

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**Amenabilità, matchings
e il paradosso di Banach-Tarski**

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Dott. Marco Moraschini

Presentata da:
Margherita Botti

Anno Accademico 2024/2025

Introduzione

L'idea di “duplicare un oggetto” riporta immediatamente il pensiero a contesti di magia, alchimia, mito o illusionismo. Avere una sfera, romperla in una quantità finita di pezzi e usare gli stessi (senza barare e aggiungerne di nuovi) per costruire due sfere di volume identico alla prima, non è di certo un fenomeno proprio dell'esperienza comune. Anzi, si tratta di un qualcosa di altamente controintuitivo. Tuttavia è proprio questo il contenuto di un celebre teorema, risalente al 1924, noto come il paradosso di Banach-Tarski [5] (Teorema 5.8). Va detto però che, sebbene la fama di tale enunciato sia legata a questi due nomi, i due matematici elaborarono e formalizzarono una versione più forte di ciò che era sostanzialmente già stato mostrato dieci anni prima da Hausdorff [6] (Teorema 5.6). Il loro risultato, tanto interessante quanto contrario al senso comune, portò in seguito Von Neumann ad approfondire lo studio dei gruppi che possono originare le cosiddette “azioni paradossali”, di cui il teorema di Banach-Tarski non è altro che un esempio. Vediamo dunque di cosa stiamo parlando:

Definizione 1. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X , $G \curvearrowright X$. Allora un sottoinsieme $Y \subset X$ è G -paradossale se ammette una decomposizione G -paradossale.

Una *decomposizione G -paradossale* è una coppia $((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K})$, dove $H, K \subset G$ sono finiti e $(A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K}$ sono famiglie di sottoinsiemi di Y , indicizzate rispettivamente da H e K , tali che

$$Y = (\sqcup_{h \in H} hA_h) \sqcup (\sqcup_{k \in K} kB_k) = \sqcup_{h \in H} A_h = \sqcup_{k \in K} B_k.$$

L'enunciato del paradosso, nella forma relativa alla decomposizione della sfera, è il seguente:

Teorema 2 (Teorema di Banach-Tarski 5.8). *L'azione di moltiplicazione di $SO(3)$ su S^2 è $SO(3)$ -paradossale.*

Interrogandosi su quali fossero le proprietà che distinguono gruppi “normali” da gruppi che inducono decomposizioni paradossali, Von Neumann individuò nella possibilità di definire un certo tipo di misura il discrimine ricercato. Dunque egli formalizzò il concetto

di *misura di probabilità finitamente additiva* e denominò il tipo di azioni che ammette una tale misura come *meßbar*, cioè “misurabili” in tedesco [7]. Il termine inglese *amenable*, letteralmente “docile”, “trattabile”, fu invece introdotto da Day nel 1957, e, secondo molti (come ad esempio Volker Runde [8]), si tratterebbe di un gioco di parole, *a-mean-able*, che richiama la proprietà di tali gruppi di avere un *media invariante*. Più in dettaglio:

Definizione 3. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Si dice *misura di probabilità finitamente additiva* una funzione $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ che soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\mu(X) = 1$;
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ disgiunti.

Sia ora G un gruppo che agisce su X , allora l'azione $G \curvearrowright X$ si dice *amenabile* se esiste una misura di probabilità finitamente additiva G -invariante su X .

Inizialmente Von Neumann dimostrò che se un'azione è amenabile allora non può esistere una decomposizione paradossale [7]. L'implicazione inversa, e dunque la caratterizzazione completa, è successiva, risalente al 1938, e si deve Tarski [9]. A partire da questi studi di inizio secolo rimase a lungo aperta una questione nota come il “Von Neumann-Day problem” che consiste nella domanda: ogni gruppo non amenabile contiene un sottogruppo isomorfo a F_2 ? La risposta arrivò solo nel 1980 con un controesempio costruito da Alexander Ol'shanskii [10]. In un primo periodo inoltre la definizione di amenabilità, seppur elegante, rimase molto astratta e poco trattabile. Fu il matematico danese Erling Følner a introdurre nel 1955 delle condizioni equivalenti a tale concetto ma ben più maneggevoli e flessibili [11]. Ecco dunque come, con il procedere degli studi in questo campo, si è riusciti a inquadrare sempre meglio la questione del paradosso della sfera, riducendone la bizzarria e la stravaganza in favore di una formalizzazione sempre più esaustiva.

In questa tesi abbiamo selezionato gli argomenti in modo da dare alla lettrice e al lettore gli strumenti necessari a comprendere nel dettaglio il paradosso della sfera nella sua primissima formulazione, quella di Hausdorff. La versione successiva, quella di Banach-Tarski, verrà trattata con un piccolo rimando ad altre fonti. Data l'evoluzione degli studi in questo ambito, la struttura degli argomenti trattati rispecchia un approccio recente alla questione, che si rivela essere alquanto eclettico, spaziando dall'algebra, alla topologia, all'analisi funzionale fino allo studio dei grafi.

Nel *primo capitolo* ho inserito una serie di nozioni di topologia non ovvie per un livello di conoscenze proprio di una laurea triennale in matematica. Esse sono indispensabili

per la comprensione del seguito. Nel *secondo capitolo* presento nel dettaglio il concetto di amenabilità, definito in un primo momento attraverso le misure di probabilità finitamente additive e invarianti per azioni di gruppo e in un secondo momento attraverso il concetto di media invariante, e mostro in seguito l'equivalenza delle due definizioni (Teorema 2.12). Espongo qui alcuni esempi e controesempi di gruppi amenabili e tratto le principali proprietà di tale classe di gruppi. Il *terzo capitolo* si può considerare come una grande parentesi su grafi bipartiti e problemi di matching. Si tratta di una sezione apparentemente svincolata dal resto, e tale è di fatto. Essa è compresa all'interno della tesi in quanto necessaria per la dimostrazione del teorema di Tarski-Følner (Teorema 4.10) presente nel capitolo successivo. Nel *quarto capitolo* presento in una prima sezione il concetto di successioni di Følner, in una seconda sezione la nozione di gruppo paradossale con annessa la dimostrazione della paradossalità di F_2 , per poi arrivare a parlare, in un unico enunciato (Teorema 4.10), delle relazioni che intercorrono tra le nozioni definite in precedenza. L'ultimo capitolo contiene infine enunciato e dimostrazione dei due paradossi, quello di Hausdorff (Teorema 5.6) e quello di Banach-Tarski (Teorema 5.8), visti come applicazione alle azioni di gruppo di quanto trattato finora.

Buona lettura.

Indice

1	Nozioni preliminari	1
1.1	La topologia debole* e il Teorema di Banach-Alaoglu	1
1.2	Nets in spazi topologici	2
1.3	Sistemi diretti e limiti diretti	3
1.4	La somma diretta	4
2	Amenabilità	5
2.1	Amenabilità	5
2.2	Primi esempi di gruppi amenabili	9
2.3	Proprietà di stabilità dei gruppi amenabili	10
3	I teoremi di matching di Hall	15
3.1	Grafi bipartiti	15
3.2	Il Teorema del matching perfetto di Hall	17
3.3	Il Teorema del matching $(1, k)$ -perfetto di Hall	19
4	Teoremi di Tarski e Følner	23
4.1	Condizioni di Følner	23
4.2	Decomposizioni paradossali	24
4.3	Teoremi di Tarski e Følner	27
5	Applicazioni: alcuni celebri paradossi	31
5.1	Il paradosso di Hausdorff	32
5.2	Il paradosso di Banach-Tarski	33
	Bibliografia	35

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo richiamiamo teoremi e nozioni utili alla comprensione della tesi. Si tratta di concetti preliminari che sono utilizzati più avanti senza essere definiti o esplicitati dettagliatamente ma che, per comodità del lettore o della lettrice, enunciamo qui. Chi ha già dimestichezza con queste nozioni può direttamente iniziare la lettura a partire dal secondo capitolo, facendo riferimento a questo qualora qualche concetto non risulti noto o ben chiaro.

1.1 La topologia debole* e il Teorema di Banach-Alaoglu

Sia X uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|\cdot\|$. Ricordiamo che una mappa lineare $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ è *continua* se e solo se u è limitata sulla palla unitaria $B(X) := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Lo *spazio duale* di X si denota con X^* ed è l'insieme di tutte le mappe lineari e continue $u : X \rightarrow \mathbb{R}$. Su tale spazio è definita una norma:

$$\|u\| := \sup_{x \in B(X)} |u(x)|.$$

La topologia definita da tale norma è detta *topologia forte* su X^* . Ora definiamo una topologia meno fine, che ci servirà per parlare di medie.

Definizione 1.1 (Topologia debole*). Dato $x \in X$, sia $\psi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ la mappa di valutazione in x , $u \mapsto u(x)$. La *topologia debole** su X^* è la topologia meno fine che rende tali mappe continue per ogni $x \in X$.

Osservazione 1.2. La topologia debole* è meno fine di quella forte dato che le mappe di valutazione sono continue per quest'ultima.

Esempio 1.3. Si può dotare lo spazio $(\ell^\infty(X))^*$ della topologia debole*. Come appena detto, essa sarà la topologia più grossolana che vi si può definire in modo che le mappe di valutazione della forma

$$\psi_x : (\ell^\infty(X))^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dove } u \mapsto u(x)$$

siano continue per ogni $x \in \ell^\infty(X)$.

Riportiamo ora un teorema che useremo in seguito:

Teorema 1.4 (Banach-Alaoglu [1, Teorema F.3.1]). *Sia X uno spazio vettoriale normato e sia $\|\cdot\|$ la norma degli operatori duali in X^* . Allora la palla unitaria $B(X^*) := \{u \in X^* \mid \|u\| \leq 1\}$ è compatta rispetto alla topologia debole* su X^* .*

La dimostrazione si basa sul Teorema di Tychonoff, per consultarla rimandiamo alla fonte sopracitata.

1.2 Nets in spazi topologici

Ricordiamo che un insieme *parzialmente ordinato* è un insieme I dotato di una relazione binaria \leq che sia riflessiva e transitiva.

Definizione 1.5 (Insieme diretto). Un *insieme diretto* è un insieme parzialmente ordinato I che soddisfa la seguente condizione: per ogni $i, j \in I$, esiste un elemento $k \in I$ tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Esempio 1.6. Consideriamo i seguenti insiemi:

- Sia E un insieme, allora $\mathcal{P}(E)$ è un insieme diretto rispetto all'inclusione;
- L'insieme \mathbb{Z} dotato della relazione " $i \leq j \iff i$ divide j " è un insieme diretto.

Definizione 1.7 (net). Sia X un insieme. Un *net* in X è una famiglia $(x_i)_{i \in I}$ di punti di X , indicizzata da un insieme diretto I .

Se X è uno spazio topologico possiamo dare una nozione di convergenza di net. Siano $(x_i)_{i \in I}$ un net in X e $a \in X$. Si dice che il *net converge ad a* , o che a è il *limite puntuale* di $(x_i)_{i \in I}$, se per ogni intorno V di a in X , esiste un elemento $i_0 \in I$ tale che $x_i \in V$ per ogni $i \geq i_0$.

I seguenti risultati sono la versione per nets dei classici risultati di convergenza per successioni:

Proposizione 1.8 ([1, Proposition A.2.1]). *Sia X uno spazio topologico, $Y \subset X$ e $a \in X$. Sia \bar{Y} la chiusura di Y in X . Allora le seguenti condizioni si equivalgono:*

1. $a \in \bar{Y}$;
2. esiste un net $(y_i)_{i \in I}$ di punti di Y che converge ad a in X .

Proposizione 1.9 ([1, Proposition A.2.2]). *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni net in X ammette un subnet convergente a un punto di X .*

1.3 Sistemi diretti e limiti diretti

Vediamo un'altra tipologia di collezione di oggetti che si serve di un'indicizzazione data da un insieme diretto.

Definizione 1.10 (sistemi diretti e limiti diretti). Sia I un insieme diretto. Un *sistema diretto* (anche detto *induttivo*) di gruppi (o insiemi o spazi topologici) indicizzato da I è una collezione di gruppi (o insiemi o spazi topologici), $(G_i)_{i \in I}$, e di mappe $f_{ij}: G_i \rightarrow G_j, i \leq j$, che soddisfano le seguenti condizioni:

1. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$, per ogni i, j, k tali che $i \leq j \leq k$,
2. $f_{ii} = Id$.

Il *limite diretto* di un sistema diretto di gruppi (o insiemi o spazi topologici) è il gruppo (o insieme o spazio topologico)

$$G = \lim_{i \in I} G_i = \left(\bigsqcup_{i \in I} G_i \right) / \sim$$

dove $a_i \sim a_j$ se $f_{ik}(a_i) = f_{jk}(a_j)$ per qualche $k \in I$.

In particolare notiamo che, date le mappe $f_m: G_m \rightarrow G$ con $f_m(g_m) = [g_m]$, dove $[g_m]$ è la classe di equivalenza in G rappresentata da $g_m \in G_m$, allora

$$G = \bigcup_{m \in I} f_m(A_m).$$

Se stiamo trattando gruppi possiamo dotare il limite diretto dell'operazione di gruppo:

$$[a_i] \cdot [a_j] = [f_{ik}(a_i) \cdot f_{jk}(a_j)],$$

dove $k \in I$ è tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Proposizione 1.11. *Ogni gruppo G è il limite diretto del sistema diretto $(G_i)_{i \in I}$ composto da tutti i sottogruppi finitamente generati di G .*

Dimostrazione. La struttura di insieme diretto su I è data dall'inclusione e le mappe $f_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ sono le immersioni. \square

1.4 La somma diretta

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{G} = \{G_x | x \in X\}$ una collezione di gruppi indicizzati da X . Consideriamo l'insieme delle mappe

$$\text{Map}_f(X, G_x) := \left\{ f: X \rightarrow \prod_{x \in X} G_x : f(x) \in G_x, f(x) \neq 1_{G_x} \text{ per un numero finito di } x \in X \right\}.$$

Definizione 1.12 (somma diretta). La *somma diretta* $G := \bigoplus_{i \in I} G_i$ è definita come $\text{Map}_f(X, G_x)$ dotata dell'operazione di moltiplicazione puntuale:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in X.$$

Capitolo 2

Amenabilità

Introduciamo in questo capitolo la nozione di *amenabilità*, che risulterà essere un tema centrale della tesi.

2.1 Amenabilità

La prima modalità di discussione dell'amenabilità si serve della definizione di *misure di probabilità finitamente additive e invarianti per azioni di gruppo*.

Definizione 2.1 (Misura di probabilità finitamente additiva). Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Si dice *misura di probabilità finitamente additiva* una funzione $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ che soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\mu(X) = 1$;
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ disgiunti.

Definiamo inoltre l'insieme $\mathcal{PM}(X) := \{\text{misure di probabilità finitamente additive su } X\}$.

D'ora in poi con il termine *misura di probabilità* faremo riferimento alla definizione appena data, dando per scontato che essa sia finitamente additiva.

Esempio 2.2. Sia F un sottoinsieme finito non vuoto di X . La mappa $\mu_F: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\mu_F(A) := \frac{|A \cap F|}{|F|},$$

per ogni $A \subset X$, è una misura di probabilità su X .

Proposizione 2.3. *Sia $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ una misura di probabilità su X . Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;
3. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;
4. $A \subset B \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
5. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;

per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Dimostrazione. Dimostriamo punto per punto:

1. Segue immediatamente da $\mu(X) = \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset)$;
2. Per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ valgono le seguenti uguaglianze $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ e $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$;
3. Segue dal punto precedente dato che $\mu(A \cap B) \geq 0$;
4. È sufficiente notare da $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$;
5. Segue dalla precedente poiché $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

□

Definizione 2.4 (Misura di probabilità G -invariante). Siano μ una misura di probabilità su X e G un gruppo che agisce su X , μ si dice *G -invariante* se $\mu(gA) = \mu(A)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $A \subset X$.

Diamo ora due definizioni di fondamentale importanza per questa tesi.

Definizione 2.5 (Amenabilità). Sia G un gruppo che agisce su X , l'azione $G \curvearrowright X$ si dice *amenabile* se esiste una misura G -invariante su X . Un gruppo G è *amenabile* se l'azione di moltiplicazione a sinistra su se stesso ($G \curvearrowright G$) è amenabile.

La prima definizione ci servirà per comprendere il risultato ultimo esposto in questa tesi. Tuttavia, durante la gran parte della trattazione, lavoreremo con la seconda.

Diamo ora una seconda definizione di amenabilità formulata tramite il concetto di *media invariante*. Iniziamo con la seguente definizione:

Definizione 2.6 (Media). Una *media* su un insieme X è un'applicazione lineare $m: \ell^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $m(1_X) = 1$, dove 1_X denota la funzione costante su X uguale a 1;
2. se $f \geq 0$ su X , allora $m(f) \geq 0$.

Denoteremo con $\mathcal{M}(X)$ l'insieme di tutte le medie su X .

Proposizione 2.7. *Sia $m: \ell^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una media su X . Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $m(\lambda \cdot 1_X) = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R};$
2. $f \leq g \implies m(f) \leq m(g) \quad \forall f, g \in \ell^\infty(X);$
3. $\inf_{x \in X}(f(x)) \leq m(f) \leq \sup_{x \in X}(f(x)) \quad \forall f \in \ell^\infty(X);$
4. $|m(f)| \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \ell^\infty(X).$

Dimostrazione. Proviamo le proprietà elencate:

1. Per linearità $m(\lambda \cdot 1_X) = \lambda \cdot m(1_X) = \lambda \cdot 1 = \lambda$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. Se $f \leq g$ allora $m(f) - m(g) = m(f - g) \geq 0$, per ogni $f, g \in \ell^\infty(X)$
3. Poiché $\inf_{x \in X}(f(x)) \leq f \leq \sup_{x \in X}(f(x))$, ci basta applicare i punti sopra;
4. Dal punto precedente si ha $-\|f\|_\infty \leq m(f) \leq \|f\|_\infty$.

□

Osservazione 2.8. Notiamo che, per il punto (4) della Proposizione 2.7, ogni media m è tale che $\|m\| = \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} |m(u)| \leq 1$ e per questo, essendo lineare per definizione, essa è anche continua. Dunque m può essere vista come un elemento dello spazio duale $(\ell^\infty(X))^*$.

Riassumendo abbiamo che

$$\mathcal{M}(X) \subset \{u \in \ell^\infty(X) \mid \|u\| = 1\} \subset (\ell^\infty(X))^*.$$

Teorema 2.9. *L'insieme $\mathcal{M}(X)$ è un sottoinsieme convesso e compatto di $(\ell^\infty(X))^*$ rispetto alla topologia debole*.*

Dimostrazione. Siano $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X)$ e sia $t \in [0, 1]$. Allora

$$(tm_1 + (1-t)m_2)(1_X) = tm_1(1_X) + (1-t)m_2(1_X) = t + 1 - t = 1$$

e

$$(tm_1 + (1-t)m_2)(f) = tm_1(f) + (1-t)m_2(f) \geq 0$$

per ogni $f \in \ell^\infty(X)$ tale che $f \geq 0$. Perciò $\mathcal{M}(X)$ è convesso. Dotiamo ora $(\ell^\infty(X))^*$ della topologia debole* e sia $(m_i)_{i \in I}$ un net in $\mathcal{M}(X)$ convergente a $u \in (\ell^\infty(X))^*$. Allora, per ogni $i \in I$, abbiamo la seguente valutazione $\psi_{1_X}(m_i) = m_i(1_X) = 1$ e $\psi_f(m_i) = m_i(f) \geq 0$ per ogni $f \in \ell^\infty(X)$ tale che $f \geq 0$. Portando al limite le precedenti espressioni abbiamo che $u(1_X) = \psi_{1_X}(u) = 1$ e $u(f) = \psi_f(u) \geq 0$, per ogni $f \in \ell^\infty(X)$ tale che $f \geq 0$. Dunque $u \in \mathcal{M}(X)$. Usando la Proposizione 1.8 deduciamo che $\mathcal{M}(X)$ è chiuso in $(\ell^\infty(X))^*$. Dato che $\mathcal{M}(X)$ è contenuto nella palla unitaria in $(\ell^\infty(X))^*$, che sappiamo essere compatta per la topologia debole* grazie al Teorema di Banach-Alaoglu 1.4, ne segue che $\mathcal{M}(X)$ è compatto. \square

Sia ora G un gruppo che agisce su X . Tale azione ne induce una seconda di G su $\ell^\infty(X)$ definita da $gf(x) := f(g^{-1}x)$.

Definizione 2.10 (Media G -invariante). Una *media* su X è detta *G -invariante* se $m(gf) = m(f)$ per ogni $f \in \ell^\infty(X)$ e $g \in G$.

Consideriamo più dettagliatamente il caso in cui $X = G$. Ricordiamo che un gruppo ha due azioni su se stesso, una sinistra e una destra.

Definizione 2.11. Una *media invariante a sinistra* (risp. *a destra*) su G è una media invariante per azione sinistra (risp. destra) di G su se stesso.

Mostriamo con il seguente lemma che le definizioni precedenti di medie e misure invarianti definiscono la stessa classe di gruppi:

Proposizione 2.12. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. G è amicabile;
2. G ha una misura di probabilità invariante a destra;
3. G ha una media invariante a destra;
4. G ha una media invariante a sinistra.

Dimostrazione. (1) \iff (2). Data una misura di probabilità μ su G , definiamo una misura μ^* su G come $\mu^*(A) := \mu(A^{-1})$, dove $A^{-1} := \{a^{-1} | a \in A\}$. Allora μ è invariante da sinistra se e solo se μ^* lo è da destra.

(2) \iff (3). Si può mostrare che esiste una biezione tra lo spazio delle medie definite su un insieme e quello delle misure di probabilità definite sullo stesso insieme data da:

$$\Phi : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{PM}(X), \quad m \mapsto \hat{m}$$

dove $\hat{m}(A) := m(\chi_A)$ e $\chi_A(x) := 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) := 0$ se $x \notin A$, per ogni $A \subset X$. Inoltre $m \in \mathcal{M}(G)$ è invariante a destra (risp. a sinistra) se e solo se $\Phi(m) \in \mathcal{PM}(G)$ è invariante a destra.

(3) \iff (4). Data una media m su G , definiamo una media m^* su G come $m^*(f) := m(f^*)$ per ogni $f \in \ell^\infty$, dove $f^*(g) := f(g^{-1})$ per ogni $g \in G$. Allora m è invariante a sinistra se e solo se m^* lo è a destra. \square

2.2 Primi esempi di gruppi amenabili

In questa sezione esponiamo alcune classi di gruppi amenabili.

Proposizione 2.13 (Gruppi finiti). *Ogni gruppo finito è amenabile.*

Dimostrazione. Se G è un gruppo finito, allora la mappa $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\mu(A) := \frac{|A|}{|G|}, \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{P}(X),$$

è una misura di probabilità su G bi-invariante (ovvero invariante sia da destra che da sinistra). \square

Proposizione 2.14 (F_2 non è amenabile). *Il gruppo libero di rango due, F_2 , non è amenabile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una misura di probabilità invariante a sinistra $\mu: \mathcal{P}(F_2) \rightarrow [0, 1]$. Siano a e b i due generatori di F_2 . Sia $A \subset F_2$ l'insieme di tutti gli elementi di F_2 la cui forma ridotta inizia con una potenza non nulla di a . Per definizione vale $F_2 = A \cup aA$ e dunque, per la subadditività mostrata nella Proposizione 2.3, si ha $1 = \mu(F_2) \leq \mu(A) + \mu(aA) = 2\mu(A)$. Da cui

$$\mu(A) \geq \frac{1}{2}.$$

D'altra parte i sottoinsiemi A, bA, b^2A sono disgiunti a due a due e, dato che

$$1 = \mu(F_2) \geq \mu(A) + \mu(bA) + \mu(b^2A) = 3\mu(A),$$

si ottiene

$$\mu(A) \leq \frac{1}{3}.$$

Questo risultato contraddice la disequazione precedente e mostra l'assurdo. \square

2.3 Proprietà di stabilità dei gruppi amenabili

Mostriamo in questa sezione le più importanti proprietà di stabilità dei gruppi amenabili.

Proposizione 2.15. *Ogni sottogruppo di un gruppo amenabile è amenabile.*

Dimostrazione. Sia $H \leq G$ un sottogruppo qualsiasi. Sia μ una misura di probabilità invariante a sinistra su G . Scegliamo un insieme completo di rappresentanti delle classi laterali destre di G modulo H e denotiamolo con R . Esso sarà tale che, per ogni $g \in G$, esiste un unico elemento $(h, r) \in H \times R$ tale che $g = hr$. Verifichiamo che la mappa

$$\tilde{\mu}(A) := \mu\left(\bigcup_{r \in R} Ar\right), \quad \forall A \subset H$$

sia una misura di probabilità su H . Per prima cosa abbiamo che

$$\tilde{\mu}(H) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} Hr\right) = \mu(G) = 1.$$

Inoltre per ogni $A, B \subset H$ disgiunti si ha

$$\tilde{\mu}(A \sqcup B) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} (A \sqcup B)r\right) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} Ar \sqcup \bigcup_{r \in R} Br\right) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} Ar\right) + \mu\left(\bigcup_{r \in R} Br\right) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B),$$

in quanto $\bigcup_{r \in R} Ar$ e $\bigcup_{r \in R} Br$ sono disgiunti per l'unicità di rappresentazione.

Infine, per ogni $h \in H$ e $A \subset H$, abbiamo

$$\tilde{\mu}(hA) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} hA_r\right) = \mu\left(h \bigcup_{r \in R} A_r\right) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} A_r\right) = \tilde{\mu}(A).$$

Questo mostra che H è amenabile. □

Corollario 2.16. *Qualsiasi gruppo che abbia un sottogruppo isomorfo a F_2 non è amenabile.*

Esempio 2.17. Dato un qualsiasi gruppo G , il gruppo prodotto $G \times F_2$ non è amenabile in quanto possiede un sottogruppo isomorfo a F_2 .

Proposizione 2.18. *Ogni quoziente di gruppi amenabili è amenabile.*

Dimostrazione. Siano G un gruppo amenabile e H un sottogruppo normale. Consideriamo la proiezione canonica al quoziente $\pi : G \rightarrow G/H$. Consideriamo una misura di probabilità μ su G . Mostriamo che la mappa $\hat{\mu} : \mathcal{P}(G/H) \rightarrow [0, 1]$ definita come

$$\hat{\mu}(A) := \mu(\pi^{-1}(A)), \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{P}(G/H),$$

è una misura invariante da sinistra su G/H . Innanzitutto abbiamo che

$$\hat{\mu}(G/H) = \mu(\pi^{-1}(G/H)) = \mu(G) = 1.$$

Vediamo ora l'additività:

$$\hat{\mu}(A \sqcup B) = \mu(\pi^{-1}(A \sqcup B)) = \mu(\pi^{-1}(A) \sqcup \pi^{-1}(B)) = \mu(\pi^{-1}(A)) + \mu(\pi^{-1}(B)) = \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(B),$$

in quanto $\pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) = \emptyset$. Infine, se $g \in G$ e $A \subset G/H$, abbiamo

$$\hat{\mu}(\pi(g)A) = \mu(\pi^{-1}(\pi(g)A)) = \mu(g\pi^{-1}(A)) = \mu(\pi^{-1}(A)) = \hat{\mu}(A).$$

Essendo la proiezione una mappa suriettiva, questo mostra che $\hat{\mu}$ è invariante da sinistra rispetto a G/H . \square

Proposizione 2.19. *Sia G un gruppo e H un sottogruppo normale di G . Allora G è amenabile se e solo se H e G/H sono amenabili.*

Dimostrazione. (\implies) Questa implicazione segue dalle Proposizioni 2.15 e 2.18.

(\impliedby) Poiché H è amenabile, esiste su di esso una media invariante da sinistra $m_0: \ell^\infty(H) \rightarrow \mathbb{R}$. Data $f \in \ell^\infty(G)$ consideriamo la mappa $\tilde{f}: G/H \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(\bar{g}) := m_0((g^{-1}f|_H)) \text{ per ogni } g \in G,$$

dove $\bar{g} := gH = Hg \in G/H$ denota la classe di g modulo H . La mappa \tilde{f} è ben definita. Infatti se $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$, allora esiste un $h \in H$ tale che $g_2 = g_1h$, e dunque

$$m_0((g_2^{-1}f|_H)) = m_0((h^{-1}(g_1^{-1}f)|_H)) = m_0((g_1^{-1}f|_H)),$$

in quanto m_0 è invariante a sinistra. Verifichiamo ora che $\tilde{f} \in \ell^\infty(G/H)$:

$$|\tilde{f}(\bar{g})| = |m_0((g^{-1}f|_H))| \leq \sup_{h \in H} |(g^{-1}f)(h)| \leq \|g^{-1}f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

per ogni $g \in G$. La prima disuguaglianza viene dalla Proposizione 2.7.

Ora costruiamo una media su G : essendo G/H amenabile, esiste una media G/H -invariante a sinistra, $m_1: \ell^\infty(G/H) \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo, per ogni $f \in \ell^\infty(G)$,

$$m(f) := m_1(\tilde{f}).$$

È evidente che m è una media su G , dato che lo è già m_1 . Mostriamo che è G -invariante a sinistra.

Sia $g \in G$ e $f \in \ell^\infty(G)$. Per ogni $g' \in G$ abbiamo che

$$\tilde{g}f(\bar{g}') = m_0((g'^{-1}gf|_H)) = m_0(((g^{-1}g')^{-1}f)|_H) = \tilde{f}(\overline{g^{-1}g'}) = \tilde{f}(\bar{g}^{-1}\bar{g}') = \bar{g}\tilde{f}(\bar{g}').$$

Dunque $gf = \bar{g}\tilde{f}$. Essendo m_1 una media G/H -invariante ne segue che

$$m(gf) = m_1(g\tilde{f}) = m_1(\bar{g}\tilde{f}) = m_1(\tilde{f}) = m(f),$$

e perciò m è G -invariante a sinistra. Possiamo ora concludere che G è amenable. \square

Corollario 2.20. *Se G_1 e G_2 sono gruppi amenabili, allora il gruppo $G := G_1 \times G_2$ è amenable.*

Dimostrazione. L'insieme $H := \{(g_1, 1_{G_2}) \mid g_1 \in G\}$ è un sottogruppo normale di G isomorfo a G_1 , mentre il quoziente G/H è isomorfo a G_2 . Dunque, applicando la Proposizione 2.19, si ha la tesi. \square

Osservazione 2.21. Dal Corollario 2.3 risulta immediato che il prodotto di un numero finito di gruppi amenabili sia amenable. Tuttavia il prodotto diretto infinito di gruppi amenabili non è necessariamente amenable. Infatti si può mostrare (vedere [1, Teorema 2.3.1 e Corollario 2.2.6]) che esiste una famiglia numerabile di gruppi finiti, dunque amenabili, $(G_i)_{i \in I}$, tale che il gruppo $G := \prod_{i \in I} G_i$ contenga un sottogruppo isomorfo a F_2 . Dunque tale gruppo G non è amenable per la Proposizione 2.16.

Il nostro prossimo obiettivo è quello di mostrare che un qualsiasi limite di un sistema induttivo di gruppi amenabili è amenable. Per farlo ci serviremo del seguente lemma:

Lemma 2.22. *Sia G un gruppo. Supponiamo che esista un net $(m_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{M}(G)$ tale che, per ogni $g \in G$, il net $(gm_i - m_i)_{i \in I}$ converga a 0 in $(\ell^\infty(G))^*$ rispetto alla topologia debole*. Allora G è amenable.*

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{M}(G)$ compatto rispetto alla topologia debole* per il Teorema 2.9, possiamo assumere, prendendo un subnet se necessario, che il net $(m_i)_{i \in I}$ converga a una media $m \in \mathcal{M}(G)$ (grazie alla Proposizione 1.9). Sia g un elemento di G . Osserviamo che l'azione di G su $\mathcal{M}(G)$ è continua. Infatti, sappiamo che $\mathcal{M}(G)$ è un sottoinsieme di $(\ell^\infty(G))^*$ per l'Osservazione 2.8 e che, fissato $g \in G$, la mappa $u \mapsto gu$ è continua in $(\ell^\infty(G))^*$ in quanto, per ogni $f \in \ell^\infty(G)$, la mappa $u \mapsto gu(f)$ è la mappa di valutazione in $g^{-1}f$, continua per definizione di topologia debole*. Di conseguenza, per ogni $f \in \ell^\infty(G)$, il net $(gm_i - m_i)(f) = gm_i(f) - m_i(f)$ converge a 0. Facendo il limite otteniamo $gm = m$, che mostra l'invarianza sinistra della media m . Dunque G è amenable. \square

Proposizione 2.23. *Ogni gruppo che è limite diretto di un sistema diretto di gruppi amenabili è amenable.*

Dimostrazione. Siano $(G_i)_{i \in I}$ un sistema diretto di gruppi amenabili e $G := \lim_{i \in I} G_i$. Consideriamo la famiglia $(H_i)_{i \in I}$ di sottogruppi di G definita da $H_i := h_i(G_i)$, dove denotiamo $h_i : G_i \rightarrow G$ l'omomorfismo canonico. Per ogni $i \in I$, H_i è amenable per la Proposizione 2.18, in quanto quoziente di un gruppo amenable. Questo mostra che esiste una media H_i -invariante da sinistra $\tilde{m}_i : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo ora la successione $m_i : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$m_i(f) := \tilde{m}_i(f|_{H_i}), \quad \text{per ogni } f \in \ell^\infty(G).$$

Sia $g \in G$. Dato che $G = \lim_{i \in I} G_i$, esiste $i_0(g) \in I$ tale che $g \in H_i$ per ogni $i \geq i_0(g)$. Per $f \in \ell^\infty(G)$ e $i \geq i_0(g)$ abbiamo $(gm_i - m_i)(f) = gm_i(f) - m_i(f) = g\tilde{m}_i(f|_{H_i}) - \tilde{m}_i(f|_{H_i}) = 0$, dato che \tilde{m}_i è H_i -invariante da sinistra. Perciò $gm_i - m_i = 0$ per ogni $i \geq i_0(g)$. Applicando il Lemma 2.22, deduciamo che G è amenable. \square

Ricordiamo che un gruppo si dice avere *localmente* una determinata proprietà se ogni suo sottogruppo finitamente generato la possiede.

Corollario 2.24. *Ogni gruppo localmente amenable è amenable.*

Dimostrazione. Ogni gruppo è il limite induttivo dei suoi sottogruppi finitamente generati (vedere la Proposizione 1.11). \square

Esempio 2.25. Sia X un insieme. Il gruppo $\text{Sym}_0(X)$ è l'insieme di tutte le permutazioni di X con supporto finito, dove il supporto di una permutazione è l'insieme dei punti che non sono da essa fissati. Tale gruppo è localmente finito. Infatti, sia S un sottoinsieme finito di $\text{Sym}_0(X)$, allora il sottogruppo H di $\text{Sym}_0(X)$, generato da S , è finito in quanto isomorfo a un sottogruppo di $\text{Sym}(A)$, dove A denota l'unione dei supporti degli elementi di S . Poiché ogni sottogruppo finitamente generato è finito, per la Proposizione 2.13, si avrà che $\text{Sym}_0(X)$ è anche localmente amenable. Dunque $\text{Sym}_0(X)$ è amenable.

Corollario 2.26. *Sia $(G_i)_{i \in I}$ una famiglia di gruppi amenabili. La loro somma diretta $G := \bigoplus_{i \in I} G_i$ è amenable.*

Dimostrazione. Ogni sottogruppo finitamente generato di G è un sottogruppo di alcuni prodotti finiti dei gruppi G_i ed è amenable per le Proposizioni 2.15 e 2.20. Perciò G è localmente amenable. Dal Corollario 2.24 concludiamo. \square

Teorema 2.27. *Ogni gruppo abeliano è amenable.*

La dimostrazione di questo teorema si basa sul Teorema del punto fisso di Markov-Kukutani [1, Teorema G.1.1]. Questo risultato insieme alla Proposizione 2.19 è utile per mostrare che i gruppi risolubili sono amenabili.

Vediamo ora un nesso che ci servirà più avanti tra gruppi amenabili e azioni amenabili:

Proposizione 2.28. *Sia G un gruppo che agisce su un insieme non vuoto X . Il gruppo G è amenabile se e solo se l'azione di G su X è amenabile e, per ogni $p \in X$, lo stabilizzatore del punto p è amenabile.*

Dimostrazione. (\implies) Sia μ una misura di probabilità invariante su G . Data un'azione $G \curvearrowright X$, scelto un punto $x \in X$ si può definire una funzione

$$\nu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1], \quad \nu(A) = \mu(\{g \in G : gx \in A\}).$$

Tale funzione risulta essere una misura di probabilità G -invariante. Infatti $\nu(X) = \mu(\{g \in G | gx \in X\}) = \mu(G) = 1$ e $\nu(A \sqcup B) = \mu(\{g \in G | gx \in A \sqcup B\}) = \mu(\{g \in G | gx \in A\} \sqcup \{g \in G | gx \in B\}) = \nu(A) + \nu(B)$ in quanto μ è finitamente additiva. Inoltre si ha che $\nu(gA) = \mu(\{\tilde{g} \in G | \tilde{g}x \in gA\}) = \mu(\{g^{-1}\tilde{g} \in G | g^{-1}\tilde{g}x \in A\}) = \mu(A)$. Essendo lo stabilizzatore di un punto un sottogruppo di G allora, per la Proposizione 2.15, esso risulta essere amenabile.

(\impliedby) Sia ora G_p lo stabilizzatore di un elemento p . Esso è amenabile per ipotesi. Chiamiamo

$$m_X : \ell^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad m_p : \ell^\infty(G_p) \rightarrow \mathbb{R}$$

le medie rispettivamente G -invariante e G_p -invariante. Costruiamo una media invariante da sinistra su $\ell^\infty(G)$. Per ogni $p \in X$ e $f \in \ell^\infty(G)$ definiamo una funzione f_p sull'orbita O_p di p , come

$$f_p(gp) := m_p(f|_{gO_p}).$$

Essendo m_p G_p -invariante, $f_p(gp)$ dipende solo da $x = gp$ e non da g . Inoltre per ogni $q \in G_p$, le funzioni $f_p, f_q : G_p \rightarrow \mathbb{R}$ sono uguali. Possiamo dunque ricavare una funzione G -invariante f_X definita su X la cui restrizione a ogni orbita è esattamente f_p . Dato che ogni m_p è una media e f è limitata, anche la funzione f_X sarà limitata. Definiamo

$$m(f) := m_X(f_X).$$

La linearità di m e la caratterizzazione di media seguono dalle analoghe proprietà di m_p , per ogni $p \in X$, e di m_X . Verifichiamo che m è G -invariante. Dato un qualsiasi elemento $h \in G$ ricordiamo che $hf(x) = f(h^{-1}x)$ per ogni $x \in X$. Dunque

$$(hf)_p(gp) = m_p((hf)|_{gO_p}) = m_p(f|_{h^{-1}gO_p}) = f_p(h^{-1}gp).$$

Da ciò deduciamo che $(hf)_X = f_X \circ h^{-1} = hf_X$ e dunque

$$m(hf) = m_X((hf)_X) = m_X(hf_X) = m_X(f_X) = m(f).$$

□

Capitolo 3

I teoremi di matching di Hall

Ai fini della comprensione di quanto tratteremo nell'ultimo capitolo, nello specifico della dimostrazione del Teorema di Tarski e Følner (4.10), prendiamo ora in prestito dalla teoria dei grafi alcuni risultati relativi ai problemi di matching. Di conseguenza questo capitolo risulterà essere una piccola immersione in un ambito diverso da quello più propriamente algebrico in cui eravamo fin'ora.

3.1 Grafi bipartiti

Diamo qualche definizione necessaria ad affrontare i teoremi di matching.

Definizione 3.1 (Grafo bipartito). Un *grafo bipartito* è il dato di due insiemi arbitrari, X e Y , detti rispettivamente insieme dei vertici sinistri e insieme dei vertici destri, e di un sottoinsieme, $E \subset X \times Y$, detto insieme degli archi. Denotiamo un grafo bipartito con $\mathcal{G} = (X, Y, E)$.

Si dice *sottografo bipartito* di un grafo bipartito $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un ulteriore grafo bipartito $\mathcal{G}' = (X', Y', E')$ tale che $X' \subset X, Y' \subset Y$, e $E' \subset E$.

Due lati $(x, y), (x', y') \in E$ si dicono *adiacenti* se $x = x'$ o $y = y'$.

Dato un vertice $x \in X$ (risp. $y \in Y$) si dice *intorno destro di x* (risp. *intorno sinistro di y*) il sottoinsieme $\mathcal{N}_R(x) \subset Y$ (risp. $\mathcal{N}_L(y) \subset X$) definito da

$$\mathcal{N}_R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \quad (\text{risp. } \mathcal{N}_L(y) := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}).$$

Per ogni sottoinsieme $A \subset X$ e $B \subset Y$ si definiscono rispettivamente l'*intorno destro* di A e l'*intorno sinistro* di B come

$$\mathcal{N}_R(A) := \bigcup_{a \in A} \mathcal{N}_R(a) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_L(B) := \bigcup_{b \in B} \mathcal{N}_L(b).$$

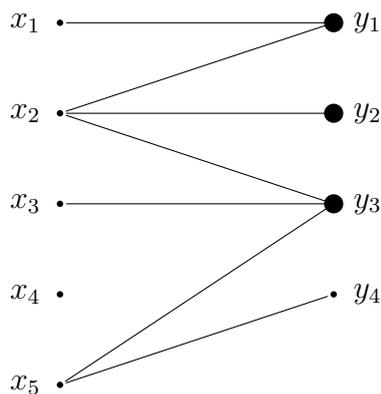


Figura 3.1: Grafo bipartito in cui è evidenziato l'intorno $\mathcal{N}_R(x_2)$.

Un grafo bipartito $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ si dice *finito* se X e Y sono entrambi finiti. Si dice invece *localmente finito* se gli insiemi $\mathcal{N}_R(x)$ e $\mathcal{N}_L(y)$ sono finiti per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Definizione 3.2 (Matching). Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito. Un *matching* di \mathcal{G} è un sottoinsieme $M \subset E$ di lati a due a due non adiacenti. Equivalentemente, un sottoinsieme $M \subset E$ è un matching se e solo se entrambe le mappe di proiezione $p: M \rightarrow X$ e $q: M \rightarrow Y$ sono iniettive.

Un *matching* M si dice *perfetto a sinistra* (risp. *a destra*) se per ogni $x \in X$ (risp. $y \in Y$), esiste un $y \in Y$ (risp. $x \in X$) tale che $(x, y) \in M$. Perciò un matching M è perfetto a sinistra (risp. a destra) se la mappa di proiezione $p: M \rightarrow X$ (risp. $q: M \rightarrow Y$) è suriettiva, e dunque biettiva.

Un *matching* M si dice *perfetto* se è perfetto sia a sinistra che a destra.

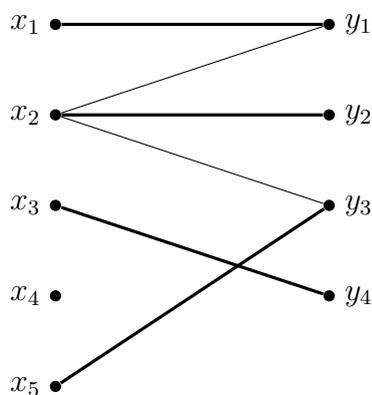


Figura 3.2: Esempio di grafo bipartito con matching perfetto a destra ma non a sinistra.

3.2 Il Teorema del matching perfetto di Hall

In questa sezione andiamo a dimostrare il primo teorema di matching di Hall, anche noto come il *Marriage Theorem*. Iniziamo dalla seguente:

Definizione 3.3 (Condizioni di Hall). Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito. Si dice che \mathcal{G} soddisfa le *condizioni di Hall a sinistra* (risp. *a destra*) se

$$|\mathcal{N}_R(A)| \geq |A| \quad (\text{risp. } |\mathcal{N}_L(B)| \geq |B|)$$

per ogni sottoinsieme finito $A \subset X$ (risp. $B \subset Y$). Si dice che \mathcal{G} soddisfa le *Hall marriage conditions* se soddisfa sia le condizioni a sinistra che quelle a destra.

Teorema 3.4 ([1] Theorem H.3.2). *Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo localmente bipartito. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. \mathcal{G} soddisfa le condizioni di Hall a sinistra (risp. a destra);
2. \mathcal{G} ammette un matching perfetto a sinistra (risp. a destra).

Riportiamo tale risultato poiché ci tornerà utile in seguito, pur omettendone la dimostrazione.

Osservazione 3.5. La denominazione di *Marriage Theorem* del Teorema 3.7 si deve al seguente fatto: con una metafora, a mio avviso non molto felice, gli insiemi X e Y si possono pensare rispettivamente come un insieme di ragazzi e uno di ragazze. Il grafo bipartito si può leggere come indice di preferenze reciproche tra i due gruppi. Ad esempio un grafo presenta un matching perfetto a destra se ogni ragazza può essere accontentata sposando uno e un solo ragazzo che le piace, senza che vi siano conflitti di interesse.

Teorema 3.6. *Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito. Supponiamo che \mathcal{G} ammetta sia un matching perfetto a sinistra che un matching perfetto a destra. Allora \mathcal{G} ammette un matching perfetto.*

Dimostrazione. Sia M_X (risp. M_Y) un matching perfetto a sinistra (risp. a destra) per \mathcal{G} . Consideriamo la relazione di equivalenza su $\overline{M} := M_X \cup M_Y$ definita nel seguente modo: due archi e e e' sono in relazione se esiste una sequenza $e = e_0, e_1, \dots, e_n = e'$ in \overline{M} tali che e_i e e_{i+1} siano adiacenti per ogni $0 \leq i \leq n-1$. Allora ogni classe di equivalenza consiste in una delle seguenti sequenze: un singolo arco, un ciclo di lunghezza $2n \geq 4$, una catena infinita da entrambe le parti o da una parte sola. Osserviamo che la classe di equivalenza è ridotta a un singolo punto (x, y) se e solo se $(x, y) \in M_X \cap M_Y$. D'altra parte

una classe di equivalenza è un ciclo di lunghezza $2n$ se e solo se, a meno di rinominare i vertici (vedere figura 4.1), essa è della forma

$$\mathcal{C} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\} \cup \{(x_1, y_2), (x_2, y_3), \dots, (x_{n-1}, y_n), (x_n, y_1)\}, \quad (3.1)$$

dove gli $x_i \in X$ sono tutti distinti e gli $y_i \in Y$ analogamente, con $1 \leq i, j \leq n$. In questo caso possiamo definire

$$M(\mathcal{C}) := \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

Inoltre una catena infinita da entrambi i lati, sempre a meno di rinominare i vertici, è una classe di equivalenza della forma

$$\mathcal{C} = \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{Z}\} \cap \{(x_n, y_{n+1}) | n \in \mathbb{Z}\},$$

dove gli $x_i \in X$ e gli $y_i \in Y$ sono tutti distinti, per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$. In questo caso poniamo

$$M(\mathcal{C}) := \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Infine, se la classe di equivalenza è una catena infinita solo da una parte, allora, sempre a meno di cambiare le etichette, essa è della forma

$$\mathcal{C} = \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x_{n+1}, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$$

o della forma

$$\mathcal{C} = \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x_n, y_{n+1}) | n \in \mathbb{N}\},$$

con $x_i \in X$ e $y_i \in Y$ tutti distinti, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$. In entrambi i casi poniamo $M(\mathcal{C}) := \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$. Risulta chiaro che l'insieme $M \subset E$, definito come $M := \bigcup_{\mathcal{C}} M(\mathcal{C})$, dove \mathcal{C} varia fra tutte le classi di equivalenza in \overline{M} , è il matching perfetto ricercato in \mathcal{G} . \square

Teorema 3.7 (Il Teorema del matching perfetto di Hall o *Marriage Theorem*). *Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito localmente finito. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. \mathcal{G} soddisfa le Hall marriage conditions;
2. \mathcal{G} ammette un matching perfetto.

Dimostrazione. Le condizioni di Hall a sinistra e a destra implicano l'esistenza di un matching perfetto rispettivamente a sinistra e a destra su \mathcal{G} come mostrato nel Teorema 3.4. Allora il Teorema 3.6 garantisce l'esistenza di un matching perfetto per \mathcal{G} . L'implicazione inversa è immediata. Infatti, senza perdita di generalità, supponiamo per assurdo che esista $A \subset X$ tale che $|\mathcal{N}_R(A)| < |A|$. Allora esisterebbe un elemento $x \in A$ che non appartiene a nessun arco. Ma ciò è assurdo dato che per ipotesi esiste un *matching* perfetto e quindi ogni vertice deve appartenere ad un arco. \square

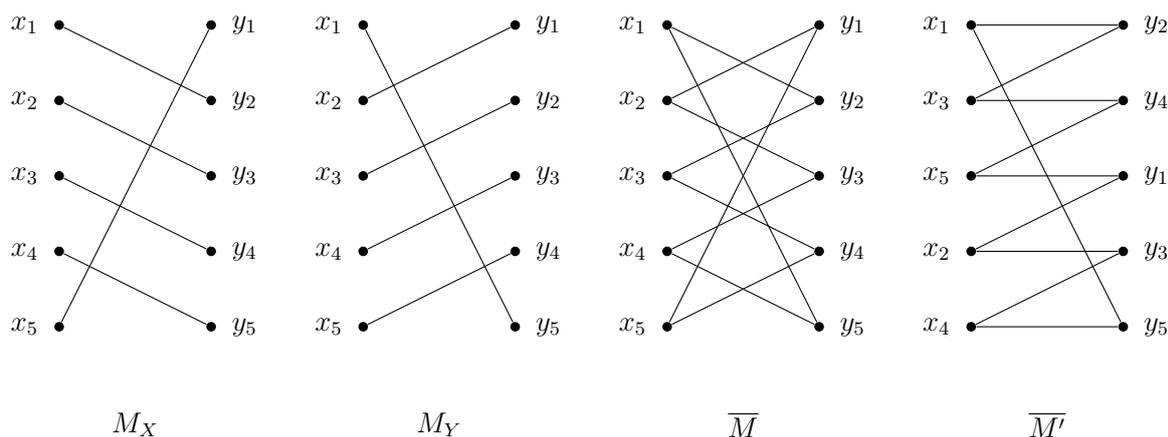


Figura 3.3: M_X matching perfetto a sinistra; M_Y matching perfetto a destra; $\overline{M} = M_X \cup M_Y$; \overline{M}' grafo equivalente a \overline{M} con archi ordinati secondo la forma data nella dimostrazione (3.1).

3.3 Il Teorema del matching $(1, k)$ -perfetto di Hall

Presentiamo ora il secondo importante risultato di Philip Hall nell'ambito della teoria dei matching, il cosiddetto *Hall Harem Theorem*. Sarà proprio questo risultato a tornarci utile per la dimostrazione del Teorema di Tarski e Følner nel capitolo successivo.

Definizione 3.8 (Matching $(1, k)$ -perfetto). Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito e sia $k \geq 1$ un intero. Un sottoinsieme $M \subset E$ è detto un *matching $(1, k)$ -perfetto* se soddisfa le seguenti condizioni:

1. per ogni $x \in X$, esistono esattamente k elementi $y \in Y$ tali che $(x, y) \in M$;
2. per ogni $y \in Y$ esiste un unico elemento $x \in X$ tale che $(x, y) \in M$.

Equivalentemente, un sottoinsieme $M \subset E$ è un matching $(1, k)$ -perfetto se e solo se esiste una mappa suriettiva $k : 1$, $\psi : Y \rightarrow X$, tale che $M = \{(\psi(y), y) | y \in Y\}$. Riprendendo l'immagine del matrimonio sopraccitata, abbiamo ora che un matching $(1, k)$ -perfetto si può vedere come una serie di matrimoni poligamici dove ogni ragazzo ha esattamente k mogli, andando a costituire il suo Harem.

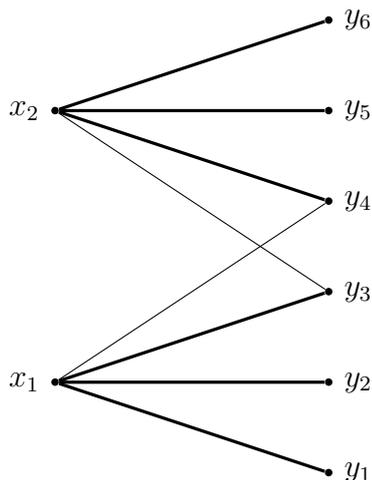


Figura 3.4: Grafo bipartito con matching $(1, 3)$ -perfetto.

Definizione 3.9. Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito localmente finito e sia $k \geq 1$ un intero. Si dice che \mathcal{G} soddisfa le *condizioni di matching $(1, k)$ -perfetto* se valgono entrambe le seguenti condizioni:

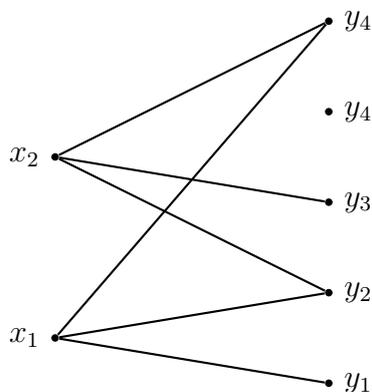
1. $|\mathcal{N}_R(A)| \geq k|A|$;
2. $|\mathcal{N}_L(B)| \geq \frac{1}{k}|B|$;

per ogni $A \subset X$ e $B \subset Y$.

Teorema 3.10 (Teorema del matching $(1, k)$ -perfetto di Hall o *Hall Harem Theorem*). Sia $\mathcal{G} = (X, Y, E)$ un grafo bipartito localmente finito e sia $k \geq 1$ un intero. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. \mathcal{G} soddisfa le condizioni di matching $(1, k)$ -perfetto;
2. \mathcal{G} ammette un matching $(1, k)$ -perfetto.

Dimostrazione. $(2) \implies (1)$. Risulta chiaro dalle definizioni, come mostrato dall'esempio seguente:



Esempio: Sia $k = 3$. Se $A = \{x_1, x_2\}$, allora

$$|\mathcal{N}_R(A)| = 4 < 3|A| = 6.$$

Se $B = \{y_4\}$, allora $|\mathcal{N}_L(B)| = 0 < \frac{1}{3}|B| = \frac{1}{3}$. Quindi il grafo bipartito non soddisfa le condizioni di matching $(1, 3)$ -perfetto e chiaramente è privo di un matching $(1, 3)$ -perfetto.

(1) \implies (2). Supponiamo che \mathcal{G} soddisfi le *Hall k -harem conditions*. Siano X_1, X_2, \dots, X_k copie disgiunte di X e sia $\phi_i : X \rightarrow X_i$ la mappa che copia ogni elemento, per $i = 1, 2, \dots, k$. Possiamo pensare $\phi_i(x)$ come la copia di $x \in X$ in X_i . Consideriamo il nuovo grafo bipartito $\mathcal{G}' = (X', Y', E')$, dove $X' := \sqcup_{i=1}^k X_i$, $Y' := Y$, e

$$E' := \{(\phi_i(x), y) \mid (x, y) \in E, i = 1, 2, \dots, k\} \subset X' \times Y'.$$

Sia A' un sottoinsieme finito di X' e sia $\overline{A'}$ l'insieme degli $x \in X$ tali che le loro copie appartengano ad $\overline{A'}$. Osserviamo che $|A'| \leq k|\overline{A'}|$ e $\mathcal{N}_R^{\mathcal{G}'}(A') = \mathcal{N}_R^{\mathcal{G}'}(\overline{A'})$. Perciò dal punto (1) otteniamo

$$|\mathcal{N}_R^{\mathcal{G}'}(A')| = |\mathcal{N}_R^{\mathcal{G}'}(\overline{A'})| \geq k|\overline{A'}| \geq |A'|. \quad (3.2)$$

D'altra parte, se B' è un sottoinsieme finito di $Y' = Y$, allora $\mathcal{N}_L^{\mathcal{G}'}(B')$ è l'insieme che consiste di tutte le copie di elementi di $\mathcal{N}_L^{\mathcal{G}}(B')$, e per (1) soddisfa

$$|\mathcal{N}_L^{\mathcal{G}'}(B')| = k|\mathcal{N}_L^{\mathcal{G}}(B')| \geq k \left(\frac{1}{k} |B'| \right) = |B'|. \quad (3.3)$$

Le disuguaglianze (3.2) e (3.3) dicono che \mathcal{G}' soddisfa le condizioni di matching $(1, k)$ -perfetto. Perciò, per il Teorema 3.7, \mathcal{G}' ammette un matching perfetto $M' \subset E'$. Allora l'insieme M , composto da tutte le coppie $(x, y) \in E$ tali che (x', y) appartenga a M' per una qualche copia x' di x , è un matching $(1, k)$ -perfetto per \mathcal{G} . \square

Capitolo 4

Teoremi di Tarski e Følner

Dopo la parentesi relativa ai matchings, che ci tornerà utile in questo capitolo, introduciamo i due concetti di *sequenza di Følner* e di *decomposizione paradossale*. In particolare andiamo ora a studiare come questi ultimi due concetti siano inscindibilmente interconnessi con quello di amenabilità.

4.1 Condizioni di Følner

Iniziamo con lo studio delle *successioni di Følner*.

Proposizione 4.1. *Sia G un gruppo, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *per ogni sottoinsieme finito $K \subset G$ e per ogni numero $\varepsilon > 0$, esiste un sottoinsieme finito $F \subset G$ tale che*

$$\frac{|F \setminus kF|}{|F|} < \varepsilon, \quad \text{per ogni } k \in K; \quad (4.1)$$

2. *esiste un net $(F_j)_{j \in J}$ composto da sottoinsiemi finiti non vuoti di G tali che*

$$\lim_j \frac{|F_j \setminus gF_j|}{|F_j|} = 0, \quad \text{per ogni } g \in G. \quad (4.2)$$

Dimostrazione. (1) \implies (2). Sia $J := \{(K, \varepsilon) \mid K \subset G \text{ finito e } \varepsilon > 0\}$. Dotiamo J di un ordine parziale \leq definito da " $(K, \varepsilon) \leq (K', \varepsilon') \iff (K \subset K' \text{ e } \varepsilon \geq \varepsilon')$ ". Osserviamo che (J, \leq) è un insieme diretto. Infatti per ogni coppia di elementi (K, ε) e (K', ε') esiste $(\bar{K}, \bar{\varepsilon}) := (K \cup K', \min(\varepsilon, \varepsilon'))$ tale che $(K, \varepsilon) \leq (\bar{K}, \bar{\varepsilon})$ e $(K', \varepsilon') \leq (\bar{K}, \bar{\varepsilon})$. Per ipotesi, per ogni $j = (K, \varepsilon) \in J$, esiste un sottoinsieme finito non vuoto $F_j \subset G$ tale che

$$\frac{|F_j \setminus kF_j|}{|F_j|} < \varepsilon \quad \text{per ogni } k \in K.$$

Consideriamo quindi il net $(F_j)_{j \in J}$. Per ogni $g \in G$ e $\varepsilon_0 > 0$ definiamo $j_0 := (\{g\}, \varepsilon_0)$. Se $j = (K, \varepsilon)$ soddisfa $j \geq j_0$, allora $g \in K$ e $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Perciò si ha

$$\frac{|F_j \setminus gF_j|}{|F_j|} < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \text{per ogni } j \geq j_0.$$

Risulta dunque che $(F_j)_{j \in J}$ soddisfa (4.2).

(2) \implies (1). Sia $K \subset G$ un sottoinsieme finito e sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi si ha che per ogni $k \in K$ esiste $j(k) \in J$ tale che

$$\frac{|F_j \setminus kF_j|}{|F_j|} < \varepsilon \quad \text{per ogni } j \geq j(k).$$

Essendo inoltre che J è un insieme diretto e K è finito, esiste sempre un $j_0 \in J$ tale che $j_0 \geq j(k)$ per ogni $k \in K$. Allora, ponendo $F := F_{j_0}$, si ha la condizione (4.1) e dunque l'implicazione ricercata. \square

Definizione 4.2 (Condizioni di Følner). Si dice che un gruppo G *soddisfa le condizioni di Følner* se soddisfa una delle condizioni equivalenti della Proposizione 4.1.

Osservazione 4.3. Quelle che abbiamo definito sono le condizioni di Følner sinistre, poiché tale è l'azione presa in considerazione. Si mostra facilmente che le analoghe condizioni, date però dall'azione destra, sono equivalenti alle precedenti.

Esempio 4.4. Sia $G := \mathbb{Z}$, allora la sequenza $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dove $F_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$, è una sequenza di Følner. Infatti, fissati $g \in \mathbb{Z}$ e $n \geq |g|$, si ha

$$\frac{|F_n \setminus (F_n + g)|}{|F_n|} = \frac{|g|}{n},$$

che converge a 0 se n tende a infinito.

4.2 Decomposizioni paradossali

Parliamo ora della nozione di *decomposizione paradossale*, con la quale ci avviciniamo sempre più al celebre paradosso di Banach-Tarski.

Definizione 4.5 (Decomposizione paradossale). Sia G un gruppo. Una *decomposizione paradossale* di G è una coppia

$$((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K}),$$

dove H e K sono sottoinsiemi finiti di G e $(A_h)_{h \in H}$ e $(B_k)_{k \in K}$ sono famiglie di sottoinsiemi di G indicizzati da H e K tali che

$$G = (\sqcup_{h \in H} hA_h) \sqcup (\sqcup_{k \in K} kB_k) = \sqcup_{h \in H} A_h = \sqcup_{k \in K} B_k.$$

Se G ammette una decomposizione paradossale, allora si definisce *gruppo paradossale*.

Osservazione 4.6. La definizione data si riferisce più propriamente a una decomposizione paradossale sinistra, in quanto l'azione considerata di G su se stesso è un'azione sinistra. Analogamente si può definire una decomposizione paradossale destra, sostituendo l'azione sinistra con quella destra. Risulta immediato che $((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K})$ è una decomposizione paradossale sinistra se e solo se $((A_{h^{-1}}^{-1})_{h \in H^{-1}}, (B_{k^{-1}}^{-1})_{k \in K^{-1}})$ è una decomposizione paradossale destra. Perciò si può parlare di gruppi che ammettono una decomposizione paradossale, senza specificare da che lato.

Osservazione 4.7. La definizione data è leggermente diversa da quella data ad esempio da Löh [2, Definition 9.2.10]. Ella propone infatti una scomposizione di questa forma:

$$G = (\sqcup_{h' \in H'} \overline{A_{h'}}) \sqcup (\sqcup_{k' \in K'} \overline{B_{k'}}) = \sqcup_{h' \in H'} h' \overline{A_{h'}} = \sqcup_{k' \in K'} k' \overline{B_{k'}},$$

dove H' e K' sono sottoinsiemi finiti di G , e $(\overline{A_{h'}})_{h' \in H'}$ e $(\overline{B_{k'}})_{k' \in K'}$ sono famiglie di sottoinsiemi di G indicizzati da H e K . Tale definizione, che chiamiamo P' , è equivalente alla precedente, che chiamiamo P . Infatti, se vale P , è sufficiente prendere $\overline{A} = hA_h$ e $h' = h^{-1}$ (similmente $\overline{B} = kB_k$ e $k' = k^{-1}$) per ottenere P' . Il viceversa è analogo. Altri autori, come Ceccherini-Silberstein e Coornaert [1, Definition 4.8.1] danno invece la seguente definizione: G ammette una decomposizione paradossale se esiste una tripla $(L, (A_\ell)_{\ell \in L}, (B_\ell)_{\ell \in L})$ tale che $L \subset G$ è un insieme finito e $(A_\ell)_{\ell \in L}$ e $(B_\ell)_{\ell \in L}$ sono famiglie di sottoinsiemi di G indicizzati da L tali che

$$G = (\sqcup_{\ell \in L} \ell A_\ell) \sqcup (\sqcup_{\ell \in L} \ell B_\ell) = \sqcup_{\ell \in L} A_\ell = \sqcup_{\ell \in L} B_\ell.$$

Questa ulteriore definizione, che chiamiamo P'' , è in realtà equivalente alle prime due. Mostriamo che P implica P'' . Sia $L := H \cup K$, e poniamo $A_\ell = A_h$ se $\ell = h$ e $A_\ell = \emptyset$ altrimenti (similmente $B_\ell = B_k$ se $\ell = k$ e $B_\ell = \emptyset$ altrimenti). Allora si vede immediatamente che vale P' tramite $(L, (A_\ell)_{\ell \in L}, (B_\ell)_{\ell \in L})$. Viceversa se vale P'' è sufficiente porre $H = K = L$. Così si mostra che vale P .

Proposizione 4.8. *Il gruppo libero di rango 2 ammette una decomposizione paradossale.*

Dimostrazione. Siano a e b i due generatori di F_2 . Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di F :

- Sia A^+ l'insieme di tutte le parole ridotte che iniziano con una potenza positiva di a .
- Sia A^- l'insieme di tutte le parole ridotte che iniziano con una potenza negativa di a .

- Sia B^+ l'insieme che contiene l'elemento neutro, tutte le potenze di b e tutte le parole ridotte che iniziano con una potenza positiva di b .
- Sia B^- l'insieme di tutte le parole ridotte che iniziano con una potenza negativa di b , meno le potenze di b .

Allora

$$F_2 = A^+ \sqcup A^- \sqcup B^+ \sqcup B^- = A^- \sqcup a^{-1}A^+ = B^- \sqcup b^{-1}B^+.$$

Perciò, se poniamo $A_1 := A^-$, $A_a := a^{-1}A^+$, $B_1 := B^-$ e $B_b := b^{-1}B^+$, otteniamo

$$F_2 = A_1 \sqcup aA_a \sqcup B_1 \sqcup bB_b = A_1 \sqcup A_a = B_1 \sqcup B_b,$$

che è una decomposizione paradossale di F_2 , dove $H := \{1, a\}$ e $K := \{1, b\}$.

□

Osservazione 4.9. Si può osservare che la precedente dimostrazione usa scomposizioni di F_2 analoghe a quella utilizzata per dimostrare il fatto che F_2 è un gruppo non amenable (Proposizione 2.14).

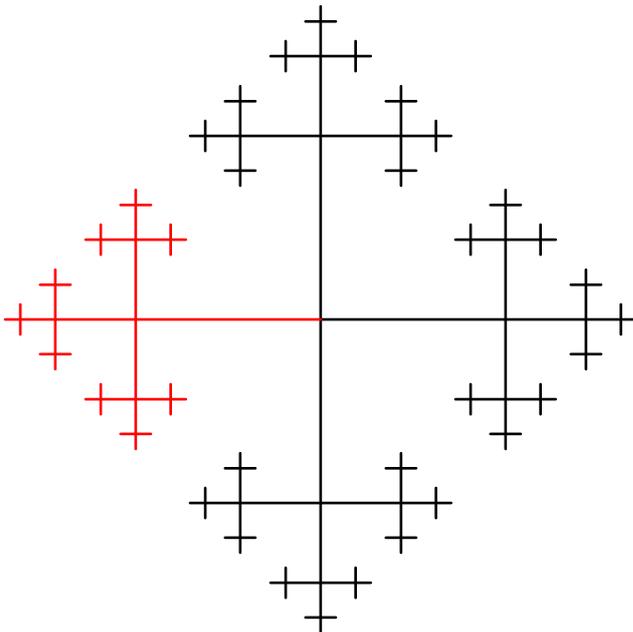


Figura 4.1: Grafo di Cayley di F_2 dove i rami verso destra corrispondono a una moltiplicazione a destra per a , verso sinistra per a^{-1} , verso l'alto per b , verso il basso per b^{-1} . I colori mostrano la scomposizione paradossale $F_2 = A^- \sqcup a^{-1}A^+$: in rosso abbiamo A^- mentre in nero $a^{-1}A^+$.

4.3 Teoremi di Tarski e Følner

Con il seguente teorema vediamo come i concetti affrontati nei precedenti capitoli siano tra loro collegati. In particolare presentiamo, come serie di equivalenze, due risultati importanti: da una parte la relazione tra gruppi amenabili e decomposizioni paradossali, la cui dimostrazione si deve a Tarski, dall'altra la relazione tra decomposizioni paradossali e condizioni di Følner, il cui studio si deve, per l'appunto, a Følner.

Teorema 4.10 (Tarski-Følner). *Sia G un gruppo. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. G non è amenabile;
2. G non soddisfa le condizioni di Følner;
3. esiste un sottoinsieme finito $K \subset G$ tale che $|KF| \geq 2|F|$ per ogni sottoinsieme finito $F \subset G$;
4. esiste un sottoinsieme finito $K \subset G$ tale che $|FK| \geq 2|F|$ per ogni sottoinsieme finito $F \subset G$;
5. esiste una mappa $\phi : G \rightarrow G$, 2 a 1 e suriettiva, ed esiste un sottoinsieme K tale che $g(\phi(g))^{-1} \in K$ per ogni $g \in G$;
6. esiste una mappa $\phi : G \rightarrow G$, 2 a 1 e suriettiva, ed esiste un sottoinsieme K tale che $g^{-1}\phi(g) \in K$ per ogni $g \in G$;
7. G ammette una decomposizione paradossale.

Dimostrazione. Prendendo l'insieme inverso le equivalenze (3) \Leftrightarrow (4) e (5) \Leftrightarrow (6) risultano immediate. Perciò ci riduciamo a mostrare (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (5), (5) \Rightarrow (7), e (7) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2). Supponiamo per assurdo che G soddisfi le condizioni di Følner. Allora G ammetterebbe un net $(F_j)_{j \in J}$ che soddisfa la condizione di Følner (4.2). Allora, per ogni $j \in J$, consideriamo la media $m_j : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$m_j := \frac{1}{|F_j|} \sum_{h \in F_j} f(h) \quad \text{per ogni } f \in \ell^\infty(G).$$

Sia $g \in G$. Per ogni $f \in \ell^\infty(G)$ abbiamo che

$$(gm_j - m_j)(f) = gm_j(f) - m_j(f) = m_j(g^{-1}f) - m_j(f) = \frac{1}{|F_j|} \left(\sum_{h \in F_j} f(gh) - \sum_{h \in F_j} f(h) \right)$$

$$= \frac{1}{|F_j|} \left(\sum_{h \in gF_j} f(h) - \sum_{h \in F_j} f(h) \right) = \frac{1}{|F_j|} \left(\sum_{h \in gF_j \setminus F_j} f(h) - \sum_{h \in F_j \setminus gF_j} f(h) \right).$$

Da ciò segue che

$$|(gm_j - m_j)(f)| \leq \frac{1}{|F_j|} \left(\sum_{h \in gF_j \setminus F_j} |f(h)| - \sum_{h \in F_j \setminus gF_j} |f(h)| \right) \leq \frac{1}{|F_j|} (|gF_j \setminus F_j| + |F_j \setminus gF_j|) \|f\|_\infty.$$

Dato che $|gF_j \setminus F_j| = |F_j \setminus gF_j|$, otteniamo

$$|(gm_j - m_j)(f)| \leq 2 \frac{|F_j \setminus gF_j|}{|F_j|} \|f\|_\infty.$$

Dalla definizione di Følner net abbiamo che $\lim_{j \in J} (gm_j - m_j)(f) = 0$. Perciò il net $(gm_j - m_j)_{j \in J}$ converge a 0 in $(\ell^\infty(G))^*$ per la topologia debole*. Grazie al Lemma 2.22 otteniamo che G è amenable, e questo è assurdo.

(2) \implies (3). Se G non soddisfa le condizioni di Følner significa che esistono un sottoinsieme finito $K_0 \subset G$ e un $\varepsilon_0 > 0$ tali che, per ogni sottoinsieme finito non vuoto $F \subset G$, si ha

$$\frac{|F \setminus k_0 F|}{|F|} \geq \varepsilon_0, \quad \text{per qualche } k_0 = k_0(F) \in K_0.$$

Consideriamo il sottoinsieme $K_1 := K_0 \cup \{1_G\}$. Sia F un sottoinsieme finito non vuoto di G . Risulta immediato che $K_1 F \setminus F = K_0 F \setminus F$. Perciò abbiamo che

$$|K_1 F| - |F| = |K_1 F \setminus F| = |K_0 F \setminus F| \geq |k_0 F \setminus F| = |F \setminus k_0 F| \geq \varepsilon_0 |F|,$$

che ci dà

$$|K_1 F| \geq (1 + \varepsilon_0) |F|.$$

Scegliamo ora $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $(1 + \varepsilon_0)^{n_0} \geq 2$ e l'insieme $K := K_1^{n_0}$. Allora abbiamo

$$|KF| = |K_1^{n_0} F| \geq (1 + \varepsilon_0) |K_1^{n_0-1} F| \geq \dots \geq (1 + \varepsilon_0)^{n_0} |F| \geq 2|F|,$$

per ogni sottoinsieme finito $F \subset G$. Consideriamo il grafo bipartito $\mathcal{G}_K(G) = (G, G, E)$ dove l'insieme $E \subset G \times G$ di vertici è composto da tutte le coppie (g, h) tali che $g \in G$ e $h \in Kg$. Vogliamo mostrare che $\mathcal{G}_K(G)$ soddisfa le condizioni di matching (1, 2)-perfetto. Se $F \subset G$ è finito, allora i suoi intorni nel grafo sono rispettivamente $\mathcal{N}_R(F) := KF$ e $\mathcal{N}_L(F) := K^{-1}F$. Perciò, mettendo insieme quanto visto sopra, abbiamo che

$$|\mathcal{N}_R(F)| = |KF| \geq 2|F|.$$

D'altra parte, se $k \in K$, allora $k^{-1}F \subset \mathcal{N}_L(F)$ è tale che

$$|\mathcal{N}_L(F)| \geq |k^{-1}F| = |F| \geq \frac{1}{2}|F|.$$

Abbiamo provato il nostro *claim*. Ora, in virtù del Teorema 3.10, deduciamo che esiste un matching $(1, 2)$ –perfetto. Equivalentemente, abbiamo mostrato che esiste una mappa suriettiva 2 a 1 $\phi : G \rightarrow G$ tale che $(\phi(g), g) \in E$, ovvero tale che $g(\phi(g))^{-1} \in K$ per ogni $g \in G$. Così concludiamo l'implicazione.

(5) \implies (7). Per l'assioma della scelta possiamo trovare due mappe $\psi_1, \psi_2 : G \rightarrow G$ tali che, per ogni $g \in G$, gli elementi $\psi_1(g)$ e $\psi_2(g)$ siano due preimmagini di g per ϕ . Osserviamo che, per ipotesi, $\theta_1(g) = \psi_1(g)g^{-1}$ e $\theta_2(g) = \psi_2(g)g^{-1}$ appartengono a L per ogni $g \in G$. Per ogni $\ell \in L$, definiamo A_ℓ e B_ℓ come

$$A_\ell := \{g \in G : \theta_1(g) = \ell\} \quad \text{e} \quad B_\ell := \{g \in G : \theta_2(g) = \ell\}.$$

Abbiamo

$$G = \sqcup_{\ell \in L} A_\ell = \sqcup_{\ell \in L} B_\ell, \quad (4.3)$$

dove utilizziamo da definizione del Ceccherini-Silberstein e Coomaert come dall'Osservazione 4.7. Osserviamo che, se $g \in A_\ell$, allora $\psi_1(g) = \ell g$. Perciò $\psi_1(G) = \sqcup_{\ell \in L} \ell A_\ell$. Analogamente abbiamo che $\psi_2(G) = \sqcup_{\ell \in L} \ell B_\ell$. Siccome $G = \psi_1(G) \sqcup \psi_2(G)$, deduciamo che

$$G = (\sqcup_{\ell \in L} \ell A_\ell) \sqcup (\sqcup_{\ell \in L} \ell B_\ell). \quad (4.4)$$

Mettendo insieme le due equazioni (4.3) e (4.4) otteniamo che $(L, (A_\ell)_{\ell \in L}, (B_\ell)_{\ell \in L})$ è una scomposizione paradossale di G .

(7) \implies (1). Sia $((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K})$ una scomposizione paradossale di G . Se per assurdo $\mu : \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ fosse una misura di probabilità invariante su G , allora avremmo

$$\begin{aligned} 1 = \mu(G) &= \mu((\sqcup_{h \in H} h A_h) \sqcup (\sqcup_{k \in K} k B_k)) = \sum_{h \in H} \mu(h A_h) + \sum_{k \in K} \mu(k B_k) \\ &= \sum_{h \in H} \mu(A_h) + \sum_{k \in K} \mu(B_k) = \mu(\sqcup_{h \in H} A_h) + \mu(\sqcup_{k \in K} B_k) = \mu(G) + \mu(G) = 2, \end{aligned}$$

il che è chiaramente assurdo. Dunque G non è amenable. \square

Capitolo 5

Applicazioni: alcuni celebri paradossi

I gruppi paradossali inducono azioni di gruppo paradossali. Un noto esempio di tali azioni è senz'altro il paradosso di Banach-Tarski.

Definizione 5.1 (Azione paradossale). Sia G un gruppo che agisce su un insieme X , $G \curvearrowright X$. Allora un sottoinsieme $Y \subset X$ è G -paradossale se ammette una decomposizione G -paradossale.

Una *decomposizione G -paradossale* è una coppia $((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K})$, dove $H, K \subset G$ sono finiti e $(A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K}$ sono famiglie di sottoinsiemi di Y , indicizzati rispettivamente da H e K , tali che

$$Y = (\sqcup_{h \in H} hA_h) \sqcup (\sqcup_{k \in K} kB_k) = \sqcup_{h \in H} A_h = \sqcup_{k \in K} B_k.$$

Osservazione 5.2. Come già mostrato nell'Osservazione 4.7 per i gruppi paradossali, si possono avere diverse definizioni tra loro equivalenti di azione di gruppo paradossale. Noi proponiamo la presente perché è questa che andremo a utilizzare.

Proposizione 5.3 (Gruppi paradossali inducono azioni di gruppo paradossali). *Sia G un gruppo paradossale che agisce liberamente su un insieme non vuoto X . Allora X è G -paradossale rispetto a tale azione.*

Dimostrazione. Sia $((A_h)_{h \in H}, (B_k)_{k \in K})$ una decomposizione paradossale di G . Usando l'assioma della scelta è possibile definire un insieme $R \subset X$ che contiene esattamente un elemento per ogni orbita di G . Allora si ha che $((A_h R)_{h \in H}, (B_k R)_{k \in K})$ è una decomposizione paradossale di X . Infatti gli insiemi della forma $A_h R$ sono disgiunti per ogni $h \in H$, in virtù del fatto che l'azione è libera e gli insiemi $(A_h)_{h \in H}$ sono tra loro disgiunti. Lo stesso vale per quelli della forma $B_k R$. Inoltre l'azione degli insiemi A_h su

R , facendo scorrere gli h in H , percorre tutte le orbite. Mettendo insieme queste due proprietà risulta chiaro che le due famiglie di insiemi trovate costituiscono due partizioni di X , ovvero $X = \sqcup_{h \in H} A_h R = \sqcup_{k \in K} B_k R$. Un ragionamento simile porta a concludere che $X = (\sqcup_{h \in H} h A_h R) \sqcup (\sqcup_{k \in K} k B_k R)$. \square

5.1 Il paradosso di Hausdorff

Abbiamo ora tutte le premesse, o quasi, per mostrare un primo risultato interessante, il paradosso di Hausdorff.

Per comprenderlo ricordiamo che $SO(3)$ agisce su \mathbb{R}^3 tramite moltiplicazione a sinistra. Tale azione è isometrica, per cui si può restringere a $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Inoltre $SO(3)$ contiene un sottogruppo libero di rango 2.

Proposizione 5.4. *Il sottogruppo del gruppo ortogonale $SO(3)$ generato da*

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

è libero di rango 2.

Dimostrazione. Osserviamo che, dal punto di vista geometrico, le due matrici corrispondono a due rotazioni di un angolo $\arccos \frac{1}{3}$ rispettivamente intorno all'asse z e all'asse x . Sia ora w una parola ridotta e non banale generata da $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Mostriamo che essa non può essere l'identità, il che equivale a dire che il sottogruppo di $SO(3)$ composto da elementi di tale forma è isomorfo a F_2 . Poichè vale

$$w = I \iff awa^{-1} = I \iff a^{-1}wa = I.$$

Dunque, senza perdita di generalità, possiamo assumere che w termini con a o a^{-1} . Sia per assurdo $w = I$. Allora $w(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Per induzione mostriamo invece che

$$w(1, 0, 0) = \left(\frac{x}{3^k}, \frac{y\sqrt{2}}{3^k}, \frac{z}{3^k} \right),$$

dove $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e k è un intero positivo e y non è divisibile per 3.

Il caso base: $w = a^{\pm 1}$. Allora

$$w(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}, 0 \right). \quad (5.1)$$

Ora supponiamo che $w = a^{\pm 1}w'$ o $w = b^{\pm 1}w'$, dove w' ha lunghezza $k-1$ e $w'(1, 0, 0) = \left(\frac{a'}{3^{k-1}}, \frac{b'\sqrt{2}}{3^{k-1}}, \frac{c'}{3^{k-1}} \right)$, con $x', y', z' \in \mathbb{Z}$. Consideriamo per esempio il caso $w = aw'$. Si ha

$$w(1, 0, 0) = \left(\frac{x'-4y'}{3^k}, \frac{(2x'+y')\sqrt{2}}{3^k}, \frac{3z'}{3^k} \right).$$

Per gli altri casi si ottengono risultati analoghi. Completiamo il ragionamento mostrando che b non è divisibile per 3, e dunque non può essere uguale a 0. Anche qui ci sono molteplici casi e possiamo procedere per induzione. Come caso base si può guardare al risultato (5.1). Ora, w può essere della forma $w = x^\pm y^\pm u$ oppure $w = y^\pm x^\pm u$ oppure $w = x^\pm x^\pm u$ o ancora $w = y^\pm y^\pm u$, dove u può essere la parola vuota. Per semplicità consideriamo solo il caso $w = aau$. Sia $u(1, 0, 0) = \left(\frac{x''}{3^{k-2}}, \frac{y''}{3^{k-2}}, \frac{z''}{3^{k-2}}\right)$, allora

$$\begin{aligned} w(1, 0, 0) &= a \left(\frac{x'' - 4y''}{3^{k-1}}, \frac{(2x'' + y'')\sqrt{2}}{3^{k-1}}, \frac{3z''}{3^{k-1}} \right) \\ &= x \left(\frac{x'}{3^{k-1}}, \frac{y'\sqrt{2}}{3^{k-1}}, \frac{z'}{3^{k-1}} \right) = \left(\frac{x' - 4y'}{3^k}, \frac{(2x' + y')\sqrt{2}}{3^k}, \frac{3z'}{3^k} \right) = \left(\frac{x}{3^k}, \frac{y\sqrt{2}}{3^k}, \frac{z}{3^k} \right). \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva y' non è divisibile per 3. Dunque neppure $y = 2x' + y' = 2(x'' - 4y'') + y' = (2x'' + y'') - 9y'' + y' = 2y' - 9y''$ può essere divisibile per 3. \square

Osservazione 5.5. La Proposizione 5.4 ci permette di affermare che il gruppo $SO(3)$ non è amenable, secondo quanto visto nella Proposizione 2.16.

Siamo pronti per studiare il paradosso di Hausdorff direttamente come corollario di questo fatto.

Corollario 5.6 (Paradosso di Hausdorff). *Esiste un insieme numerabile $D \subset S^2$ tale che $S^2 \setminus D$ è $SO(3)$ -paradossale rispetto all'azione di moltiplicazione $SO(3) \curvearrowright S^2$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.4 sappiamo che il gruppo $SO(3)$ contiene un sottogruppo libero di rango 2, che chiamiamo G . Tutte le matrici di $SO(3)$ agiscono su S^2 per rotazione attorno a un asse, perciò ogni elemento non banale g di $SO(3)$ ha esattamente due punti fissi, $x_{g,1}, x_{g,2}$, su S^2 . Perciò

$$D := \{gx_{g,j} | g \in G, j \in \{1, 2\}\} \subset S^2$$

è numerabile in quanto anche G lo è. Inoltre l'azione di $SO(3)$ su S^2 si restringe a un'azione di G su $S^2 \setminus D$. Tale azione è libera perché togliendo D abbiamo tolto tutti i punti fissi di G . Poiché il gruppo G è paradossale allora, per la Proposizione 5.3, anche $S^2 \setminus D$ è G -paradossale. Essendo $G \leq SO(3)$, allora $S^2 \setminus D$ è anche $SO(3)$ -paradossale. \square

5.2 Il paradosso di Banach-Tarski

Arriviamo ora al *clue* della tesi, il celebre paradosso di Banach-Tarski. Per mostrarlo abbiamo bisogno di estendere il Teorema di Tarski-Følner 4.10 alle azioni di gruppo amenabili. Enunciamo dunque il seguente fatto, omettendone la dimostrazione:

Teorema 5.7 ([3] Corollary 7.4). *Sia G un gruppo che agisce su un insieme X , $G \curvearrowright X$. Allora tale azione è amenable se e solo se essa non è G -paradossale.*

Possiamo infine enunciare e dimostrare il paradosso di Banach-Tarski.

Teorema 5.8 (Teorema di Banach-Tarski). *L'azione di moltiplicazione di $SO(3)$ su S^2 è $SO(3)$ -paradossale.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema 5.7 sappiamo che è sufficiente mostrare che $SO(3) \curvearrowright S^2$ non è un'azione amenable. Sappiamo che $SO(3)$ è un gruppo non amenable, dunque per la Proposizione 2.28 ci basta mostrare che l'azione $SO(3) \curvearrowright S^2$ abbia stabilizzatori amenabili. Ma l'azione è transitiva, ovvero esiste un'unica orbita, dal momento che ogni punto della sfera può essere mandato in un qualsiasi altro punto tramite una rotazione. Se un'azione è transitiva allora tutti gli stabilizzatori sono coniugati, dunque isomorfi. Notiamo inoltre che lo stabilizzatore di $e_1 = (1, 0, 0)$ è isomorfo a $SO(2)$, in quanto le rotazioni che fissano e_1 sono tutte e sole le rotazioni attorno all'asse x , ovvero esse coincidono con le rotazioni del piano $y - z$. Dato che $SO(2)$ è abeliano, esso è anche amenable per la Proposizione 2.27. Di conseguenza tutti gli stabilizzatori sono abeliani e dunque amenabili. Questo conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 5.9. Il paradosso si può generalizzare a ogni sfera in \mathbb{R}^n , con $n \geq 3$, e all'azione delle isometrie su tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n limitati con interno non vuoto [4, Theorem 17.12 e Corollary 17.13]. Moralmente il contenuto del paradosso è il seguente: una sfera S^2 può essere suddivisa in un numero finito di pezzi disgiunti, che possono essere riassemblati tramite rotazioni in due sfere identiche alla prima. Questo risultato ci permette di affermare che non esistono misure di probabilità finitamente additive definite su tutti i sottoinsiemi dello spazio euclideo tridimensionale che siano invarianti rispetto alle rotazioni. In particolare i sottoinsiemi coinvolti nella decomposizione paradossale della sfera non possono essere misurabili secondo la misura di Lebesgue. Se lo fossero, si contravverrebbe la non amenabilità dell'azione $SO(3) \curvearrowright S^2$, violando quanto mostrato nel teorema.

Osservazione 5.10. In questa sede non abbiamo trattato in maniera approfondita il nesso tra il paradosso di Banach-Tarski e l'assioma della scelta, ma va evidenziato che la costruzione che soggiace il paradosso dipende in modo cruciale da tale assioma.

Bibliografia

- [1] Tullio Ceccherini-Silberstein, Michel Coornaert: *Cellular Automata and Groups*. Second edition. Springer International Publishing: Cham, 2024.
- [2] Clara Löh: *Geometric Group Theory: An Introduction*. Springer International Publishing: Cham, 2017.
- [3] Francesco Fournier-Facio: *Amenability*, Dispensa, 2025. Disponibile all'url <https://www.fffmaths.com/amenability>
- [4] Cornelia Druțu and Michael Kapovich: *Geometric Group Theory*. Colloquium Publications, vol. 63, American Mathematical Society, 2018. With an appendix by Bogdan Nica.
- [5] Stefan Banach e Alfred Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta Mathematicae, vol. 6, 1924, pp. 244–277.
- [6] Felix Hausdorff: *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*. Mathematische Annalen, vol. 75, 1914, pp. 428–434.
- [7] John von Neumann: *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*. Fundamenta Mathematicae, vol. 13, 1929, pp.73-116.
- [8] Volker Runde: *Lectures on amenability*. Springer: Berlin, 2002.
- [9] Alfred Tarski: *Über die sogenannte paradoxe Zerlegung des Kreises*. Fundamenta Mathematicae, vol.29, 1938, pp. 161–172.
- [10] Alexander Yu. Ol'shanskii: *On the question of the existence of an invariant mean on a group*. Uspekhi Mat. Nauk, vol.35(4), 1980, pp. 199–200.
- [11] Erling Følner: *On groups with full Banach mean value*. Mathematica Scandinavica, vol.3, 1955, pp. 243–254.

