

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Sugli automorfismi delle
superfici di Riemann

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
PETRACCI ANDREA

Presentata da:
DELLA SCIUCCA
FRANCESCA

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

La teoria delle superfici di Riemann rappresenta uno degli argomenti più affascinanti tra geometria, analisi complessa e topologia. Introdotto da Bernhard Riemann nella sua dissertazione del 1851, il concetto di superficie di Riemann ha segnato una svolta fondamentale nella matematica del XIX secolo permettendo di estendere lo studio delle funzioni olomorfe a contesti più generali.

Questa tesi si inserisce in questo contesto con l'obiettivo di studiare gli automorfismi delle superfici di Riemann, ovvero le simmetrie olomorfe che preservano la struttura complessa della superficie. In particolare, l'attenzione è rivolta alla classificazione di tali automorfismi in relazione al genere topologico della superficie considerata, mettendo in luce come la complessità topologica condizioni in modo diretto le possibilità di simmetria.

Il lavoro è articolato in 4 capitoli. Il Capitolo 1 introduce il concetto di superficie di Riemann, a partire dalla sua definizione formale come varietà complessa di dimensione uno. Vengono presentati esempi fondamentali di questi oggetti, tra cui la sfera di Riemann, i tori complessi e le curve algebriche lisce. Inoltre vengono introdotte nozioni centrali quali le mappe olomorfe tra superfici di Riemann e i rivestimenti ramificati.

Il Capitolo 2 è dedicato all'analisi degli automorfismi di superfici di genere basso, in particolare delle superfici di genere 0 e 1. Si studiano i gruppi di automorfismi della retta complessa, la sfera di Riemann, i tori complessi e il disco unitario, mettendo in luce le differenze strutturali tra questi casi.

Il Capitolo 3 introduce il linguaggio delle azioni di gruppo su superfici di Riemann, fornendo il quadro algebrico necessario per analizzare le simmetrie di questi oggetti. Il capitolo culmina con la dimostrazione del Teorema di

Hurwitz, che stabilisce un limite superiore all'ordine di un gruppo finito che agisce su una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$.

Infine nel Capitolo 4 vengono introdotti e approfonditi strumenti fondamentali come le 1-forme e i divisori su superfici di Riemann, essenziali per lo studio delle funzioni meromorfe. Si analizzano anche i punti di Weierstrass, punti speciali che rivelano proprietà peculiari di queste superfici. Tutti questi elementi convergono nella formulazione e nella dimostrazione del Teorema di Schwarz, secondo cui, per ogni superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$, il gruppo degli automorfismi è finito. Perciò, combinando con il teorema di Hurwitz, si ottiene che il gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$ è un gruppo finito di ordine al più $84(g - 1)$.

Indice

1	Superfici di Riemann	1
1.1	Definizioni ed esempi fondamentali	1
1.2	Curve algebriche come superfici di Riemann	5
1.3	Funzioni e mappe olomorfe	11
1.4	Rivestimenti ramificati	15
2	Automorfismi di superfici di Riemann di genere 0 e 1	21
2.1	Piano complesso $\mathbb{C}$	21
2.2	Sfera di Riemann $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$	22
2.3	Tori complessi $\mathbb{C}/\Lambda$	25
2.4	Disco unitario $\mathbb{D}$	29
3	Azioni di gruppo su una superficie di Riemann	32
3.1	Azioni di gruppo	32
3.2	Teorema di Hurwitz	37
4	Teorema di Schwarz	39
4.1	1-forme su superfici di Riemann	39
4.2	Divisori su superfici di Riemann	41
4.3	Wronskiano	47
4.4	Punti di Weierstrass	54
4.5	Teorema di Schwarz	61
	Bibliografia	67

Capitolo 1

Superfici di Riemann

In questo capitolo introduciamo il concetto di superficie di Riemann, e trattiamo i primi esempi fondamentali. Discutiamo poi di mappe olomorfe tra superfici di Riemann e delle loro proprietà.

1.1 Definizioni ed esempi fondamentali

Sia X spazio topologico, diamo una definizione di struttura complessa su X .

Definizione 1.1.1. Una *carta complessa* di dimensione 1 su X è un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ con $U \subseteq X$, $V \subseteq \mathbb{C}$ insiemi aperti.

La carta è detta *centrata in* $p \in U$ se $\phi(p) = 0$. Per ogni $x \in U$, $z = \phi(x) \in \mathbb{C}$ è chiamata *coordinata locale* di x nella carta ϕ .

Definizione 1.1.2. Due carte complesse su X , $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, si dicono *compatibili* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e la funzione

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \big|_{\phi_1(U_1 \cap U_2)} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

è olomorfa. La funzione $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ è detta *funzione di transizione*.

Definizione 1.1.3. Un *atlante complesso* su X è una collezione $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in I\}$ di carte complesse a due a due compatibili e tale che $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento aperto di X .

Definizione 1.1.4. Due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono *equivalenti* se la loro unione è un atlante, cioè ogni carta in $\mathcal{A}$ è compatibile con ogni carta in $\mathcal{B}$.

Per il Lemma di Zorn ogni atlante complesso è contenuto in un unico atlante complesso massimale. Quindi due atlanti sono equivalenti se e solo se sono contenuti nello stesso atlante massimale.

Definizione 1.1.5. Una *struttura complessa* su X è una classe d'equivalenza di atlanti complessi su X , o equivalentemente, un atlante massimale.

Definizione 1.1.6. Una *superficie di Riemann* è il dato di: uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e di una struttura complessa.

Esempio 1.1.7 (Aperti di $\mathbb{C}$). Ogni aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è naturalmente una superficie di Riemann con l'atlante costituito semplicemente dalla carta identità.

Esempio 1.1.8 (Grafico di una funzione olomorfa). Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, il grafico è l'insieme $X = \{(z, g(z)) : z \in U\} \subseteq \mathbb{C}^2$ dotato della topologia di sottospazio.

Consideriamo la proiezione al primo fattore $\pi: X \rightarrow U$, questa è un omeomorfismo con inversa la mappa $z \mapsto (z, g(z))$. Quindi π è una carta globale su X . Inoltre X è di Hausdorff e a base numerabile, e quindi è una superficie di Riemann.

Esempio 1.1.9 (Sfera di Riemann). Costruiamo una struttura complessa sulla sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ usando la proiezione stereografica. Consideriamo

$$U_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad \phi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_1(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$$

$$U_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}, \quad \phi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_2(x, y, z) = \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z}$$

Le due mappe sono compatibili, infatti si ha:

$$\phi_1^{-1}(w) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

da cui la funzione di transizione è:

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \quad \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w}$$

che è ben definita e olomorfa su $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$.

La sfera è anche di Hausdorff quindi è una superficie di Riemann, chiamata *Sfera di Riemann*. Essa è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$, perciò è spesso denotata con $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Esempio 1.1.10 (Retta proiettiva complessa). La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è una superficie di Riemann, omeomorfa alla sfera di Riemann. Consideriamo il ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ costituito dalle due carte affini standard:

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : x_0 \neq 0\} \quad \text{e} \quad U_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : x_1 \neq 0\}$$

e le due mappe:

$$\phi_0: U_0 \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_0([x_0 : x_1]) = \frac{x_1}{x_0} \quad \text{e} \quad \phi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_1([x_0 : x_1]) = \frac{x_0}{x_1}$$

Queste sono biietive, e la funzione di transizione $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ è la mappa $w \mapsto 1/w$ che è olomorfa su $\phi_0(U_1 \cap U_0) = \mathbb{C}^*$. Inoltre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è a base numerabile e di Hausdorff e quindi è una superficie di Riemann.

Introduciamo un altro esempio classico di superfici di Riemann: i tori complessi.

Definizione 1.1.11. Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, il *reticolo* associato $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ è l'insieme:

$$\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2 = \{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Lo spazio quoziente $X := \mathbb{C}/\Lambda$ è chiamato *toro complesso*.

Vedremo più avanti nell'Esempio 1.3.12 come ogni toro complesso può essere visto come quoziente di $\mathbb{C}$ con un reticolo della forma $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ per qualche $\tau \in \mathbb{H}$, dove $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

Esempio 1.1.12 (Tori complessi). Costruiamo una struttura complessa sul toro complesso $X := \mathbb{C}/\Lambda$, con $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$.

Consideriamo la mappa quoziente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Poiché Λ è un insieme discreto, esiste $r > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la palla $B_r(z)$ interseca Λ in al più un punto. Prendiamo la restrizione a questo aperto, $\pi|_{B_r(z)} : B_r(z) \rightarrow \pi(B_r(z))$, questa è suriettiva, continua e aperta, inoltre è iniettiva per la scelta di r . Quindi possiamo definire $\phi_z : \pi(B_r(z)) \rightarrow B_r(z)$, $\phi_z = (\pi|_{B_r(z)})^{-1}$, che è una carta su X per quanto detto.

Mostriamo che $\mathcal{A} = \{\phi_z : \pi(B_r(z)) \rightarrow B_r(z), z \in \mathbb{C}\}$ è un atlante. Siccome π è suriettiva e aperta, gli insiemi $\pi(B_r(z))$ al variare di $z \in \mathbb{C}$ costituiscono un ricoprimento aperto di X .

Mostriamo che le carte così costruite sono a due a due compatibili. Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $U = B_r(z_1) \cap B_r(z_2) \neq \emptyset$, mostriamo che $T = \phi_{z_2} \circ \phi_{z_1}^{-1}$ è olomorfa su $\phi_{z_1}(U)$. Notiamo che $\pi(T(z)) = \pi(z)$ per ogni $z \in \phi_{z_1}(U)$. Quindi si ha che esiste $w(z) \in \Lambda$ tale che $T(z) - z = w(z)$ per ogni $z \in \phi_{z_1}(U)$. La funzione così definita $w : \phi_{z_1}(U) \rightarrow \Lambda$ è continua e Λ è discreto, per cui w è localmente costante e quindi localmente $T(z) = z + w$ per qualche $w \in \Lambda$ fissato, cioè T è olomorfa.

Quindi $\mathcal{A}$ è un atlante su X , che quindi è una superficie di Riemann.

Osservazione 1.1.13. I tori complessi sono superfici di Riemann compatte. Questo perché possiamo considerare come dominio fondamentale per la relazione d'equivalenza data da Λ , il parallelogramma $P_0 = \{a\lambda_1 + b\lambda_2 : a, b \in [0, 1]\}$, detto *parallelogramma fondamentale*, che è un insieme compatto in $\mathbb{C}$.

Osservazione 1.1.14. Un toro complesso $X = \mathbb{C}/\Lambda$, con $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$, è omeomorfo al toro $S^1 \times S^1$. Costruiamo esplicitamente l'omeomorfismo. Sappiamo che $S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, tramite la mappa $\tilde{f} = \pi \circ f$ dove π è la proiezione al quoziente e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$, $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Definiamo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi(x, y) = x\lambda_1 + y\lambda_2$, questa mappa è lineare e invertibile, con la proprietà che $\psi(\mathbb{Z}^2) = \Lambda$, quindi induce un omeomorfismo tra i quozienti $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$. Componendo le due mappe otteniamo l'omeomorfismo:

$$\phi = \tilde{f} \circ \tilde{\psi}^{-1} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow S^1 \times S^1.$$

1.2 Curve algebriche come superfici di Riemann

Vediamo come le curve algebriche piane abbiano una naturale struttura di superficie di Riemann.

Teorema 1.2.1. [Teorema di Dini per funzioni olomorfe] Sia $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio e $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$. Sia $p_0 = (z_0, w_0) \in X$ tale che $\partial_w f(p_0) \neq 0$. Allora esistono $U \subseteq \mathbb{C}$ intorno aperto di z_0 , $V \subseteq \mathbb{C}$ intorno aperto di w_0 e $g: U \rightarrow V$ olomorfa tale che $X \cap (U \times V) = \{(z, g(z)) : z \in U\}$. Inoltre vale per ogni $z \in U$, $g'(z) = \frac{-\partial_z f(z, g(z))}{\partial_w f(z, g(z))}$.

Dimostrazione. Utilizzando le notazioni $z = x + iy$ e $w = u + iv$ definiamo la mappa $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ come $F(x, y, u, v) = (\operatorname{Re}(f(x, y, u, v)), \operatorname{Im}(f(x, y, u, v)))$. Poiché f è olomorfa, rispetta le equazioni di Cauchy-Riemann, ovvero valgono:

$$\begin{cases} \partial_x \operatorname{Re}(f) = \partial_y \operatorname{Im}(f) \\ \partial_y \operatorname{Re}(f) = -\partial_x \operatorname{Im}(f) \end{cases}$$

Analogamente per le derivate parziali in u e v .

Da cui lo Jacobiano di F è della forma:

$$J_{ac_F} = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re}(f) & -\partial_x \operatorname{Im}(f) & \partial_u \operatorname{Re}(f) & -\partial_u \operatorname{Im}(f) \\ \partial_x \operatorname{Im}(f) & \partial_x \operatorname{Re}(f) & \partial_u \operatorname{Im}(f) & \partial_u \operatorname{Re}(f) \end{pmatrix}.$$

Per ipotesi si ha che $\partial_w f(p_0) \neq 0$ ma $\partial_w f(p_0) = \partial_u \operatorname{Re}(f(p_0)) + i\partial_u \operatorname{Im}(f(p_0))$, che quindi è diverso da 0, pertanto la sottomatrice 2×2 di destra ha determinante non nullo. F rispetta quindi le ipotesi del Teorema di Dini per funzioni a più variabili reali, per cui esistono:

- $U \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno aperto di (x_0, y_0)
- $V \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno aperto di (u_0, v_0)
- $G: U \rightarrow V$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $F^{-1}(0) \cap (U \times V) = \{(x, y, G(x, y)) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \in U\}$

Identificando U e V come sottoinsiemi di $\mathbb{C}$, otteniamo $g: U \rightarrow V$ tale che $X \cap (U \times V) = \{(z, g(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in U\}$. Bisogna far vedere che g è olomorfa.

Ma questo segue direttamente dal Teorema di Dini per funzioni in più variabili reali che dà un'espressione per lo jacobiano di G :

$$Jac_G = - \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re}(f) & -\partial_x \operatorname{Im}(f) \\ \partial_x \operatorname{Im}(f) & \partial_x \operatorname{Re}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u \operatorname{Re}(f) & -\partial_u \operatorname{Im}(f) \\ \partial_u \operatorname{Im}(f) & \partial_u \operatorname{Re}(f) \end{pmatrix}^{-1}$$

Svolgendo il calcolo si ottiene che g soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e quindi è olomorfa ([SS03, Teorema 2.4, Capitolo 2]). Da qui segue anche l'identità $g'(p) = \frac{-\partial_z f(p)}{\partial_w f(p)}$. $\square$

Definizione 1.2.2. Una *curva affine piana* è il luogo degli zeri di un polinomio non nullo $f \in \mathbb{C}[z, w]$, cioè è l'insieme $X_f = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$. Una curva affine piana si dice *liscia* se $(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w)) \neq (0, 0)$ per ogni $(z, w) \in X$.

Proposizione 1.2.3. Una curva affine piana liscia è una superficie di Riemann.

Dimostrazione. Dato $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio non nullo consideriamo la curva affine piana liscia $X_f = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$ e costruiamo una struttura complessa su di essa. In particolare mostriamo che X_f è localmente il grafico di una funzione olomorfa, che abbiamo già mostrato essere una superficie di Riemann.

Sia $(z_0, w_0) \in X_f$, siccome la curva è liscia almeno uno tra $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0)$ è $\neq 0$. Se $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$, per il Teorema di Dini per funzioni olomorfe si ha che esiste $U \subseteq \mathbb{C}^2$ intorno di (z_0, w_0) , $V \subseteq \mathbb{C}$ intorno di z_0 e una mappa olomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $X_f \cap U = \{(z, g(z)) : z \in V\}$.

Prendiamo come carta la proiezione al primo fattore:

$$\pi_z : X_f \cap U \rightarrow V, \quad \pi_z(z, g(z)) = z.$$

D'altra parte se $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$ si procede in maniera analoga considerando la proiezione al secondo fattore:

$$\pi_w : X_f \cap U \rightarrow V, \quad \pi_w(h(w), w) = w.$$

Mostriamo che le carte sono a due a due compatibili:

- Se entrambe le carte sono proiezioni allo stesso asse, allora la composizione dell'una con l'inversa dell'altra, nel caso in cui l'intersezione dei domini è non vuota, è l'identità.
- Se una è la proiezione al primo asse e un'altra al secondo, sia $p = (z_0, w_0)$ un punto nell'intersezione dei domini delle due carte e g la mappa olomorfa di cui X è localmente il grafico. Si ha che π_z^{-1} manda z in $(z, g(z))$, da cui la funzione di transizione è:

$$\pi_w \circ \pi_z^{-1}(z) = g(z).$$

che è una funzione olomorfa.

Questo costituisce un atlante complesso che dà a X una struttura di superficie di Riemann. $\square$

Esempio 1.2.4 (Curva affine iperellittica). Dato un polinomio $h \in \mathbb{C}[x]$ con tutte radici distinte, l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = h(x)\}$ si chiama *curva affine iperellittica*. Il fatto che le radici di h sono distinte garantisce che il polinomio $y^2 - h(x)$ sia non singolare e quindi per la proposizione precedente, X è una superficie di Riemann.

Trattiamo ora il caso delle curve proiettive piane.

Definizione 1.2.5. Un polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ è detto *omogeneo* di grado d se è somma di monomi di grado d . Un polinomio omogeneo F è detto *non singolare* se non esiste $p = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che:

$$F(p) = \partial_x F(p) = \partial_y F(p) = \partial_z F(p) = 0.$$

Definizione 1.2.6. Dato $F \in \mathbb{C}_d[x, y, z]$ polinomio omogeneo di grado $d \geq 1$, una *curva proiettiva piana* è il luogo degli zeri di F , ovvero:

$$X_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : F(x, y, z) = 0\}.$$

Osservazione 1.2.7. X è ben definita perché, essendo F omogeneo, vale $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z)$.

Osservazione 1.2.8. X_F è un sottospazio chiuso di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Presa la proiezione $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si ha X_F chiuso se e solo se $\pi^{-1}(X_F)$ chiuso in $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Considerando la mappa data dal polinomio F , si ha che $\pi^{-1}(X_F) = F^{-1}(0)$ è chiuso perché controimmagine di un singoletto.

Proposizione 1.2.9. Sia $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ polinomio omogeneo di grado d non singolare. Il luogo degli zeri X_F è una superficie di Riemann.

Dimostrazione. Indichiamo con U_i la i -esima carta affine standard, definiamo $X_i = X_F \cap U_i = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : x_i \neq 0, F(x, y, z) = 0\}$ e mostriamo che è una curva affine piana liscia in $\mathbb{C}^2$ per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$.

Senza perdita di generalità lo mostriamo per $X_0 = X_F \cap U_0$.

Consideriamo l'omeomorfismo:

$$\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \phi_0([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Si ha $\phi_0(X_0) = \{(y, z) \in \mathbb{C}^2 : F(1, y, z) = 0\}$, identificando $F(1, y, z)$ con il polinomio $f(y, z)$ in $\mathbb{C}[y, z]$, si ottiene che X_0 è omeomorfo tramite ϕ_0 a una curva affine piana. Supponiamo che X_0 non sia liscia, quindi esiste $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2$ soluzione comune di $f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Allora valgono:

$$F[1 : y_0 : z_0] = f(y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}[1 : y_0 : z_0] = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}[1 : y_0 : z_0] = \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}[1 : y_0 : z_0] = \left(dF - y_0 \frac{\partial F}{\partial y} - z_0 \frac{\partial F}{\partial z}\right)[1 : y_0 : z_0] = 0$$

L'ultima uguaglianza segue dalla formula di Eulero per polinomi omogenei. Quindi $[1 : y_0 : z_0]$ è un punto di singolarità per F , ma questo è assurdo perché F è non singolare per ipotesi. Abbiamo mostrato che X_i si immergono in $\mathbb{C}^2$ come curve affini lisce.

A questo punto, definiamo le carte su X_0 . Indichiamo con $\pi_1, \pi_2: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ le proiezioni rispettivamente alla prima e seconda coordinata. Sia $(y_0, z_0) \in \phi_0(X_0)$, se $\partial_z(f)(y_0, z_0) \neq 0$ si ha per la Proposizione 1.2.3 che $\phi_0(X_0)$ è localmente il grafico di una funzione olomorfa h e la proiezione π_1 alla prima componente è una carta. Indichiamo con V_1 l'aperto in X_0 che viene mappato in questo intorno di (y_0, z_0) tramite ϕ_0 . A questo punto come carta su X_0 consideriamo:

$$\psi_1 = \pi_1 \circ \phi_0: V_1 \subseteq X_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_1([x : y : z]) = \frac{y}{x}$$

D'altra parte se $\partial_y(f)(y_0, z_0) \neq 0$, consideriamo:

$$\psi_2 = \pi_2 \circ \phi_0: V_2 \subseteq X_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_2([x : y : z]) = \frac{z}{x}$$

In modo analogo si costruiscono funzioni su X_1 e X_2 .

Mostriamo che le funzioni di transizione tra carte che si sovrappongono sono olomorfe. Preso un punto $p \in X_0 \cap X_1$, consideriamo su X_0 la carta $\psi_1: V_1 \subseteq X_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definita come sopra e su X_1 la carta data da $\varphi: V_1 \subseteq X_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi([x : y : z]) = \frac{z}{y}$. Poiché $\phi_0(X_0)$ è localmente il grafico di una funzione olomorfa h , si ha che $\psi_1^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$, e quindi $\varphi \circ \psi_1^{-1}(w) = h(w)/w$ che è olomorfa perchè h olomorfa e $w \neq 0$, dal momento che $p \in X_0 \cap X_1$. $\square$

Osservazione 1.2.10. Poiché X_F è chiuso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che è uno spazio topologico compatto, si ha che X_F è una superficie di Riemann compatta.

Esempio 1.2.11 (Curve ellittiche). Consideriamo un polinomio P omogeneo di grado 3 della forma:

$$P(x, y, z) = y^2z - (x - \alpha_1z)(x - \alpha_2z)(x - \alpha_3z).$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tre numeri complessi distinti. Mostriamo che la curva proiettiva piana $X_P \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è una superficie di Riemann. Per quanto mostrato, basta far vedere che il polinomio P è non singolare.

La derivata $\partial_y P = 2yz$ si annulla se e solo se $z = 0$ oppure $y = 0$.

- Se $z = 0$ si ha $P(x, y, 0) = -x^3$, da cui l'unico punto appartenente a X_P è $[0 : 1 : 0]$. La derivata di P in z è $\partial_z P = y^2 + Q(x, z)$ con $Q(x, z)$ polinomio omogeneo di grado due nelle variabili x e z , da cui $\partial_z P(0, 1, 0) = 1 \neq 0$.
- Se $y = 0$ il polinomio diventa $P(x, 0, z) = (x - \alpha_1 z)(x - \alpha_2 z)(x - \alpha_3 z)$ e quindi i punti appartenenti a X_P sono $[\alpha_1 : 0 : 1], [\alpha_2 : 0 : 1]$ e $[\alpha_3 : 0 : 1]$. In questo caso $\partial_x P(\alpha_i, 0, 1) \neq 0$ perché gli α_i sono distinti.

Abbiamo mostrato che X_P è una curva proiettiva liscia di grado 3, che ha quindi una struttura di superficie di Riemann.

Il concetto di curva proiettiva piana si può generalizzare a quello di varietà algebrica proiettiva, ovvero un sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ costituito da punti che annullano simultaneamente una famiglia di polinomi omogenei, o equivalentemente, un chiuso rispetto alla topologia di Zariski.

Definizione 1.2.12. Siano $F_1, \dots, F_{n-1}$ $n - 1$ polinomi omogenei in $n + 1$ variabili $x_0, \dots, x_n$. Sia X il loro luogo degli zeri in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Diciamo che X è una *curva liscia a intersezione completa* in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se la matrice costituita dalle derivate parziali $\partial F_i / \partial x_j$ ha rango massimo in ogni punto di X .

Dal teorema di Dini in più variabili, generalizzando la dimostrazione fatta per le curve proiettive piane, si ha che una curva liscia a intersezione completa è una superficie di Riemann compatta.

Osserviamo, però, che non tutte le superfici di Riemann contenute in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono curve a intersezione completa. Alcune di esse infatti presentano tale struttura solo localmente.

Definizione 1.2.13. Diciamo che $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una *curva a intersezione completa locale* se in un intorno di ogni punto $p \in X$, è descritta da $n - 1$ polinomi omogenei, la cui matrice delle derivate ha rango $n - 1$ nel punto p .

Poiché le carte su una curva a intersezione completa sono definite localmente dal Teorema di Dini, si ha che anche una curva a intersezione completa locale è una superficie di Riemann. Di seguito presentiamo un esempio di una tale struttura:

Esempio 1.2.14 (Cubica gobba). Consideriamo l'immersione di Veronese $\nu_3 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, $\nu_3([x : y]) = [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$. L'immagine di questa mappa è chiamata *cubica gobba* e non è una curva a intersezione completa perché, indicando con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, ha bisogno di tre equazioni per essere descritta:

$$x_0x_3 = x_1x_2 \quad x_0x_2 = x_1^2 \quad x_1x_3 = x_2^2.$$

Ma è una curva a intersezione completa locale, infatti in un intorno di ogni punto della curva sono necessarie solo due equazioni per descriverla.

Ad esempio nel punto $[1 : 0 : 0 : 0]$, consideriamo la carta affine $U_0 \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

In questa carta la curva è definita da due equazioni:

$$x_0x_3 = x_1x_2 \quad \text{e} \quad x_0x_2 = x_1^2.$$

Infatti, ponendo $x_0 = 1$, dalla prima si ha $x_3 = x_1x_2$ e dalla seconda $x_2 = x_1^2$, sostituendo si ha $x_3 = x_1^3$. Quindi la terza equazione è automaticamente sempre verificata perché diventa $x_1^4 = x_1^4$.

1.3 Funzioni e mappe olomorfe

Le superfici di Riemann sono localmente omeomorfe al piano complesso, per questo motivo è naturale definire funzioni tra superfici di Riemann, in maniera tale che localmente corrispondano a funzioni olomorfe o meromorfe da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ trattate in [SS03, Capitolo 1].

Definizione 1.3.1. Sia X superficie di Riemann, sia $W \subseteq X$ un aperto, sia $p \in W$ un punto. Una funzione $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in $p \in W$ se esiste una carta $\phi : U \rightarrow V$ di X tale che $p \in U$ e $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $\phi(p)$. Diremo che $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se è olomorfa in ogni punto.

Lemma 1.3.2. Sia X superficie di Riemann, $p \in X$ un punto e $W \subseteq X$ intorno aperto di p . Una funzione $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $p \in W$ se e solo se per ogni $\phi : U \rightarrow V$ carta con $p \in U$ si ha $f \circ \phi^{-1}$ olomorfa in $\phi(p)$.

Dimostrazione. [Mir95, Lemma 1.14, Capitolo II] □

Estendiamo il concetto di singolarità isolate (rimovibile, polo, essenziale) per funzioni ad una singola variabile complessa alle funzioni definite su una superficie di Riemann.

Definizione 1.3.3. Sia X superficie di Riemann, $U \subseteq X$ intorno aperto di $p \in X$ e $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, diciamo che:

- f ha una *singolarità rimovibile* in p se esiste una carta $\phi : U \rightarrow V$, con $p \in U$, tale che $f \circ \phi^{-1}|_{V \setminus \{\phi(p)\}}$ ha una singolarità rimovibile in $\phi(p)$.
- f ha un *polo* in p se esiste una carta $\phi : U \rightarrow V$, con $p \in U$, tale che $f \circ \phi^{-1}|_{V \setminus \{\phi(p)\}}$ ha un polo in $\phi(p)$.
- f ha una *singolarità essenziale* in p se esiste una carta $\phi : U \rightarrow V$, con $p \in U$, tale che $f \circ \phi^{-1}|_{V \setminus \{\phi(p)\}}$ ha una singolarità essenziale in $\phi(p)$.

Osservazione 1.3.4. Queste definizioni sono ben poste, ossia non dipendono dalla carta scelta per ricoprire il punto p come è mostrato in [Mir95, Lemma 1.14, Capitolo II].

Definizione 1.3.5. Sia X superficie di Riemann. Una *funzione meromorfa* su X è una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tale che $f^{-1}(\infty)$ è discreto in X , f è olomorfa su tutto l'insieme $X \setminus f^{-1}(\infty)$ e f ha una singolarità di tipo polo in ogni punto di $f^{-1}(\infty)$.

Data f olomorfa in un intorno bucato di $p \in X$, e $\phi : U \rightarrow V$ carta su X con $p \in U$. Indichiamo con z la coordinata locale di X vicino a p , cioè $z = \phi(x)$. Si ha che $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in un intorno di $z_0 = \phi(p)$, quindi ha uno sviluppo in serie di Laurent:

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n$$

Definizione 1.3.6. Sia f una funzione meromorfa in p , la cui serie di Laurent in una coordinata locale z è $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. L'*ordine* di f in p , denotato con

$\text{ord}_p(f)$, è il minimo esponente che appare (con coefficiente non nullo) nella serie di Laurent:

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0\}.$$

Osservazione 1.3.7. La definizione di $\text{ord}_p(f)$ è ben definita perché non dipende dalla scelta della carta per definire la serie di Laurent nel punto p [Mir95, p.26, Capitolo II].

Passiamo ora a definire mappe tra superfici di Riemann.

Definizione 1.3.8. Siano X, Y superfici di Riemann, $F: X \rightarrow Y$ è una *mappa olomorfa* in $p \in X$ se esiste $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ carta su X con $p \in U_1$ e esiste $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ carta su Y con $F(p) \in U_2$ tali che $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ è olomorfa in $\phi_1(p)$. Diciamo che F è *olomorfa* su X , se è olomorfa in ogni suo punto.

Definizione 1.3.9. Un *biolomorfismo* tra superfici di Riemann è una mappa olomorfa $F: X \rightarrow Y$ biiettiva con inversa olomorfa. Due superfici X e Y si dicono *biolomorfe* se esiste un biolomorfismo tra loro.

Osservazione 1.3.10. Affinché F sia biolomorfa, basta richiedere che sia olomorfa e biiettiva. Questo basta per mostrare che F ha derivata non nulla e ha inversa olomorfa. [SS03, Proposizione 1.1, Capitolo 8]

Esempio 1.3.11. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è biolomorfa alla sfera di Riemann $\mathbb{C}_\infty$ tramite:

$$\phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}_\infty, \phi([z:w]) = \left(\frac{2\text{Re}(\bar{w}z)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2\text{Im}(\bar{w}z)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right).$$

Esempio 1.3.12. Un toro complesso ottenuto come quoziente di $\mathbb{C}$ con un reticolo $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ è sempre biolomorfo a un toro complesso della forma $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ per qualche $\tau \in \mathbb{H}$.

Infatti preso $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la moltiplicazione per α $m_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $m_\alpha(z) = \alpha z$, induce un biolomorfismo $f: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\alpha\Lambda$. Supponendo che $\text{Im}(\lambda_2/\lambda_1) > 0$ (altrimenti si prende $-\lambda_2/\lambda_1$ che genera lo stesso reticolo), con $\alpha = 1/\lambda_1$ si ha il biolomorfismo tra X e $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\lambda_2/\lambda_1))$.

Esempio 1.3.13 (Involuzione iperellittica). Data una curva affine iperellittica $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = h(x)\}$ la mappa $\sigma : X \rightarrow X$, $\sigma(x, y) = (x, -y)$ si chiama *involuzione iperellittica*, e dà un automorfismo di X .

Proposizione 1.3.14. Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa non costante con X e Y superfici di Riemann. Se X è compatta e connessa e Y è connessa, allora F è suriettiva e Y è compatta.

Dimostrazione. Per il teorema della mappa aperta ([Mir95, Proposizione 3.8, capitolo II]) F è aperta quindi $F(X)$ è aperto in Y . Poiché X è compatto e F è continua, $F(X)$ è compatto e quindi chiuso in Y , che è T_2 . Da cui $F(X) = Y$ per connessione di Y . Quindi Y è compatta. $\square$

Corollario 1.3.15. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa, se $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ è una mappa olomorfa, allora è costante.

Dimostrazione. Se F non fosse costante, dalla Proposizione 1.3.14 seguirebbe che F è suriettiva e $\mathbb{C}$ è compatto ma questo è assurdo. $\square$

Osservazione 1.3.16. (Corrispondenza tra funzioni meromorfe e mappe olomorfe verso $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Data X una superficie di Riemann si ha una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{M}(X)$ e $\{F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : F \text{ olomorfa e } F^{-1}([1 : 0]) \text{ discreto}\}$. Questa corrispondenza è data da:

$$\mathcal{M}(X) \rightarrow \{F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : F \text{ olomorfa e } F^{-1}([1 : 0]) \text{ discreto}\}$$

$$f \mapsto \begin{cases} [f(z) : 1] & \text{se } z \notin P(f) \\ [1 : 0] & \text{se } z \in P(f) \end{cases}$$

Lemma 1.3.17. Sia X una superficie di Riemann connessa e $f \in \mathcal{M}(X)$. Indichiamo con $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la funzione olomorfa associata a f . Allora valgono:

- Se $p \in X$ non è un polo di f allora $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.
- Se $p \in X$ è un polo di f allora $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.

Dimostrazione. [Mir95, Lemma 4.7, Capitolo II] $\square$

Proposizione 1.3.18. Sia f una funzione meromorfa non costante su una superficie di Riemann compatta X . Allora:

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la mappa olomorfa indotta da f . Siano $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ gli zeri di F e $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq X$ le controimmagini del punto all'infinito, cioè gli $\{x_i\}$ sono esattamente gli zeri di f e gli $\{y_j\}$ i suoi poli. Sia d il grado della mappa F , allora dalla definizione di grado si ha che $d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F)$. Dal Lemma 1.3.17 si ha che $\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f)$ e $\text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f)$. E quindi si ha che

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) = 0.$$

□

1.4 Rivestimenti ramificati

Introduciamo i concetti di molteplicità, di punti di ramificazione e di grado di una mappa olomorfa tra superfici di Riemann.

Teorema 1.4.1. [Forma normale locale] Sia $F : X \rightarrow Y$ mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann. Allora per ogni $p \in X$ esiste ed è unico un intero $m \geq 1$ tale che: per ogni carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ su Y centrata in $F(p)$ esiste una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ su X centrata in p tale che $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$ per ogni $z \in \phi_1(U_1 \cap F^{-1}(U_2))$.

Dimostrazione. [Mir95, Proposizione 4.1, Capitolo II]

□

Definizione 1.4.2. La *molteplicità* di F in p , denotata con $\text{mult}_p(F)$ è l'unico intero tale per cui esistono coordinate locali vicino a p e $F(p)$ con F della forma $z \mapsto z^m$, come nell'enunciato del Teorema 1.4.1.

Definizione 1.4.3. Sia $F : X \rightarrow Y$ mappa olomorfa non costante. Un punto $p \in X$ è un *punto di ramificazione* per F se $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Un punto $y \in Y$ è di *biforcazione* per F se è immagine di un punto di ramificazione.

Segue dalla discretezza delle preimmagini ([Mir95, Proposizione 3.12, Capitolo II]) che i punti di ramificazione e di biforcazione formano insiemi discreti del dominio e codominio rispettivamente. Indichiamo con $R(F)$ l'insieme dei punti di ramificazione e con $B(F)$ quello dei punti di biforcazione.

Teorema 1.4.4. Sia $F : X \rightarrow Y$ mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann connesse e compatte. La funzione $Y \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da:

$$y \mapsto d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F)$$

è costante.

Dimostrazione. [Mir95, Proposizione 4.8, capitolo II]. □

Questo teorema ci permette di rendere ben definita la definizione di grado di una mappa olomorfa.

Definizione 1.4.5. Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann connesse e compatte. Il *grado* di F , denotato con $\deg(F)$, è l'intero $d_y(F)$ per ogni $y \in Y$, definito nel Teorema 1.4.4.

Corollario 1.4.6. Siano X e Y due superfici di Riemann compatte e connesse. Una funzione $F : X \rightarrow Y$ olomorfa è un biolomorfismo se e solo se $\deg(F) = 1$.

Dimostrazione. [Mir95, Corollario 4.10, Capitolo II] □

Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann compatte e connesse, e sia $B(F)$ l'insieme dei punti di biforcazione della mappa, questo è finito perché è chiuso e discreto in un compatto. Dalla forma normale locale si ha che $F|_{X \setminus F^{-1}(B(F))} : X \setminus F^{-1}(B(F)) \rightarrow Y \setminus B(F)$ è un rivestimento topologico con numero di fogli uguale al grado della mappa.

Cioè è un rivestimento topologico a meno di un numero finito di punti, una mappa F con tale proprietà si chiama *rivestimento ramificato*.

Prima di enunciare la formula di Riemann-Hurwitz, diamo una definizione di genere e di caratteristica di Eulero per una superficie topologica.

Definizione 1.4.7. Data S una superficie topologica connessa, compatta e orientabile si chiama *genere* di S la quantità:

$$g(S) = \frac{1}{2}b_1(S)$$

dove $b_1(S) = \text{rank}H_1(S; \mathbb{Z})$ è il primo numero di Betti.

Definizione 1.4.8. Dato X spazio topologico, una *triangolazione* di X è una decomposizione di X in sottinsiemi chiusi, omeomorfi a un triangolo, tra di loro disgiunti oppure con un lato o un vertice in comune.

Definizione 1.4.9. Data una superficie topologica S con una triangolazione, la *caratteristica di Eulero* di S è $\chi(S) = v - e + t$ con v numero dei vertici, e dei lati, t dei triangoli.

Una superficie di Riemann è una superficie orientabile, cioè ammette un atlante positivo. Questo segue dal fatto che tutte le funzioni di transizione sono olomorfe tra aperti di $\mathbb{C}$, e le funzioni olomorfe, poiché rispettano le equazioni di Cauchy-Riemann, preservano l'orientazione nel senso reale, cioè hanno jacobiano reale con determinante strettamente positivo.

Dalla classificazione delle superfici topologiche si ha quindi che la caratteristica di Eulero di una superficie di Riemann connessa e compatta è $2 - 2g$.

Teorema 1.4.10. [Formula di Riemann-Hurwitz] Siano X, Y superfici di Riemann connesse e compatte e sia $F : X \rightarrow Y$ mappa olomorfa non costante. Allora vale:

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

Dimostrazione. [Mir95, Teorema 4.16, capitolo II]

□

Osservazione 1.4.11. Questa formula ci permette di dire che non può esistere una mappa olomorfa non costante tra una superficie di Riemann X di genere $g(X)$ e una Y di genere $g(Y)$, se $g(Y) > g(X)$.

Osservazione 1.4.12. Se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann connesse e compatte che è un rivestimento, cioè un biolomorfismo locale, allora si ha $\sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) = 0$, da cui $g(X) = \deg(F)g(Y) - \deg(F) + 1$.

Introduciamo una nuova classe di superfici di Riemann: le superfici iperellittiche.

Definizione 1.4.13. Una superficie di Riemann compatta e connessa X di genere $g \geq 2$ si dice *iperellittica* se ammette una mappa olomorfa di grado 2 $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Tale mappa è detta *rivestimento iperellittico*.

Se g è il genere di X , dalla formula di Riemann-Hurwitz si ha che

$$\sum_{p \in X} (\text{mult}_p(\varphi) - 1) = 2g + 2.$$

Quindi, poiché il grado della funzione è 2, la mappa φ ha esattamente $2g + 2$ punti di ramificazione distinti, tutti di molteplicità 2, e di conseguenza $2g + 2$ punti di biforcazione in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Esempio 1.4.14. Consideriamo le due carte affini standard U_0, U_1 di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dato un punto $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ indichiamo con $u = x_1/x_0$ e $v = x_0/x_1$ le sue coordinate affini rispetto a U_0 e U_1 , tale che $U_0 \cong \mathbb{C}_u^1$ e $U_1 \cong \mathbb{C}_v^1$. Sull'intersezione $U_0 \cap U_1$ le coordinate soddisfano: $u = 1/v$ e $v = 1/u$.

Sia $g \geq 2$ e siano $b_1, \dots, b_{2g+2} \in \mathbb{C}$ punti distinti. Nella carta affine U_0 consideriamo la curva affine iperellittica connessa definita come luogo degli zeri del polinomio $h(u, x) = x^2 - (u - b_1) \dots (u - b_{2g+2})$, cioè:

$$X = \left\{ (u, x) \in \mathbb{C}^2 : x^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (u - b_i) \right\}.$$

La proiezione al primo fattore $\pi_0 : X \rightarrow \mathbb{C}_u^1$, definita da $\pi_0(u, x) = u$, è un rivestimento ramificato di grado 2. Questa mappa ramifica in un punto

$(u_0, x_0) \in X$ se e solo se $\partial_x(h)(u_0, x_0) = 0$ ([Mir95, Lemma 4.6, Capitolo II]), cioè se e solo se $x = 0$. Da cui i punti di ramificazione per π_0 sono tutti quelli della forma $(b_i, 0) \in X$. Usando la relazione $u = 1/v$, possiamo riscrivere l'equazione della curva nella carta affine $U_1 \cong \mathbb{C}_v^1$:

$$x^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} \left(\frac{1}{v} - b_i \right) = \frac{1}{v^{2g+2}} \prod_{i=1}^{2g+2} (1 - b_i v).$$

Effettuiamo un cambio di variabile ponendo $y = v^{g+1}x$, e otteniamo una descrizione della curva nella carta U_1 :

$$Y = \left\{ (v, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (1 - b_i v) \right\}.$$

La proiezione $\pi_1 : Y \rightarrow \mathbb{C}_v^1$ è anch'essa un rivestimento ramificato di grado 2, che ramifica nei punti $(1/b_i, 0)$.

Incolliamo le due curve X e Y identificando un punto $(u, x) \in X$ con un punto $(v, y) \in Y$ se e solo se $u = 1/v$ e $x = u^{g+1}y$. Questa identificazione è ben definita sull'intersezione ed è compatibile con le mappe π_0 e π_1 . In questo modo otteniamo una superficie di Riemann $C = X \cup Y / \sim$.

Lo spazio C è connesso perché si ottiene incollando le curve connesse X e Y lungo gli aperti $U = \{(u, x) \in X : u \neq 0\}$ e $V = \{(v, y) \in Y : v \neq 0\}$, che sono entrambi connessi e isomorfi tra loro tramite l'identificazione.

Inoltre C è compatta poiché è unione di due insiemi compatti:

$$\{(u, x) \in X : |u| \leq 1\} \text{ e } \{(v, y) \in Y : |v| \leq 1\}.$$

Questi sono compatti perché chiusi e limitati, e la condizione di incollamento di X e Y garantisce che ogni punto $p \in C$ si trovi in almeno uno dei due. Definiamo $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ localmente come:

- $\pi|_X(u, x) = [1 : u];$
- $\pi|_Y(v, y) = [v : 1];$

Questa mappa ha grado 2 e ha $2g+2$ punti di biforcazione che corrispondono ai punti $[1 : b_i] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, pertanto è un rivestimento iperellittico per C . Infine dalla formula di Riemann-Hurwitz si ha:

$$2g(C) - 2 = 2(-2) + (2g + 2) = 2g - 2 \Rightarrow g(C) = g.$$

Quindi C è una superficie di Riemann iperellittica di genere $g \geq 2$.

Capitolo 2

Automorfismi di superfici di Riemann di genere 0 e 1

Data X una superficie di Riemann, indichiamo con $\text{Aut}(X)$ l'insieme dei biolomorfismi di X con sè stesso. Questo risulta essere un gruppo rispetto alla composizione, chiamato *gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann*.

In questo capitolo esamineremo in dettaglio i principali esempi di gruppi di automorfismi per superfici di Riemann di genere 0 o 1.

2.1 Piano complesso $\mathbb{C}$

Gli automorfismi del piano complesso sono le affinità, ovvero trasformazioni affini (composizioni di una trasformazione lineare con una traslazione) dal piano complesso in sé che siano biunivoche.

Teorema 2.1.1. $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$

Teorema 2.1.2 (Casorati-Weierstrass). Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $B_r(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ palla centrata in z_0 di raggio $r > 0$, e $f : B_r^*(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa con z_0 singolarità essenziale. Allora $f(B_r^*(z_0))$ è denso in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. [SS03, Teorema 3.3, capitolo 3]

□

Dimostrazione del Teorema 2.1.1. Sia $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, a meno di comporre con delle traslazioni possiamo supporre $f(0) = 0$. Consideriamo:

$$h(z) = f(1/z) : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}.$$

Mostriamo che h non può avere una singolarità essenziale in 0 (cioè f non può avere una singolarità essenziale in ∞).

Siccome f è un biolomorfismo di $\mathbb{C}$ e $f(0) = 0$, f dà una biiezione tra intorni di 0, quindi esiste $\delta > 0$ ed esiste $r > 0$ tale che per $|w| > 1/\delta$ si ha $|f(w)| > r$, quindi per $|z| < \delta$ si ha $|h(z)| > r$, più precisamente $h(B_\delta(0)) \cap B_r(0) = \emptyset$.

Se 0 fosse una singolarità essenziale di h , questo contraddirebbe il teorema di Casorati-Weierstrass.

La funzione f è olomorfa quindi analitica, cioè ha uno sviluppo in serie di potenze in un intorno di 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ da cui $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1/z)^n$. Ma 0 non è una singolarità essenziale per h , ovvero ha ordine finito in 0, pertanto il suo sviluppo, e di conseguenza quello di f , ha un numero finito di termini:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

Il polinomio $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ha n radici in $\mathbb{C}$, per cui $n = 1$, altrimenti f non sarebbe iniettiva, quindi $f(z) = az$. Inoltre deve valere che $a \neq 0$ altrimenti sarebbe costante. $\square$

2.2 Sfera di Riemann $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

In questa sezione vediamo come il gruppo degli automorfismi della sfera di Riemann è isomorfo al gruppo delle trasformazioni di Möbius.

Definizione 2.2.1. Una *trasformazione di Möbius* è una funzione razionale $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definita da $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $f(\infty) = a/c$ e $f(-d/c) = \infty$.

Notiamo che le trasformazioni di Möbius formano un gruppo rispetto alla composizione per cui è naturale considerare l'omomorfismo di gruppi

che manda una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ nella trasformazione $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Questa mappa è suriettiva, ma non è iniettiva. Infatti fissata una matrice, ogni suo multiplo è mandato nella stessa trasformazione. Da cui il ker di questo omomorfismo è:

$$\mathbb{C}^\times I = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$$

Il quoziente di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ per i multipli scalari non nulli della matrice identità $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times I$ si chiama *gruppo lineare proiettivo* delle matrici 2×2 a coefficienti complessi, e si indica con $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Per il primo teorema di isomorfismo di gruppi si ha che il gruppo delle trasformazioni di Möbius è isomorfo a $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Inoltre, poiché una trasformazione rimane invariata moltiplicandola per un numero complesso non nullo, la trasformazione indotta da una matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ è la stessa di quella indotta da $\alpha A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$ è tale che $\alpha^2 = 1/\det(A)$. Quindi l'inclusione $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induce un isomorfismo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, dove $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ è il *gruppo speciale lineare proiettivo*.

Ora mostriamo che questo è proprio il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Teorema 2.2.2. Una funzione f è meromorfa su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se e solo se è della forma $f([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ con $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ omogenei dello stesso grado.

Dimostrazione. Mostriamo che se $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ omogenei dello stesso grado allora $r([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ è meromorfa su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Sia $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_0([z : w]) = w/z$ carta standard su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, e consideriamo la composizione $r \circ \phi_0^{-1}$, questa è meromorfa infatti, preso $u \in \phi_0(U_0)$ si ha $r(\phi_0^{-1}(u)) = r([1 : u]) = p(1, u)/q(1, u)$, che è meromorfa.

D'altra parte, sia f meromorfa su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non identicamente nulla.

L'insieme degli zeri e dei poli di f è discreto e chiuso in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che è compatto, e quindi ha cardinalità finita.

Sia quindi $\{[a_0 : b_0], \dots, [a_n : b_n]\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'insieme dei poli e zeri di f e

$\text{ord}_{[a_i:b_i]}(f) = e_i$ i loro ordini. Si consideri

$$r([z:w]) = w^\alpha \prod_{i=1}^n (b_i z - a_i w)^{e_i}$$

dove $\alpha = -\sum_{i=1}^n e_i$ è costruito in modo da rendere r frazione di polinomi omogenei di stesso grado. Osserviamo che, per costruzione, la funzione r ha gli stessi zeri e poli di f con stessi ordini. Da cui la funzione $g = f/r$ non ha poli o zeri in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1:0]\}$.

Se g avesse un polo in $[1:0]$ allora $1/g$ avrebbe uno zero in $[1:0]$, ma $1/g$ non ha poli, perché g non ha zeri, pertanto $1/g$ è olomorfa su tutto $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e quindi è costante uguale a 0 per il Corollario 1.3.15, ma questo è assurdo perché r/f non è identicamente nulla. Allora g è olomorfa su tutto $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e quindi è costante. $\square$

Dall'Osservazione 1.3.16, data una superficie di Riemann X si ha una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{M}(X)$ e $\{F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \text{ olomorfe con } F^{-1}([1:0]) \text{ discreto}\}$.

In particolare prendendo $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, si ha che ogni $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ induce una mappa $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ olomorfa.

Proposizione 2.2.3. Le trasformazioni di Möbius sono biolomorfismi della sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Sia f una trasformazione di Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Sappiamo che f è biettiva con inversa ancora una trasformazione di Möbius. Quindi tale funzione definisce naturalmente una mappa olomorfa $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, definita da $F([z:w]) = [az + bw : cz + dw]$, che è un biolomorfismo. $\square$

Teorema 2.2.4. Ogni biolomorfismo della sfera di Riemann è una trasformazione di Möbius, perciò $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Sia $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ olomorfa, allora è indotta da una mappa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ che è razionale per il Teorema 2.2.2, quindi esistono $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ omogenei dello stesso grado tale che $f = p/q$ allora, indicando

con $P(f)$ i poli di f , si ha:

$$F([z : w]) = \begin{cases} [p(z, w) : q(z, w)] & \text{se } [z : w] \notin P(f) \\ [1 : 0] & \text{se } [z : w] \in P(f) \end{cases}$$

Siccome F è un biolomorfismo, si ha che f ha esattamente uno zero e un polo. Di conseguenza f deve essere della forma $f([z : w]) = (az + bw)/(cz + dw)$, che, in coordinate affini, corrisponde alla trasformazione di Möbius $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, se $c \neq 0$ (oppure a $f(w) = (a + bw)/(c + dw)$, se $d \neq 0$). Resta da mostrare che deve valere $ad - bc \neq 0$. Supponiamo $ad = bc$, poiché $c \neq 0$ (altrimenti $d \neq 0$ in tal caso consideriamo $a = bc/d$), allora $b = ad/c$. Sostituendo si ha $f(z) = a/c$ (oppure $f(z) = b/d$), cioè f è costante, ma questo è assurdo. $\square$

2.3 Tori complessi $\mathbb{C}/\Lambda$

Prima di studiare gli automorfismi, vediamo, in generale, come sono fatte le mappe olomorfe tra due tori complessi.

Proposizione 2.3.1. Siano $\Lambda, \Lambda' \subseteq \mathbb{C}$ due reticoli, $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $Y = \mathbb{C}/\Lambda'$ i due tori complessi associati e π_X, π_Y le rispettive proiezioni al quoziente. Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa allora esiste una mappa $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, della forma $G(z) = \gamma z + a$ con $\gamma, a \in \mathbb{C}$, tale che $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda'$ e il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

Inoltre F è un isomorfismo se e solo se $\gamma\Lambda = \Lambda'$.

Dimostrazione. Dato $a \in \mathbb{C}$, la traslazione $z \mapsto z + a$ induce una mappa olomorfa e biettiva $t_a : Y \rightarrow Y$, $t_a([z]) = [z + a]$.

Quindi, a meno di comporre per una traslazione, che è un automorfismo di Y , possiamo assumere $F(0) = 0$.

Se F è identicamente nulla allora è indotta dalla mappa nulla, dove $\gamma = 0$.

Consideriamo il caso in cui F non sia costante. I tori complessi sono superfici di genere 1, poiché omeomorfi al toro $S^1 \times S^1$, quindi dalla formula di Riemann-Hurwitz si ottiene che $\sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) = 0$.

Questo significa che F non può avere punti di ramificazione, cioè è una mappa di rivestimento. Quindi anche la composizione $F \circ \pi_X : \mathbb{C} \rightarrow Y$ è una mappa di rivestimento. Siccome $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, questo è il rivestimento universale di Y .

D'altra parte anche la mappa di proiezione $\pi_Y : \mathbb{C} \rightarrow Y$ è una mappa di rivestimento, quindi dall'unicità del rivestimento universale, si ha che deve esistere una trasformazione di rivestimento $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

G è olomorfa perché le altre mappe sono olomorfe e non hanno punti di ramificazione. Siccome $F(0) = 0$, deve valere che $G(0) \in \Lambda'$, poniamo senza perdita di generalità $G(0) = 0$. Notiamo che, affinché il diagramma commuti, deve valere $G(\Lambda) = \Lambda'$ e in generale le immagini tramite G di due elementi che sono nella stessa classe di equivalenza in X , devono appartenere alla stessa classe modulo Λ' , per cui fissato $\lambda \in \Lambda$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ esiste $w_\lambda(z) \in \Lambda'$ tale che $G(z + \lambda) - G(z) = w_\lambda(z)$.

La mappa G è continua, poiché è olomorfa, e Λ' è discreto e quindi la mappa $w_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda'$ che associa a $z \in \mathbb{C}$ l'elemento $w_\lambda(z)$ è costante, cioè non dipende da z . Derivando otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{C}$ $G'(z + \lambda) - G'(z) = 0$, ovvero G' è periodica rispetto al reticolo Λ , quindi l'immagine di G' coincide con quella di $G'|_{P_0}$ dove P_0 è il parallelogramma fondamentale del reticolo Λ che è compatto, quindi $G'|_{P_0}$ è limitata e di conseguenza anche G' .

Abbiamo mostrato che G' è una funzione intera (olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) e limitata e quindi per il Teorema di Liouville ([SS03, Corollario 4.5, capitolo 2]) è costante, questo equivale a dire che G è lineare, pertanto esiste $\gamma \in \mathbb{C}$ tale che $G(z) = \gamma z$. Poiché $G(\Lambda) = \Lambda'$ deve valere che $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda'$.

Resta da mostrare che F è un isomorfismo se e solo se $\gamma\Lambda = \Lambda'$. Si ha $\gamma\Lambda = \Lambda'$

se e solo se $\gamma^{-1}\Lambda' = \Lambda$, basta considerare la mappa $H(z) = \gamma^{-1}z$, essa induce una mappa olomorfa da Y a X che è l'inversa di F . $\square$

Consideriamo ora le mappe da un toro complesso in sé stesso.

Per prima cosa mostriamo che il gruppo formato degli automorfismi di X che fissano lo 0 ha ordine finito.

Teorema 2.3.2. Sia $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un toro complesso, e sia $\text{Aut}_0(X)$ il gruppo degli automorfismi che fissano lo 0. Allora $\text{Aut}_0(X)$ è isomorfo a uno tra $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia $F \in \text{Aut}(X)$ tale che $F(0) = 0$, dalla Proposizione 2.3.1 si ha che F è indotta da una mappa $G(z) = \gamma z$ per qualche $\gamma \in \mathbb{C}$, quindi F è della forma $F([z]) = [\gamma z]$. Inoltre, poiché F è un biolomorfismo si ha che $\gamma\Lambda = \Lambda$, e quindi deve valere che $|\gamma| = 1$. Questo perché se consideriamo un elemento di lunghezza minima $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ si ha che deve valere $|\lambda| \leq |\gamma\lambda|$, quindi $|\gamma| \geq 1$. Ragionando in maniera analoga con $\gamma^{-1}\Lambda = \Lambda$ si ottiene la disuguaglianza opposta $|\gamma| \leq 1$.

Se $\gamma = \pm 1$, allora $F = \text{id}$ oppure $F = -\text{id}$, per cui $\{\text{id}, -\text{id}\} \subseteq \text{Aut}_0(X)$.

Supponiamo ora che $\gamma \notin \mathbb{R}$, allora γ e 1 sono $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti e quindi esiste $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ di lunghezza minima tale che λ e $\gamma\lambda$ generano il reticolo Λ . Poiché $\gamma\Lambda = \Lambda$, anche $\gamma^2\lambda \in \Lambda$, e quindi si ottiene l'equazione $\gamma^2\lambda = m\gamma\lambda + n\lambda$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, semplificando λ che è diverso da 0, si ottiene $\gamma^2 - m\gamma - n = 0$. Vediamo, quindi, quali sono i valori possibili di γ cercando le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^2 - mz - n = 0$ che abbiano modulo 1. Poiché l'equazione è a coefficienti interi se $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione, anche il suo complesso coniugato $\bar{z} \in \mathbb{C}$ è una soluzione e vale che $z + \bar{z} = -m$. Inoltre, poiché γ è di modulo 1, esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma = e^{i\theta}$. Per cui otteniamo che $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = -m \in \mathbb{Z}$, cioè $2\cos(\theta) = -m$, quindi $\cos(\theta) = -m/2$. Siccome deve valere che $|\cos(\theta)| \leq 1$ i possibili valori di m sono $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Da qui si deducono i valori di θ e di conseguenza quelli di γ . Otteniamo che le possibili soluzioni in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sono le radici terze, quarte o seste dell'unità.

Quindi $\text{Aut}_0(X)$ è costituito, oltre che da id e $-\text{id}$, da funzioni $F([z]) = [\gamma z]$ dove γ è una radice terza, quarta o sesta dell'unità. Nel caso in cui è

una radice quarta $\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ altrimenti se è una radice sesta o terza $\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Se invece nessuna di queste radici dell'unità preserva il reticolo si ha $\text{Aut}_0(X) = \{id, -id\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

Consideriamo ora il caso generale $\text{Aut}(X)$.

Notiamo che una traslazione $t : X \rightarrow X$, $t(z) = z + b$ di un elemento $b \in X$ è un automorfismo di X . Le traslazioni formano quindi un sottogruppo di $\text{Aut}(X)$ che indichiamo con $\text{Aut}_t(X)$.

Teorema 2.3.3. Sia $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticolo e $X = \mathbb{C}/\Lambda$ il toro complesso associato. Allora $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}_t(X) \rtimes \text{Aut}_0(X)$.

Dimostrazione. Sia $F \in \text{Aut}(X)$, allora è della forma $F(z) = \gamma z + \alpha$ con $|\gamma| = 1$ e $\alpha \in X$. Definiamo la mappa:

$$\phi : \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}_0(X) \text{ tale che } \phi(F)(z) = F(z) - F(0).$$

In particolare $\phi(F)(z) = \gamma z$. Si ha che ϕ è suriettiva perché se $f \in \text{Aut}_0(X)$ allora $f \in \text{Aut}(X)$ e $f = \phi(f)$. Inoltre il ker di ϕ è il sottogruppo $\text{Aut}_t(X)$, che quindi è un sottogruppo normale di $\text{Aut}(X)$. Quindi si ha:

$$\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}_t(X) \rtimes \text{Aut}_0(X).$$

Osserviamo che il prodotto non è diretto perché in generale $f \circ g \neq g \circ f$, se $f \in \text{Aut}_t(X)$ e $g \in \text{Aut}_0(X)$. $\square$

Come ultima cosa osserviamo che

$$\begin{aligned} \psi : X &\rightarrow \text{Aut}_t(X) \\ b &\mapsto f(z) = z + b \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi, cioè $X \cong \text{Aut}_t(X)$.

Abbiamo quindi mostrato che $\text{Aut}(X) \cong X \rtimes \text{Aut}_0(X)$ con $\text{Aut}_0(X)$ isomorfo a uno tra $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2.4 Disco unitario $\mathbb{D}$

In questa sezione studiamo gli automorfismi di $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definizione 2.4.1. Definiamo *il gruppo speciale unitario* di matrici 2×2 complesse come:

$$\mathrm{SU}_{1,1}(\mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) : A^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lemma 2.4.2. Vale l'uguaglianza:

$$\mathrm{SU}_{1,1}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Dimostrazione. Prendiamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

e imponiamo che tale matrice appartenga a $\mathrm{SU}_{1,1}(\mathbb{C})$, quindi deve valere:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i prodotti otteniamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \bar{a}a - c\bar{c} = 1 \\ \bar{a}b - \bar{c}d = 0 \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \\ b\bar{b} - d\bar{d} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |c|^2 = 1 \\ \bar{a}b = \bar{c}d \\ a\bar{b} = c\bar{d} \\ |b|^2 - |d|^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |c|^2 = 1 \\ bc|a|^2 = ad|c|^2 \\ ad|b|^2 = cb|d|^2 \\ |b|^2 - |d|^2 = -1 \end{cases}.$$

Utilizzando che $ad - bc = 1$ ricaviamo $c = \bar{b}$, $d = \bar{a}$ e $|a|^2 - |b|^2 = 1$. $\square$

Definizione 2.4.3. Il *gruppo speciale unitario proiettivo* è il quoziente:

$$\mathrm{PSU}_{1,1}(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}_{1,1}(\mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

Indichiamo la classe di un elemento

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_{1,1}(\mathbb{C})$$

con la trasformazione:

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-\bar{a}/\bar{b}\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Lemma 2.4.4. $\mathrm{PSU}_{1,1}(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Prendiamo un elemento in $\mathrm{PSU}_{1,1}(\mathbb{C})$, rappresentato dalla trasformazione:

$$\phi : \mathbb{C} \setminus \{-\bar{a}/\bar{b}\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Mostriamo che questa mappa è un automorfismo di $\mathbb{D}$. Sia $z \in \mathbb{C}$, tale che $|z| = 1$ in tal caso vale che $\bar{z} = z^{-1}$, allora si ha:

$$|\phi(z)|^2 = \phi(z) \cdot \overline{\phi(z)} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \cdot \frac{\bar{a}z^{-1} + \bar{b}}{\bar{b}z^{-1} + a} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \cdot \frac{\bar{a} + \bar{b}z}{b + az} = 1.$$

Questo vuol dire che ϕ manda il bordo del disco unitario in sé stesso. Osserviamo poi che $|\phi(0)|^2 = \frac{|b|^2}{|a|^2}$ è minore di 1, poiché $|a|^2 = |b|^2 + 1$, e quindi $\phi(0) \in \mathbb{D}$, cioè esiste un punto all'interno del disco la cui immagine è nel disco. Poiché ϕ non è costante, per il principio del massimo modulo ([SS03, Teorema 4.4, capitolo 3]) si ha che ϕ non può avere un massimo all'interno del disco e quindi $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Infine ϕ è un biolomorfismo con inversa $\phi^{-1}(w) = \frac{b - \bar{a}w}{a - \bar{b}w}$. Da cui $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $\square$

Mostriamo ora che tutti gli automorfismi sono di questa forma.

Lemma 2.4.5 (Lemma di Schwarz). Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa, con $f(0) = 0$. Allora valgono le seguenti:

- $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$;
- $|f'(0)| \leq 1$;

- Se esiste $z_0 \neq 0$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$ allora f è una rotazione, cioè $f(z) = e^{i\theta}z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. [SS03, Lemma 2.1, capitolo 8] □

Osservazione 2.4.6. Una rotazione $r_\theta(z) = e^{i\theta}z$ è un elemento di $\text{PSU}_{1,1}(\mathbb{C})$, infatti corrisponde alla classe della matrice:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \in \text{SU}_{1,1}(\mathbb{C}).$$

Teorema 2.4.7. $\text{Aut}(\mathbb{D}) \cong \text{PSU}_{1,1}(\mathbb{C})$

Dimostrazione. Sia $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ un automorfismo del disco. Preso $\alpha \in \mathbb{D}$ tale che $f(\alpha) = 0$, consideriamo la matrice:

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \in \text{SU}_{1,1}(\mathbb{C})$$

che corrisponde alla mappa $\phi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z} \in \text{PSU}_{1,1}(\mathbb{C})$. Questa è un automorfismo del disco per quanto mostrato prima, tale che $\phi_\alpha(\alpha) = 0$ e $\phi_\alpha(0) = \alpha$. Inoltre $\phi_\alpha^2 = \text{id}$, cioè ϕ_α è l'inversa di sé stessa.

Consideriamo la composizione $h = f \circ \phi_\alpha$. Questa composizione è un automorfismo del disco tale che $h(0) = 0$. Per il Lemma 2.4.5, abbiamo che $|h(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Inoltre $h^{-1}(0) = 0$, quindi applicando il Lemma di Schwarz a h^{-1} troviamo che $|h^{-1}(w)| \leq |w|$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Per cui otteniamo che $|h(z)| = |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Quindi dal Lemma 2.4.5, si ha che h è una rotazione, cioè esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $f \circ \phi_\alpha = r_\theta$, con $r_\theta(z) = e^{i\theta}z$. Componendo a destra per l'inversa di ϕ_α si ha che $f = r_\theta \circ \phi_\alpha$, quindi f è composizione di mappe in $\text{PSU}_{1,1}(\mathbb{C})$. □

Capitolo 3

Azioni di gruppo su una superficie di Riemann

In questo capitolo studieremo le azioni di gruppi finiti su superfici di Riemann compatte e connesse e il modo in cui queste influenzano la struttura della superficie. Arriveremo a dimostrare il Teorema di Hurwitz, il quale stabilisce un limite superiore all'ordine del gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$.

3.1 Azioni di gruppo

Introduciamo il concetto di azione di un gruppo G su una superficie di Riemann connessa e compatta X per poi costruire una struttura complessa sul quoziente X/G .

Definizione 3.1.1. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X .

- l'*orbita* di un punto $p \in X$ è l'insieme $G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}$.
- lo *stabilizzatore* di $p \in X$ è il sottogruppo $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$.

Osservazione 3.1.2. I punti nella stessa orbita hanno stabilizzatori coniugati cioè $G_{g \cdot p} = gG_pg^{-1}$, da cui segue che $|G \cdot p||G_p| = |G|$.

Definizione 3.1.3. Sia G un gruppo che agisce su X superficie di Riemann. L'azione si dice *olomorfa* se per ogni $g \in G$, la biezione $p \mapsto g \cdot p$ è olomorfa da X in sé stessa.

Definizione 3.1.4. L'azione di un gruppo G su un insieme X si dice *fedele* se ha nucleo banale, ovvero:

$$\ker_G = \{g \in G : g \cdot p = p, \text{ per ogni } p \in X\} = \{id\}.$$

Proposizione 3.1.5. Sia G un gruppo finito che agisce in maniera fedele e olomorfa su X , una superficie di Riemann compatta e connessa. Allora l'insieme $S = \{x \in X : |G_x| > 1\}$ è finito.

Dimostrazione. Poiché X è compatto, basta mostrare che S è un insieme discreto. Supponiamo che non lo sia, allora esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi in S convergente a un punto $x \in X$. Per ogni x_n esiste un elemento $g_n \in G_{x_n}$, tale che $g_n \neq id$. Poiché G è un gruppo finito, esiste un elemento $g \in G$, $g \neq id$ tale che $g = g_n$ per infiniti valori di n . A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere quindi che $g = g_n$ per ogni n , cioè $g \cdot x_n = x_n$ per tutti gli n . Quindi abbiamo mostrato che $g = id$ su un insieme che ha un punto limite in X , per il Teorema d'identità ([Mir95, Teorema 1.35, Capitolo II]) $g = id$ su tutto X . $\square$

Consideriamo ora il quoziente X/G e mostriamo che eredita una naturale struttura di superficie di Riemann indotta da quella su X .

Proposizione 3.1.6. Sia G un gruppo finito che agisce in maniera olomorfa e fedele su una superficie di Riemann compatta e connessa X . Fissato un punto $p \in X$, esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di p tale che:

- $gU = U$ per ogni $g \in G_p$;
- $U \cap gU = \emptyset$ per ogni $g \notin G_p$;
- La mappa $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ è un omeomorfismo su un aperto di X/G ;
- Se $y \in U$ e $g \cdot y = y$ per qualche $g \in G_p$ allora $y = p$ (nessun altro punto oltre p è fissato da un elemento di G_p).

Dimostrazione. Sia $G \setminus G_p = \{g_1, \dots, g_n\}$ l'insieme degli elementi del gruppo G che non fissano p . Poiché X è T_2 si ha che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste V_i intorno aperto di p e W_i intorno aperto di $g_i(p)$ tale che $V_i \cap X_i = \emptyset$. Preso l'insieme $g_i^{-1}W_i$, che è un intorno aperto di p , definiamo $R_i = V_i \cap (g_i^{-1}W_i)$ e poniamo $R = \bigcap_i R_i$, che è ancora un intorno aperto di p perché è intersezione finita di aperti che contengono p . Ora definiamo $U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot R$, anch'esso intorno aperto di p , poiché G è finito.

Per costruzione, U è invariante per G_p , cioè $gU = U$ per ogni $g \in G_p$.

Per il secondo punto osserviamo che per costruzione $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subseteq V_i \cap W_i = \emptyset$, quindi anche $R \cap (g_i \cdot R) = \emptyset$. Essendo $U \subseteq R$ si ha $U \cap (g_i \cdot U) = \emptyset$.

La mappa $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ è la mappa indotta dall'inclusione che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \pi_U \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ U/G_p & \xrightarrow{\alpha} & X/G \end{array}$$

La mappa α è continua e aperta perché, componendola con la mappa quoziente π_U , si ottiene $\pi_X \circ i$ che è continua e aperta. Inoltre è iniettiva per costruzione di U , infatti nessun punto di U può essere portato in U da un elemento in $G \setminus G_p$, da cui segue che se $v \in U$ è nella stessa orbita globale di $u \in U$ deve valere che $v = g \cdot u$ per qualche $g \in G_p$, ma questo significa proprio che u e v sono nella stessa orbita sotto G_p , cioè α è iniettiva. Dunque α è un omeomorfismo sull'immagine.

Infine osserviamo che, per l'azione di G su X , il sottoinsieme dei punti $x \in X$ che hanno $|G_x| > 1$ è discreto e quindi possiamo eventualmente restringere U in modo da assicurare che solo p sia fissato da G_p . $\square$

Teorema 3.1.7. Sia G un gruppo finito che agisce in maniera fedele e olomorfa su una superficie di Riemann connessa e compatta X . Allora la struttura complessa su X induce in modo naturale una struttura complessa sul quoziente X/G che rende la mappa di proiezione $\pi : X \rightarrow X/G$ olomorfa di grado $|G|$ e tale che $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$ per ogni $p \in X$.

Dimostrazione. Per prima cosa definiamo le carte su X/G . Sia $\bar{p} \in X/G$ l'or-

bita di un punto $p \in X$, cioè $\bar{p} = G \cdot p$. Dobbiamo definire un intorno aperto W di $\bar{p}$ in X/G e una funzione biunivoca e olomorfa $\psi : W \rightarrow V \subset \mathbb{C}$. La costruzione dipende dalla cardinalità dello stabilizzatore G_p che indichiamo con m .

Caso 1: $m = 1$. In questo caso si ha che lo stabilizzatore di p è banale, per cui tutti gli elementi dell'orbita $G \cdot p$ sono distinti. Per la Proposizione 3.1.6 esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di p tale che $\pi|_U : U \rightarrow W = \pi(U) \subset X/G$ è un omeomorfismo su un intorno aperto W di $\bar{p}$. A meno di restringere U , possiamo assumerlo come dominio di una carta $\phi : U \rightarrow V$ su X . Prendiamo come carta su X/G la composizione $\psi = \phi \circ (\pi|_U)^{-1} : W \rightarrow V$, che è un omeomorfismo olomorfo perché ϕ è olomorfa e $(\pi|_U)^{-1}$ è continua e aperta.

Caso 2: $m \geq 2$. In questo caso esiste almeno un punto diverso dall'identità in G che fissa p . Per la Proposizione 3.1.6 esiste U intorno aperto di p G_p -invariante, tale che per ogni $g \in G \setminus G_p$ si ha $gU \cap U = \emptyset$ e la mappa $\alpha : U/G_p \rightarrow W \subset X/G$ è un omeomorfismo su un intorno aperto W di $\bar{p}$.

Vogliamo costruire una carta $\psi : W \rightarrow \mathbb{C}$ definita in un intorno aperto di $\bar{p}$ tale che la composizione $U \xrightarrow{\pi_U} U/G_p \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$ sia G_p -invariante.

Costruiamo prima una mappa $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ con tale proprietà. Sia $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ carta su X centrata in p in modo che $\phi(p) = 0$, vogliamo capire cosa fa $g \in G_p$ in termini di coordinate locali. Ogni $g \in G_p$ induce una mappa $\tilde{g} : \phi(U) \rightarrow \phi(U)$ definita da $\tilde{g}(z) = \phi(g(\phi^{-1}(z)))$. Questa è un biolomorfismo tale che $\tilde{g}(0) = 0$, per cui ha molteplicità 1 in 0. Definiamo la funzione $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ in coordinate locali come: $h(z) = \prod_{g \in G_p} \tilde{g}(z)$, che è olomorfa perché prodotto finito di funzioni olomorfe ed è G_p -invariante per costruzione. Inoltre, poiché ogni $\tilde{g}$ ha molteplicità 1 in 0, si ha che h ha molteplicità m in p . Poiché h è G_p -invariante, essa induce una mappa ben definita $\bar{h} : U/G_p \rightarrow \mathbb{C}$ che è aperta e continua perché h lo è. Inoltre $\bar{h}$ è iniettiva perché $h(z)$ si comporta come z^m in un intorno di 0, e quindi è un omeomorfismo. La mappa definita come la composizione $\psi = \bar{h} \circ \alpha^{-1} : W \rightarrow V = \bar{h}(U/G_p) \subset \mathbb{C}$ è una carta su X/G .

Mostriamo che le carte sono compatibili.

- Nel caso in cui le carte sono costruite come nel caso $m \geq 2$, poiché i punti con stabilizzatore non banale sono discreti, possiamo assumere che i loro domini non si intersecano.
- Se due carte sono costruite nel caso $m = 1$ sono compatibili perché lo sono le carte su X .
- Siano $\psi_1 : W_1 \rightarrow V_1$ costruita come nel caso $m = 1$ e un'altra $\psi_2 : W_2 \rightarrow V_2$ costruita con $m \geq 2$, dove $W_1 = \pi(U_1)$ e $W_2 = \pi(U_2) \subseteq X/G$ con $U_1, U_2 \subseteq X$ aperti usati per costruire le due carte. Consideriamo un punto $\bar{r} \in W_1 \cap W_2$, e prendiamo $r \in \pi^{-1}(\bar{r})$ tale che $r \in U_1 \cap U_2$. Questo è possibile a meno di sostituire l'aperto U_1 con una sua traslazione $g \cdot U_1$, in modo che $g \cdot U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Adesso, siano $w = \phi_1(x)$ la coordinata locale in U_1 (e quindi anche in W_1 tramite ψ_1) e $z = \phi_2(x)$ quella in U_2 . La coordinata locale in W_2 è $h(z)$, con h costruita come sopra. Quindi le carte sono compatibili perché ϕ_1 e ϕ_2 lo sono, h è olomorfa, e la mappa $w \mapsto h(z(w))$ è olomorfa.

Poiché G è un gruppo finito e X è di Hausdorff si ha che X/G è di Hausdorff, e quindi queste carte formano un atlante che dà a X/G una struttura di superficie di Riemann. La proiezione $\pi : X \rightarrow X/G$ è olomorfa per costruzione delle carte, ha grado $|G|$ perché G agisce in maniera olomorfa e fedele, il che implica che ogni punto di X/G ha esattamente $|G|$ preimmagini contate con molteplicità in X . Inoltre in ogni punto $p \in X$ si ha che $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$, perché π ha la stessa molteplicità di $h(z)$ che abbiamo già osservato essere $|G_p|$. $\square$

Studiamo ora i punti di ramificazione e biforcazione della mappa quoziente $\pi : X \rightarrow X/G$. Sia $y \in X/G$ un punto di biforcazione, e poniamo $\{x_1, \dots, x_s\} = \pi^{-1}(y)$. Tutti gli x_i sono nella stessa orbita su X , per cui hanno stabilizzatori dello stesso ordine, che indichiamo con r . Da questo si ottiene che il numero dei punti nell'orbita, ovvero s , è $|G|/r$. Abbiamo mostrato che per ogni punto di ramificazione $y \in X/G$ esiste un intero $r \geq 2$

tale che $\pi^{-1}(y)$ ha esattamente $|G|/r$ punti in X , e in ognuna di queste preimmagini π ha molteplicità r .

3.2 Teorema di Hurwitz

Teorema 3.2.1. [Teorema sugli automorfismi di Hurwitz] Sia G un gruppo finito che agisce olomorficamente e fedelmente su una superficie di Riemann compatta e connessa X di genere $g \geq 2$. Allora vale:

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Dimostrazione. Su X/G poniamo la struttura di superficie di Riemann data dal Teorema 3.1.7 e indichiamo con $g' = g(X/G)$. Indichiamo con $\pi : X \rightarrow X/G$ la proiezione al quoziente e con $y_1, \dots, y_k \in X/G$ i punti di biforcazione. Per ciascun y_i indichiamo con r_i la molteplicità di π nei $|G|/r_i$ punti nella controimmagine di y_i . Dalla formula di Riemann-Hurwitz (Teorema 1.4.10) si ottiene:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= |G|(2g' - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1) \\ &= |G| \left(2g' - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Poniamo $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$ e consideriamo il caso $g' \geq 1$.

- Se $R = 0$ la (3.1) diventa $2g - 2 = |G|(2g' - 2)$, cioè $g - 1 = |G|(g' - 1)$. Poiché $g > 1$ e $|G| \geq 1$, si ha che $g' - 1 \geq 1$ da cui possiamo dedurre che $|G| \leq g - 1$.
- Se $R \neq 0$, poiché $r_i \geq 2$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, vale che $R \geq 1/2$, quindi otteniamo:

$$2(g - 1) \geq |G| \left(2 \cdot 1 - 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{|G|}{2}, \text{ da cui } |G| \leq 4(g - 1).$$

Consideriamo ora il caso in cui $g' = 0$, qui la (3.1) diventa $2g - 2 = |G|(R - 2)$. Siccome $g > 1$ si ha che $2g - 2 > 0$ e quindi vale necessariamente che $R > 2$. Inoltre per come abbiamo definito R si ha che $R \geq k/2$. Analizziamo i valori k e i corrispondenti valori minimi di R :

- Supponiamo $k \geq 5$:

In tal caso vale che $R \geq \frac{5}{2}$ quindi si ha $2g - 2 \geq \frac{|G|}{2}$ cioè $|G| \leq 4(g - 1)$.

- Supponiamo $k = 4$:

Se $r_i = 2$ per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ si ottiene $R = 2$, che non soddisfa $R > 2$. Se invece $r_1 \geq 3$ e $r_i = 2$ per ogni $i \in \{2, 3, 4\}$ allora $R \geq \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} > 2$, da cui $|G| \leq 12(g - 1)$.

- Supponiamo $k = 3$:

Se $r_i = 2$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ si ha $R = \frac{3}{2} < 2$.

Se $r_1 \geq 3$ e $r_i = 2$ per $i \in \{2, 3\}$ si ha $R \geq \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ che non soddisfa $R > 2$.

Quindi affinché $R > 2$ devono valere $r_1 \geq 3$ e $r_2 \geq 2$, troviamo una stima anche per r_3 . Si ha che $R \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{r_3}$. Ponendo questa quantità maggiore di 2 si ottiene che $r_3 \geq 7$. Da cui si ha che $R \geq \frac{85}{42} = 2 + \frac{1}{42}$.

In conclusione abbiamo che:

$$2g - 2 \geq \frac{|G|}{42}, \text{ e quindi } |G| \leq 84(g - 1).$$

□

Nel prossimo capitolo mostreremo che il gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$ è finito e quindi, applicando il Teorema 3.2.1, otterremo:

$$|\text{Aut}(X)| \leq 84(g - 1).$$

Capitolo 4

Teorema di Schwarz

In questo capitolo presentiamo le 1-forme, i divisori sulle superfici di Riemann e i punti di Weierstrass. Arriveremo a dimostrare il Teorema di Schwarz, il quale afferma che il gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$ è finito, evidenziando la notevole rigidità di queste strutture.

4.1 1-forme su superfici di Riemann

Definizione 4.1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto, una *1-forma olomorfa* nella coordinata z è un'espressione ω della forma $\omega = f(z)dz$, dove $f \in \mathcal{O}(U)$.

Vogliamo ora estendere questa definizione alle superfici di Riemann utilizzando le carte complesse.

Definizione 4.1.2. Sia $\omega_1 = f(z)dz$ una 1-forma olomorfa nella coordinata z definita in un aperto $U_1 \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\omega_2 = g(w)dw$ una 1-forma olomorfa nella coordinata w definita in un aperto $U_2 \subseteq \mathbb{C}$. Sia $T : U_2 \rightarrow U_1$ una funzione olomorfa tale che $T(w) = z$. Diciamo che ω_1 *si trasforma in* ω_2 tramite T se $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Definizione 4.1.3. Sia X una superficie di Riemann. Una *1-forma olomorfa* su X è una collezione di 1-forme olomorfe $\{\omega_\phi\}$, una per ogni carta $\phi : U \rightarrow V$ su X , tale che, se due carte ϕ_1, ϕ_2 hanno domini che si sovrappongono,

allora ω_{ϕ_1} si trasforma in ω_{ϕ_2} tramite la mappa di transizione $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. Indichiamo con $\Omega^{(1)}(U)$ lo spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe definite su un aperto $U \subseteq X$.

In maniera analoga possiamo definire le 1-forme meromorfe su una superficie di Riemann.

Definizione 4.1.4. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto. Una *1-forma meromorfa* nella coordinata z è un'espressione ω della forma $\omega = f(z)dz$, con $f \in \mathcal{M}(U)$.

Definizione 4.1.5. Sia X una superficie di Riemann. Una *1-forma meromorfa* su X è una collezione di 1-forme meromorfe $\{\omega_\phi\}$, una per ogni carta $\phi : U \rightarrow V$ su X , tale che, se due carte ϕ_1, ϕ_2 hanno domini che si sovrappongono, allora ω_{ϕ_1} si trasforma in ω_{ϕ_2} tramite la mappa di transizione $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. Indichiamo con $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ lo spazio vettoriale delle 1-forme meromorfe definite su un aperto $U \subseteq X$.

Osservazione 4.1.6. Per definire una 1-forma olomorfa o meromorfa su una superficie di Riemann, non è necessario dare una 1-forma per ogni singola carta su X ma è sufficiente definirla sui domini delle carte di un atlante (vedi [Mir95, Lemma 1.4, capitolo IV]).

Introduciamo inoltre il concetto di ordine di una 1-forma meromorfa. Sia $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$ dove $U \subseteq X$ è un intorno di p . Scegliendo una coordinata locale centrata in p , possiamo scrivere $\omega = f(z)dz$ dove f è una funzione meromorfa in $z = 0$.

Definizione 4.1.7. L'*ordine di ω in p* denotato con $\text{ord}_p(\omega)$ è l'ordine di f in 0.

È facile dimostrare che l'ordine di ω è ben definito, in quanto non dipende dalla scelta della coordinata locale.

Definizione 4.1.8. Data X una superficie di Riemann, un punto $p \in X$ e ω una 1-forma meromorfa, diciamo che:

- p è uno zero di ω di ordine n se $\text{ord}_p(\omega) = n > 0$;

- p è uno polo di ω di ordine n se $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$.

Lemma 4.1.9. Siano ω_1 e ω_2 due 1-forme meromorfe su una superficie di Riemann X , con ω_1 non identicamente nulla. Allora esiste ed è unica una funzione meromorfa f tale che $\omega_2 = f\omega_1$.

Dimostrazione. Scegliamo una carta $\phi : U \rightarrow V$ su X che dà una coordinata locale z . Possiamo scrivere $\omega_i = g_i(z)dz$ con $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(V)$. Consideriamo $h = g_2/g_1$, questa è una funzione meromorfa su V . La funzione $f = h \circ \phi$ è meromorfa su U ed è tale che $\omega_2 = f\omega_1$ su tutto U . Mostriamo che questa funzione non dipende dalla scelta delle carte. Sia $\psi : U' \rightarrow V'$ un'altra carta su X e consideriamo la funzione di transizione $T = \phi \circ \psi^{-1}$ per cui vale che $z = T(w)$. Allora le 1-forme nella coordinata w diventano $\omega_1 = g_1(T(w))T'(w)dw$ e $\omega_2 = g_2(T(w))T'(w)dw$, per cui possiamo definire una funzione:

$$\tilde{f} = \frac{(g_2 \circ T)T'}{(g_1 \circ T)T'} \circ \psi = \frac{g_2}{g_1} \circ T \circ \psi = h \circ \phi = f.$$

Quindi f e $\tilde{f}$ coincidono nelle intersezioni dei domini delle carte, poiché i domini delle carte ricoprono X otteniamo un'unica funzione meromorfa su tutto X che svolge il ruolo voluto. $\square$

4.2 Divisori su superfici di Riemann

In questa sezione introduciamo i divisori su una superficie di Riemann.

Definizione 4.2.1. Sia X una superficie di Riemann. Un *divisore* su X è una funzione $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ il cui supporto $\text{supp}(D) = \{p \in X : D(p) \neq 0\}$ è un sottoinsieme discreto di X . Possiamo scrivere un divisore D come somma formale:

$$D := \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Osservazione 4.2.2. L'insieme dei divisori su X forma un gruppo abeliano rispetto alla somma punto per punto, che indichiamo con $\text{Div}(X)$. Se X è una superficie di Riemann compatta, allora una funzione $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ è un

divisore se ha supporto finito. In tal caso, il gruppo $\text{Div}(X)$ è il gruppo abeliano libero sui punti di X .

Definizione 4.2.3. Se X è una superficie di Riemann compatta, il *grado* di un divisore D su X è la somma dei valori di D , ovvero:

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Definizione 4.2.4. Sia X una superficie di Riemann e sia f una funzione meromorfa su X non identicamente nulla, il divisore associato a f è definito come:

$$\text{div}(f) := \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

Un divisore di questa forma è detto *divisore principale* su X . L'insieme dei divisori principali è denotato con $\text{PDiv}(X)$.

Definizione 4.2.5. Sia X una superficie di Riemann e sia ω una 1-forma meromorfa su X non identicamente nulla, il *divisore di ω* è definito come:

$$\text{div}(\omega) = \sum_p \text{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Un divisore di questa forma è detto *divisore canonico* su X . L'insieme dei divisori canonici su X si denota con $\text{KDiv}(X)$.

Osservazione 4.2.6. Sia X una superficie di Riemann, sia f una funzione meromorfa su X non identicamente nulla e ω una 1-forma meromorfa su X non identicamente nulla, allora vale la proprietà: $\text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega)$. Dal Lemma 4.1.9 si deduce che la differenza di due divisori canonici è sempre un divisore principale, cioè per ogni ω 1-forma meromorfa non identicamente nulla si ha:

$$\text{KDiv}(X) = \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X)$$

In altre parole, l'insieme $\text{KDiv}(X)$ è una classe laterale del sottogruppo $\text{PDiv}(X)$ nel gruppo $\text{Div}(X)$.

Definizione 4.2.7. Siano X e Y superfici di Riemann con X connessa, e sia $F : X \rightarrow Y$ una funzione olomorfa non costante. Fissato $q \in Y$, il *divisore della preimmagine di q* è il divisore:

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \cdot p.$$

Osservazione 4.2.8. Se X e Y sono superfici di Riemann connesse e compatte, allora il grado di F è costante per il Teorema 1.4.4. Da questo segue che il grado del divisore della preimmagine $F^*(q)$ non dipende dal punto q e corrisponde al grado della funzione F .

Generalizziamo questa definizione introducendo il pullback di un divisore.

Definizione 4.2.9. Siano X e Y superfici di Riemann con X connessa, $F : X \rightarrow Y$ una funzione olomorfa non costante e $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ un divisore su Y . Il *pullback di D su X* è il divisore:

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q F^*(q).$$

Date X e Y superfici di Riemann con X connessa, dalla definizione di pullback si ottiene naturalmente un omomorfismo di gruppi dato da:

$$F^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X), \quad F^*(D)(p) = \text{mult}_p(F) D(F(p)).$$

In particolare il pullback di un divisore principale è ancora un divisore principale. Infatti, se $f \in \mathcal{M}(Y)$ e $p \in X$ vale che:

$$F^*(\text{div}(f))(p) = \text{mult}_p(F)(\text{div}(f)(F(p))) = \text{mult}_p(F) \text{ord}_{F(p)}(f) = \text{ord}_p(f \circ F).$$

Quindi, $F^*(\text{div}(f)) = \text{div}(F^*(f)) = \text{div}(f \circ F)$.

Inoltre se X e Y sono compatte, si ha che $\deg(F^*(D)) = \deg(F) \deg(D)$.

Definizione 4.2.10. Due divisori D_1 e D_2 su una superficie di Riemann X si dicono *linearmente equivalenti* se $D_1 - D_2 \in \text{PDiv}(X)$. In tal caso scriviamo $D_1 \sim D_2$.

Lemma 4.2.11. Sia X una superficie di Riemann. Allora valgono:

- L'equivalenza lineare è una relazione d'equivalenza su $\text{Div}(X)$;
- Un divisore è linearmente equivalente a 0 se e solo se è un divisore principale;
- Se X è compatta, allora divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado.

Dimostrazione. I primi due punti seguono direttamente dalla definizione di equivalenza lineare. Se X è compatta, per la Proposizione 1.3.18 si ha che $\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0$, e quindi i divisori principali su X hanno tutti grado 0. Pertanto, se $D_1 = \text{div}(f) + D_2$, allora $\deg(D_1) = \deg(\text{div}(f)) + \deg(D_2) = \deg(D_2)$. $\square$

Introduciamo gli spazi di funzioni meromorfe e di 1-forme meromorfe associati a un divisore.

Definizione 4.2.12. Sia D un divisore su una superficie di Riemann connessa X . Lo spazio delle funzioni meromorfe con poli limitati da D è l'insieme:

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} : \text{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

È immediato dalla definizione osservare che $L(D)$ è un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale.

Osservazione 4.2.13. Se $D_1 \leq D_2$ allora $L(D_1) \subseteq L(D_2)$. Inoltre, sapendo che una funzione f è olomorfa se e solo se $\text{div}(f) \geq 0$, si ha che $L(0) = \mathcal{O}(X)$. Nel caso in cui X è compatta $L(0) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ costante}\} \cong \mathbb{C}$.

Lemma 4.2.14. Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa, e sia D un divisore su X con $\deg(D) < 0$. Allora $L(D) = \{0\}$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $f \in L(D) \setminus \{0\}$ e consideriamo il divisore $E = \text{div}(f) + D$. Poiché X è compatta, per la Proposizione 1.3.18 si ha che $\deg(\text{div}(f)) = 0$. Quindi $\deg(E) = \deg(D) < 0$, ma $E \geq 0$ per cui $\deg(E) \geq 0$. Pertanto l'unica funzione in $L(D)$ è identicamente nulla. $\square$

Definizione 4.2.15. Dato un divisore D su una superficie di Riemann connessa X , il *sistema lineare completo* di D , denotato con $|D|$, è l'insieme:

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \sim D, E \geq 0\}.$$

Osserviamo subito che se X è compatta e $\deg(D) < 0$, allora $|D| = \emptyset$.

Lemma 4.2.16. Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa, e sia S la mappa:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{P}(L(D)) &\rightarrow |D| \\ [f] &\mapsto \text{div}(f) + D \end{aligned}$$

Allora S è ben definita e biettiva.

Dimostrazione. La mappa S è ben definita poiché $\text{div}(\lambda f) = \text{div}(f)$ per ogni costante $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Mostriamo che è biettiva.

Sia $E \in |D|$, allora $E \geq 0$ e $E \sim D$. Dunque esiste $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ tale che $E = \text{div}(f) + D$. Siccome $E \geq 0$, si ha che $f \in L(D)$, cioè S è suriettiva. Supponiamo ora che $S([f]) = S([g])$, allora $\text{div}(f) = \text{div}(g)$. Da questo segue che $\text{div}(f/g) = 0$, cioè f/g non ha né zeri né poli su X . Quindi f/g è una funzione olomorfa definita su tutto X , pertanto è uguale a una costante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ per il Teorema 1.3.15. Dunque $f/g = \lambda$, vale a dire $f = \lambda g$. $\square$

Definizione 4.2.17. Un sottoinsieme $Q \subseteq |D|$ si dice *sistema lineare* se corrisponde a un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(L(D))$ tramite la biiezione S del Lemma 4.2.16.

Proposizione 4.2.18. Siano D_1, D_2 due divisori linearmente equivalenti su una superficie di Riemann X , cioè $D_1 = D_2 + \text{div}(h)$ per qualche funzione meromorfa h non identicamente nulla. Allora la seguente mappa è un isomorfismo di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali:

$$\begin{aligned} \mu_h : L(D_1) &\rightarrow L(D_2) \\ f &\mapsto hf \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $f \in L(D_1)$, allora $\operatorname{div}(hf) = \operatorname{div}(h) + \operatorname{div}(f) \geq \operatorname{div}(h) - D_1 = -D_2$ e quindi $hf = \mu_h(f) \in L(D_2)$. Inoltre l'applicazione inversa è data da $\mu_{1/h}$, ben definita poiché h non è identicamente nulla, dunque μ_h è un isomorfismo di spazi vettoriali. $\square$

Definizione 4.2.19. Sia D un divisore su una superficie di Riemann connessa X . Lo spazio delle 1-forme meromorfe con poli limitati da D , è l'insieme:

$$L^{(1)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) : \operatorname{div}(\omega) \geq -D\}.$$

Osservazione 4.2.20. Lo spazio $L^{(1)}(0)$ coincide con l'insieme $\Omega^1(X)$ delle 1-forme olomorfe su X .

Lemma 4.2.21. Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa e sia D un divisore su X . Fissato $p \in X$ allora vale $L(D - p) = L(D)$ oppure $L(D - p)$ ha codimensione uno in $L(D)$.

Dimostrazione. Sia z una coordinata locale centrata in p e sia $n = -D(p)$. Ogni $f \in L(D)$ ha uno sviluppo in serie di Laurent centrato in p della forma $c_n z^n + \sum_{k \geq n+1} c_k z^k$. Definiamo l'applicazione lineare $\alpha : L(D) \rightarrow \mathbb{C}$, con $\alpha(f) = c_n$. Il nucleo di α corrisponde proprio all'insieme $L(D - p)$. Se α è identicamente nulla, allora $L(D - p) = L(D)$. Altrimenti, α è suriettiva e si ha $\dim L(D) = \dim(\ker(\alpha)) + 1$, il che significa che $L(D - p)$ ha codimensione uno in $L(D)$. $\square$

Teorema 4.2.22. [Teorema di Riemann-Roch] Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g , allora per ogni $D \in \operatorname{Div}(X)$ e per ogni $K \in \operatorname{KDiv}(X)$ si ha:

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Dimostrazione. [Mir95, Teorema 3.11, Capitolo VI] $\square$

Osservazione 4.2.23. Se consideriamo $D = 0$, dal Teorema 4.2.22 otteniamo $\dim L(0) - \dim L(K) = \deg(0) + 1 - g$ da cui $\dim L(K) = g$.

Di conseguenza ponendo $D = K$ si ottiene $\deg(K) = 2g - 2$.

Presentiamo alcune applicazioni utili del Teorema di Riemann-Roch.

Proposizione 4.2.24. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere 0. Allora $X \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Sia $p \in X$, poiché il divisore canonico K su X ha grado $2g - 2 = -2$, allora il divisore $K - p$ ha grado -3 , da cui $L(K - p) = 0$ per il Lemma 4.2.14. Applicando il Teorema di Riemann-Roch al divisore $D = p$, otteniamo:

$$\dim L(p) = \deg(p) + 1 - g + \dim L(K - p) = 2.$$

Quindi esiste una funzione meromorfa non costante $f \in L(p)$. Poiché X è compatta, f deve avere almeno un polo e quindi, siccome $\operatorname{div}(f) \geq -p$, ha un unico polo semplice in p . Da cui la mappa olomorfa associata a f , data da $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ha grado 1, pertanto è un biolomorfismo per il Corollario 1.4.6. $\square$

Proposizione 4.2.25. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere 2. Allora X è iperellittica.

Dimostrazione. Consideriamo il divisore canonico K su X . Siccome $\dim L(K) = g = 2$, esiste una funzione meromorfa non costante $f \in L(K)$. Poiché il divisore K ha grado $2g - 2 = 2$, si ha che f ha esattamente due poli contati con molteplicità, per cui la mappa olomorfa associata $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (data dall'Osservazione 1.3.16) ha grado due. Quindi F è un rivestimento iperellittico, per cui X è iperellittica. $\square$

4.3 Wronskiano

In questa sezione introduciamo il determinante Wronskiano associato a una famiglia finita di funzioni olomorfe su una superficie di Riemann. Studieremo l'ordine di annullamento del Wronskiano in un punto, che ci sarà utile nello studio dei punti di Weierstrass nella sezione successiva.

Definizione 4.3.1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, e siano $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{O}(U)$. Il *Wronskiano* delle funzioni $\phi_1, \dots, \phi_n$ è una funzione olomorfa $W(\phi_1, \dots, \phi_n) : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita come:

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(z) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(z) & \phi_1'(z) & \dots & \phi_1^{(n-1)}(z) \\ \phi_2(z) & \phi_2'(z) & \dots & \phi_2^{(n-1)}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(z) & \phi_n'(z) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.3.2. Se esiste $z \in U$ tale che $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(z) \neq 0$, cioè $W(\phi_1, \dots, \phi_n)$ non è identicamente nullo, allora le righe della matrice, di cui $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(z)$ calcola il determinante, sono linearmente indipendenti. Questo equivale a dire che le funzioni ϕ_i sono linearmente indipendenti su U , se così non fosse allora esisterebbero costanti $c_1, \dots, c_n$ non tutte nulle, tali che:

$$c_1\phi_1(z) + c_2\phi_2(z) + \dots + c_n\phi_n(z) = 0 \quad \text{per ogni } z \in U.$$

Derivando otterremmo una dipendenza lineare anche per le derivate $\phi_i^{(k)}$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, in tal caso le righe della matrice sarebbero linearmente dipendenti, e quindi $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(z) = 0$.

Definizione 4.3.3. Sia X superficie di Riemann connessa e compatta e D un divisore su X tale che $\dim L(D) = r + 1$. Sia $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ una base di $L(D)$. Sia $p \in X$ un punto fissato, e sia z coordinata locale in un intorno di p . Consideriamo per ogni $i \in \{1, \dots, r+1\}$, $\tilde{f}_i$ l'espressione locale di f_i nella coordinata locale z . Il *Wronskiano locale* associato alla base $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ rispetto alla coordinata z è la funzione meromorfa definita in un intorno aperto di 0 data da:

$$W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(z) := \det \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(z) & \tilde{f}_1'(z) & \dots & \tilde{f}_1^{(r)}(z) \\ \tilde{f}_2(z) & \tilde{f}_2'(z) & \dots & \tilde{f}_2^{(r)}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{f}_{r+1}(z) & \tilde{f}_{r+1}'(z) & \dots & \tilde{f}_{r+1}^{(r)}(z) \end{pmatrix}.$$

L'ordine di annullamento del Wronskiano è l'ordine di $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$ in 0,

e lo indichiamo con $\text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_{r+1}))$.

Proposizione 4.3.4. Sia $p \in X$ un punto, allora l'ordine di annullamento del Wronskiano in p non dipende dalla scelta della coordinata locale.

Dimostrazione. Sia z coordinata locale in un intorno aperto $U \subseteq X$ di p e w un'altra coordinata locale in un intorno aperto $V \subseteq X$ di p . Per ogni $i \in \{1, \dots, r+1\}$ indichiamo le espressioni locali di f_i in z e w rispettivamente come $\tilde{f}_i^z$ e $\tilde{f}_i^w$. Mostriamo che le due espressioni $W_w(f_1, \dots, f_{r+1})$ e $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$ si trasformano l'una nell'altra tramite il cambio di coordinate $z = T(w)$. Si ha $\tilde{f}_i^w(w) = \tilde{f}_i^z(T(w))$, quindi per la regola di derivazione della funzione composta per ogni $k \geq 1$,

$$\frac{d^k \tilde{f}_i^w(w)}{dw^k} = (T'(w))^k \frac{d^k \tilde{f}_i^z(z)}{dz^k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{jk}(w) \frac{d^j \tilde{f}_i^z(z)}{dz^j}$$

dove $\alpha_{jk}(w)$ sono funzioni olomorfe che non dipendono dalle f_i . Consideriamo la matrice $M_w = \left(\frac{d^k \tilde{f}_i^w(w)}{dw^k} \right)_{ki}$ il cui determinante è $W_w(f_1, \dots, f_{r+1})$ e osserviamo che tramite operazioni sulle righe, che non modificano il determinante, possiamo sottrarre i termini α_{jk} dalle righe fino ad ottenere la matrice $\left((T'(w))^k \frac{d^k \tilde{f}_i^z(z)}{dz^k} \right)_{ki}$ che ha stesso determinante di quella di partenza. Dalla k -esima riga raccogliamo il fattore $T'(w)^{k-1}$, fino ad ottenere:

$$W_w = \det(M_w) = T'(w)^0 \cdots T'(w)^r \det \left(\frac{d^k \tilde{f}_i^z(z)}{dz^k} \right)_{ki} = T'(w)^{r(r+1)/2} W_z.$$

Poiché T' è olomorfa e invertibile in un intorno di p , si ha:

$$\text{ord}_p(W_w) = \text{ord}_p(W_z).$$

□

Proposizione 4.3.5. L'ordine del Wronskiano in un punto $p \in X$ non dipende dalla base scelta di $L(D)$.

Dimostrazione. Siano $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ e $\{h_1, \dots, h_{r+1}\}$ due basi per $L(D)$, allora esiste una matrice $M \in GL_{r+1}(\mathbb{C})$ tale che:

$$M \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{r+1} \end{pmatrix}$$

notiamo che per ogni $j \in \{1, \dots, r+1\}$ si ha:

$$M \cdot \begin{pmatrix} f_1^{(j)} \\ \vdots \\ f_{r+1}^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(j)} \\ \vdots \\ h_{r+1}^{(j)} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$M \cdot \begin{pmatrix} f_1 & f_1' & \dots & f_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{r+1} & f_{r+1}' & \dots & f_{r+1}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_1' & \dots & h_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{r+1} & h_{r+1}' & \dots & h_{r+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Quindi $W_z(f_1, \dots, f_{r+1}) \cdot \det(M) = W_z(h_1, \dots, h_{r+1})$ Ma M è invertibile, quindi $\det(M) \neq 0$, per cui:

$$\text{ord}_p(W_z(h_1, \dots, h_{r+1})) = \text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_{r+1}))$$

□

Osservazione 4.3.6. Dalla Proposizione 4.2.18 sappiamo che se due divisori D_1, D_2 sono linearmente equivalenti allora $L(D_1) \cong L(D_2)$, quindi una base di $L(D_1)$ si trasforma in una base di $L(D_2)$ tramite una matrice invertibile. Dunque, seguendo passaggi analoghi alla Proposizione 4.3.5, otteniamo che l'ordine di annullamento del Wronskiano rispetto a una base di $L(D_1)$ è lo stesso di quello rispetto a una base di $L(D_2)$.

Prima di procedere nel calcolo dell'ordine di annullamento, introduciamo le forme differenziali meromorfe di grado n su una superficie di Riemann e studiamo il caso particolare del Wronskiano.

Definizione 4.3.7. Una *forma differenziale meromorfa di grado n* nella coordinata z su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è un'espressione μ della forma $\mu = f(z)(dz)^{\otimes n}$, dove $f \in \mathcal{M}(U)$.

Definizione 4.3.8. Sia $\mu_1 = f(z)(dz)^{\otimes n}$ una forma differenziale meromorfa di grado n nella coordinata z definita su un aperto $U_1 \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\mu_2 = g(w)(dw)^{\otimes n}$ una forma differenziale meromorfa di grado n nella coordinata w definita su un aperto $U_2 \subseteq \mathbb{C}$. Sia $T : U_2 \rightarrow U_1$ una funzione olomorfa tale che $z = T(w)$. Diciamo che μ_1 *si trasforma in μ_2 tramite T* se $g(w) = f(T(w))(T'(w))^n$.

Definizione 4.3.9. Sia X una superficie di Riemann. Una *forma differenziale meromorfa di grado n* su X è una collezione di forme differenziali meromorfe di grado n $\{\mu_\phi\}$, una per ogni carta $\phi : U \rightarrow V$ su X , tale che, se due carte ϕ_1, ϕ_2 hanno domini che si sovrappongono, allora μ_{ϕ_1} si trasforma in μ_{ϕ_2} tramite la mappa di transizione $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. Indichiamo con $\mathcal{M}^{(n)}(X)$ l'insieme delle forme differenziali meromorfe di grado n su X .

Definizione 4.3.10. L'*ordine di μ in p* , denotato con $\text{ord}_p(\mu)$, è l'ordine di f in 0.

È facile dimostrare che l'ordine di μ è ben definito, in quanto non dipende dalla scelta della coordinata locale.

Definizione 4.3.11. Data μ una forma differenziale meromorfa di grado n , definiamo il *divisore* associato a μ come:

$$\text{div}(\mu) = \sum_p \text{ord}_p(\mu) \cdot p.$$

Per ogni divisore D su X denotiamo con $L^{(n)}(D)$ lo *spazio vettoriale delle forme differenziali meromorfe di grado n con poli limitati da D* , ovvero:

$$L^{(n)}(D) = \{\mu \in \mathcal{M}^{(n)}(X) : \text{div}(\mu) \geq -D\}.$$

Teorema 4.3.12. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa e sia D un divisore su X . Fissiamo una 1-forma differenziale ω su X non identica-

mente nulla tale che $K = \text{div}(\omega)$ è un divisore canonico. Allora la seguente mappa è un isomorfismo di spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}\xi : L(D + nK) &\rightarrow L^{(n)}(D) \\ f &\mapsto f\omega^{\otimes n}\end{aligned}$$

Dimostrazione. Mostriamo che $f\omega^{\otimes n} \in L^{(n)}(D)$. Poiché ω è un 1-forma meromorfa e f è una funzione meromorfa, si ha che $f\omega^{\otimes n}$ è una forma differenziale meromorfa di grado n . Sia $p \in X$ e z una coordinata locale in p , e supponiamo che $\omega = g(z)dz$ dove g è una funzione meromorfa, si ha:

$$\text{ord}_p(f\omega^{\otimes n}) = \text{ord}_p(f) + n \text{ord}_p(g) = \text{ord}_p(f) + nK(p) \geq -D(p)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $f \in L(D + nK)$. È immediato vedere che la mappa ξ è lineare e iniettiva, mostriamo che è anche suriettiva. Sia $\mu = h(z)(dz)^{\otimes n} \in L^{(n)}(D)$ e consideriamo $f = h/g^n$. Allora f è meromorfa, sta in $L(D + nK)$ e $\xi(f) = \mu$. $\square$

Lemma 4.3.13. Siano $f_1, \dots, f_{r+1}$ funzioni meromorfe su X . Allora il dato di $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2}$ per ogni coordinata locale z su X è una forma differenziale meromorfa di grado $r(r+1)/2$ su X .

Dimostrazione. Poiché ogni f_i è meromorfa, la funzione $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$ è anch'essa meromorfa, quindi $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2}$ è una forma differenziale di grado $r(r+1)/2$ meromorfa su un aperto di $\mathbb{C}$. Sia z coordinata locale in un aperto $U \subseteq X$ e w un'altra coordinata locale in un aperto $V \subseteq X$ con $U \cap V \neq \emptyset$, in maniera del tutto analoga alla dimostrazione della Proposizione 4.3.4 si mostra che le due espressioni $W_w(f_1, \dots, f_{r+1})$ e $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$ si trasformano l'una nell'altra tramite il cambio di coordinate $z = T(w)$. Quindi $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2}$ è una forma differenziale di grado $r(r+1)/2$ meromorfa su X . $\square$

Lemma 4.3.14. Siano $f_1, \dots, f_{r+1}$ funzioni meromorfe in $L(D)$. Allora:

$$W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2} \in L^{(r(r+1)/2)}((r+1)D).$$

Dimostrazione. Sia $p \in X$ con coordinata locale z . Siccome $f_i \in L(D)$, allora $\text{ord}(f_i) \geq -D(p)$ per ogni i , quindi $z^{D(p)}f_i$ è olomorfa per ogni i . Da cui $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)$ è olomorfo in p .

Mostriamo che $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_{r+1}) = z^{(r+1)D(p)}W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$. Usando la formula di Leibniz per la derivata del prodotto, si ottiene che componenti della colonna i -esima della matrice di cui $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_{r+1})$ calcola il determinante, sono della forma:

$$\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z^{D(p)}f_j(z)) = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \frac{d^k}{dz^k} z^{D(p)} \cdot \frac{d^{i-1-k}}{dz^{i-1-k}} f_j(z).$$

Per prima cosa raccogliamo $z^{D(p)}$ dalla prima colonna, successivamente moltiplichiamo $-(z^{D(p)})'$ per la prima colonna e sommiamo il risultato alla seconda, ottenendo $(z^{D(p)}f'_1, \dots, z^{D(p)}f'_n)^T$ come seconda colonna. A questo punto possiamo raccogliere $z^{D(p)}$ anche dalla seconda colonna. Iterando questo procedimento otteniamo $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_{r+1}) = z^{(r+1)D(p)}W_z(f_1, \dots, f_{r+1})$. Da questa uguaglianza segue direttamente che:

$$\text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_{r+1})) \geq -(r+1)D(p).$$

□

Corollario 4.3.15. Sia $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ una base di $L(D)$. Allora:

$$\deg(\text{div}(W_z(f_1, \dots, f_{r+1}))) = \sum_p \text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_{r+1})) = r(r+1)(g-1).$$

Dimostrazione. Sia ω 1-forma meromorfa non nulla tale che $K = \text{div}(\omega)$ è un divisore canonico su X . Per il Lemma 4.3.14, $W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2} \in L^{(r(r+1)/2)}((r+1)D)$ quindi per il Teorema 4.3.12 esiste una funzione meromorfa f tale che:

$$W_z(f_1, \dots, f_{r+1})(dz)^{\otimes r(r+1)/2} = f\omega^{\otimes r(r+1)/2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \sum_p \operatorname{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_{r+1})) &= \sum_p \operatorname{ord}_p(f\omega^{\otimes r(r+1)/2}) \\
 &= \sum_p \left(\operatorname{ord}_p(f) + \frac{r(r+1)}{2} \operatorname{ord}_p(\omega) \right) \\
 &= \frac{r(r+1)}{2} (2g-2) = r(r+1)(g-1)
 \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dalla Proposizione 1.3.18. $\square$

4.4 Punti di Weierstrass

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$. In questa sezione introduciamo il concetto di punti di Weierstrass su X e ne otteniamo una stima del numero.

Definizione 4.4.1. Sia $|K|$ il sistema lineare canonico su X e sia $p \in X$ un punto. Diciamo che $n \in \mathbb{N}^+$ è un *numero di gap* per $|K|$ in p se:

$$\dim L(K - np) \neq \dim L(K - (n-1)p).$$

Proposizione 4.4.2. Sia $p \in X$ un punto, allora $n \in \mathbb{N}^+$ non è un numero di gap per $|K|$ in p se e solo se esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che p è l'unico polo di f e ha ordine n .

Dimostrazione. Dalla definizione n è di gap se e solo se $\dim L(K - np) \neq \dim L(K - (n-1)p)$. Applicando il Teorema di Riemann-Roch, otteniamo:

$$\dim L(K - (n-1)p) - \dim L(K - np) = 1 + \dim L((n-1)p) - \dim L(np).$$

Quindi n è un numero di gap per il sistema canonico $|K|$ in p se e solo se $\dim L((n-1)p) = \dim L(np)$. $\square$

Definizione 4.4.3. Chiamiamo *sequenza dei gap* per il sistema canonico $|K|$ in p l'insieme $G_p(|K|) = \{n \in \mathbb{N}^+ : L((n-1)p) = L(np)\}$. Inoltre indichiamo con $H_p(|K|)$ l'insieme dei *non gap*, ovvero $H_p(|K|) = \mathbb{N}^+ \setminus G_p(|K|)$.

Proposizione 4.4.4. L'insieme $H_p(|K|)$ forma un semigruppato rispetto alla somma, che chiamiamo *semigruppato di Weierstrass*.

Dimostrazione. Siano $n, m \in H_p(|K|)$ allora esistono due funzioni meromorfe $f, g \in \mathcal{M}(X)$ che hanno un unico polo in p , di ordine rispettivamente n e m . Quindi il prodotto $fg \in \mathcal{M}(X)$ ha un polo in p di ordine $n + m$, cioè anche $n + m \in H_p(|K|)$. $\square$

Lemma 4.4.5. La sequenza dei gap $G_p(|K|)$ è un insieme di cardinalità g , contenuto in $\{1, 2, \dots, 2g - 1\}$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione di spazi vettoriali:

$$L(0) \subseteq L(1p) \subseteq L(2p) \subseteq \dots \subseteq L(np) \subseteq \dots$$

Sapendo che $\deg(K) = 2g - 2$, osserviamo che per $n \geq 2g - 1$ si ha che $\deg(K - np) = 2g - 2 - n \leq 2g - 2 - 2g + 1 = -1$ e quindi $\dim L(K - np) = 0$. Dal Teorema 4.2.22 si ha che per ogni $n \geq 2g - 1$ $\dim L(np) = n + 1 - g$, cioè $\dim L(np) = \dim L((n - 1)p) + 1$ e quindi $G_p(|K|) \subseteq \{1, 2, \dots, 2g - 1\}$. Sapendo che gli spazi $L(np)$ e $L((n - 1)p)$ o sono uguali o differiscono di una dimensione, $\dim L(0) = 1$ e $\dim L((2g - 1)p) = g$, deduciamo che devono esserci esattamente g numeri di gap tra 0 e $2g$. $\square$

Definizione 4.4.6. Un punto $p \in X$ è detto *punto di Weierstrass* su X se la sua sequenza dei gap non è $\{1, 2, \dots, g\}$.

Esempio 4.4.7. Consideriamo la curva proiettiva di genere $g = 3$ definita da:

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : y^4 = x(x - z)(x - 2z)(x - 3z)\}.$$

Il punto $p = [0 : 0 : 1] \in X$ è un punto di Weierstrass per X . Infatti, consideriamo una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ data da:

$$f([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}\right)^4.$$

Sostituendo l'equazione della curva, si ha:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{x(x - z)(x - 2z)(x - 3z)}{x^4} = \frac{(x - z)(x - 2z)(x - 3z)}{x^3}.$$

Dunque f ha un polo di ordine 3 in p . Questo vuol dire che $\dim L(3p) > \dim L(2p)$, cioè 3 non è un numero di gap. La sequenza dei gap in p è quindi diversa da $\{1, 2, 3\}$.

Definizione 4.4.8. Sia $p \in X$ un punto, consideriamo la sequenza dei gap in p ordinata in ordine crescente, cioè $G_p(|K|) = \{n_1 < \dots < n_g\}$. Definiamo il *peso* di p come:

$$w(p) = \sum_{i=1}^g (n_i - i).$$

Proposizione 4.4.9 (Caratterizzazione dei punti di Weierstrass). Sia $p \in X$ un punto. Sono equivalenti:

1. p è un punto di Weierstrass;
2. $\dim L(gp) \geq 2$;
3. $w(p) > 0$.

Dimostrazione. Per definizione un punto $p \in X$ è di Weierstrass se la sequenza dei gap di p , che indichiamo con $G_p(|K|) = \{n_1 < \dots < n_g\}$, non coincide con l'insieme $\{1, 2, \dots, g\}$, questo è vero se e solo se esiste almeno un $i \in \{1, \dots, g\}$ tale che $n_i \neq i$, in tal caso $w(p) > 0$. Inoltre questo equivale a dire che $\dim L(gp) \geq 2$. $\square$

Presentiamo un'ulteriore caratterizzazione dei punti di Weierstrass, utilizzando il Wronskiano studiato nella Sezione 4.3.

Lemma 4.4.10. Sia $D \in |K|$ un divisore canonico su X . Un punto $p \in X$ di coordinata locale z è un punto di Weierstrass per X se e solo se per ogni base $\{f_1, \dots, f_g\}$ di $L(D)$ il Wronskiano $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)$ è 0 in p .

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni base $\{f_1, \dots, f_g\}$ di $L(D)$ il Wronskiano $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)$ è 0 in p . Se p non fosse un punto di Weierstrass allora la sua sequenza dei gap sarebbe $G_p(|K|) = \{1, \dots, g\}$ e quindi avremmo $\dim L(D - np) \neq \dim L(D - (n-1)p)$ per ogni $n \in G_p(|K|)$, cioè esisterebbe una base $\{f_1, \dots, f_g\}$ di $L(D)$, tale che per ogni $i \in \{1, \dots, g\}$ $\text{ord}_p(f_i) = i - 1 - D(p)$, quindi ogni espressione locale di f_i ha uno sviluppo in serie di

Laurent in un intorno di 0 della forma $\tilde{f}_i(z) = c_i z^{i-1-D(p)} + \sum_{k=i-D(p)}^{\infty} a_k^{(i)} z^k$, dove c_i è una costante diversa da 0. Quindi si ha:

$$W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)(0) = \det \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & c_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c_g \end{pmatrix}.$$

Siccome per ogni $i \in \{1, \dots, g\}$ $c_i \neq 0$, allora $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)(0) \neq 0$ contraddicendo l'ipotesi.

Viceversa, supponiamo che $p \in X$ sia un punto di Weierstrass e sia $G_p(|K|) = \{n_1 < \dots < n_g\}$ la sequenza dei gap. Sia $\{f_1, \dots, f_g\}$ una base arbitraria di $L(D)$ e poniamo per ogni $i \in \{1, \dots, g\}$, $\phi_i = z^{D(p)}f_i$. Le ϕ_i sono olomorfe in p perché f_i ha al più un polo di ordine $D(p)$ in p , quindi l'espressione locale delle ϕ_i ha uno sviluppo in serie di Taylor della forma $c_i z^{\text{ord}_p(\phi_i)} + \sum_{k=\text{ord}_p(\phi_i)}^{\infty} b_k^{(i)} z^k$. Supponiamo per assurdo che $W_z(\phi_1, \dots, \phi_g)(0) \neq 0$, allora in un intorno aperto di p le ϕ_i sono linearmente indipendenti. Affinché il Wronskiano sia non nullo in $z = 0$ gli ordini di annullamento in $z = 0$ delle ϕ_i devono essere esattamente $0, 1, \dots, g-1$, se così non fosse allora $W_z(\phi_1, \dots, \phi_g)(0)$ calcolerebbe il determinante di una matrice diagonale con almeno uno zero e quindi $W_z(\phi_1, \dots, \phi_g)(0) = 0$. Perciò per ogni $i \in \{1, \dots, g\}$, si ha:

$$\text{ord}_p(f_i) = \text{ord}_p(\phi_i) - D(p) = i - 1 - D(p).$$

Questo implica che la sequenza dei gap in p è $G_p(|K|) = \{1, \dots, g\}$, in contraddizione con il fatto che p è un punto di Weierstrass. $\square$

Il nostro obiettivo è quello di determinare il numero minimo di punti di Weierstrass di X . Il Lemma 4.4.10 fornisce un criterio per stabilire quando un punto $p \in X$ è di Weierstrass, ciò avviene quando il Wronskiano si annulla in p . Quindi studiare il numero dei punti di Weierstrass equivale a studiare gli zeri del Wronskiano e i loro ordini.

Lemma 4.4.11. Sia $D \in |K|$ un divisore canonico su X e $\{f_1, \dots, f_g\}$ una base di $L(D)$. Sia $p \in X$ un punto tale che $G_p(|K|) = \{n_1 < \dots < n_g\}$ è la

sua sequenza dei gap. Allora:

$$\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)) = w(p).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.3.5 l'ordine del Wronskiano non dipende dalla base di $L(D)$ scelta, per cui prendiamo la base $\{f_1, \dots, f_g\}$ costituita da funzioni f_i tali che localmente sono della forma:

$$\tilde{f}_i(z) = z^{n_i-1-D(p)} + \sum_{j=n_i-D(p)}^{\infty} a_j^{(i)} z^j$$

e poniamo $h_i = z^{D(p)}f_i$. Dobbiamo calcolare l'ordine di $W_z(h_1, \dots, h_g)$. Quest'ultima è una funzione olomorfa in p quindi ha uno sviluppo in serie di Taylor il cui termine di grado minore può essere ottenuto considerando il determinante dei termini di grado minore dello sviluppo delle h_i , ovvero calcolando $W_z(z^{n_1-1}, \dots, z^{n_g-1})$. Notiamo che ogni somma ottenuta per calcolare il determinante con lo sviluppo di Laplace è costituita da elementi di grado $\sum_{i=1}^g (n_i - i)$, per cui raccogliendo $z^{\sum_i (n_i - i)}$ otteniamo che $W_z(z^{n_1-1}, \dots, z^{n_g-1})$ è un monomio il cui coefficiente è il determinante della matrice N che ha come j -esima colonna:

$$N_j = \begin{pmatrix} 1 \\ n_j - 1 \\ \vdots \\ (n_j - 1) \dots (n_j - g) \end{pmatrix}.$$

Poiché gli n_i sono tutti distinti, la matrice N ha determinante non nullo, pertanto il termine di grado minore dello sviluppo di $W_z(h_1, \dots, h_g)$ è il termine di grado $\sum_i (n_i - i) = w(p)$ e quindi $\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)) = w(p)$. $\square$

Proposizione 4.4.12. Vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{p \in X} w(p) = g(g-1)(g+1).$$

Dimostrazione. Fissiamo una base $\{f_1, \dots, f_g\}$ di $L(D)$. Sapendo che $W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g) = z^{gD(p)}W_z(f_1, \dots, f_g)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)) &= \text{ord}_p(z^{gD(p)}W_z(f_1, \dots, f_g)) \\ &= gD(p) + \text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_g)). \end{aligned}$$

Dal Lemma 4.4.11 sappiamo che $\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)) = w(p)$ e dal Corollario 4.3.15 abbiamo che $\sum_p \text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_g)) = g(g-1)^2$, quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_p w(p) &= \sum_p \text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_g)) \\ &= \sum_p (gD(p) + \text{ord}_p(W_z(f_1, \dots, f_g))) \\ &= g(2g-2) + g(g-1)^2 = g(g-1)(g+1). \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.4.13. Poiché se p non è un punto di Weierstrass il suo peso è nullo, la quantità $\sum_{p \in X} w(p)$ coincide con il numero dei punti di Weierstrass contati con i loro rispettivi pesi. Quindi, indicando con $W(X)$ l'insieme dei punti di Weierstrass di X , la Proposizione 4.4.12 implica che $|W(X)| \leq g^3 - g$.

Cerchiamo ora una stima del peso di un punto di Weierstrass.

Lemma 4.4.14. Sia $p \in X$ un punto di Weierstrass. Allora vale:

$$w(p) \leq \frac{g(g-1)}{2}.$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se X è iperellittica.

Dimostrazione. Ordiniamo in ordine crescente i numeri di gap e quelli di non gap minori di $2g$, ponendo $G_p(|K|) = \{n_1 < \dots < n_g\}$ e $H_p(|K|) \cap \{1, 2, \dots, 2g\} = \{m_1 < \dots < m_g\}$. Osserviamo che $m_g = 2g$, infatti, come mostrato nel Lemma 4.4.5, ogni $n \geq 2g-1$ non è un numero di gap. Inoltre si ha che $m_1 \geq 2$ perché 1 è un numero di gap, infatti se non lo fosse esisterebbe

una funzione meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di grado 1, ovvero un biolomorfismo tra X e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ma questo è assurdo poiché X ha genere $g \geq 1$.

Mostriamo che per ogni $1 \leq i < g$, $m_i + m_{g-i} \geq 2g$.

Fissato $i \in \{1, \dots, g-1\}$, supponiamo per assurdo che $m_i + m_{g-i} < 2g$. Allora per ogni $k \leq i$ si ha $m_k + m_{g-i} < 2g$. Poiché $H_p(|K|)$ è un semigrupp, per ogni $k \leq i$, $m_k + m_{g-i} \in H_p(|K|)$. Quindi abbiamo i numeri di non gap compresi strettamente tra m_{g-i} e m_g . Da questo avremmo che l'insieme $\{m_1, \dots, m_g\}$ ha $g - i + i + 1 = g + 1$ elementi, ma questo è assurdo perché ne ha g . Utilizzando quanto provato si deduce la disuguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{g-1} m_j \geq g(g-1).$$

A questo punto calcoliamo:

$$\begin{aligned} w(p) &= \sum_{i=1}^g (n_i - i) = \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g m_j - \sum_{j=1}^g j = \sum_{j=g+1}^{2g-1} j - \sum_{j=1}^{g-1} m_j \\ &\leq \frac{3}{2}g(g-1) - g(g-1) = \frac{g(g-1)}{2}. \end{aligned}$$

Notiamo che l'uguaglianza si ha quando gli m_j sono quanto più piccoli possibile, cioè se e solo se $m_1 = 2$, in questo caso infatti l'insieme $\{m_1, \dots, m_g\}$ è costituito da numeri pari, cioè coincide con l'insieme $\{2j : 1 \leq j \leq g\}$. Da cui otteniamo che $\sum_{j=1}^{g-1} m_j = \sum_{j=1}^{g-1} 2j = g(g-1)$ e quindi $w(p) = \frac{g(g-1)}{2}$. In particolare si ha che $m_1 = 2$ se e solo se esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla che ha un polo di ordine 2 nel punto p , questa induce una mappa olomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di grado 2, che è un rivestimento iperellittico, per cui X è iperellittica. $\square$

Teorema 4.4.15. Sia $W(X)$ l'insieme dei punti di Weierstrass di X , allora:

$$|W(X)| \geq 2g + 2.$$

Inoltre si ha l'uguaglianza se e solo se X è iperellittica.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.4.12 si ha che il numero dei punti di

Weierstrass contati con i loro pesi è $g^3 - g$. Il Lemma 4.4.14 dà una stima per il peso di un singolo punto di Weierstrass, quindi otteniamo:

$$|W(X)| \geq \frac{2g(g-1)(g+1)}{g(g-1)} = 2g + 2.$$

L'uguaglianza si ha quando $w(p) = \frac{g(g-1)}{2}$, quindi quando X è iperellittica. $\square$

4.5 Teorema di Schwarz

Ora che abbiamo una stima per il numero di punti di Weierstrass per una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g , mostriamo che se il genere è $g \geq 2$ allora il suo gruppo degli automorfismi ha cardinalità finita.

Lemma 4.5.1. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere g e sia $p \in X$ un punto. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{M}(X)$ che ha un polo di ordine al più $g+1$ in p ed è olomorfa in $X \setminus \{p\}$.

Dimostrazione. Consideriamo il divisore $D = (g+1) \cdot p$ su X . Dal Teorema di Riemann-Roch si ha che $\dim L(D) \geq g+1+1-g=2$, quindi esiste una funzione $f \in L(D)$ non costante. $\square$

Teorema 4.5.2. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere g e sia $T \in \text{Aut}(X) \setminus \{id\}$. Allora T ha al più $2g+2$ punti fissi.

Dimostrazione. Sia $p \in X$ tale che $T(p) \neq p$. Per il Lemma 4.5.1 esiste una funzione non costante $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che ha un polo di ordine $r \leq g+1$ nel punto p ed è olomorfa in $X \setminus \{p\}$. Definiamo $h : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ come:

$$h(z) = \begin{cases} f(z) - f(T(z)) & \text{se } z \in X \setminus \{p, T^{-1}(p)\} \\ \infty & \text{se } z \in \{p, T^{-1}(p)\}. \end{cases}$$

Indichiamo con $\text{Fix}_X(T)$ l'insieme dei punti fissi di T . Se $x \in \text{Fix}_X(T)$ allora $h(x) = 0$, cioè l'insieme dei punti fissi di T è contenuto nell'insieme degli zeri della funzione h , quest'ultimo è finito perché X è compatta e quindi

$\text{Fix}_X(T)$ è un insieme finito. La funzione h ha un polo di ordine r in p e un polo di ordine r in $T^{-1}(p) \neq p$, da cui il numero dei poli contati con molteplicità della funzione h è $2r \leq 2g+2$. Siccome il numero dei poli contati con molteplicità coincide con il numero degli zeri contati con molteplicità, si ha che $|\text{Fix}_X(T)| \leq 2g+2$. $\square$

Lemma 4.5.3. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere g . Se $p \in X$ è un punto di Weierstrass e $T \in \text{Aut}(X)$ un automorfismo allora $T(p)$ è un punto di Weierstrass.

Dimostrazione. Sia $p \in X$ un punto di Weierstrass e poniamo $D = g \cdot p$ tale per cui $\dim L(D) \geq 2$. Consideriamo il pullback del divisore D , ovvero il divisore $T^*D = g \cdot T(p)$. Poiché T è un automorfismo, la molteplicità in ogni punto è 1, pertanto anche $\dim L(T^*D) \geq 2$, da cui $T(p)$ è un punto di Weierstrass. $\square$

Per mostrare la finitezza del gruppo degli automorfismi X distingueremo il caso iperellittico da quello non iperellittico. Presentiamo alcuni risultati sugli automorfismi di una superficie iperellittica.

Teorema 4.5.4. Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$. Allora X è iperellittica se e solo se esiste una mappa $J \in \text{Aut}(X) \setminus \{id\}$ tale che $J^2 = id$ e ha $2g+2$ punti fissi, che sono i punti di Weierstrass. Tale mappa è chiamata *involuzione iperellittica*.

Dimostrazione. Se X è iperellittica allora esiste una mappa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ di grado 2. Definiamo $J \in \text{Aut}(X)$ nel modo seguente: sia $p \in X$, se esiste $q \in X$ tale che $q \neq p$ e $\phi(p) = \phi(q)$ allora poniamo $J(p) = q$, altrimenti $J(p) = p$. Questa mappa è biiettiva e olomorfa in quanto localmente, intorno a ciascun punto fisso, J agisce invertendo i due fogli del rivestimento iperellittico, cioè coincide con la mappa $z \mapsto -z$ che è olomorfa. Quindi è un biolomorfismo da X in sé stessa che fissa $2g+2$ punti che sono i punti di ramificazione di ϕ , e quindi coincidono con i punti di Weierstrass. Inoltre chiaramente vale che $J^2 = id$.

Viceversa, se esiste una tale funzione J consideriamo il sottogruppo di ordine

2 di $\text{Aut}(X)$ generato da J , ovvero $\langle J \rangle$. Allora la proiezione al quoziente $\phi : X \rightarrow X/\langle J \rangle$ ha grado 2 e ha come punti di ramificazione i $2g+2$ punti fissi di J . Applicando la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene che $g(X/\langle J \rangle) = 0$, quindi $X/\langle J \rangle \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ per la Proposizione 4.2.24, per cui $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è un rivestimento iperellittico, cioè X è iperellittica. $\square$

Osservazione 4.5.5. Il rivestimento iperellittico è unico a meno di composizione per una trasformazione di Möbius. Siano $\phi, \phi' : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ due rivestimenti iperellittici e sia J un'involuzione iperellittica, allora deve esistere $A \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{A} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Quindi si ha $\phi' \circ J = A \circ \phi$, ma l'involuzione iperellittica è tale che $\phi' \circ J = \phi'$, da cui $\phi' = A \circ \phi$.

Corollario 4.5.6. Se X superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$ è iperellittica allora l'involuzione iperellittica J è unica.

Dimostrazione. Sia $\tilde{J}$ un automorfismo di X tale che $\tilde{J}^2 = id$ e $\tilde{J}$ ha $2g+2$ punti fissi. Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ una mappa di grado 2, allora anche $\phi \circ \tilde{J}$ ha grado 2, cioè è anch'essa un rivestimento iperellittico quindi per l'Osservazione 4.5.5 esiste $A \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\phi \circ \tilde{J} = A \circ \phi$. Siano $p_1, \dots, p_{2g+2}$ i punti di Weierstrass della superficie X , allora sapendo che $\phi = \phi \circ \tilde{J}$, si ha che per ogni $j \in \{1, \dots, 2g+2\}$ $\phi(p_j) = \phi(\tilde{J}(p_j)) = A(\phi(p_j))$, quindi A ha $2g+2$ punti fissi, ma A è un automorfismo di una superficie di Riemann di genere 0 quindi $A = id$, poiché se così non fosse per il Teorema 4.5.2 avrebbe al più $2 < 2g+2$ punti fissi. Quindi abbiamo mostrato che $\phi \circ \tilde{J} = \phi$, cioè $\tilde{J}$ è l'involuzione iperellittica. $\square$

Teorema 4.5.7. Sia X superficie di Riemann iperellittica di genere $g \geq 1$, e sia $T \in \text{Aut}(X)$ tale che $T \notin \langle J \rangle$ allora T ha al più 4 punti fissi.

Dimostrazione. Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ il rivestimento iperellittico, consideriamo $\phi \circ T$ anch'essa di grado 2, poiché $T \in \text{Aut}(X)$, e quindi è anch'essa un

rivestimento iperellittico. Pertanto esiste $A_T \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\phi \circ T = A_T \circ \phi$. Poiché l'involuzione iperellittica è unica, $A_T = id$ se e solo se $T \in \langle J \rangle$, per cui per ogni $T \in \mathrm{Aut}(X) \setminus \langle J \rangle$ $A_T \neq id$. Se p è un punto fisso di T allora $\phi(p) = \phi(T(p)) = A_T(\phi(p))$, cioè $\phi(p)$ è un punto fisso di A_T . Ma A_T ha al più 2 punti fissi per il Teorema 4.5.2, inoltre, poiché ϕ ha grado 2, $\phi(p)$ ha al più due controimmagini e quindi T ha al più 4 punti fissi. $\square$

Teorema 4.5.8 (Teorema di Schwarz). Sia X superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$ allora il gruppo $\mathrm{Aut}(X)$ ha cardinalità finita.

Dimostrazione. Indichiamo con $W(X)$ l'insieme dei punti di Weierstrass di X , per il Lemma 4.5.3 se $T \in \mathrm{Aut}(X)$ allora $T(W(X)) = W(X)$, ovvero ogni automorfismo di una superficie di Riemann permuta i punti di Weierstrass, per cui, indicando con $\mathcal{S}_{|W(X)|}$ il gruppo delle permutazioni, possiamo definire:

$$\psi : \mathrm{Aut}(X) \rightarrow \mathcal{S}_{|W(X)|}.$$

Distinguiamo due casi:

- Se X è iperellittica allora $|W(X)| = 2g + 2$. Per il Teorema 4.5.7 un elemento $T \in \mathrm{Aut}(X) \setminus \langle J \rangle$ ha al più 4 punti fissi, ma se $g \geq 2$ allora $4 < 6 \leq 2g + 2$ quindi $T \notin \ker(\psi)$ poiché non può fissare tutti i punti di Weierstrass che sono $2g + 2$. D'altra parte l'involuzione iperellittica J fissa i $2g + 2$ punti di Weierstrass, per cui $\ker(\psi) = \langle J \rangle$. Pertanto per il primo Teorema di omomorfismo di gruppi si ha l'isomorfismo $\mathrm{Aut}(X)/\langle J \rangle \cong \psi(\mathrm{Aut}(X)) \leq \mathcal{S}_{2g+2}$. Ma $\langle J \rangle$ e $\mathcal{S}_{2g+2}$ sono gruppi finiti, di conseguenza anche $\mathrm{Aut}(X)$ è finito.
- Se X non è iperellittica allora $|W(X)| > 2g + 2$. Se $T \in \mathrm{Aut}(X)$, per il Teorema 4.5.2 ha al più $2g + 2$ punti fissi. Ma $2g + 2 < |W(X)|$, per cui l'unico automorfismo che fissa tutti i punti di Weierstrass è l'identità, cioè in questo caso la mappa ψ è iniettiva. Siccome $\mathcal{S}_{|W(X)|}$ è un gruppo finito, allora anche $\mathrm{Aut}(X)$ è finito.

$\square$

Dal Teorema 3.2.1 otteniamo che per una superficie di Riemann connessa e compatta X di genere $g \geq 2$ si ha:

$$|\text{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

Definizione 4.5.9. Diciamo che un gruppo finito G è un *gruppo di Hurwitz* se agisce su una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g e $|G| = 84(g-1)$.

Definizione 4.5.10. Una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$ è detta *superficie di Hurwitz* se il suo gruppo di automorfismi ha cardinalità $84(g-1)$.

Esempio 4.5.11 (Quartica di Klein). Consideriamo la curva proiettiva di genere 3 $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : x^3y + y^3z + z^3x = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Descriviamo esplicitamente gli automorfismi di X .

Sia $\xi = e^{2\pi i/7}$ una radice settima dell'unità e consideriamo $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definita da $f([x : y : z]) = [\xi x : \xi^4 y : \xi^2 z]$. Mostriamo che $f(X) = X$. Sia $[x : y : z] \in X$ e vediamo che $f([x : y : z])$ verifica l'equazione della curva:

$$\xi^3 x^3 \xi^4 y + \xi^{12} y^3 \xi^2 z + \xi^6 z^3 \xi x = x^3 y + y^3 + z^3 x = 0.$$

Da questo segue che f è un automorfismo di X e, dalla scelta del fattore ξ , si ha che f ha ordine 7.

Un altro automorfismo è una permutazione delle coordinate del tipo:

$g : X \rightarrow X$ tale che $g([x : y : z]) = [y : z : x]$. Questo automorfismo ha chiaramente ordine 3, ed è facile mostrare che $g \circ f \circ g^{-1} = f^4$, in modo tale che il sottogruppo $\langle f, g \rangle$ è un prodotto semidiretto di ordine 21. Adesso consideriamo la seguente matrice:

$$h = \frac{i}{\sqrt{7}} \cdot \begin{pmatrix} \xi - \xi^6 & \xi^2 - \xi^5 & \xi^4 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^5 & \xi^4 - \xi^3 & \xi - \xi^6 \\ \xi^4 - \xi^3 & \xi - \xi^6 & \xi^2 - \xi^5 \end{pmatrix}$$

È possibile mostrare che essa induce un automorfismo di X di ordine 2 che soddisfa $h \circ g \circ h^{-1} = g^2$, tale che il sottogruppo $\langle g, h \rangle$ è il gruppo diedrale di

ordine 6. A questo punto consideriamo il sottogruppo G di $\text{Aut}(X)$ generato da f, g, h . Si può mostrare che i 49 elementi della forma $f^m \circ h \circ f^n$ sono tutti distinti e quindi l'elemento $h \circ f \circ h^{-1}$ non può essere una potenza di f , altrimenti avremmo $hf = f^k h$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. In tal caso ogni elemento $f^m \circ h \circ f^n$ può essere scritto come $f^j h$ per qualche j , e quindi non avremmo 49 elementi distinti della forma $f^m \circ h \circ f^n$. Da questo si deduce che $\langle f \rangle$ non può essere normale in G .

Siccome $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ divide $|G|$, i possibili valori di $|G|$ sono 42, 84, 126 o 168. Indicando con n_7 il numero dei 7-Sylow, utilizziamo il terzo Teorema di Sylow per studiare i casi in cui $|G| = 42, 84$ o 126 , si ha:

- Se $|G| = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, allora deve valere $n_7 | 6$ e $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$. L'unica possibilità è $n_7 = 1$;
- Se $|G| = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, deve valere $n_7 | 12$ e $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$, per cui $n_7 = 1$;
- Se $|G| = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, affinché $n_7 | 18$ e $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$, deve valere $n_7 = 1$.

In questi tre casi quindi, $\langle f \rangle$ è l'unico sottogruppo di ordine 7. Poiché per il secondo Teorema di Sylow i sottogruppi di Sylow sono tutti coniugati, si ha che $\langle f \rangle$ è normale in G , ma questo non può accadere per quanto detto. Quindi l'unica possibilità è che $|G| = 168$, cioè deve valere $\text{Aut}(X) = G = \langle f, g, h \rangle$. Quindi X è di Hurwitz.

Bibliografia

- [ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba e Phillip Griffiths. *Geometry of algebraic curves: volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris*. Vol. 268. Springer Science & Business Media, 2011.
- [CM16] Renzo Cavalieri e Eric Miles. *Riemann surfaces and algebraic curves*. Vol. 87. Cambridge University Press, 2016.
- [Far92] H. M. Farkas e I. Kra. *Riemann surfaces*. Second. Vol. 71. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Kir92] Frances Kirwan. *Complex algebraic curves*. Vol. 23. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1992.
- [Lan13] Serge Lang. *Complex analysis*. Vol. 103. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Mir95] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Vol. 5. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Comput. American Mathematical Society, 1995.
- [NG22] Anil Nerode e Noam Greenberg. *Algebraic curves and Riemann surfaces for undergraduates—the theory of the donut*. Springer, Cham, 2022.
- [SS03] Elias M. Stein e Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Vol. 2. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, 2003.