo modello si ottiene dal precedente tramite un'inversione di \mathbb{D}^n con raggio $\sqrt{2}$ e centro $(0, \dots, 0, -1)$. Le geodetiche sono di due tipi: semirette perpendicolari all'asse x e semicirconferenze con diametro sull'asse x . In particolare le geodetiche verticali parametrizzate per lunghezza d'arco (tali che $\gamma(0) = 1$) hanno equazione $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t)$.

- **Modello di Klein-Beltrami** \mathbb{K}^n . Come nel caso del disco di Poincaré lo spazio iperbolico è il disco aperto \mathring{D}^n , ma la metrica è diversa:

$$g_K = \frac{1}{1 - \|x\|^2} g_E + \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k dx_k \right)^2.$$

Il vantaggio di usare una metrica così complicata è dato dal fatto che le geodetiche in questo modello sono semplicemente segmenti. A differenza dei precedenti due modelli quello di Klein-Beltrami non è conforme allo spazio euclideo².

¹Si noti che il prodotto lorentziano non è definito positivo.

²In particolare non preserva gli angoli.

Capitolo 1

Grado di mappe

Notazione. In tutto il capitolo, se non diversamente indicato, i gruppi di omologia e di coomologia sono considerati a coefficienti interi.

Il concetto del grado di una mappa, definito per mappe tra sfere, può essere generalizzato al caso di varietà chiuse, connesse ed orientabili. Infatti quando si definisce il grado di una mappa tra sfere si usano implicitamente due proprietà:

- $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$;
- è possibile, in maniera canonica, scegliere un generatore nel dominio e nel codominio: essendo uguali è naturale scegliere lo stesso generatore in partenza e in arrivo.

Consideriamo ora una mappa continua $f: M \rightarrow N$ tra n -varietà M chiuse, connesse ed orientabili. In virtù del Teorema 0.4 valgono le seguenti proprietà:

- $H_n(M) \cong H_n(N) \cong \mathbb{Z}$;
- non esiste un modo canonico di scegliere i generatori nel dominio e condominio, ma supponendo che siano state scelte delle orientazioni possiamo considerare le classi fondamentali di M e N rispettivamente.

La somiglianza col caso delle sfere è chiara. Questo suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.1 (grado omologico). Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra n -varietà chiuse, connesse e orientate, siano inoltre $[M]$ e $[N]$ le rispettive classi fondamentali. Definiamo *grado omologico* di f , e indichiamo con $\deg_H(f)$, l'intero tale che

$$H_n(f)([M]) = \deg_H(f) \cdot [N].$$

Possiamo già stabilire le principali proprietà del grado:

Proposizione 1.2 (proprietà del grado). *Siano $f, g: M \rightarrow N$ e $h: N \rightarrow K$ mappe tra n -varietà chiuse, connesse ed orientate. Allora valgono le seguenti:*

P1) $\deg_H(h \circ f) = \deg_H(h) \cdot \deg_H(f)$;

P2) se f e g sono omotope allora $\deg_H(f) = \deg_H(g)$;

P3) se f è un omeomorfismo allora $\deg_H(f) = \pm 1$;

P4) se f non è suriettiva allora $\deg_H(f) = 0$.

Dimostrazione. Le prime tre affermazioni sono una diretta conseguenza della funtorialità dell'omologia. Per quanto riguarda la quarta, supponiamo per assurdo che $\deg_H(f) \neq 0$ e sia $c = \sum_{i=0}^m a_i \sigma_i \in C_n(M)$ un ciclo rappresentante la classe fondamentale di M . Chiamiamo $\text{supp } c = \bigcup_{0 \leq i \leq m} \sigma_i(\Delta^n) \subset M$. Allora $0 \neq [C_n(f)(c)] \in H_n(N)$, ma per ipotesi esiste un punto $p \in N - f(\text{supp } c)$. Segue che la proiezione $H_n(N) \rightarrow H_n(N | p)$ mappa $H_n(f)([c]) \neq 0$ in 0, ma ciò è assurdo perchè per il Teorema 0.4 tale mappa è un isomorfismo. \square

Lo svantaggio della definizione appena data è che non suggerisce una strategia facile per il calcolo del grado di una mappa. Se restringiamo il campo di studio alle varietà differenziabili possiamo dare un'interpretazione chiara al concetto di grado.

Osservazione 1.3. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa differenziabile tra n -varietà differenziabili chiuse. Per il Teorema di Sard [Lee12, Thm. 6.10] l'insieme dei valori regolari di f è denso in N ed in particolare non vuoto. Sia quindi $p \in N$ un valore regolare, per definizione $df_x: T_x M \rightarrow T_p N$ è invertibile per ogni $x \in f^{-1}(p)$. Per il Teorema della funzione inversa [Lee12, Thm. 4.5] f è un diffeomorfismo locale in ogni punto della fibra di p , ne segue che $f^{-1}(p)$ ha la topologia discreta. Inoltre $f^{-1}(p)$ è chiuso per continuità. Allora $f^{-1}(p)$ è compatto e discreto, dunque finito.

Definizione 1.4 (grado differenziale). Sia $f: M \rightarrow N$ mappa differenziabile tra n -varietà differenziabili chiuse, connesse e orientabili. Dato $p \in N$ valore regolare di f definiamo *grado differenziale* di f , e indichiamo con $\deg_D(f)$, l'intero

$$\deg_D(f) := \sum_{x \in f^{-1}(p)} \varepsilon_x \tag{1.1}$$

dove $\varepsilon_x = 1$ se f preserva l'orientazione in x , altrimenti $\varepsilon_x = -1$.

Questa definizione, per quanto chiara, è altamente problematica. Innanzitutto bisogna mostrare che $\deg_D(f)$ non dipende dalla scelta del valore regolare. Inoltre, a differenza della definizione omologica, non traspare l'invarianza omotopica. Per mostrare che la definizione appena data sia ben posta mostriamo che, nel caso di varietà differenziabili, i due concetti di grado coincidono. Per fare ciò dimostriamo che vale una formula analoga alla (1.1) per calcolare il grado omologico:

Proposizione 1.5. *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra n -varietà chiuse, connesse e orientate. Supponiamo esistano un punto $p \in N$ e \mathcal{B}_p palla coordinata centrata in p tali che:*

- *la fibra $f^{-1}(p)$ è finita,*
- *ogni componente connessa di $f^{-1}(\mathcal{B}_p)$ viene mappata omeomorficamente su \mathcal{B}_p .*

Siano $f^{-1}(p) = \{x_0, \dots, x_k\}$ e $f^{-1}(\mathcal{B}_p) = \sqcup_{0 \leq i \leq k} \mathcal{B}_i$, con $x_i \in \mathcal{B}_i$. Allora vale la relazione

$$\deg_H(f) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \varepsilon_x$$

dove $\varepsilon_x = 1$ se $H_n(f): H_n(\mathcal{B}_x | x) \rightarrow H_n(\mathcal{B}_p | p)$ mantiene l'orientazione, in caso contrario $\varepsilon_x = -1$.

Dimostrazione. Si consideri, per ogni $0 \leq i \leq k$, il seguente digramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(M | f^{-1}(p)) & \xleftarrow[\text{ex}]{\cong} & \bigoplus_{0 \leq i \leq k} H_n(\mathcal{B}_i | x_i) \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M) & & & & \\ & \searrow & H_n(M | x_i) & \xleftarrow[\text{ex}]{\cong} & H_n(\mathcal{B}_i | x_i) \end{array}$$

dove i morfismi nel triangolo sono tutti indotti dalle proiezioni al quoziente, le mappe orizzontali sono inclusioni (e quindi isomorfismi per il Teorema di escissione), quelle verticali sono parte della successione esatta lunga di omologia delle triple

$$(f^{-1}(\mathcal{B}_p), f^{-1}(\mathcal{B}_p) - \{x_i\}, f^{-1}(\mathcal{B}_p - \{p\})), (M, M - \{x_i\}, M - f^{-1}(p)).$$

La commutatività del triangolo segue dal fatto che stiamo componendo due proiezioni al quoziente, mentre le mappe del quadrato commutano per naturalità della successione esatta lunga di omologia [Hat02, p. 127-128]. L'immagine di $[M]$ in $H_n(\mathcal{B}_i | x_i)$ è l'orientazione locale in x_i (Teorema 0.4), per commutatività del diagramma l' i -esima componente di $\bigoplus_{0 \leq i \leq k} H_n(\mathcal{B}_i | x_i)$ è sempre l'orientazione locale in x_i . Segue che l'immagine di $[M]$ nella

somma diretta è l'orientazione locale in ogni componente. Si consideri ora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(M) & \longrightarrow & H_n(M \mid f^{-1}(p)) & \xleftarrow[\text{ex}]{\cong} & \bigoplus_{0 \leq i \leq k} H_n(\mathcal{B}_i \mid x_i) \\
 \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_n(f) \\
 H_n(N) & \xrightarrow{\cong} & H_n(N \mid p) & \xleftarrow[\text{ex}]{\cong} & H_n(\mathcal{B}_p \mid p)
 \end{array}$$

dove le frecce orizzontali del quadrato a sinistra sono indotte dalle proiezioni al quoziente, mentre le frecce orizzontali nel quadrato a destra sono indotte dalle inclusioni. Tutte le mappe verticali invece sono indotte da f . Il quadrato a sinistra commuta per naturalità, mentre quello a destra commuta perchè le mappe commutano a livello di spazi. Per quanto detto prima l'immagine di $[M]$ in $\bigoplus_{0 \leq i \leq k} H_n(\mathcal{B}_i \mid x_i)$ è l'orientazione locale in ogni componente. La tesi segue dalla commutatività del diagramma e dal fatto che la mappa $H_n(\mathcal{B}_p \mid p) \xrightarrow[\text{ex}]{\cong} H_n(N \mid p)$, in quanto indotta dall'inclusione, preserva l'orientazione locale. \square

In virtù dell'equivalenza delle due definizioni di grado, d'ora in poi parleremo di *grado* di una mappa senza specificare omologico o differenziale e lo indicheremo con $\deg(f)$. Infine possiamo caratterizzare il grado in termini coomologici, dualizzando la Definizione 1.1. A seconda del caso la caratterizzazione coomologica potrebbe risultare più comoda, ad esempio nel caso delle varietà differenziabili dove è naturalmente isomorfa alla coomologia di de Rham [Lee12, Thm. 18.14]. Notiamo che nel caso di una n -varietà chiusa, connessa ed orientabile possiamo applicare il Teorema dei coefficienti universali [Hat02, Thm. 3.2] trovando $H^n(M) \cong \text{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Definizione 1.6 (classe fondamentale duale). Sia M una n -varietà chiusa, connessa e orientata. Si definisce *classe fondamentale duale* di M , e si denota con $[M]^*$, l'elemento di $H^n(M)$ che mappa $[M]$ in $1 \in \mathbb{Z}$.

Proposizione 1.7 (caratterizzazione coomologica del grado). *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra n -varietà chiuse, connesse ed orientate. Allora vale la relazione*

$$H^n(f)([N]^*) = \deg(f) \cdot [M]^*.$$

Dimostrazione. È una diretta conseguenza della definizione di classe duale:

$$H^n(f)([N]^*)([M]) = [N]^*(H_n(f)([M])) = [N]^*(\deg(f)[N]) = \deg(f)[N]^*([N]) = \deg(f).$$

\square

Esempio 1.8. Esistono sempre mappe di grado arbitrario da una n -varietà M chiusa, connessa e orientabile a \mathbb{S}^n . Si fissi $p \in M$ e sia \mathcal{B}_p una palla coordinata centrata in p . Allora la proiezione al quoziente $q: M \rightarrow \mathbb{S}^n$ che collassa il complementare di \mathcal{B}_p ha grado ± 1 : basta applicare la Proposizione 1.5 ad un intorno di $q(p)$. Per ottenere una mappa di grado arbitrario è sufficiente comporre q con un'apposita mappa $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ che ricordiamo esistere sempre [Hat02, Esempio 2.31].

Esempio 1.9. Dato che $H_{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ segue che lo spazio proiettivo complesso $2n$ -dimensionale è orientabile. Per ogni $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \Phi_k: \mathbb{P}^n\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C} \\ [z_0 : \cdots : z_n] &\mapsto [z_0^k : \cdots : z_n^k] \end{aligned}$$

e mostriamo che ha grado k^n . Infatti

$$\Phi_k^{-1}([1 : \cdots : 1]) = \{[1 : u_1 : \cdots : u_n] \mid u_i \text{ è una radice } k\text{-esima dell'unità}\},$$

inoltre ricordiamo che la mappa

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{P}^n\mathbb{C} \cap \{z_0 \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ [z_0 : \cdots : z_n] &\mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right) \end{aligned}$$

è una carta locale. L'applicazione Φ_k in coordinate è $\varphi^{-1} \circ \Phi_k \circ \varphi(z_1, \dots, z_n) = (z_1^k, \dots, z_n^k)$, si osserva facilmente che il suo Jacobiano ha determinante positivo in ogni punto della preimmagine. Concludiamo che per la Formula (1.1) vale $\deg \Phi_k = \#\Phi_k^{-1}([1 : \cdots : 1]) = k^n$.

Una domanda che sorge spontanea è se esistono sempre mappe di grado arbitrario. In generale la risposta è negativa, e il problema di determinare quali sono i possibili gradi di mappe tra due varietà è spesso difficile. Nel caso di due varietà distinte il seguente teorema impone delle forti limitazioni sui possibili grado. Invece per le mappe da una varietà in sé stessa un forte criterio sarà dato dalla positività del volume simpliciale (Corollario 2.11).

Teorema 1.10 (Hopf, [Har16, Prop. 2.6]). *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa di grado non nullo tra n -varietà chiuse, connesse ed orientate. Allora:*

1. *L'immagine dell'omomorfismo $\pi_1(f): \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ è un sottogruppo di indice finito, inoltre tale indice divide $\deg(f)$;*
2. *La mappa $H_k(f; \mathbb{Q}): H_k(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(N; \mathbb{Q})$ è suriettiva per ogni k , in particolare vale $b_k(M) \geq b_k(N)$ dove b_k indica il k -esimo numero di Betti.*

1.1 Il caso di rivestimenti e prodotti

Studiamo in questa sezione il grado di rivestimenti e mappe prodotto. I vari risultati saranno utili nei prossimi capitoli.

Proposizione 1.11. *Sia $p: N \rightarrow M$ un rivestimento connesso di grado d , dove M è una n -varietà chiusa, connessa e orientabile. Allora:*

1. N è una n -varietà chiusa e orientabile, la cui orientazione è indotta attraverso p ,
2. rispetto all'orientazione indotta vale $\deg(p) = d$.

Dimostrazione. Il fatto che M sia una n -varietà chiusa è una semplice verifica. Sia ora $x \in N$ un punto e sia V un intorno di x tale che $p: V \rightarrow p(V)$ è un omeomorfismo. Definiamo l'orientazione locale in x come $H_n(p|_V)^{-1}(\mu_{p(x)})$, dove $\mu_{p(x)}$ è l'orientazione locale di $p(x)$ e $H_n(p|_V): H_n(V | x) \rightarrow H_n(p(V) | p(x))$. Dato che p è un omeomorfismo locale è chiaro che la condizione di compatibilità locale è automaticamente soddisfatta. Per dimostrare che $\deg(p) = d$ basta applicare la Proposizione 1.5, osservando che per come abbiamo costruito l'orientazione di N la mappa p preserva localmente le orientazioni. \square

La prossima proposizione mostra che il grado di una mappa prodotto si comporta esattamente come uno potrebbe intuire. Per semplicità ci restringiamo al caso di varietà differenziabili.

Proposizione 1.12. *Siano M_1, M_2, N_1 e N_2 n -varietà differenziabili chiuse, connesse ed orientate. Siano inoltre $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ e $f_2: M_2 \rightarrow N_2$ due mappe differenziabili. Allora:*

$$\deg(f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2) = \deg(f_1) \cdot \deg(f_2).$$

Dimostrazione. Sia $(p, q) \in N_1 \times N_2$ un valore regolare di $f_1 \times f_2$, chiaramente

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(p, q) = f_1^{-1}(p) \times f_2^{-1}(q).$$

Lo Jacobiano in coordinate di $f_1 \times f_2$ ha la forma

$$J_{f_1 \times f_2} = \begin{pmatrix} J_{f_1} & 0 \\ 0 & J_{f_2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\det J_{f_1 \times f_2} = \det J_{f_1} \det J_{f_2}$, possiamo dunque applicare la Formula (1.1) con la relazione $\varepsilon_{(x,y)} = \varepsilon_x \varepsilon_y$:

$$\sum_{(x,y) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(p,q)} \varepsilon_{(x,y)} = \sum_{x \in f_1^{-1}(p)} \sum_{y \in f_2^{-1}(q)} \varepsilon_x \varepsilon_y = \left(\sum_{x \in f_1^{-1}(p)} \varepsilon_x \right) \cdot \left(\sum_{y \in f_2^{-1}(q)} \varepsilon_y \right) = \deg(f_1) \deg(f_2)$$

□

Corollario 1.13. *Sia M una varietà differenziabile e sia n un intero positivo. Allora la varietà differenziabile $\mathbb{S}^n \times M$ ammette mappe in sé stessa di grado arbitrario. In particolare, questo vale per il toro n -dimensionale \mathbb{T}^n .*

Dimostrazione. Siano $d \in \mathbb{Z}$ un intero arbitrario e $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una mappa di grado d . Allora la mappa $f \times id_M: \mathbb{S}^n \times M \rightarrow \mathbb{S}^n \times M$ ha grado d per la proposizione precedente. □

Capitolo 2

Introduzione al volume simpliciale

Introduciamo ora un invariante omotopico ideato da Gromov chiamato *volume simpliciale* [Gro82]. Per definire tale invariante innanzitutto consideriamo uno spazio topologico X e il complesso delle catene singolari a coefficienti reali $C_*(X; \mathbb{R})$.

Definizione 2.1. Sia $c = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \in C_k(X; \mathbb{R})$ una catena singolare ridotta¹. Definiamo la sua *norma* ℓ^1 come

$$\|c\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Proposizione 2.2. Per ogni $k \geq 0$, $(C_k(X; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio vettoriale normato.

Dimostrazione. Per definizione di norma ℓ^1 , abbiamo che $\|c\|_1 = 0$ se e solo se $c = 0$. Inoltre $\|\lambda c\|_1 = |\lambda| \|c\|_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Per verificare la disuguaglianza triangolare consideriamo due k -catene singolari $c_1, c_2 \in C_k(X; \mathbb{R})$. Possiamo scrivere c_1, c_2 in forma ridotta come $c_1 = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i$ e $c_2 = \sum_{i=1}^n y_i \sigma_i$, con $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\|c_1 + c_2\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|c_1\|_1 + \|c_2\|_1$$

□

Per sfruttare questa norma appena costruita dobbiamo trasportarla ai gruppi di omologia del complesso. Esiste una maniera canonica di definire la norma di un rappresentante, ma in generale quoziente sarà solamente uno spazio seminormato.

¹cioè $\sigma_i \neq \sigma_j$ per $i \neq j$.

Proposizione 2.3. *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio vettoriale normato reale, siano $Y \subset X$ un sottospazio e $z \in X/Y$. Allora $\|z\|_{X/Y} := \inf\{\|x\|_X \mid z = [x]\}$ è una seminorma sullo spazio quoziente X/Y . Inoltre $\|\cdot\|_{X/Y}$ è una norma se e solo se Y è chiuso.*

Dimostrazione. Se $z = [0]$ allora abbiamo che $\|z\| = 0$. Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda z\|_{X/Y} = \inf\{\|\lambda x\|_X \mid z = [x]\} = \inf\{|\lambda| \|x\|_X \mid z = [x]\} = |\lambda| \|z\|_{X/Y}$$

Rimane da verificare la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|_{X/Y} &= \inf\{\|x_1 + x_2\|_X \mid z_1 = [x_1], z_2 = [x_2]\} \\ &\leq \inf\{\|x_1\|_X + \|x_2\|_X \mid z_1 = [x_1], z_2 = [x_2]\} = \|z_1\|_{X/Y} + \|z_2\|_{X/Y} \end{aligned}$$

Sia $x \in X$ un vettore, supponiamo che Y sia chiuso e $\|x + Y\|_{X/Y} = 0$. Allora per definizione di $\|\cdot\|_{X/Y}$ esiste una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y tale che $\|x + y_n\|_X \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ne segue $y_n \xrightarrow[\|\cdot\|_X]{} -x$ e per chiusura di Y si ha $x \in Y$, perciò $x + Y$ è il vettore nullo in X/Y . Viceversa supponiamo che $\|\cdot\|_{X/Y}$ sia una norma, sia poi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in Y convergente a un elemento $x \in X$. Allora:

$$\| -x + Y \|_{X/Y} = \inf\{\|y - x\|_X \mid y \in Y\} \leq \inf\{\|y_n - x\| \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$$

Questo implica che $-x + Y$ è il vettore nullo in X/Y e di conseguenza $x \in Y$, pertanto Y è chiuso. \square

Osservazione 2.4. Nelle definizioni e proposizioni seguenti è bene tenere a mente il seguente fatto: un ciclo a coefficienti in \mathbb{Z} può essere interpretato come un ciclo a coefficienti in \mathbb{R} . Infatti il differenziale agisce solo sui semplici e non sui coefficienti. Esiste quindi un'inclusione canonica

$$i: C_*(X; \mathbb{Z}) \hookrightarrow C_*(X; \mathbb{R}).$$

Nel caso di una n -varietà chiusa, connessa e orientabile M possiamo considerare l'immagine attraverso $H_n(i)$ della classe fondamentale $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$. Per il Teorema dei coefficienti universali [Hat02, Thm. 3A.3] $H_n(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \otimes H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}$. Allora chiamiamo

$$[M]_{\mathbb{R}} := H_n(i)([M]) = 1 \otimes [M],$$

ossia $[M]_{\mathbb{R}} = \pm 1 \in \mathbb{R}$.

Grazie alla Proposizione 2.3 la norma ℓ^1 definita sulle catene singolari a coefficienti reali passa in omologia. Possiamo quindi procedere a definire il volume simpliciale:

Definizione 2.5 (volume simpliciale). Sia M una n -varietà chiusa, connessa, orientabile e sia $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ la sua classe fondamentale. Si definisce *volume simpliciale* di M :

$$\|M\| := \|[M]_{\mathbb{R}}\|_1 \in [0, +\infty)$$

Dove la norma della classe fondamentale è quella indotta al quoziente dalla norma ℓ^1 come spiegato nella Proposizione 2.3.

Osservazione 2.6. Nel definire il volume simpliciale abbiamo utilizzato la classe fondamentale, fissando quindi una delle due orientazioni possibili. Notiamo però che per le proprietà della seminorma vale $\|[M]_{\mathbb{R}}\|_1 = \|-[M]_{\mathbb{R}}\|_1$, perciò il volume simpliciale è ben definito e non dipende dall'orientazione scelta.

Osservazione 2.7. Dalla definizione è chiaro che studiare il volume simpliciale implicherà lavorare sempre con le catene singolari a coefficienti reali. È importante notare che la definizione di grado di una mappa attraverso le classi fondamentali viene preservata dal cambio di coefficienti. Formalmente, sia $f: M \rightarrow N$ mappa tra varietà chiuse, connesse e orientabili, siano poi $C_n(f; \mathbb{Z}): C_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow C_n(N; \mathbb{Z})$ e $C_n(f; \mathbb{R}): C_n(M; \mathbb{R}) \rightarrow C_n(N; \mathbb{R})$ i morfismi indotti tra i complessi di catene a coefficienti interi e reali rispettivamente. Poiché come osservato precedentemente $C_n(M; \mathbb{Z})$ è un sottospazio di $C_n(M; \mathbb{R})$, allora la mappa $C_n(f; \mathbb{Z})$ è semplicemente la restrizione di $C_n(f; \mathbb{R})$ al sottospazio $C_n(M; \mathbb{Z})$: infatti come morfismo agisce solo sui simplessi di una catena ma non sui coefficienti. In conclusione, abbiamo $H_n(f; \mathbb{R})([M]_{\mathbb{R}}) = \deg(f)[N]_{\mathbb{R}}$.

Basandoci solamente sulla definizione calcolare il volume simpliciale di una varietà è complicato. Tuttavia grazie alle proposizioni seguenti avremo degli strumenti utili per determinare quando il volume simpliciale è nullo. Inoltre metteremo in luce come questo invariante porta con sé informazioni sui gradi possibili di mappe tra varietà: risulterà perciò molto indicato per indagare problemi legati ai gradi di mappe. Benchè la definizione di volume simpliciale è in termini omologici, non traspare il fatto che sia un invariante omotopico.

La seguente proprietà fondamentale viene definita da Gromov funtorialità della seminorma [Gro82, p. 30]:

Proposizione 2.8 (functorialità della seminorma). *Sia $f: X \rightarrow Y$ una mappa continua tra spazi topologici e sia $\alpha \in H_k(X; \mathbb{R})$. Allora:*

$$\|H_k(f; \mathbb{R})(\alpha)\|_1 \leq \|\alpha\|_1.$$

Dimostrazione. Sia $c = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \in C_k(X; \mathbb{R})$ un rappresentante ridotto di α . Allora abbiamo la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i (f \circ \sigma_i) \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \right\|_1,$$

infatti applicare f significa rimpiazzare i semplici σ_i di c con $f \circ \sigma_i$. Questa operazione non modifica i coefficienti, quello che può accadere è che la catena ottenuta non sia ridotta: è possibile che $f \circ \sigma_i = f \circ \sigma_j$ per qualche $i \neq j$. Per definizione della norma sul quoziente abbiamo $\|H_k(f; \mathbb{R})(\alpha)\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i (f \circ \sigma_i) \right\|_1$. Pertanto:

$$\|H_k(f; \mathbb{R})(\alpha)\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \right\|_1.$$

Per ottenere la tesi basta considerare l'estremo inferiore dei termini a destra. □

Corollario 2.9. *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra n -varietà chiuse, connesse e orientabili. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|M\| \geq |\deg(f)| \|N\|.$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare la functorialità della seminorma e la definizione di grado di una mappa:

$$\|M\| = \|[M]_{\mathbb{R}}\|_1 \geq \|H_n(f; \mathbb{R})([M]_{\mathbb{R}})\|_1 = \|\deg(f)[N]_{\mathbb{R}}\|_1 = |\deg(f)| \|N\|.$$

□

Come conseguenza otteniamo che il volume simpliciale è effettivamente un invariante omotopico:

Corollario 2.10. *Siano M e N due n -varietà chiuse, connesse e orientabili. Se M e N hanno lo stesso tipo di omotopia allora $\|M\| = \|N\|$.*

Dimostrazione. Sia $f: M \rightarrow N$ un'equivalenza omotopica e sia $g: N \rightarrow M$ la sua inversa omotopica. Poichè per definizione le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono omotepe all'identità, la funtorialità dell'omologia implica che entrambe le mappe hanno grado ± 1 . Per il Corollario 2.9 vale $\|M\| \geq \|N\|$ e $\|N\| \geq \|M\|$, da cui la tesi. \square

Possiamo adesso enunciare due corollari della Proposizione 2.8 che ci permettono di determinare se una varietà ha volume simpliciale nullo:

Corollario 2.11. *Se una varietà M chiusa, connessa e orientabile ammette una mappa f in sé stessa di grado $|\deg(f)| \geq 2$ allora $\|M\| = 0$.*

Dimostrazione. Dal Corollario 2.9 segue che $\|M\| \geq |\deg(f)|\|M\| \geq 2\|M\|$. Dato che $\|M\| \geq 0$ necessariamente $\|M\| = 0$. \square

Dal Corollario 2.9 otteniamo anche la seguente condizione:

Corollario 2.12. *Siano M e N due n -varietà chiuse, connesse e orientabili. Supponiamo che esista una mappa $f: M \rightarrow N$ di grado non nullo e $\|M\| = 0$. Allora $\|N\| = 0$.*

Esempio 2.13. Dato che le sfere ammettono mappe in sé stesse di grado arbitrario possiamo già stabilire che $\|\mathbb{S}^n\| = 0$. Più in generale, per il Corollario 1.13, lo stesso ragionamento si applica a $\mathbb{S}^n \times M$ dove M è una qualsiasi varietà differenziabile. Concludiamo quindi che $\|\mathbb{S}^n \times M\| = 0$, in particolare è vero per il toro: $\|\mathbb{T}^n\| = 0$. Invece dall'Esempio 1.9 segue che $\|\mathbb{P}^n\mathbb{C}\| = 0$, e un ragionamento analogo mostra che $\|\mathbb{P}^{2n+1}\mathbb{R}\| = 0^2$.

L'esempio precedente ci pone la seguente domanda: come possiamo dimostrare che una varietà ha volume simpliciale *positivo*? In generale il problema in questione è estremamente difficile. Infatti, volendo essere pignoli, nulla di quello che abbiamo dimostrato finora garantisce che esistano varietà con volume simpliciale positivo. Quindi, a priori, potremmo star sviluppando una teoria vuota. Tuttavia i prossimi capitoli contengono dei risultati sull'esistenza di varietà con volume simpliciale positivo (Teorema 4.1). Avendo indagato il comportamento del volume simpliciale rispetto ai gradi delle mappe, non ci resta che studiare il suo comportamento rispetto ai rivestimenti.

Proposizione 2.14. *Sia M una n -varietà chiusa, connessa ed orientabile, sia poi $p: N \rightarrow M$ un rivestimento finito di grado d . Allora*

$$\|N\| = d\|M\|.$$

²Consideriamo solamente le dimensioni dispari perchè $\mathbb{P}^{2n}\mathbb{R}$ non è orientabile.

Dimostrazione. Ricordiamo che per la Proposizione 1.11 N è anch'essa una n -varietà chiusa, connessa ed orientabile. Inoltre vale $\deg p = d$, quindi per il Corollario 2.9 si ha

$$\|N\| \geq d\|M\|.$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta notiamo che il semplice Δ^n è semplicemente connesso, quindi possiamo sollevare i semplici singolari di M . Consideriamo un rappresentante della classe fondamentale $c = \sum_{i=1}^m x_i \sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$. Per ogni σ_i esistono d possibili sollevamenti: siano tali $\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{id}: \Delta^n \rightarrow N$. Definiamo allora la catena $\tilde{c} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} \in C_n(N; \mathbb{R})$. Verifichiamo che \tilde{c} è un ciclo. Sia $\partial_k: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ l'inclusione dell' i -esima faccia del semplice, $0 \leq k \leq n$. Siano σ_i, σ_j tali che $\partial_k \sigma_i = -\partial_k \sigma_j$, allora esistono $\tau_1, \dots, \tau_d: \Delta^{n-1} \rightarrow N$ sollevamenti di $\partial_k \sigma_i$ tali che $\tau_h = \partial_k \sigma_{ih} = -\partial_k \sigma_{jh}$ per ogni h . Concludiamo quindi che \tilde{c} è un ciclo, inoltre:

$$p(\tilde{c}) = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^d p \circ \sigma_{ij} = d \sum_{i=1}^m x_i \sigma_i = dc$$

Vale quindi $H_n(p; \mathbb{R})([\tilde{c}]) = d[c] = d[M]_{\mathbb{R}}$. Sempre per la Proposizione 1.11 $H_n(p; \mathbb{R})$ è iniettiva e la classe fondamentale è l'unico elemento che viene mappato in $d[M]_{\mathbb{R}}$, segue che \tilde{c} rappresenta $[N]_{\mathbb{R}}$. Allora vale

$$\|N\| \leq \|\tilde{c}\|_1 = d\|c\|_1,$$

passando all'estremo inferiore sul terzo termine si ottiene la disuguaglianza voluta. \square

Terminiamo la sezione discutendo una peculiare proprietà del volume simpliciale. A differenza di quanto accade con altre quantità geometriche, dato un numero reale $\alpha \geq 0$ non è sempre vero che esiste una varietà chiusa, connessa e orientabile che abbia volume simpliciale pari ad α . In particolare vale il seguente fatto:

Proposizione 2.15 ([Löh05, Cor. 1.35]). *Per ogni $n \geq 2$ l'insieme*

$$\{\|M\| \mid M \text{ è una } n\text{-varietà chiusa, connessa ed orientabile}\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$$

è numerabile.

2.1 Alcune varianti

Del volume simpliciale esistono molteplici varianti, nel seguito discutiamo le due principali.

2.1.1 Volume simpliciale intero

L'idea dietro al *volume simpliciale intero* è semplice: la definizione è tale e quale al volume simpliciale ma si considerano le catene a coefficienti in \mathbb{Z} . Come prima sia X uno spazio topologico.

Definizione 2.16 (norma ℓ^1 intera). Sia $c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in C_k(X; \mathbb{Z})$ una catena singolare ridotta. Definiamo la sua *norma* ℓ^1 come

$$\|c\|_1 := \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

È importante notare che $C_k(X; \mathbb{Z})$ è un *modulo*: non possiamo quindi parlare di spazio normato come abbiamo fatto precedentemente. Nonostante ciò è chiaro che le Proprietà della norma dimostrate nella proposizione 2.2 continuano a valere. Possiamo di nuovo far discendere la norma al quoziente come nella Proposizione 2.3, notando che l'estremo inferiore può essere sostituito dal minimo avendo a che fare con numeri interi. Arrivati a questo punto c'è una differenza sostanziale col caso dei coefficienti reali che è importante sottolineare:

Proposizione 2.17. *Siano $a, b \in H_n(X; \mathbb{Z})$ e $k \in \mathbb{Z}$. Valgono le seguenti proprietà:*

P1) $\|a\|_1 = 0$ se e solo se $a = 0$,

P2) $\|ka\|_1 \leq |k| \|a\|_1$,

P3) $\|a + b\|_1 \leq \|a\|_1 + \|b\|_1$.

Dimostrazione. **P1)** Segue dalla definizione di norma sul quoziente:

$$\|a\|_1 = \min\{\|c\|_1 \mid c \in C_n(X; \mathbb{Z}) \text{ tale che } [c] = a\}$$

L'unico ciclo di norma 0 è il ciclo nullo e l'unico elemento di $H_k(X; \mathbb{Z})$ rappresentato dal ciclo nullo è 0.

P2) Abbiamo la seguente disuguaglianza:

$$\|ka\|_1 = \min\{\|c\|_1 \mid [c] = ka\} \leq \min\{\|kc\|_1 \mid [c] = a\} = |k|\|a\|_1$$

dovuta al fatto che non tutti i rappresentati di ka si ottengono moltiplicando un rappresentante di a per k (qui è importante distinguere tra coefficienti interi e reali).

P3) Questo punto è analogo al caso reale. □

Possiamo ora definire il volume simpliciale intero:

Definizione 2.18 (volume simpliciale intero). Sia M una n -varietà chiusa, connessa, orientabile e sia $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ la sua classe fondamentale. Definiamo *volume simpliciale intero* di M :

$$\|M\|_{\mathbb{Z}} := \|[M]\|_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

Come conseguenza della Proposizione 2.17 il volume simpliciale intero di una varietà è sempre positivo. Inoltre anche in questo caso la definizione non dipende dall'orientazione: tutti i rappresentanti di $-[M]$ sono quelli di $[M]$ cambiati di segno.

Osservazione 2.19. Come corollario della Proposizione 2.17 non vale l'analogo del Corollario 2.9 per il volume simpliciale intero. Infatti in tale dimostrazione è stata utilizzata la moltiplicatività della norma rispetto agli scalari. Nonostante ciò continua a valere la funtorialità: se $f: X \rightarrow Y$ è una mappa continua e $\alpha \in H_k(X; \mathbb{Z})$ allora $\|H_k(f; \mathbb{Z})(\alpha)\|_1 \leq \|\alpha\|_1$.

2.1.2 Volume simpliciale intero stabile

Questa variante nasce con lo scopo di ovviare al problema che il volume simpliciale intero è sempre positivo. Infatti se volessimo dimostrare che il volume simpliciale di una varietà è nullo il volume simpliciale intero risulta completamente inutile. L'idea alla base è di sfruttare i rivestimenti finiti:

Definizione 2.20 (volume simpliciale intero stabile). Sia M una n -varietà chiusa, connessa e orientabile. Definiamo il *volume simpliciale intero stabile* di M :

$$\|M\|_{\mathbb{Z}}^{\infty} := \inf \left\{ \frac{\|N\|_{\mathbb{Z}}}{d} \mid p: N \rightarrow M \text{ è un rivestimento di grado } d \right\}.$$

Studiamo che relazione sussiste tra il volume simpliciale e le sue varianti:

Proposizione 2.21. *Per ogni varietà M chiusa, connessa e orientabile vale*

$$\|M\| \leq \|M\|_{\mathbb{Z}}^{\infty} \leq \|M\|_{\mathbb{Z}}.$$

Dimostrazione. Sia $p: N \rightarrow M$ un rivestimento di grado d . Notiamo che la dimostrazione della disuguaglianza $\|N\| \leq d\|M\|$ nella Proposizione 2.14 continua a valere coi coefficienti in \mathbb{Z} e con il volume simpliciale intero. Ne segue che:

$$\frac{\|N\|_{\mathbb{Z}}}{d} \leq \frac{d\|M\|_{\mathbb{Z}}}{d} = \|M\|_{\mathbb{Z}}.$$

Rimane da dimostrare la prima disuguaglianza. Come descritto nell'Osservazione 2.4 tutti i cicli a coefficienti in \mathbb{Z} sono cicli a coefficienti in \mathbb{R} : vale quindi $\|M\| \leq \|M\|_{\mathbb{Z}}$. Inoltre per moltiplicatività del volume simpliciale rispetto ai rivestimenti finiti:

$$\|M\| = \frac{\|N\|}{d} \leq \frac{\|N\|_{\mathbb{Z}}}{d}.$$

Mettendo insieme le disuguaglianze otteniamo:

$$\|M\| \leq \frac{\|N\|_{\mathbb{Z}}}{d} \leq \|M\|_{\mathbb{Z}}.$$

Prendendo l'estremo inferiore al variare di tutti i rivestimenti finiti di M si ottiene la tesi. \square

Esempio 2.22. Come applicazione dei risultati ottenuti finora, possiamo stimare il volume simpliciale delle superfici orientabili di genere $g \geq 2$. Il primo passo è individuare un maggiorante per il volume intero. Pensando le superfici Σ_g come quoziente di un $4g$ -agono, fissiamo un vertice e tracciamo i segmenti che congiungono quest'ultimo a tutti gli altri, tranne quelli adiacenti. Il risultato è una struttura di Δ -complesso su Σ_g con esattamente $4g - 2$ 2-simplessi. Chiamiamo $\sigma_1, \dots, \sigma_{4g-2}: \Delta^2 \rightarrow \Sigma_g$ i 2-simplessi singolari che li rappresentano e supponiamo $c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in C_2(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ sia un rappresentante della classe fondamentale. Sia ora q_i punto interno di $\sigma_i(\Delta^2) \subseteq \Sigma_g$: $H_2(p; \mathbb{Z})([c]) = [a_i \sigma_i]$ dove $p: C_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \rightarrow C_2(\Sigma_g | q_i; \mathbb{Z})$ è la proiezione canonica. Per il Teorema 0.4 $[a_i \sigma_i]$ deve essere un generatore di $H_2(\Sigma_g | q_i; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, perciò $|a_i| = 1$. Allora, da $\|c\|_1 = \sum |a_i| = 4g - 2$, segue $\|\Sigma_g\|_{\mathbb{Z}} \leq 4g - 2$. Ricordando che $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ la disuguaglianza si riformula come:

$$\|\Sigma_g\|_{\mathbb{Z}} \leq 2|\chi(\Sigma_g)| + 2.$$

Concentriamoci sul volume simpliciale intero stabile: sia

$$h: \pi_1(\Sigma_g) \twoheadrightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

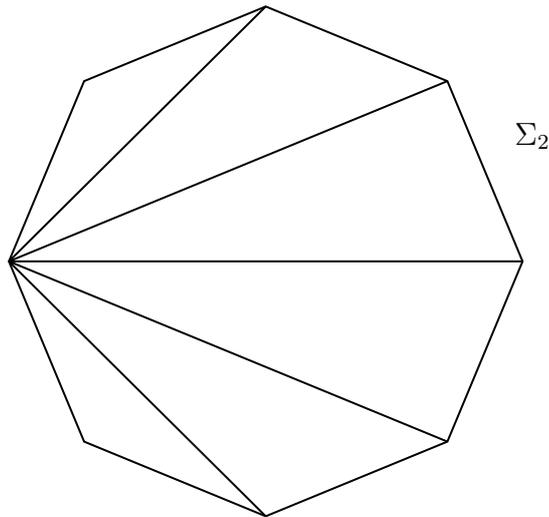


Figura 2.1: Struttura di Δ -complesso su genus 2

l'omomorfismo suriettivo di Hurewicz [Rot98, Thm. 4.29]. Sia poi $\phi : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ un qualsiasi omomorfismo suriettivo. Allora la composizione $\phi \circ h$ è un omomorfismo suriettivo dal gruppo fondamentale di Σ_g in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; il suo Ker ha indice d . Segue che, per ogni $d \geq 1$, Σ_g ammette un rivestimento a d fogli che sarà a sua volta una superficie orientabile (Proposizione 1.11), sia essa $\Sigma_{g'}$. Ricordando che $\chi(\Sigma_{g'}) = d\chi(\Sigma_g)$:

$$\|\Sigma_g\|_{\mathbb{Z}}^{\infty} \leq \frac{\|\Sigma_{g'}\|_{\mathbb{Z}}}{d} \leq \frac{2|\chi(\Sigma_{g'})| + 2}{d} = 2|\chi(\Sigma_g)| + \frac{2}{d}$$

Passando all'estremo inferiore su tutti i gradi d si ottiene $\|\Sigma_g\| \leq \|\Sigma_g\|_{\mathbb{Z}}^{\infty} \leq 2|\chi(\Sigma_g)|$. In seguito mostreremo che per $g \geq 2$ vale l'uguaglianza $\|\Sigma_g\| = 2|\chi(\Sigma_g)|$ (Corollario 4.10).

Capitolo 3

Geometria iperbolica

Introduciamo ora tre classi di varietà Riemmaniane di fondamentale importanza. L'idea sarà considerare delle varietà che sono localmente isometriche a tre varietà *modello*: la sfera \mathbb{S}^n , lo spazio euclideo \mathbb{R}^n e lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n . Queste tre varietà hanno la peculiare proprietà di avere curvatures sezionali costanti pari rispettivamente a $1, 0, -1$ [Lee18, Thm. 8.34] e godono di massima simmetria. Infatti vale il seguente fatto:

Proposizione 3.1 ([Lee18, Capitolo 3]). *Siano p, q due punti di $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$ o \mathbb{H}^n . Siano inoltre $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale per lo spazio tangente in p e $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortonormale per lo spazio tangente in q . Allora esiste un'isometria f tale che:*

- $f(p) = q$,
- $df_p(v_k) = w_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

Il Lemma 3.3 mostrerà che un'isometria è completamente determinata dal differenziale in un punto, quindi ha senso parlare di massima simmetria nelle tre varietà modello. Formalizziamo quanto detto prima:

Definizione 3.2. Sia (M, g) una n -varietà Riemanniana,

- diremo che M è *ellittica*, o che ha *metrica ellittica*, se è localmente isometrica a \mathbb{S}^n con la metrica indotta dal pullback dell'inclusione $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$;
- diremo che M è *piatta*, o che ha *metrica piatta*, se è localmente isometrica a \mathbb{R}^n con la metrica euclidea;

- diremo che M è *iperbolica*, o che ha *metrica iperbolica*, se è localmente isometrica allo spazio iperbolico \mathbb{H}^n .

Questa definizione apparentemente è più forte di quella che di solito compare in letteratura, dove le varietà ellittiche, piatte e iperboliche vengono definite come varietà con curvatures sezionali costanti. Chiaramente un'isometria locale preserva le curvatures sezionali, mentre mostrare che una varietà con curvatures sezionali costanti è localmente isometrica ad uno dei tre spazi modello è assolutamente non banale ed una possibile strada è attraverso i campi di Jacobi [Lee18, Cor. 10.15]. La definizione appena data ha però il vantaggio di essere più “operativa” e fornisce un'interpretazione geometrica chiara. In virtù dell'equivalenza delle due definizioni d'ora in poi si parlerà di *varietà a curvatura costante* quando non è importante specificare il tipo di metrica della varietà. supporremo inoltre che in questi casi le curvatures sezionali siano uguali a 0 o ± 1 , infatti ci si può sempre ricondurre a questi casi riscaldando le metriche degli spazi modello [Lee18, Thm. 8.34].

Nell'ottica del prossimo capitolo in cui studieremo la relazione tra volume simpliciale e metrica iperbolica è necessario caratterizzare e studiare alcune proprietà delle varietà iperboliche chiuse. Fortuna vuole che che il Teorema di Killing-Hopf, che dimostreremo tra poco, fornisce una risposta molto esauriente per una classe più vasta di varietà: quelle *complete*. Per questo motivo ricordiamo che uno spazio metrico compatto è sempre completo e che per il Teorema di Hopf-Rinow (Teorema 0.14) una varietà Riemanniana è completa se e solo se è *geodeticamente completa*. Studieremo poi nel dettaglio il caso delle superfici e vedremo che ogni superficie chiusa, connessa ed orientabile ammette una metrica a curvatura costante. Infine deriveremo qualche risultato sui simplessi nello spazio iperbolico che sarà fondamentale per il prossimo capitolo.

3.1 Il Teorema di Killing-Hopf

Iniziamo con qualche lemma preliminare. Il primo risultato, come anticipato precedentemente, stabilisce che un'isometria locale tra varietà Riemanniane connesse è completamente determinata dal differenziale in un punto.

Lemma 3.3. *Siano $f, g: M \rightarrow N$ due isometrie locali tra varietà Riemanniane connesse. Se esiste un punto $p \in M$ tale che $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$, allora $f = g$.*

Dimostrazione. Sia $F = \{x \in M \mid f(x) = g(x), df_x = dg_x\}$, per ipotesi F è non vuoto

e mostrando che è sia aperto che chiuso seguirà la tesi. Dato che in coordinate locali la condizione $df_x = dg_x$ si traduce nell'uguaglianza delle derivate parziali di f e g , si ha che F è chiuso. L'apertura invece segue dalla naturalità della mappa esponenziale [Lee18, Prop. 5.20]. Indicando con $\mathcal{E}_p \subset T_p M$ il dominio della mappa esponenziale, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_p & \begin{array}{c} \xrightarrow{df_p} \\ \xrightarrow{dg_p} \end{array} & \mathcal{E}_{f(p)} \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{f(p)} \\ M & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & N \end{array}$$

In particolare, per ogni $v \in T_p M$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(\exp_p(v)) &= \exp_{f(p)}(df_p(v)), \\ g(\exp_p(v)) &= \exp_{g(p)}(dg_p(v)). \end{aligned}$$

Poichè i due termini a destra coincidono, f e g devono coincidere sull'immagine della mappa esponenziale. Dato che l'esponenziale è localmente invertibile [Lee18, Prop. 5.19] esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset \mathcal{E}_p$, $\exp_p|_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)}$ è un diffeomorfismo sull'immagine e $\exp_p(\mathcal{B}_\varepsilon(0))$ è aperto. Di conseguenza f e g coincidono su un intorno aperto di p . Dato che i differenziali dipendono solo dal comportamento locale delle funzioni segue che anche loro coincidono su $\exp_p(\mathcal{B}_\varepsilon(0))$. Allora F è aperto e per connessione di M abbiamo $F = M$. \square

Corollario 3.4. *Sia M uno dei tre spazi modello e sia $U \subset M$ un aperto connesso. Allora ogni isometria locale $\varphi: U \rightarrow M$ si estende in maniera unica a un'isometria $\tilde{\varphi}: M \rightarrow M$.*

Dimostrazione. Fissiamo $p \in U$. Per l'omogeneità degli spazi modello (Proposizione 3.1) esiste un'isometria $\tilde{\varphi}: M \rightarrow M$ tale che $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p)$ e $d\tilde{\varphi}_p = d\varphi_p$. Per il Lemma 3.3 $\tilde{\varphi}$ è unica, e sempre per il lemma la restrizione di $\tilde{\varphi}$ a U deve coincidere con φ . \square

In seguito diremo che una palla centrata in $p \in M$, dove M è una varietà Riemanniana, è *geodetica* se è diffeomorfa ad una palla centrata in $0 \in T_p M$ attraverso la mappa esponenziale $\exp_p: T_p M \rightarrow M$. L'idea fondamentale dietro alla dimostrazione del Teorema di Killing-Hopf è il fatto che il rivestimento universale di una varietà a curvatura costante è sempre isometrico al corrispondente spazio modello. Per dimostrarlo abbiamo bisogno di un lemma:

Lemma 3.5. *Sia M una varietà Riemanniana completa e semplicemente connessa, sia $\pi: M \rightarrow N$ un'isometria locale fra varietà Riemanniane. Allora N è completa e π è un rivestimento.*

Dimostrazione. La completezza di N è immediata: sia γ una geodetica di N che parte da $\gamma(0) = p \in N$ con velocità $\gamma'(0) = v \in T_p N$. Si consideri $\tilde{\gamma}$ una geodetica di M tale $\pi(\tilde{\gamma}(0)) = p$ e $d\pi_{\tilde{\gamma}(0)}(\tilde{\gamma}'(0)) = v$. Per completezza di M segue che $\tilde{\gamma}$ è definita su tutto \mathbb{R} . Osserviamo anche che “essere una geodetica” è una proprietà locale, quindi $\pi \circ \tilde{\gamma}$ è una geodetica di N . Per unicità delle geodetiche una volta fissati i dati iniziali concludiamo che $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e che N è geodeticamente completo. In seguito chiameremo un tale $\tilde{\gamma}$ un *sollevamento* di γ .

Verifichiamo che π è suriettiva: siano $p \in \pi(M)$ e $q \in N$. Per completezza di N esiste γ geodetica minimizzante da p a q [Lee18, Lemma 6.18]. Sia $\tilde{\gamma}$ il suo sollevamento definito come sopra, allora $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $q \in \pi(M)$.

Mostriamo ora che π è un rivestimento. Vista la locale invertibilità dell’esponenziale [Lee18, Prop. 5.19] esiste un $\varepsilon > 0$ tale che la palla $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$ centrata in $p \in N$ di raggio ε sia geodetica. Sia $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} = \pi^{-1}(p)$ la fibra su p , vogliamo verificare che $\pi^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(p)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha)$. Sia $q \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$, per il Lemma di Gauss [Lee18, Thm. 6.9] la geodetica minimizzante da p a q ha lunghezza inferiore di ε . Ma allora anche il suo sollevamento a partire da p_α ha lunghezza inferiore di ε , quindi $\pi^{-1}(q) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha)$ e di conseguenza $\pi^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(p)) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha)$. Viceversa sia $q_\alpha \in \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha)$ e γ una geodetica da p_α a q_α che realizza la distanza. Allora $\pi \circ \gamma$ ha ancora lunghezza inferiore ad ε e sempre per il Lemma di Gauss è contenuta in $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$, da cui $\pi(p_\alpha) \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ e $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(p))$. Infine supponiamo che γ sia una geodetica minimizzante da p_α a p_β . La sua proiezione $\pi \circ \gamma$ è una geodetica chiusa in p , e visto che per il Lemma di Gauss le geodetiche in $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$ sono radiali, segue che $\pi \circ \gamma$ deve uscire da $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Quindi $L(\gamma) \geq 2\varepsilon$ e $\mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p_\beta) = \emptyset$ per ogni $\alpha \neq \beta \in \Lambda$. Perciò $\pi^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(p)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha)$. L’ultima cosa rimasta da mostrare è che $\pi: \mathcal{B}_\varepsilon(p_\alpha) \rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ è bigettiva. Ma questo segue dal fatto che per quanto detto prima si può costruire l’inversa esplicitamente: sia $q \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ e γ geodetica minimizzante da p a q , definiamo $\pi^{-1}(q)$ come il punto finale del sollevamento di γ a partire da p_α . Tale inversa è liscia perchè, in quanto isometria locale, $d\pi$ ha rango massimo in ogni punto e quindi è localmente invertibile. □

In seguito diremo che un aperto $U \subset M$ di una varietà Riemanniana è *geodeticamente convesso* se, per ogni coppia di punti $p, q \in U$, esiste un’unica geodetica $\gamma: I \rightarrow M$ minimizzante che li connette e $\gamma(I) \subset U$.

Proposizione 3.6. *Sia M una varietà Riemanniana a curvatura costante, completa e semplicemente connessa. Allora M è isometrica allo spazio modello con la stessa curvatura.*

Dimostrazione. Fissiamo $p \in M$ e indichiamo con \tilde{M} il corrispondente spazio modello. Sia ora $\varphi: U \rightarrow \tilde{M}$ un'isometria locale con U intorno aperto di p . Siano poi $q \in M$ e γ un cammino da p a q . Vogliamo estendere φ su un intorno dell'immagine di γ . Per compattezza di $[0, 1]$ ne esiste una partizione finita $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = 1\}$ tale che esistono $U_0 = U, U_1, \dots, U_n$ intorni aperti geodeticamente convessi [Lee18, Thm. 6.17] rispettivamente di $\gamma(t_i)$ e isometrie locali $\varphi_i: U_i \rightarrow \tilde{M}$, con $\varphi_0 = \varphi$. Notiamo che per ogni i l'intersezione $U_i \cap U_{i+1}$ è ancora geodeticamente convessa, ed in particolare connessa. A questo punto consideriamo

$$\varphi|_{U \cap U_1} \circ \varphi_1^{-1}|_{U \cap U_1}: \varphi_1(U \cap U_1) \rightarrow \varphi(U \cap U_1)$$

isometria locale tra aperti connessi di \tilde{M} . Per il Corollario 3.4 esiste ed è unica la sua estensione ad un'isometria locale $\psi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$. Ma allora $\psi \circ \varphi_1$ e φ coincidono sull'intersezione $U \cap U_1$ e di conseguenza producono un'estensione di φ a $U \cup U_1$. Ragionando analogamente per ogni coppia (U_i, U_{i+1}) otteniamo un'estensione di φ a $U_0 \cup \dots \cup U_n$ che indichiamo con $\tilde{\varphi}$. Chiaramente la definizione di $\tilde{\varphi}$ non dipende dagli intorni scelti e dalle isometrie locali scelte. Dobbiamo verificare invece che date due partizioni di $[0, 1]$, siano esse $T = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = 1\}$ e $S = \{s_0 = 0, s_1, \dots, s_m = 1\}$, allora le rispettive estensioni coincidono sull'intersezione dei domini. Dalla definizione dell'estensione di φ è evidente che è invariante per raffinamenti, e inoltre $S \cup T$ è un raffinamento di entrambe le partizioni, quindi l'estensione è invariante per cambi di partizioni.

Ora vorremo estendere l'isometria locale φ a un'isometria locale definita su tutto M . Una tale mappa viene spesso chiamata *mappa di evoluzione* [Mar24, p. 74]. Il problema è che nella definizione di estensione lungo un cammino abbiamo per l'appunto scelto un particolare cammino da p a q . Se riuscissimo a mostrare che date due curve γ_1, γ_2 da p a q allora le rispettive estensioni $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ coincidono in un intorno di q , potremmo definire l'estensione globale di φ in q come l'estensione rispetto a un qualsiasi cammino. Per la semplice connessione di M esiste un'omotopia a estremi fissati $F: [0, 1]^2 \rightarrow M$ tra γ_1 e γ_2 . Fissiamo $s \in (0, 1)$ e consideriamo il cammino F_s (il ragionamento per $s = 0, 1$ è analogo considerando semintervalli). Sia $\tilde{\varphi}_s$ l'estensione lungo F_s definita in un intorno V aperto dell'immagine di F_s . Per il Teorema di Wallace [Man14, Teo. 4.47] esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{s\} \times [0, 1] \subset (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \times [0, 1] \subset F^{-1}(V)$$

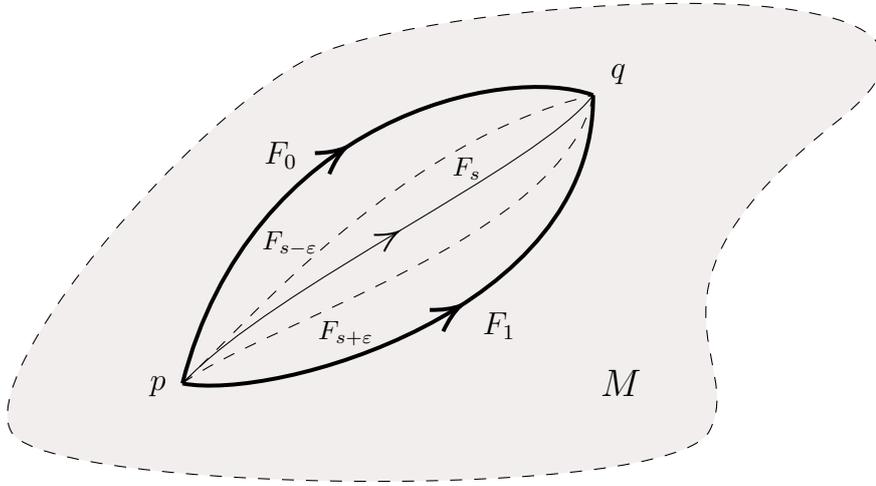


Figura 3.1: Invarianza della mappa di evoluzione per omotopia.

ed in particolare per ogni $s' \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$ si ha che $F_{s'}([0, 1]) \subset V$. Una rappresentazione grafica dell'intorno $(s - \epsilon, s + \epsilon) \times [0, 1]$ è mostrata in Figura 3.1. Per compattezza esiste una partizione $\{s_0 = 0, s_1, \dots, s_n = 1\}$ di $[0, 1]$ tale che tutte le curve F_s con $s \in [s_i, s_{i+1}]$ ammettono un'estensione di φ definita nello stesso dominio V_i . Notiamo in particolare che l'estensione $\tilde{\varphi}_s$ è un'estensione valida per tutte le curve $F_{s'}$ con $s' \in [s_i, s_{i+1}]$, quindi per unicità devono coincidere. In particolare $V_0 \cap \dots \cap V_{n-1}$ è un intorno aperto di q in cui le due estensioni $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ coincidono.

Per il Lemma 3.5 precedente l'estensione globale $\tilde{\varphi}: M \rightarrow \tilde{M}$ è un rivestimento, ma essendo \tilde{M} semplicemente connesso, risulta essere un omeomorfismo. Abbiamo mostrato che $\tilde{\varphi}$ è un'isometria locale bigettiva, ossia è un'isometria. \square

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare il Teorema di Killing-Hopf. Di seguito diremo che l'azione di un gruppo di omeomorfismi G su uno spazio topologico X è *propriamente discontinua* se ogni suo punto ammette un intorno U tale che

$$\{g \in G - \{id\} \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\} = \emptyset.$$

Teorema 3.7 (Killing-Hopf). *Ogni varietà Riemanniana M a curvatura costante, completa e connessa, è isometrica al quoziente del corrispondente spazio modello \tilde{M} per un sottogruppo discreto $\Gamma < \text{Isom}(\tilde{M})$ che agisce in maniera propriamente discontinua. Inoltre due quozienti \tilde{M}/Γ e \tilde{M}/Γ' sono isometrici se e solo se Γ e Γ' sono coniugati.*

Dimostrazione. Sia $p: \tilde{M} \rightarrow M$ il rivestimento universale di M . Il pullback della metrica di M attraverso p è l'unica metrica su \tilde{M} che rende p un'isometria locale. Mostriamo che \tilde{M} è completo: sia $\tilde{\gamma}$ una geodetica massimale in \tilde{M} e sia $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$. Dalla completezza di M deduciamo che γ è definita su tutto \mathbb{R} e la stessa cosa vale per il suo sollevamento $\tilde{\gamma}$. Concludiamo che \tilde{M} è geodeticamente completo. Sono quindi soddisfatte le ipotesi della proposizione precedente: \tilde{M} è isometrica al corrispondente spazio modello. Ne segue che $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{M} \rightarrow M)$ agisce per diffeomorfismi ed in maniera propriamente discontinua, inoltre \tilde{M}/Γ è diffeomorfo a M .

Mostriamo che Γ agisce per isometrie: sia $\varphi \in \Gamma$ e siano $p \in \tilde{M}$ e U un suo intorno aperto tale che $\pi: U \rightarrow \pi(U)$ è un'isometria locale. Si ha $\pi \circ \varphi|_U = \pi|_U \circ \varphi|_U$ e di conseguenza $\pi^* = \varphi|_U^* \circ \pi^*$, quindi per definizione della metrica su \tilde{M} segue che $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ è un'isometria. Allora φ è un'isometria locale biggettiva, e di conseguenza un'isometria globale.

Mostriamo che Γ è discreto. Supponendo per assurdo che Γ non abbia la topologia discreta, esiste dunque un punto di accumulazione per Γ in \mathbb{R}^N dove $N \in \mathbb{N}$ dipende dallo spazio modello. In particolare esiste una successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ di Cauchy, ciò implica che per ogni punto $p \in \tilde{M}$ e ogni suo intorno U vale che $\varphi_n^{-1} \circ \varphi_m(p) \in U$ definitivamente. Ma questo contraddice il fatto che Γ agisce in maniera propriamente discontinua.

Per quanto riguarda la seconda parte supponiamo che esista $\Phi: M/\Gamma \rightarrow M/\Gamma'$ isometria. Ma allora $\Phi \circ \pi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma'$ e $\pi': \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma'$ sono entrambi rivestimenti universali, quindi esiste un isomorfismo di rivestimenti $\tilde{\Phi}$ differenziabile che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{M} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \tilde{M}/\Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{M}/\Gamma' \end{array}$$

Inoltre per commutatività e dal fatto che π, π', Φ sono isometrie (almeno) locali segue che $\tilde{\Phi}$ è un'isometria. Vorremo mostrare che $\Gamma' = \tilde{\Phi}\Gamma\tilde{\Phi}^{-1}$: osserviamo che è equivalente a chiedere che per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha $\pi' \circ \tilde{\Phi} \circ \gamma \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \pi'$. Infatti questo implica che $\tilde{\Phi} \circ \gamma \circ \tilde{\Phi}^{-1} \in \Gamma'$ e quindi che i due sottogruppi sono coniugati. Sempre per commutatività del diagramma:

$$\pi' \circ \tilde{\Phi} \circ \gamma \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \Phi \circ \pi \circ \gamma \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \Phi \circ \pi \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \pi'$$

dove nel secondo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che essendo γ un'isometria in Γ si ha $\pi \circ \gamma = \pi$. Viceversa supponiamo che esista $g \in \text{Isom}(\tilde{M})$ tale che $\Gamma' = g\Gamma g^{-1}$. Consideriamo

$\pi' \circ g: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma'$ e mostriamo che è costante sulle classi di equivalenza di Γ . Sia $\gamma \in \Gamma$,

$$\pi' \circ g \circ \gamma = \pi' \circ \underbrace{g \circ \gamma \circ g^{-1}}_{\in \Gamma'} \circ g = \pi' \circ g.$$

Allora g passa al quoziente: sia $\bar{g}: \tilde{M}/\Gamma \rightarrow \tilde{M}/\Gamma'$ la mappa indotta. Indicando con $h: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ l'inversa di g si ripete lo stesso ragionamento per ottenere $\bar{h}: \tilde{M}/\Gamma' \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$. Mostriamo che \bar{h} è l'inversa di \bar{g} : per ogni $x \in \tilde{M}$ vale $\bar{h} \circ \bar{g}(\Gamma x) = \bar{h}(\Gamma' g(x)) = \Gamma h(g(x)) = \Gamma x$. Infine dato che $g = \bar{g} \circ \pi$ e π, g sono isometrie (almeno) locali concludiamo che \bar{g} è un'isometria. \square

Osservazione 3.8. Una domanda lecita arrivati a questo punto è se esistono varietà a curvatura costante non complete, e di conseguenza non ottenibili come quoziente del corrispondente spazio modello. La risposta è affermativa: si consideri $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$ con la metrica euclidea, allora M è piatta ma non completa. Sia γ l'unica geodetica tale che $\gamma(0) = (-1, 0, \dots, 0)$ e $\gamma'(0) = \partial_1$. È chiaro che γ non può essere prolungata oltre l'origine e quindi il suo dominio massimale è superiormente limitato. Ragionando in maniera analoga si trovano esempi in cui M è iperbolica o ellittica.

Ricordiamo a questo punto che dati due spazi topologici puntati $(X, x), (Y, y)$ si indica con $[(X, x), (Y, y)]$ l'insieme delle classi di equivalenza di mappe $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$, rispetto alle omotopie che fissano i punti base. Ricordiamo poi che i gruppi di omotopia superiori sono definiti come $\pi_n(X, x) = [(\mathbb{S}^n, p), (X, x)]$, e se lo spazio è connesso per archi sono indipendenti dal punto base [Hat02, p. 341]. Diamo ora una definizione che ci tornerà utile in seguito:

Definizione 3.9 (spazio asferico). Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *asferico* se $\pi_n(X) = 0$ per ogni $n \geq 2$.

Questa definizione ha il difetto che, vista la difficoltà in generale del calcolo dei gruppi di omotopia, non fornisce una condizione facile per verificare se uno spazio è asferico. Proprio per questo la seguente caratterizzazione è fondamentale nella teoria:

Proposizione 3.10. *Una varietà chiusa e connessa o un CW-complesso connesso X è asferico se e solo se il suo rivestimento universale è contraibile.*

Dimostrazione. Se X è una varietà chiusa allora è omotopa ad un CW-complesso [Hat02, Cor. A.12], quindi basta trattare il caso in cui X è un CW-complesso. Sia \tilde{X} il rivestimento universale di X , allora $\pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X)$ per ogni $n \geq 2$ [Hat02, Prop. 4.1]. Se il rivestimento

universale è contraibile ovviamente $\pi_n(\tilde{X}) = 0$ per $n \geq 1$. Viceversa se $\pi_n(X) = 0$ per $n \geq 2$ la mappa da \tilde{X} allo spazio con un solo punto induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia, quindi per il Teorema di Whitehead [Hat02, Thm. 4.5] è un'equivalenza omotopica e \tilde{X} è contraibile.

□

Fatta questa premessa possiamo enunciare un corollario del Teorema di Killing-Hopf, che costituirà un ingrediente fondamentale della dimostrazione del Principio di proporzionalità (Teorema 4.1).

Corollario 3.11. *Sia M una n -varietà iperbolica, chiusa e connessa, allora il suo rivestimento universale è \mathbb{H}^n e la mappa di rivestimento è un'isometria locale. In particolare le varietà iperboliche sono asferiche.*

Possiamo anche dedurre delle informazioni sulla topologia delle varietà che ammettono metrica ellittica:

Corollario 3.12. *Sia M una varietà ellittica, completa e connessa, allora M è chiusa. Se inoltre M è orientabile vale $\|M\| = 0$.*

Dimostrazione. Per Killing-Hopf esiste un rivestimento $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow M$, e la compattezza di M segue da quella di \mathbb{S}^n . La fibra su ogni punto $\pi^{-1}(p)$ è chiusa e discreta, quindi sempre per compattezza di \mathbb{S}^n deve essere finita. Allora il rivestimento ha grado finito e per moltiplicatività del volume simpliciale (Proposizione 2.14) vale $\|M\| = \frac{1}{\deg \pi} \|\mathbb{S}^n\| = 0$. □

3.2 Geometrizzazione delle superfici

Vogliamo ora dare degli esempi concreti di varietà a curvatura costante, per questo analizziamo in dettaglio il caso delle superfici chiuse, connesse ed orientabili. Una domanda che può subito sorgere spontanea è: una superficie può ammettere due metriche con curvatura costante ma segno diverso?

Osservazione 3.13. Sia Σ_g la superficie differenziabile chiusa, connessa e orientabile di genere g . Per il Teorema di Gauss-Bonnet

$$\int_{\Sigma_g} K = 2\pi\chi(\Sigma_g) = 4\pi(1 - g),$$

quindi deve esistere un punto in cui il segno di K è concorde con quello di $\chi(\Sigma_g)$. In particolare se Σ_g ammette una metrica a curvatura costante questa deve essere ellittica se $g = 0$, piatta se $g = 1$ e iperbolica se $g \geq 2$.

Questa semplice osservazione ci permette di restringere il campo di ricerca di una metrica per le superfici in base al segno della caratteristica di Eulero. In particolare Σ_g per $g \geq 2$ può ammettere solamente metrica iperbolica. Per mostrare che una tale metrica esiste premettiamo un lemma:

Lemma 3.14. *Esiste un esagono geodetico iperbolico ad angoli retti.*

Dimostrazione. Consideriamo il modello di Beltrami-Klein \mathbb{K}^2 e un esagono regolare con centro $(0,0)$ e un vertice in $(0,y)$, dove $0 < y < 1$. Ricordiamo che in questo modello le geodetiche sono segmenti (Sezione 0.3). Siano $v_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \in T_{(0,y)}\mathbb{K}^2$ due vettori lungo i lati dell'esagono e sia θ l'angolo tra v_1 e v_2 . L'espressione della metrica in funzione di y è

$$g_B = \frac{1}{1-y^2}(dx^2 + \frac{y^2}{1-y^2}dy^2).$$

Segue che

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{g_B}^2 &= \|v_2\|_{g_B}^2 = \frac{1}{1-y^2}\left(1 + \frac{y^2}{4(1-y^2)}\right) \\ \langle v_1, v_2 \rangle_{g_B} &= \frac{1}{1-y^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{y^2}{4(1-y^2)}\right), \end{aligned}$$

e attraverso semplici manipolazioni algebriche si trova

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_{g_B}}{\|v_1\|_{g_B} \|v_2\|_{g_B}} = \frac{3y^2 - 2}{4 - 3y^2}.$$

Allora per $y = 0$ vale $\theta = \frac{2}{3}\pi$, intuibile dal fatto che in $(0, 0)$ la metrica g_B coincide con l'eulidea, mentre per $y \rightarrow 1$ si ha $\theta \rightarrow 0$. Per il Teorema dei valori intermedi deve esistere $y_0 \in (0, 1)$ tale che per l'esagono in questione si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$. \square

Un altro ingrediente necessario alla dimostrazione è una variante dell'operazione di incollamento di due varietà lungo il bordo tramite una mappa. In generale date due varietà differenziabili M, N e un diffeomorfismo $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$, lo spazio $M \cup_\psi N$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile [Lee12, Thm. 9.29]. Nel nostro caso l'obbiettivo è scomporre Σ_g con $g \geq 2$ in pezzi più semplici, mostrare che questi pezzi ammettono metrica iperbolica e concludere che allora anche Σ_g ammette metrica iperbolica. Il problema di questa strategia è che nulla ci garantisce che l'operazione di incollamento sia compatibile con la metrica delle due varietà che stiamo incollando. Per ovviare al problema introduciamo una particolare classe di varietà con bordo:

Definizione 3.15 (bordo geodetico). Sia (M, g) una varietà Riemanniana con bordo. Diciamo che M è una *varietà iperbolica con bordo geodetico* se ogni punto di M ha un intorno aperto isometrico ad un aperto di \mathbb{D}^n oppure del semipiano $\mathbb{D}^n \cap \{x_n \geq 0\}$.

Vediamo ora come questo tipo di varietà è utile nel caso di incollamenti:

Proposizione 3.16 (taglia e cucì iperbolico). *Siano (M, g_M) e (N, g_N) due varietà iperboliche con bordo geodetico e sia $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$ un'isometria. Allora la varietà $M \cup_\psi N$ ha una naturale struttura di varietà iperbolica.*

Dimostrazione. Sia $\pi: M \sqcup N \rightarrow M \cup_\psi N$ la proiezione al quoziente, chiaramente gli unici punti problematici sono quelli di $\pi(\partial M) = \pi(\partial N)$. Fissiamo $p \in \partial M$ e sia U un suo intorno aperto in M tale che esiste $\alpha: U \rightarrow \mathbb{D}^n \cap \{x_n \geq 0\}$ isometria sull'immagine. Analogamente sia V un intorno aperto in N di $\psi(p)$ tale che $\psi(U \cap \partial M) \subset V$ e sia $\beta: V \rightarrow \mathbb{D}^n \cap \{x_n \geq 0\}$ isometria sull'immagine. A meno di comporre con isometrie possiamo supporre di avere $\alpha(p) = \beta(\psi(p)) = 0$ e $\beta: V \rightarrow \mathbb{D}^n \cap \{x_n \leq 0\}$. Identificando U e V con le rispettive immagini rispetto α e β possiamo osservare che

$$\psi|_{U \cap \mathbb{D}^{n-1}}: U \cap \mathbb{D}^{n-1} \rightarrow V \cap \mathbb{D}^{n-1}$$

è un'isometria locale iniettiva. Per il Lemma 3.3 $\psi|_U$ si estende in maniera unica ad un'isometria locale $\tilde{\psi}: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ tale che $\tilde{\psi}(0) = 0$, $d\tilde{\psi}_0|_{T_0\mathbb{D}^{n-1}} = d\psi_0$ e $d\tilde{\psi}_0|_{(T_0\mathbb{D}^{n-1})^\perp} = id$. Dato che $\tilde{\psi}$ è un'isometria locale segue è localmente invertibile, concludiamo che $\tilde{\psi}$ fornisce un'isometria tra una palla aperta centrata in $0 \in \mathbb{D}^n$ e un intorno di $\pi(p) \in U \cup_\psi V$. \square

Siamo finalmente pronti per enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione:

Teorema 3.17. *Ogni superficie differenziabile chiusa, connessa e orientabile ammette una metrica a curvatura costante. In particolare il tipo di metrica dipende dal segno della caratteristica di Eulero della superficie.*

Dimostrazione. Il caso di \mathbb{S}^2 è immediato per definizione di metrica ellittica. Per quanto riguarda il toro osserviamo che il gruppo $\Gamma = \langle a, b \mid [a, b] = id \rangle < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da $a(x, y) = (x + 1, y)$ e $b(x, y) = (x, y + 1)$ è discreto e agisce in maniera propriamente discontinua. Inoltre è chiaro che $\mathbb{R}^2/\Gamma \cong \mathbb{T}^2$, ne segue che per il Teorema di Killing-Hopf \mathbb{T}^2 eredita una metrica piatta che rende la proiezione al quoziente $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un'isometria locale. Rimane da analizzare Σ_g per $g \geq 2$. Incollando come nella Figura 3.2 due esagoni geodetici iperbolici con angoli retti, la cui esistenza è garantita dal Lemma 3.14, otteniamo uno spazio chiamato *pantaloni topologici*. Questo è varietà iperbolica con bordo geodetico, ma per provarlo bisogna distinguere due casi. Per i punti interni ai lati basta applicare la Proposizione 3.16 mentre per i vertici si ragiona analogamente come nella dimostrazione della stessa proposizione, sfruttando il fatto che gli angoli sono retti quindi ogni vertice ha un intorno isometrico a un intorno di 0 in $\mathbb{D}^2 \cap \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. A questo punto è facile osservare che ogni superficie di genere almeno due è ottenibile attraverso incollamenti di pantaloni, la decomposizione di Σ_2 come esempio è rappresentata nella Figura 3.3. Sempre per la Proposizione 3.16 concludiamo che ogni superficie Σ_g con $g \geq 2$ ammette metrica iperbolica. \square

3.3 Simplessi nello spazio iperbolico

In vista del prossimo capitolo studiamo alcune proprietà dei simplessi nello spazio iperbolico. Innanzitutto è utile compattificare lo spazio iperbolico aggiungendo il bordo, questo ci permetterà di formalizzare il concetto di simplessi coi vertici “all'infinito”.

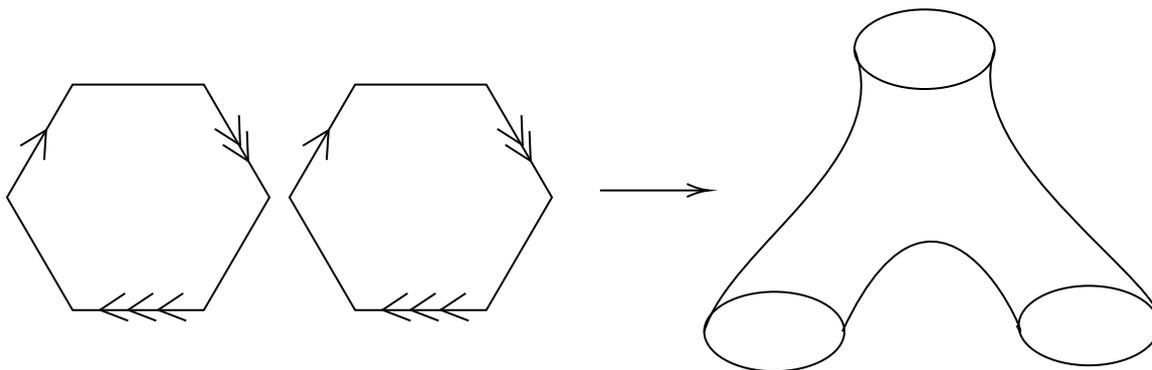


Figura 3.2: Costruzione dei pantaloni topologici

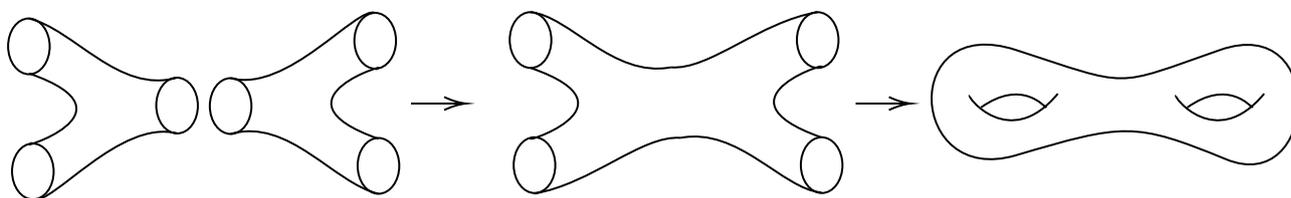


Figura 3.3: Decomposizione di genus 2 in pantaloni

Definizione 3.18. Diciamo che due geodetiche γ_1, γ_2 massimali in \mathbb{H}^n parametrizzate per lunghezza d'arco sono *asintoticamente parallele*, e scriviamo $\gamma_1 \sim \gamma_2$, se

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < +\infty.$$

Proposizione 3.19. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra classi di equivalenza di geodetiche asintoticamente parallele e i punti di ∂D^n .*

Dimostrazione. Sia γ una geodetica massimale. Nel modello di Poincaré \mathbb{D}^n le geodetiche sono archi di circonferenze perpendicolari a ∂D^n . Ne segue che è ben definito il limite $p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) \in \partial D^n$. Mostriamo che date γ_1, γ_2 geodetiche massimali parametrizzate per lunghezza d'arco abbiamo $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se e solo se $p_1 = p_2$. A meno di isometrie assumiamo che $p_1 = (0, -1)$. Ricordando che il modello a semipiano \mathbb{U}^n è ottenuto attraverso un'inversione di \mathbb{D}^n (Sezione 0.3), il punto p_1 in \mathbb{U}^n è il punto all'infinito. Ne segue che γ_1 in \mathbb{U}^n è una semiretta verticale, mentre γ_2 è verticale se e solo se $p_1 = p_2$.

Supponiamo $p_1 = p_2$. Allora, come spiegato nella Sezione 0.3, le due geodetiche verticali (che supponiamo parametrizzate per lunghezza d'arco) hanno equazioni del tipo:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t) \\ \gamma_2(t) &= (y_1, \dots, y_{n-1}, e^{t+C})\end{aligned}$$

dove $C \geq 0$ è una costante reale che indica lo sfasamento. Stimiamo dall'alto la loro distanza: sia $\phi(l) = \gamma_1(t)(1-l) + \gamma_2(t)l$ con $0 \leq l \leq 1$. Allora:

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq L(\phi) = \int_0^1 \|\phi'(t)\| dt = \int_0^1 \frac{\|\phi'(t)\|_E}{\phi(t)} dt$$

dove $\|\cdot\|_E$ indica la norma euclidea. Inoltre $\|\phi'(l)\|_E = \|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|_E \leq Me^t(e^C - 1)$ per qualche costante $M > 0$ vista la costanza delle prime $n - 1$ coordinate. Infine

$$L(\phi) \leq \int_0^1 \frac{Me^t(e^C - 1)}{e^t} dt = M(e^C - 1)$$

quindi le due geodetiche sono asintoticamente parallele.

Nel secondo caso $p_1 \neq p_2$, quindi la geodetica in direzione p_2 è una semicirconferenza. In particolare per ogni $M > 0$ si ha che definitivamente $\gamma_1(t) \in \{x_n > M\}$ e $\gamma_2(t) \in \{x_n < \frac{1}{M}\}$. Consideriamo come prima una curva ϕ connettente $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ e sia $[0, T]$ il suo dominio. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\|\phi'(t)\|_E = 1$ e di conseguenza $|\phi'_n(t)| < 1$. Allora:

$$L(\phi) = \int_0^T \|\phi'(t)\| dt = \int_0^T \frac{1}{\phi_n(t)} dt \geq \int_0^T \frac{|\phi'_n(t)|}{\phi_n(t)} dt = |[\ln(\phi_n(t))]_{t=0}^{t=T}| \geq 2 \ln(M).$$

Per l'arbitrarietà di $M > 0$, in definitiva abbiamo $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$. \square

Grazie alla proposizione precedente possiamo compatificare lo spazio iperbolico:

Definizione 3.20. Chiamiamo *bordo di \mathbb{H}^n* l'insieme

$$\partial\mathbb{H}^n := \{\text{classi di equivalenza di geodetiche massimali e asintoticamente parallele}\}.$$

Diciamo che $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \sqcup \partial\mathbb{H}^n$ dotato della topologia di D^n è lo spazio iperbolico compatificato.

Osservazione 3.21. In seguito useremo tacitamente il seguente fatto: ogni isometria di \mathbb{H}^n si estende in maniera continua ad una mappa $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$. Si noti che una tale mappa ha sempre un punto fisso per il Teorema di Brouwer [Rot98, Thm. 0.3].

I punti di $\partial\mathbb{H}^n$ vengono chiamati *punti all'infinito* perchè sono interpretabili come i punti raggiunti dalle geodetiche a “tempo infinito”. Sul bordo $\partial\mathbb{H}^n$ non esiste una metrica canonica, ma questo non costituisce un problema visto che non considereremo segmenti giacenti su di esso. Il prossimo passo è definire il concetto di simpleso nello spazio iperbolico, volendo si può parlare di poligoni in generale [Mar24, Sezione 3.2] ma nel nostro caso non sarà necessario. Per trasportare il concetto di simpleso in uno spazio curvo la strada più logica è estendere il concetto di convessità, che rimane inalterato rispetto al caso euclideo sostituendo i segmenti con segmenti geodetici.

Definizione 3.22. Diciamo che un sottoinsieme $A \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ è *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ l'unico segmento geodetico che li connette è interamente contenuto in A . Definiamo poi l'*inviluppo convesso* di un sottoinsieme $A \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ come il più piccolo insieme convesso che lo contiene.

Osservazione 3.23. Come nel caso euclideo è facile notare che l'intersezione arbitraria di insiemi convessi è ancora convessa. Quindi la definizione data di inviluppo convesso è ben posta. Infatti se ciò non fosse vero non avrebbe senso parlare del “più piccolo insieme”.

Definizione 3.24 (simplessi iperbolici). Chiamiamo *simpleso* in $\overline{\mathbb{H}^n}$ l'inviluppo convesso di $n + 1$ punti *affinemente indipendenti*, nel senso che per ogni coppia di punti il segmento geodetico che li connette non contiene nessuno dei restanti. Diciamo inoltre che un simpleso è *ideale* se i suoi vertici appartengono tutti a $\partial\mathbb{H}^n$ e diciamo che è *regolare* se ogni permutazione dei suoi vertici è indotta da un'isometria di \mathbb{H}^n .

Proposizione 3.25. *Ogni simpleso in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è contenuto in un simpleso ideale.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione con caso base $n = 1$ dove l'affermazione è banalmente vera. Sia Δ il simpleso considerato. Per n generico possiamo a meno di isometrie supporre che i primi n punti di Δ giaciano nel piano $\{x_n = 0\}$. Per ipotesi induttiva esiste Δ' simpleso ideale di \mathbb{H}^{n-1} che contiene $\Delta \cap \{x_n = 0\}$. Consideriamo la geodetica che connette uno dei vertici di Δ' con il vertice restante di Δ , sia p il punto di arrivo su $\partial\mathbb{H}^n$. Allora l'inviluppo convesso di Δ' e p è un simpleso ideale che, contenendo tutti i vertici di Δ , per convessità deve contenere anche Δ . \square

In vista del prossimo capitolo è fondamentale studiare l'insieme dei possibili volumi dei simplessi iperbolici (anche ideali). In particolare siamo interessati a capire se tale insieme è

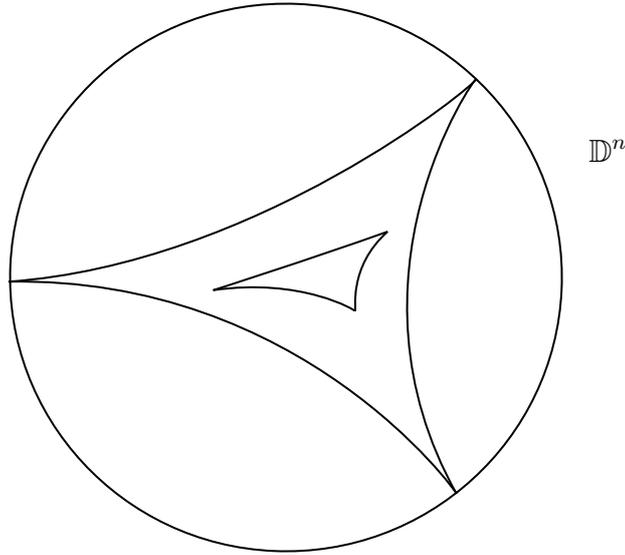


Figura 3.4: Ogni semplice iperbolico è contenuto in un semplice ideale

superiormente limitato, se ammette massimo e in tal caso quali sono i semplici che raggiungono tale valore. Il caso $n = 2$ è abbastanza semplice:

Proposizione 3.26. *Sia Δ un semplice in $\overline{\mathbb{H}^2}$. Allora $\text{Vol}(\Delta) \leq \pi$ e vale l'uguaglianza se e solo se Δ è ideale.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente è chiaro che il volume massimo può essere assunto solamente da un semplice ideale, quindi assumiamo d'ora in poi che Δ sia ideale. A meno di isometrie possiamo assumere che uno dei vertici di Δ sia $(-1, 0)$. Allora nel modello a semipiano Δ corrisponde a un insieme del tipo

$$\{(x, y) \mid x_0 - R < x < x_0 + R, y > \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}\} \subset \mathbb{U}^2,$$

per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$ e $R \in (0, +\infty)$. Indicando con g_U la metrica si ha che la forma di volume è $dV_u = \sqrt{\det g_u} dx \wedge dy = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$ [Lee18, Prop. 2.41]. Integrando si prova la tesi:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta) &= \int_{\Delta} dV_u = \int_{x_0-R}^{x_0+R} \int_{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy dx \\ &= \int_{x_0-R}^{x_0+R} \frac{1}{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \pi, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio è stata fatta la sostituzione $x = x_0 + Ru$. □

Arrivati a questo punto possiamo dimostrare che l'insieme dei volumi dei semplici iperbolici è superiormente limitato. Formalmente vogliamo dimostrare che:

$$\sup\{\text{Vol}(\Delta) \mid \Delta \subset \overline{\mathbb{H}^n} \text{ è un semplice iperbolico}\} < +\infty.$$

Per fare ciò premettiamo un lemma di algebra lineare.

Lemma 3.27. *Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore e sia I_n la matrice identità di ordine n . Allora*

$$\det(I_n + vv^T) = 1 + \|v\|^2,$$

dove la norma è quella euclidea.

Dimostrazione. Indichiamo con “spec” lo spettro di una matrice, che ricordiamo essere l'insieme degli autovalori. È immediato osservare che vale la relazione

$$\text{spec}(I_n + vv^T) = 1 + \text{spec}(vv^T).$$

Inoltre per il Teorema spettrale le matrici $I_n + vv^T$ e vv^T sono entrambe diagonalizzabili, quindi il loro determinante coincide col prodotto degli autovalori. Affinchè $x \in \mathbb{R}^n$ sia un autovettore di vv^T deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$vv^T x = \lambda x,$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $v^T x$ è uno scalare, pertanto se $x \in \text{span}\{v\}^\perp$ vale che x appartiene all'autospazio associato all'autovalore 0. Cercando invece autovalori positivi notiamo che dalla relazione $(v^T x)v = \lambda x$ segue necessariamente $x \in \text{span}\{v\}$, perciò poniamo $x = v$ e la relazione diventa $\|v\|^2 v = \lambda v$. Concludiamo che abbiamo due autospazi: quello associato a 0 di dimensione $n - 1$ e quello associato a $\|v\|^2$ di dimensione 1. Perciò abbiamo $\text{spec}\{I_n + vv^T\} = \{1, 1 + \|v\|^2\}$ e la tesi segue dal fatto che $1 + \|v\|^2$ ha molteplicità 1. \square

Teorema 3.28. *Sia $\Delta \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ un semplice, con $n \geq 2$, allora vale la relazione:*

$$\text{Vol}(\Delta) \leq \frac{\pi}{(n-1)!}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione dove il caso base $n = 2$ è la Proposizione 3.26, assumiamo quindi vero il risultato in dimensione $n - 1$. Per la Proposizione 3.25 Δ è contenuto in un semplice ideale, quindi senza perdita di generalità assumiamo che Δ sia ideale. Siano p_0, \dots, p_n i suoi vertici, a meno di isometrie possiamo supporre che

p_n sia il punto all'infinito nel modello a semipiano \mathbb{U}^n . Sia F la faccia del simpleso con vertici p_0, \dots, p_{n-1} e chiamiamo P la sua proiezione sulla base del semipiano. La Figura 3.5 fornisce una rappresentazione grafica di Δ nel caso $n = 3$. Mostriamo allora che vale la disuguaglianza

$$\text{Vol}(M) \leq \frac{\text{Vol}(F)}{n-1},$$

dove il volume di F è inteso $(n-1)$ -dimensionale. La tesi seguirà dall'ipotesi induttiva applicata al volume di F . Siano (y_1, \dots, y_n) le coordinate di \mathbb{U}^n , consideriamo la funzione "altezza" $h: P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tale che per ogni $x \in P$ si ha $(x, h(x)) \in F$. Indicando con g_U la metrica del semipiano, la formula di volume è data da

$$dV = \sqrt{\det g_U} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \frac{1}{y_n^n} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Pertanto il volume di Δ si esprime come

$$\text{Vol}(\Delta) = \int_{\Delta} dV = \int_P \int_{h(x)}^{+\infty} \frac{1}{y_n^n} dy_n dy_1 \dots dy_{n-1} = \frac{1}{n-1} \int_P \frac{1}{h(x)^{n-1}} dy_1 \dots dy_{n-1}.$$

Per calcolare invece il volume di F cerchiamo l'espressione della metrica indotta dallo spazio ambiente. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{R}^n , dato che F è il grafico della funzione h si ha che per ogni $x \in P$ l'insieme $\{e_i + dh(e_i)e_n\}_{1 \leq i < n}$ è una base per $T_{(x, h(x))}F$. La matrice della metrica indotta su F , rispetto alle coordinate (y_1, \dots, y_{n-1}) , è data da $(g_F)_{ij} = \langle e_i + dh(e_i)e_n, e_j + dh(e_j)e_n \rangle_{g_U}$. Un rapido calcolo mostra che tale matrice è

$$g_F = \frac{1}{h(x)^2} (I_{n-1} + (\nabla h)^T (\nabla h)),$$

dove I_{n-1} è la matrice identità di ordine $n-1$ e ∇ indica l'usuale gradiente euclideo. Per il lemma precedente si ha che la forma di volume indotta su F è

$$dV_F = \sqrt{\det g_F} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} = \frac{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}}{h(x)^{n-1}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}.$$

Il volume di F si esprime quindi come

$$\text{Vol}(F) = \int_F dV_F = \int_P \frac{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}}{h(x)^{n-1}} dy_1 \dots dy_{n-1},$$

e confrontando l'espressione col volume di Δ si trova disuguaglianza voluta:

$$(n-1) \text{Vol}(\Delta) \leq \text{Vol}(F).$$

□

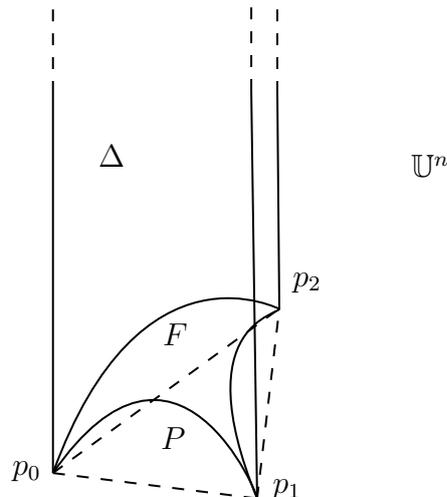


Figura 3.5: Il semplice Δ del Teorema 3.28, caso $n = 3$

Purtroppo in dimensione maggiore di due non vale la generalizzazione della Proposizione 3.26: semplici ideali non hanno necessariamente lo stesso volume. In particolare i semplici di volume massimo sono quelli ideali e regolari. In dimensione 3 è possibile dimostrarlo attraverso considerazioni geometriche e particolari simmetrie di cui godono solamente i 3-simplessi iperbolici [Mar24, Sezione 13.1]. Il teorema che tra poco enunceremo estende questo risultato in dimensione arbitraria e la sua importanza è motivata dal Principio di proporzionalità (Teorema 4.1). Infatti gli autori dell'articolo osservano che la dimostrazione di Gromov, data per le 3-varietà, si generalizza senza problemi a tutte le dimensioni una volta dimostrata la caratterizzazione dei semplici di volume massimo. La dimostrazione del seguente teorema è assolutamente non banale e sfrutta un argomento per induzione, confrontando i volumi degli n -simplessi ideali con quelli degli $(n + 1)$ -simplessi ideali.

Teorema 3.29 (Haagerup e Munkhol, [HM81]). *Nello spazio iperbolico $\overline{\mathbb{H}^n}$, con $n \geq 2$, un semplice ha volume massimo se e solo se è ideale e regolare. Inoltre, denotando tale volume con v_n , vale la seguente comparazione asintotica:*

$$v_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n!} e.$$

Capitolo 4

Il Principio di proporzionalità

Questo capitolo è dedicato alla dimostrazione del seguente teorema, che costituisce il risultato principale della tesi:

Teorema 4.1 (Principio di proporzionalità). *Sia M una n -varietà iperbolica chiusa, connessa ed orientabile. Allora*

$$\text{Vol}(M) = v_n \|M\|,$$

dove v_n è il volume di un simpleso ideale e regolare nello spazio iperbolico.

Una volta conclusa la dimostrazione discuteremo alcune delle numerose conseguenze. Nonostante ciò si può già assaporare la profondità del risultato osservando che l'uguaglianza presenta una quantità puramente topologica e una dipendente dalla metrica.

Per tutto il capitolo useremo tacitamente il Teorema di Killing-Hopf per dire che la varietà considerata è isometrica ad un quoziente \mathbb{H}^n/Γ , con $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sottogruppo discreto che agisce in maniera propriamente discontinua. Inoltre dV indicherà sempre la forma di volume. Per le successive dimostrazioni ricordiamo la definizione di integrale su un ciclo:

Definizione 4.2 (integrazione su cicli). Siano M una n -varietà differenziabile, $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ un k -simpleso singolare liscio e $\omega \in \Omega^k(M)$ una k -forma chiusa. Si definisce integrale di ω su σ :

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.$$

L'integrale su un una catena $c \in C_k(M; \mathbb{R})$ si definisce estendendo per linearità, mentre l'integrale su un elemento di $H_k(M; \mathbb{R})$ si definisce come l'integrale su un qualsiasi suo

rappresentate. Inoltre, se M è orientabile e σ è un n -simpleso singolare liscio, denotiamo

$$\text{Vol}(\sigma) := \int_{\sigma} dV \in \mathbb{R}$$

Applicando il Teorema di Stokes si può verificare che la definizione appena data è ben posta [Lee12, p. 482]. Ricordiamo inoltre che ogni classe di omologia ha un rappresentante costituito da semplici lisci [Lee12, Thm. 18.7]. La seguente osservazione sarà fondamentale in seguito:

Osservazione 4.3. Se M è una n -varietà Riemanniana chiusa, connessa ed orientabile possiamo calcolarne il volume integrando la forma di volume sulla classe fondamentale:

$$\text{Vol}(M) = \int_{[M]_{\mathbb{R}}} dV.$$

Infatti dato che ogni varietà liscia è triangolabile [Whi40], possiamo considerare i semplici $\sigma_1, \dots, \sigma_r: \Delta^n \rightarrow M$ di una triangolazione. Sia $\sum_{k=1}^r a_k \sigma_k \in C_k(M; \mathbb{R})$ un rappresentante della classe fondamentale, ragionando come nell'Esempio 2.22 si trova $|a_k| = 1$ per ogni k : usiamo questo ciclo per calcolare l'integrale. Ricordiamo che per ogni $p \in M$ la proiezione di $[M]_{\mathbb{R}}$ su $H_n(M | p)$ è l'orientazione locale. Se p è punto interno di $\sigma_k(\Delta^n)$ si ha che l'immagine della proiezione è $a_k \sigma_k$, quindi $a_k = 1$ se e solo se σ_k come mappa preserva l'orientazione. Segue che $a_k \int_{\sigma_k} dV > 0$ per ogni k , e dato che l'intersezione di due semplici ha misura nulla:

$$\int_{[M]_{\mathbb{R}}} dV = \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} dV = \sum_{i=1}^r \int_{\sigma_i(\Delta^n)} dV = \text{Vol}(M).$$

4.1 Straightening

In generale un simpleso singolare può essere arbitrariamente complicato e difficile da studiare. Se riuscissimo a restringere il campo di studio a semplici "semplici" potremmo ridurre la difficoltà del problema: questa idea rappresenta la filosofia dietro allo straightening dei semplici.

Osservazione 4.4. Consideriamo il modello a iperboloidi $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ col prodotto Lorentziano. È facile notare che $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle \geq -1\}$ è convesso, per i punti $x \in E$ definiamo la norma come $\|x\| = \sqrt{-\langle x, x \rangle}$. Consideriamo poi p_0, \dots, p_k punti in \mathbb{H}^n e definiamo il simpleso singolare

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta^k &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ (t_0, \dots, t_k) &\mapsto \frac{t_0 p_0 + \dots + t_k p_k}{\|t_0 p_0 + \dots + t_k p_k\|} \end{aligned} \tag{4.1}$$

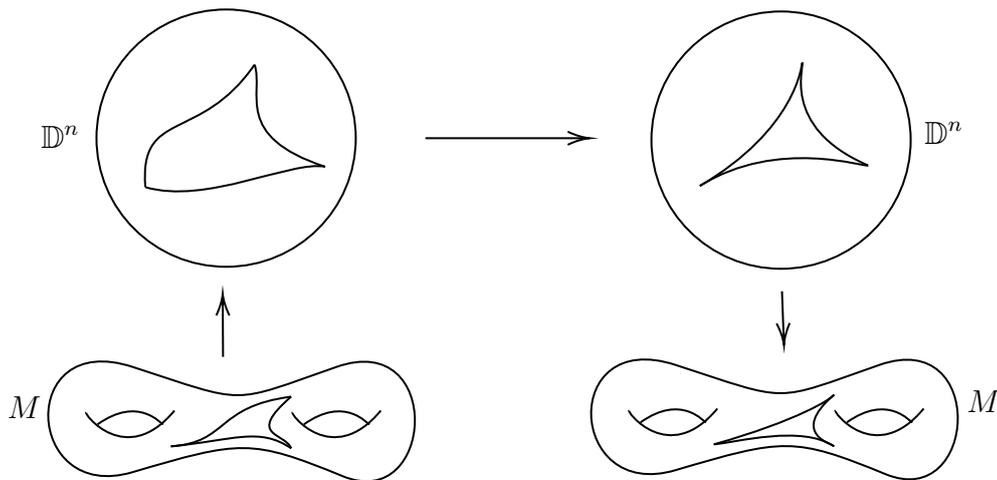


Figura 4.1: Straightening di un semplice

La buona definizione della funzione segue dalla convessità di E . Dato che le geodetiche nel modello dell'iperboloide si ottengono intersecandolo con piani passanti per l'origine [Mar24, Prop. 2.1.12], concludiamo che $\sigma(\Delta^k)$ è l'involuppo convesso dei punti p_1, \dots, p_k .

Definizione 4.5 (straightening). Sia $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una n -varietà iperbolica chiusa, connessa ed orientabile. Dato un semplice singolare $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ definiamo il semplice *straightened* $\sigma^{st}: \Delta^k \rightarrow M$ secondo i seguenti passaggi:

1. consideriamo un qualsiasi sollevamento $\tilde{\sigma}: \Delta^k \rightarrow \mathbb{H}^n$,
2. sia $\tilde{\sigma}^{st}: \Delta^k \rightarrow \mathbb{H}^n$ l'involuppo convesso dei vertici di $\tilde{\sigma}$ come nella Formula (4.1),
3. si definisce $\sigma^{st} := \pi \circ \tilde{\sigma}^{st}$.

Osservazione 4.6. In base alla definizione precedente possiamo, estendendo per linearità, costruire la mappa

$$\begin{aligned} st: C_k(M; \mathbb{R}) &\rightarrow C_k(M; \mathbb{R}) \\ \sigma &\mapsto \sigma^{st} \end{aligned}$$

definita per ogni $k \geq 0$. Dato che la definizione di st coinvolge solo l'immagine dei vertici dei semplici singolari è chiaro che commuta coi differenziali, quindi abbiamo appena definito un morfismo di complessi $st: C_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow C_*(M; \mathbb{R})$.

Lemma 4.7. *Il morfismo $st: C_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow C_*(M; \mathbb{R})$ è omotopo all'identità.*

Dimostrazione. Sia $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ un sempliceo singolare e indichiamo con $\tilde{\sigma}$ un suo sollevamento al rivestimento universale. Usando le stesse notazioni dell'Osservazione 4.4 definiamo

$$F^\sigma: \Delta^k \times [0, 1] \rightarrow M$$

$$(t, \lambda) \mapsto \frac{(1 - \lambda)\tilde{\sigma}(t) + \lambda\tilde{\sigma}^{st}(t)}{\|(1 - \lambda)\tilde{\sigma}(t) + \lambda\tilde{\sigma}^{st}(t)\|}$$

Allora $H^\sigma = \pi \circ F^\sigma$ è un'omotopia tra σ e σ^{st} .

Interpretando σ come una mappa continua tra Δ^k e M , questa induce un morfismo di complessi $C_*(\sigma): C_*(\Delta^k) \rightarrow C_*(M)$ e vale $C_k(\sigma)(id_{\Delta^k}) = \sigma$. L'omotopia appena costruita induce un'omotopia a livello di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(\Delta^k) & \longrightarrow & C_k(\Delta^k) & \longrightarrow & C_{k-1}(\Delta^k) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \begin{array}{c} \swarrow T_k^\sigma \\ C_k(\sigma^{st}) \\ \downarrow C_k(\sigma) \\ \swarrow T_{k-1}^\sigma \end{array} & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(M) & \longrightarrow & C_k(M) & \longrightarrow & C_{k-1}(M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

e in particolare $\sigma - \sigma^{st} = T_{k-1}^\sigma \partial(id_{\Delta^k}) + \partial T_k^\sigma(id_{\Delta^k})$. Allora possiamo definire una successione di morfismi $T_k: C_k(M) \rightarrow C_{k+1}(M)$ come $T_k(\sigma) = T_k^\sigma(id_{\Delta^k})$, dove $\sigma \in C_k(M)$. Se mostrassimo che $T_{k-1} \partial \sigma = T_{k-1}^\sigma \partial(id_{\Delta^k})$ per ogni $\sigma \in C_k(M)$ e per ogni $k \geq 0$, allora seguirebbe che $(T_k)_{k \geq 0}$ è l'omotopia cercata. In particolare basta mostrare che

$$T_{k-1} \sigma_i = T_{k-1}^\sigma id_{\Delta^k, i}$$

per ogni i , dove i a pedice indica l' i -esima faccia. Per definizione $T_{k-1} \sigma_i = T_{k-1}^{\sigma_i}(id_{\Delta^{k-1}})$, e dalla formula esplicita per il morfismo T_k [Hat02, Thm. 2.10] è chiaro che i due termini coincidono. Infatti, chiamando v_0, \dots, v_{k-1} e w_0, \dots, w_{k-1} i vertici rispettivamente della base inferiore e superiore di $\Delta^{k-1} \times [0, 1]$, vale:

$$T_{k-1}^{\sigma_i}(id_{\Delta^{k-1}}) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j H^{\sigma_i}(\langle v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_{k-1} \rangle)$$

$$T_{k-1}^\sigma(id_{\Delta^k, i}) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j H^\sigma \circ (id_{\Delta^k, i} \times id_{[0,1]})(\langle v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_{k-1} \rangle)$$

Ma per definizione dell'omotopia $H^\sigma \circ (id_{\Delta^k, i} \times id_{[0,1]}) = H^{\sigma_i}$, da cui la tesi. \square

Il precedente lemma costituisce l'ingrediente principale per studiare il volume simpliciale delle varietà iperboliche. Supponiamo che $c = \sum_{i=1}^l x_i \sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$ sia un rappresentante della classe fondamentale, allora $c = \sum_{i=1}^l x_i \sigma_i^{st}$ è ancora un rappresentante della classe fondamentale con norma ℓ^1 minore o uguale. Quindi ai fini dello studio del volume simpliciale non perdiamo informazioni studiando solamente catene di semplici straightened. Grazie a questo fatto possiamo dedurre la positività del volume simpliciale.

Osservazione 4.8. Sia $\sigma: \Delta^n \rightarrow M$ un sempliceo singolare liscio e sia $\tilde{\sigma}: \Delta^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ un qualsiasi suo sollevamento. Allora

$$\text{Vol}(\sigma) = \int_{\Delta^n} \sigma^* dV_M = \int_{\Delta^n} \tilde{\sigma}^* \circ \pi^* dV_M,$$

e

$$\text{Vol}(\tilde{\sigma}) = \int_{\Delta^n} \tilde{\sigma}^* dV_{\mathbb{H}^n}.$$

Ma dato che $\pi^* dV_M = dV_{\mathbb{H}^n}$ segue che il volume di un sempliceo coincide col volume del suo sollevamento.

Proposizione 4.9. *Sia M una n -varietà iperbolica chiusa, connessa ed orientabile. Allora*

$$\text{Vol}(M) \leq v_n \|M\|.$$

Dimostrazione. Sia $c = \sum_{i=1}^l x_i \sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$ un rappresentante di $[M]_{\mathbb{R}}$, per quanto detto prima possiamo supporre $\sigma_i = \sigma_i^{st}$. Allora

$$\text{Vol}(M) = \int_{[M]_{\mathbb{R}}} dV = \sum_{i=1}^l x_i \int_{\sigma_i} dV.$$

Ricordando che ogni sempliceo iperbolico è contenuto in un sempliceo ideale (Proposizione 3.25) e che v_n è un maggiorante per il volume dei semplici iperboliche (Teorema 3.29) si ha:

$$\text{Vol}(M) \leq \sum_{i=1}^l |x_i| \text{Vol}(\sigma_i) \leq \sum_{i=1}^l |x_i| v_n = v_n \|c\|_1.$$

Passando all'estremo inferiore su tutti i rappresentanti troviamo la disuguaglianza voluta. \square

Corollario 4.10. *Il Teorema 4.1 è vero per le superfici chiuse, connesse e orientabili di genere almeno due.*

Dimostrazione. Dal capitolo precedente (Teorema 3.17) sappiamo che le superfici Σ_g , con $g \geq 2$, ammettono metrica iperbolica. Per l'Esempio 2.22 vale la disuguaglianza $\|\Sigma_g\| \leq 2|\chi(\Sigma_g)|$, e applicando il Teorema di Gauss-Bonnet troviamo $\|\Sigma_g\| \leq \text{Vol}(\Sigma_g)/\pi$. D'altra parte la Proposizione 3.26 mostra che $v_2 = \pi$. La proposizione precedente fornisce così la disuguaglianza opposta. \square

Osservazione 4.11. Nel dimostrare la disuguaglianza $v_n\|M\| \geq \text{Vol}(M)$ non abbiamo sfruttato appieno il Teorema 3.29: abbiamo usato solamente il fatto che esiste un maggiorante per il volume dei semplici iperbolici. Alla luce di ciò è possibile dedurre, grazie al Teorema 3.28, una disuguaglianza più debole:

$$\|M\| \geq \frac{(n-1)!}{\pi} \text{Vol}(M).$$

Quindi per mostrare che le varietà iperboliche chiuse, connesse ed orientabili hanno volume simpliciale positivo non è necessario ricorrere al Teorema 3.29.

4.2 Cicli efficienti

Nella sezione precedente abbiamo dedotto la positività del volume simpliciale per le varietà iperboliche. Purtroppo estendere la disuguaglianza $\text{Vol}(\Sigma_g) \geq v_2\|\Sigma_g\|$ in dimensione arbitraria è molto più complicato del caso due dimensionale. Non daremo una dimostrazione completa dato che questa richiederebbe l'introduzione di concetti come misura di Haar e tassellazioni di Dirichlet. L'idea alla base è che, nella dimostrazione dell'altra disuguaglianza $\|M\|v_n \geq \text{Vol}(M)$, abbiamo sfruttato il fatto che la costante v_n è un maggiorante per il volume dei semplici iperbolici. Ovviamente un semplice iperbolico non ideale non potrà mai avere volume v_n , dato che questo richiederebbe che i vertici siano sul bordo di \mathbb{H}^n , ma possiamo provare ad avvicinarci a tale costante. Formalizziamo questa idea:

Definizione 4.12 (ciclo ε -efficiente). Siano $c = \sum_{i=1}^l x_i\sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$ un ciclo e $\varepsilon > 0$. Diciamo che c è ε -efficiente se soddisfa le seguenti:

- rappresenta la classe fondamentale,
- tutti i semplici σ_i sono straightened,
- i segni di x_i e $\text{Vol}(\sigma_i)$ sono concordi per ogni i ,

- $|\text{Vol}(\sigma_i)| \geq v_n - \varepsilon$ per ogni i .

La necessesità della terza richiesta è chiarita dal seguente lemma:

Lemma 4.13. *Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un ciclo ε -efficiente. Allora*

$$\text{Vol}(M) \geq v_n \|M\|.$$

Dimostrazione. Sia $c \in C_n(M; \mathbb{R})$ un ciclo ε -efficiente, segue

$$\text{Vol}(M) = \int_{[M]_{\mathbb{R}}} dV = \sum_{i=1}^l x_i \text{Vol}(\sigma_i) \geq \sum_{i=1}^l |x_i| (v_n - \varepsilon) \geq \|c\|_1 (v_n - \varepsilon).$$

Passando all'estremo inferiore sui rappresentati troviamo

$$\text{Vol}(M) \geq (v_n - \varepsilon) \|M\|$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ε . □

Per terminare la dimostrazione del Principio di proporzionalità (Teorema 4.1) rimane solo da mostrare l'esistenza dei cicli ε -efficienti. La dimostrazione completa è piuttosto articolata, come detto prima discutiamo solo le idee principali:

Proposizione 4.14. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ciclo ε -efficiente.*

Idea di dimostrazione. Innanzitutto fissiamo $t \in (0, +\infty)$. Consideriamo il semplice regolare euclideo di $T_0\mathbb{D}^n$ con baricentro nullo e un vertice in $(0, \dots, 0, t)$. Chiamiamo $\Delta(t)$ l'involuppo convesso dell'immagine dei vertici del semplice attraverso la mappa esponenziale $\exp_0: T_0\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$. A questo punto si dimostra l'esistenza di un ciclo $c(t) = \sum_{i=1}^l x_i \sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti:

1. i segni di x_i e $\text{Vol}(\sigma_i)$ sono concordi per ogni i ,
2. tutti i semplici σ_i sono straightened,
3. indichiamo con x_1^i, \dots, x_n^i i vertici di σ_i . Allora esiste una costante $d > 0$ tale che, per ogni σ_i , esiste un semplice isometrico a $\Delta(t)$ di vertici p_0, \dots, p_n tali che $d(p_k, x_k^i) < 2d$.

Sia allora

$$k_t = \int_{[c(t)]} dV = \sum_{i=1}^l x_i \text{Vol}(\sigma_i) > 0$$

dove la positività deriva dalla concordanza dei segni degli addendi. Visto che $H_n(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e la mappa

$$H_n(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \int_{\alpha} dV$$

è lineare, segue che $\tilde{c}(t) = \frac{\text{Vol}(M)}{k_t} c(t)$ rappresenta la classe fondamentale. Infine si sfrutta la terza proprietà per dimostrare che per $t \rightarrow +\infty$ i volumi (in valore assoluto) dei semplici che compongono $\tilde{c}(t)$ tendono a v_n . Essendo tali semplici in numero finito concludiamo che per t grande è soddisfatta la richiesta che $|\text{Vol}(\sigma_i)| \geq v_n - \varepsilon$ per ogni i . Pertanto $\tilde{c}(t)$ è il ciclo ε -efficiente cercato. \square

Una dimostrazione completa si può trovare nel libro “Lectures on Hyperbolic Geometry” di Benedetti e Petronio [BP92, Prop. C.4.16], oppure una versione più sintetica in “Geometric Topology” di Martelli [Mar24, Lemma 13.2.17]. Segnaliamo però che, per quanto sia interessante conoscere esattamente il volume simpliciale delle varietà iperboliche, la maggior parte delle conseguenze che tra poco discuteremo sfruttano solamente la sua positività.

4.3 Conseguenze e altri risultati

Come già anticipato la potenza dietro al Principio di proporzionalità (Teorema 4.1) è l’uguaglianza tra una quantità metrica ed una topologica. Possiamo interpretare il Principio di proporzionalità come una generalizzazione di Gauss-Bonnet a tutte le n -varietà iperboliche chiuse, connesse ed orientabili. Infatti nel caso delle superfici Σ_g dotate di metrica iperbolica, $g \geq 2$, il Teorema di Gauss-Bonnet ci dice che

$$-\text{Vol}(\Sigma_g) = \int_{\Sigma_g} K = 2\pi\chi(\Sigma_g);$$

abbiamo quindi una proporzionalità diretta tra il volume e la caratteristica di Eulero, che ricordiamo essere un invariante omotopico come il volume simpliciale. Grazie al Teorema di Gauss-Bonnet possiamo calcolare il volume simpliciale delle superfici:

Corollario 4.15. *Sia $g \geq 2$, allora $\|\Sigma_g\| = 2|\chi(\Sigma_g)| = 4|1 - g|$.*

Dimostrazione. Per il Principio di proporzionalità vale $\text{Vol}(\Sigma_g) = \pi\|\Sigma_g\|$, e per il Teorema di Gauss-Bonnet $\text{Vol}(\Sigma_g) = 2\pi|\chi(\Sigma_g)|$. \square

Prima di enunciare altri corollari ricordiamo che nel capitolo precedente abbiamo mostrato che le varietà iperboliche sono asferiche (Corollario 3.11).

Lemma 4.16. *Siano X e Y due varietà chiuse e connesse oppure due CW-complessi connessi, supponiamo inoltre che siano entrambi asferici. Allora X e Y sono omotopi se e solo se $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*

Dimostrazione. Se X e Y sono varietà chiuse sono omotope a CW-complessi [Hat02, Cor. A.12], quindi basta analizzare solo il secondo caso. Un'implicazione è ovvia, per quanto riguarda il viceversa sia $f: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ un isomorfismo. Per asfericità degli spazi esiste una mappa continua $g: X \rightarrow Y$ tale che $\pi_1(g) = f$ [Hat02, Prop. 1.B.9]. Allora g induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia e per il Teorema di Whitehead [Hat02, Thm. 4.5] è un'equivalenza omotopica. \square

Dall'invarianza omotopica del volume simpliciale (Corollario 2.10) deduciamo:

Corollario 4.17. *Siano M e N due n -varietà iperboliche chiuse, connesse ed orientabili. Se $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ allora $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(N)$.*

Questo corollario ci permette di intuire quanto il mondo delle varietà iperboliche sia rigido, nel senso che una proprietà topologica come il gruppo fondamentale è sufficiente a fissare un solo valore possibile per il volume. Uno dei motivi che hanno portato Gromov ad introdurre il volume simpliciale era di fornire una nuova dimostrazione, più geometrica dell'originale, del seguente teorema:

Teorema 4.18 (rigidità di Mostow). *Siano M, N due n -varietà iperboliche chiuse, connesse ed orientabili. Supponiamo inoltre che $n \geq 3$ e $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$. Allora ogni isomorfismo $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ è indotto da un'isometria $\tilde{\varphi}: M \rightarrow N$.*

Le conseguenze sono estremamente forti: una varietà iperbolica chiusa, connessa ed orientabile di dimensione almeno 3 è completamente determinata dal gruppo fondamentale. Le superfici invece ammettono una quantità non numerabile di metriche iperboliche non isometriche tra di loro, questo fatto è uno dei fondamenti della Teoria di Teichmüller [Mar24, Capitolo 7]. Tornando ai corollari del Principio di proporzionalità, mostriamo ora che possiamo dedurre informazioni non banali sui gradi delle mappe tra varietà iperboliche.

Corollario 4.19. *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra n -varietà iperboliche chiuse, connesse ed orientabili, allora $\text{Vol}(M) \geq |\deg(f)| \text{Vol}(N)$. Inoltre ogni mappa $f: M \rightarrow M$ ha grado $|\deg(f)| \leq 1$.*

Dimostrazione. Il primo punto è semplicemente una riformulazione del Corollario 2.9 attraverso il Principio di proporzionalità. La seconda parte invece segue dal fatto che, se esistesse una mappa di grado $|\deg(f)| \geq 2$, otterremmo l'assurdo $\|M\| = 0$ (Corollario 2.11). \square

Esempio 4.20. Applicando il Corollario alle superfici possiamo stabilire che Σ_g , con $g \geq 2$, non ammette mappe in sé stessa di grado maggiore o uguale a 2. Questo fatto è chiaramente in contrasto con quanto accade per $g = 0, 1$ dato che esistono mappe da Σ_g in sé stesse di grado arbitrario. Inoltre sia $0 \leq h < g$, allora ogni mappa $f: \Sigma_h \rightarrow \Sigma_g$ ha grado 0 (Corollario 2.9). Questo fatto si può dedurre anche dal Teorema 1.10 senza ricorrere al Principio di proporzionalità. Per una mappa $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$, dove $2 \leq h < g$, possiamo dedurre un maggiorante per $\deg(f)$:

$$|\deg(f)| \leq \frac{\text{Vol}(\Sigma_g)}{\text{Vol}(\Sigma_h)} = \frac{\chi(\Sigma_g)}{\chi(\Sigma_h)} = \frac{g-1}{h-1}$$

dove la prima uguaglianza segue dal Teorema di Gauss-Bonnet.

Imitando la dimostrazione del Principio di proporzionalità è possibile dedurre la positività del volume simpliciale per una classe molto più ampia di varietà.

Teorema 4.21 (Inoue e Yano, [IY82]). *Per ogni $n \geq 2$, esiste una costante $C_n > 0$ tale che valga la seguente affermazione. Sia M una n -varietà Riemanniana chiusa, connessa ed orientabile. Se esiste una costante $k > 0$ tale che le curvatures sezionali di M sono limitate dall'alto da $-k$, allora*

$$\|M\| \geq C_n k^{n/2} \text{Vol}(M).$$

Idea di dimostrazione. Fissiamo un punto $p \in M$. Per il Teorema di Cartan-Hadamard (Teorema 0.18), la mappa $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ è il rivestimento universale di M . In particolare, denotando con \tilde{M} il rivestimento universale, si ha $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^n$. Sempre per lo stesso teorema si ha che $\exp_q: T_q \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ è un diffeomorfismo sull'immagine per ogni punto $q \in \tilde{M}$, ne segue che per ogni coppia di punti di \tilde{M} esiste un'unica geodetica che li connette. Possiamo quindi generalizzare il concetto di involuppo convesso a un qualsiasi sottoinsieme di \tilde{M} . A questo punto è facile osservare che possiamo, come nel caso iperbolico, sollevare i semplici di M a \tilde{M} e considerare la loro versione straightened. Inoltre anche in questo caso il volume di un semplice coincide col suo sollevamento. Sfruttando la teoria dei campi di Jacobi, si dimostra che esiste una costante $B_n > 0$ tale che se σ è un n -simpleso straightened di \tilde{M} ,

si ha $|\text{Vol}(\sigma)| \leq B_n k^{-n/2}$ [IY82, Prop. 1]. Sia $c = \sum_{i=1}^l x_i \sigma_i \in C_n(M; \mathbb{R})$ un rappresentante della classe fondamentale composto da semplici straightened, imitando la dimostrazione della Proposizione 4.9 troviamo

$$\text{Vol}(M) = \int_{[M]_{\mathbb{R}}} dV \leq \sum_{i=1}^l |x_i| |\text{Vol}(\sigma_i)| \leq \|c\|_1 B_n k^{-n/2},$$

e passando all'estremo inferiore sui rappresentanti

$$\text{Vol}(M) \leq \|M\| B_n k^{-n/2}.$$

Riordinando i termini si trova la disuguaglianza cercata. \square

Un'altra generalizzazione del Principio di proporzionalità è il seguente Teorema di Gromov, noto come *Principio di proporzionalità di Gromov*, che estende il Teorema 4.1 a ogni varietà con curvatures sezionali non positive.

Teorema 4.22 (Principio di proporzionalità di Gromov, [Fri17, Thm. 8.13]). *Siano M e N due n -varietà Riemanniane chiuse, connesse ed orientabili con curvatures sezionali non positive. Se i rivestimenti universali di M e N sono isometrici (rispetto al pullback delle metriche), allora*

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)} = \frac{\|N\|}{\text{Vol}(N)}.$$

Ne segue che il rapporto $\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)}$ dipende solo dalla classe di isometria del rivestimento universale di M .

In generale non è nota la costante di proporzionalità tra volume e volume simpliciale. Possiamo quindi dire che il Teorema 4.1 è un caso particolare del precedente, dove però conosciamo esattamente il valore di tale costante. Tornando alle conseguenze del Principio di proporzionalità, possiamo sfruttare la positività del volume simpliciale nelle varietà iperboliche per stabilire il seguente:

Corollario 4.23. *Sia M una n -varietà differenziabile chiusa, connessa ed orientabile. Se $\|M\| = 0$ allora non può ammettere metrica iperbolica.*

Questo risultato suggerisce un collegamento tra il volume simpliciale e le possibili metriche ammissibili da una varietà. Sfruttano il Teorema di Bieberbach sulle varietà piatte possiamo generalizzare l'Osservazione 3.13 a tutte le dimensioni:

Proposizione 4.24. *Sia M una n -varietà differenziabile chiusa, connessa ed orientabile. Allora M può ammettere al più un solo tipo di metrica a curvatura costante.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Killig-Hopf se M ammette metrica ellittica allora il suo rivestimento universale è \mathbb{S}^n . Ma allora se M ammettesse anche metrica piatta o iperbolica il suo rivestimento universale sarebbe contraibile, assurdo. Se invece M ammette metrica piatta, per il Teorema di Bieberbach [Mar24, Cor. 4.4.11] è rivestita finitamente da un toro piatto. Sia d il grado del rivestimento, per la Proposizione 2.14 vale $\|M\| = \frac{1}{d}\|\mathbb{T}^n\| = 0$. Pertanto M non può ammettere metrica iperbolica, altrimenti per il Principio di proporzionalità varrebbe $\|M\| > 0$. \square

L'ipotesi di chiusura nella proposizione precedente è necessaria: ad esempio \mathbb{R}^n ammette sia metrica piatta che iperbolica. Gromov ha dimostrato che esiste un profondo collegamento tra metriche ammissibili da una varietà e volume simpliciale. Si consideri la seguente osservazione:

Osservazione 4.25. Supponiamo che di volere studiare la collassabilità di una n -varietà differenziabile M , formalmente diciamo dire che un collassamento è una successione di metriche $(g_k)_{k \geq 1}$ tali che $\text{Vol}(M, g_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Un modo semplice di produrre un collassamento è di partire da una qualsiasi metrica g e definire $g_k = \frac{1}{k}g$. Allora in coordinate locali

$$dV_{g_n} = \sqrt{\det g_n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{k^{n/2}} dV.$$

Segue che $\text{Vol}(M, g_k) = \frac{1}{k^{n/2}} \text{Vol}(M, g)$ e $\text{Vol}(M, g_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Analizziamo come cambiano le curvature sezionali:

- $R_{g_k}(X, Y)Z = R_g(X, Y)Z$ (Formula 0.1),
- $Rm_{g_k}(X, Y, Z, W) = \langle R_{g_k}(X, Y)Z, W \rangle_{g_k} = \frac{1}{k} Rm_g(X, Y, Z, W)$,
- $\|v\|_{g_k}^2 = \frac{1}{k} \|v\|_g^2$ per ogni vettore v tangente ad M .

Quindi

$$\sec(v, w)_{g_k} = \frac{Rm_{g_k}(v, w, w, v)}{\|v\|_{g_k}^2 \|w\|_{g_k}^2 - \langle v, w \rangle_{g_k}^2} = k \frac{Rm_g(v, w, w, v)}{\|v\|_g^2 \|w\|_g^2 - \langle v, w \rangle_g^2} = k \sec(v, w)_g,$$

in sostanza le sezionali divergono per $k \rightarrow +\infty$. Infatti, pensando alle superfici, è naturale che nel momento in cui le collassiamo la curvatura gaussiana tenda ad aumentare.

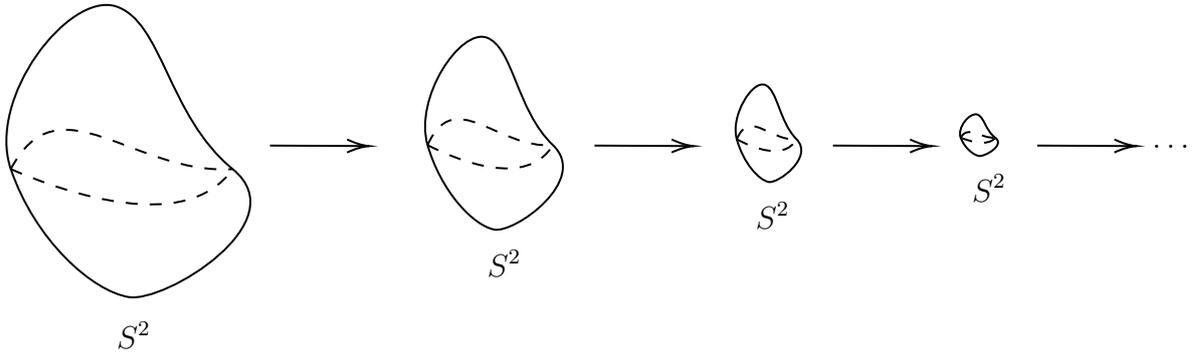


Figura 4.2: Collassamento banale di S^2

Per evitare collassamenti “banali” possiamo chiedere le curvatures sezionali rimangano limitate durante il processo. Questo motiva la seguente definizione:

Definizione 4.26 (volume minimo). Sia M una n -varietà differenziabile, chiamiamo A l’insieme delle metriche g su M tali che (M, g) sia completa e tutte le curvatures sezionali siano minori o uguali a 1 in modulo. Si definisce *volume minimo* di M il valore

$$\min\text{Vol}(M) = \inf_{g \in A} \text{Vol}(M, g) \in [0, +\infty]$$

Nella definizione la scelta dell’intervallo $[-1, 1]$ per le curvatures sezionali è arbitraria. In generale se una metrica ha curvatures sezionali limitate può essere riscalata, come descritto nell’Osservazione 4.25, affinché queste siano contenute in $[-1, 1]$.

Esempio 4.27. Se M ammette metrica piatta allora $\min\text{Vol}(M) = 0$, perchè le sezionali sono nulle e possiamo collassare M in modo banale come nell’Osservazione 4.25.

Esempio 4.28. Calcoliamo il volume minimo delle superfici chiuse e orientabili. Indicando con g il genere e ℓ la metrica, possiamo applicare Gauss-Bonnet

$$2\pi|\chi(\Sigma_g)| = \left| \int_{\Sigma_g} K_\ell \right| \leq \int_{\Sigma_g} |K_\ell| \leq \text{Vol}(\Sigma_g, \ell).$$

Dove abbiamo usato il fatto che per definizione di volume minimo $|K_\ell| \leq 1$. Segue che $\min\text{Vol}(\Sigma_g) = 2\pi|\chi(\Sigma_g)|$ e che le metriche a curvatura costante sono minimizzanti.

Il collegamento tra volume minimo e volume simpliciale è dato dal seguente Teorema:

Teorema 4.29 ([Gro82, p. 12]). *Sia M una n -varietà differenziabile chiusa, connessa ed orientabile. Allora*

$$\min\text{Vol}(M) \geq \frac{1}{(n-1)^n n!} \|M\|.$$

Corollario 4.30. *Sia M una n -varietà iperbolica chiusa, connessa ed orientabile. Allora*

$$\min\text{Vol}(M) > 0.$$

Come possiamo interpretare questo corollario? Come osservato prima è naturale aspettarsi che durante un collassamento le sezionali divergano, quindi se per una varietà M si ha $\min\text{Vol}(M) = 0$ esiste un collassamento non banale. Possiamo quindi informalmente riformulare il corollario dicendo che le varietà iperboliche si comportano bene rispetto ai collassamenti. Avere volume minimo positivo può sembrare una proprietà naturale, ma ad esempio si dimostra che $\min\text{Vol}(\mathbb{S}^3) = 0$ [Gro82, p. 7]. Gromov ha posto il problema di estendere questo risultato in dimensione arbitraria [Gro82, p. 14], e ad oggi è ancora aperto:

Congettura 4.31 (Gromov). *Ogni varietà differenziabile chiusa, semplicemente connessa e di dimensione dispari ha volume minimo nullo.*

Bibliografia

- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer Berlin, Heidelberg, 1992, pp. XIV, 330.
- [Fri17] Roberto Frigerio. *Bounded cohomology of discrete groups*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2017, p. 193.
- [Gro82] Mikhael Gromov. “Volume and bounded cohomology”. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 56 (1982), pp. 5–99.
- [Har16] Pierre de la Harpe. *Brouwer degree, domination of manifolds, and groups presentable by products*. 2016. arXiv: 1609.06637 [math.AT].
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, pp. XII, 551.
- [HM81] Uffe Haagerup and Hans J. Munkholm. “Simplices of maximal volume in hyperbolic n -space”. In: *Acta Math.* 147.1-2 (1981), pp. 1–11.
- [IY82] Hisao Inoue and Koichi Yano. “The Gromov invariant of negatively curved manifolds”. In: *Topology* 21.1 (1982), pp. 83–89.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2012, pp. XVI, 708.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2018, pp. XIII, 437.
- [Löh05] Clara Löh. *The Proportionality Principle of Simplicial Volume*. 2005. arXiv: math/0504106 [math.AT].
- [Man14] Marco Manetti. *Topologia*. UNITEXT. Springer Milano, 2014, pp. XII, 339.
- [Mar24] Bruno Martelli. *An Introduction to Geometric Topology*. Independently published, 2024, p. 488.

- [Rot98] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1998, pp. XIV, 437.
- [Thu80] William P. Thurston. “The Geometry and Topology of three-Manifolds”. Notes of a course given at Princeton University. 1980. URL: <https://www.math.unl.edu/~jkettinger2/thurston.pdf>.
- [Whi40] J. H. C. Whitehead. “On C^1 -complexes”. In: *Ann. of Math. (2)* 41 (1940), pp. 809–824.