

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**SUL CALCOLO DI INDICI
DI CENTRALITÀ PER MODELLI
DI RETI COMPLESSE MULTISTRATO**

Tesi di Laurea in Analisi Numerica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
VALERIA SIMONCINI

Presentata da:
DAVIDE RIGHETTI

II Sessione
Anno Accademico 2024-2025

Indice

Introduzione	iii
1 Nozioni Preliminari	1
1.1 Richiami di analisi matriciale	1
1.2 Grafi	5
2 Esponenziale di Matrice	9
2.1 Funzioni di Matrice	9
2.1.1 Definizioni di $f(A)$	10
2.1.2 Proprietà di $f(A)$	13
2.2 Condizionamento	15
2.2.1 Numeri di Condizionamento	15
2.2.2 Derivata di Frechet	17
2.3 Esponenziale di Matrice	19
2.3.1 Proprietà di base	19
2.3.2 Metodo di scalatura e quadratura	20
3 Reti Complesse	21
3.1 Reti Multistrato	27
3.1.1 Evoluzione in tempi discreti	28
3.1.2 Centralità Marginali	30
4 Analisi di un esempio applicativo	33
4.1 La rete e la sua evoluzione	34

4.2	Analisi delle varie casistiche	38
4.2.1	Influenza Nodale tramite rappresentazione matriciale a blocchi	38
4.2.2	Influenza Nodale tramite Matrice di Comunicabilità Dinamica	39
4.2.3	Centralità Marginale Nodale	40
4.3	Conclusioni	42
	Bibliografia	46
	Ringraziamenti	47

Introduzione

In molti campi applicativi vengono studiate le interazioni tra le varie componenti di un sistema. È naturale rappresentare queste situazioni attraverso un modello di reti complesse, in cui i nodi rappresentano le componenti e gli archi individuano le interazioni. Alcuni esempi in tal senso riguardano:

- connessioni tra regioni neurologiche nel cervello;
- contatti tra individui infetti in epidemiologia;
- connessioni tra produttori di energia elettrica e consumatori;
- una rete stradale, in cui i nodi sono gli incroci e le strade sono gli archi;
- connessioni tra le pagine internet.

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare alcune misure di importanza dei nodi in una rete complessa, la quale, nella sua versione più semplice, può essere rappresentata matematicamente come un grafo non pesato e non orientato. Inizieremo quindi con un breve capitolo introduttivo in cui si richiamano le principali definizioni utili per lavorare con i grafi ed alcune funzioni di matrici ad essi associate. Infatti, le misure di cui ci occuperemo possono essere espresse in termini di funzioni di matrice (dove la quantità di interesse in questo caso è la matrice di adiacenza della rete stessa) per cui analizzeremo le loro principali proprietà, con particolare riguardo all'esponenziale di matrice.

In seguito introdurremo alcune misure che ben si prestano all'analisi di reti con un singolo strato per poi generalizzarle e adattarle a reti multistrato.

Infine analizzeremo un esempio di una rete che evolve a tempi discreti, un caso particolare di rete multistrato, per illustrare nella pratica l'utilizzo di tali misure.

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

1.1 Richiami di analisi matriciale

In questa tesi denotiamo con $\mathbb{R}^{n \times m}$ lo spazio delle matrici con n righe e m colonne e con \mathbb{R}^n lo spazio dei vettori colonna (a coefficienti reali, analogo per $\mathbb{C}^{n \times m}$ e \mathbb{C}^n). Indichiamo con A^T la matrice trasposta di A . Indichiamo con $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice identità di dimensioni $n \times n$ (o più semplicemente I qualora la dimensione sia chiara dal contesto).

Definizione 1.1. *Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica se $A = A^T$.*

Definizione 1.2. *Una matrice si dice sparsa se al più il 5-6% dei suoi coefficienti sono non nulli.*

Definizione 1.3 (Norma-p di un vettore). *Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e dato $p \in \mathbb{N}^*$ la sua norma-p è definita come*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad (1.1)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Per $p = 2$ nella Definizione 1.3 otteniamo la nota norma euclidea.

Definizione 1.4 (Norma di Matrice). *Una norma matriciale è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

1. $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = 0$;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (disuguaglianza triangolare);
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (submoltiplicabilità).

Se non vale la Proprietà 4 nella Definizione 1.4 si parla di *seminorma* o *norma generalizzata*.

Tra le norme di matrice, un ruolo importante è svolto dalle norme matriciali indotte da norme vettoriali:

$$\|A\|_p := \max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p. \quad (1.2)$$

In particolare, per una norma indotta valgono:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$;
- $\|I_n\| = 1$ (in generale per norme non indotte vale $\|I_n\| \geq 1$).

Esempio 1 (Norma infinito). Dato $x \in \mathbb{R}^n$ si definisce la sua norma infinito come:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|. \quad (1.3)$$

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definisce la sua norma infinito come:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.4)$$

Mostriamo che (1.4) è una norma matriciale indotta da (1.3). Vogliamo dimostrare che

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty.$$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|x\|_\infty = 1$. Allora:

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \stackrel{\|x\|_\infty=1}{\leq} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Sia \hat{i} tale che

$$\sum_{j=1}^n |a_{\hat{i}j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Scegliendo x in modo che $x_j = \text{sign}(a_{\hat{i}j})$ si vede che il massimo è effettivamente raggiunto.

Definizione 1.5 (Autovettori e Autovalori). *Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che valga*

$$Ax = \lambda x.$$

Allora che x è un autovettore di A e λ è il relativo autovalore. La coppia (λ, x) si dice anche autocoppia di A .

Osservazione 1. A è singolare se e solo se 0 è un suo autovalore.

Lemma 1.1. *Sia $\|\cdot\|$ una norma matriciale indotta e sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\|A\| < 1$. Allora $I + A$ è non singolare.*

Dimostrazione. Sia (λ, x) una autocoppia di A , cioè $Ax = \lambda x$ e $x \neq 0$. Allora

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

per cui, dividendo per $\|x\| \neq 0$ si ha che

$$|\lambda| \leq \|A\| < 1.$$

Pertanto $1 + \lambda \neq 0$ e quindi $I + A$ è non singolare perchè i suoi autovalori sono tutti non nulli. \square

Osservazione 2. A priori, anche se una matrice ha tutti coefficienti reali, i suoi autovalori sono complessi.

Definizione 1.6 (Spettro). *Chiamiamo spettro di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ l'insieme degli autovalori di A :*

$$\text{Spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \text{ t.c. } Ax = \lambda x\}.$$

Definizione 1.7 (Raggio Spettrale). *Chiamiamo raggio spettrale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la quantità*

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|.$$

Definizione 1.8 (Matrice Diagonalizzabile). *Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, ossia se esistono $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile tali che $AX = X\Lambda$. In tal caso gli elementi diagonali di Λ sono gli autovalori di A e le colonne di X sono i relativi autovettori.*

Definizione 1.9 (Matrice Ortogonale). *Una matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice ortogonale se $XX^T = X^T X = I$.*

Teorema 1.1 (Teorema Spettrale). *Sia data una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A ha tutti autovalori reali ed è ortogonalmente diagonalizzabile, ossia esiste una matrice ortogonale $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tali che $A = X\Lambda X^T$.*

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili, però ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ può essere fattorizzata in forma canonica di Jordan:

$$Z^{-1}AZ = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p), \quad (1.5a)$$

$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k} \quad (1.5b)$$

con Z invertibile e $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$. La matrice di Jordan J è unica a meno di riordinare i blocchi J_i , ma la matrice di cambio base Z non è unica.

Denotiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti di A e con n_i l'ordine del più grande blocco in cui compare λ_i (lo chiameremo *indice* di λ_i).

Nel prossimo capitolo ci tornerà utile la seguente definizione.

Definizione 1.10. Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice e sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di una variabile. f si dice definita sullo spettro di A se i valori $f^{(j)}(\lambda_i)$ per $j = 0, \dots, n_i - 1$ e $i = 1, \dots, s$ esistono. Questi sono detti i valori della funzione f sullo spettro di A .

Definizione 1.11 (Polinomio Minimo). Il polinomio minimo φ_A di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è il polinomio monico di grado minimo tale che $\varphi_A(A) = 0$.

È facile vedere che

$$\varphi_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{n_i},$$

dove come prima $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sono gli autovalori distinti di A e n_i è la dimensione del più grande blocco di Jordan in cui compare λ_i . Segue immediatamente che φ_A è nullo sullo spettro di A .

1.2 Grafi

Definizione 1.12 (Grafo). Un grafo (orientato) G è una coppia di insiemi (V, E) dove V è un insieme finito di nodi (o vertici) ed $E \subset V \times V$ è un insieme di archi che connettono coppie di nodi.

Un grafo $G = (V, E)$ si dice *non orientato* se per ogni arco $(v_i, v_j) \in E$ anche $(v_j, v_i) \in E$. Si dice *pesato* se a ogni arco è associato un numero reale (chiamato *peso*) tramite una funzione $p : E \rightarrow \mathbb{R}$. Un grafo *non pesato* è un grafo pesato in cui il peso di ogni arco è 1.

In questo lavoro considereremo solo grafi non orientati e non pesati.

Dato un arco $e_{ij} = (v_i, v_j)$, v_i e v_j sono gli *estremi* dell'arco. Chiamiamo v_i *nodo di partenza* e v_j *nodo di arrivo*. Diciamo anche che e_{ij} è *incidente* ai nodi v_i e v_j .

Due nodi sono detti *adiacenti* se sono connessi da un arco.

Chiamiamo *cappio* un arco i cui estremi coincidono. Considereremo grafi senza cappi.

Definizione 1.13 (Cammino). *Un cammino (di lunghezza n) è una sequenza ordinata di nodi $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$, non necessariamente distinti, tale che ogni nodo è adiacente al precedente e/o successivo.*

Un cammino si dice *semplice* se i suoi nodi sono distinti.

Diciamo che due nodi sono *collegati* se esiste un cammino tra essi.

Definizione 1.14 (Cammino Chiuso). *Un cammino chiuso è un cammino in cui il primo e ultimo nodo coincidono.*

Un cammino chiuso si dice *ciclo* se i suoi nodi sono distinti (con l'unica eccezione che $v_{i_0} = v_{i_n}$).

Definizione 1.15 (Distanza tra due nodi). *Dati due nodi v_i e v_j collegati da (almeno) un cammino, chiamiamo distanza tra v_i e v_j la lunghezza del cammino più corto tra essi.*

Definizione 1.16 (Grafo Connesso). *Un grafo si dice connesso se ogni coppia di nodi può essere collegata da un cammino.*

Definizione 1.17 (Grado di un nodo). *In un grafo non orientato il grado di un nodo v è il numero di archi incidenti a v , o equivalentemente il numero di nodi adiacenti a v .*

Indichiamo con $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ l'insieme dei nodi e denotiamo con $d(v_i)$, \deg_i o più semplicemente d_i il grado del nodo v_i .

Definizione 1.18 (Matrice di Adiacenza - Contesto Generale). *La matrice di adiacenza $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ di un grafo $G = (V, E)$ con N nodi è una matrice di dimensioni $N \times N$ definita da:*

$$a_{ij} = \begin{cases} p(e_{ij}) & \text{se } e_{ij} \in E, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.6)$$

dove $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione dei pesi definita in precedenza.

Dal momento che in questo lavoro considereremo grafi non pesati, i coefficienti della matrice di adiacenza assumeranno esclusivamente i valori 0 e 1. Inoltre, trattandosi di grafi non orientati, A sarà simmetrica. Infine, sotto l'ipotesi di assenza di cappi, avremo che $a_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$.

Definizione 1.19 (Grafo Completo). *Un grafo completo è un grafo non orientato, non pesato e senza cappi in cui tutti i nodi sono collegati tra loro.*

Indichiamo con $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$ il vettore di tutti 1.

Dalla Definizione 1.19 segue immediatamente il seguente risultato.

Lemma 1.2. *La matrice di adiacenza di un grafo completo con N nodi è*

$$\mathbb{1}\mathbb{1}^T - I = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $J = \mathbb{1}\mathbb{1}^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ è la matrice di tutti uni e $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ è la matrice identità.

La matrice di adiacenza può essere usata per ottenere il grado del nodo v_i :

$$\deg_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} = (A\mathbb{1})_i.$$

Inoltre, sfruttando la matrice di adiacenza, possiamo anche dare una definizione alternativa (ed equivalente a Definizione 1.13) di *cammino* tra due nodi: un cammino (di lunghezza n) è una sequenza ordinata di nodi $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$, non necessariamente distinti, tale che $a_{i_0 i_1} = a_{i_1 i_2} = \cdots = a_{i_{n-1} i_n} = 1$.

Se $a_{ij} = 1$ allora la distanza tra v_i e v_j è 1, mentre se $a_{ij} = 0$ allora la distanza tra v_i e v_j è maggiore (e finita nel caso di grafi connessi).

Osserviamo anche che il grado di un nodo v_i conta il numero di cammini chiusi di lunghezza 2 contenenti il nodo v_i e che $\deg_i = (A^2)_{ii}$, infatti la quantità

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj},$$

conta i nodi intermedi collegati sia a v_i sia a v_j (il prodotto $a_{ik}a_{kj}$ è uguale a 1 se e solo se ci sono sia un collegamento tra v_i e v_k sia un collegamento tra v_k e v_j).

Queste osservazioni possono essere generalizzate per le potenze di ordine $m > 2$ della matrice di adiacenza e le riassumiamo nel seguente teorema.

Teorema 1.2. *Le quantità $(A^m)_{ij}$ contano il numero di cammini di lunghezza m tra i nodi v_i e v_j .*

Nei prossimi capitoli, per semplificare la notazione, ci riferiremo al vertice v_i semplicemente come ad i dovunque questo non crei confusione.

Capitolo 2

Esponenziale di Matrice

2.1 Funzioni di Matrice

Le funzioni di matrice sono state studiate fin dalla nascita dell'algebra delle matrici. Dalla loro origine nella matematica pura, sono diventate un argomento di studio nella matematica applicata (con applicazioni diffuse nelle scienze e nell'ingegneria). La ricerca sulle funzioni di matrice coinvolge algebra lineare, analisi numerica, teoria dell'approssimazione e lo sviluppo di algoritmi specifici, dunque promuove un apprezzamento per tutti questi temi.

Il termine “funzione di matrice” può avere significati differenti. Noi siamo interessati in una definizione che presa una funzione scalare f e una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ restituisca una matrice $f(A)$ delle stesse dimensioni di A . Vogliamo inoltre che questo venga fatto in un modo che fornisca una utile generalizzazione delle funzioni scalari $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Un'altra interpretazione potrebbe essere quella di calcolare f su ogni elemento di A , oppure di definire funzioni che restituiscano uno scalare come ad esempio il numero di condizionamento $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Quando $f(t)$ è un polinomio o una funzione razionale con coefficienti e argomento scalari, è naturale definire $f(A)$ sostituendo A a t (dove al posto delle divisioni vengono effettuate inversioni di matrici, a patto che le matrici da invertire siano non singolari) e un argomento analogo può essere usato quando f ha uno sviluppo in serie di potenze convergente.

2.1.1 Definizioni di $f(A)$

Ci sono diversi modi per definire $f(A)$. I tre principali sfruttano la forma canonica di Jordan, l'interpolazione polinomiale e la formula integrale di Cauchy (un risultato di analisi complessa). Si può dimostrare che sono tutti equivalenti e ognuno ha le sue caratteristiche che possono tornare utili in differenti ambiti (si veda il primo capitolo di [1]). Per quanto riguarda i primi due, è importante notare che nella definizione ciò che viene realmente utilizzato sono i valori che assume f (e le sue derivate) sullo spettro di A , mentre per quanto riguarda la definizione mediante integrali complessi sarà necessario che f sia analitica sull'area racchiusa all'interno di un'opportuna curva.

Vediamo di seguito i primi due modi menzionati.

Forma Canonica di Jordan

In molti casi di interesse pratico f è data da una formula, ma per la prossima definizione di $f(A)$ ci servono solo i valori di f sullo spettro di A (Definizione 1.10).

Definizione 2.1 (Funzione di Matrice tramite Forma Canonica di Jordan). *Sia f definita sullo spettro di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e A con forma canonica di Jordan come in (1.5). Allora*

$$f(A) := Zf(J)Z^{-1} = Z \operatorname{diag}(f(J_k))Z^{-1}, \quad (2.1)$$

dove

$$f(J_k) := \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \frac{f^{m_k-1}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \cdots & \vdots \\ & & \cdots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Esempio 2. Per il blocco di Jordan $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $f(x) = x^3$, la Definizione 2.1 fornisce

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2}) \\ 0 & f(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = J^3.$$

Osservazione 3. La definizione è indipendente dalla particolare forma canonica utilizzata. Infatti, supponiamo che $A = XJX^{-1} = YJY^{-1}$ (possiamo assumere che J sia la stessa in entrambi i casi, altrimenti includiamo in Y una matrice di permutazione) e mostriamo che $Xf(J)X^{-1} = Yf(J)Y^{-1}$, ossia che $Zf(J)Z^{-1} = f(J)$ dove $Z = Y^{-1}X$. Dalla nostra ipotesi segue $ZJZ^{-1} = J$ per cui $f(J) = f(ZJZ^{-1}) = Zf(J)Z^{-1}$ dove l'ultima uguaglianza segue dalla Definizione 2.1.

Osservazione 4. Se A è diagonalizzabile, la forma canonica di Jordan di A si riduce ad $A = ZDZ^{-1}$ con $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ per cui la Definizione 2.1 fornisce $f(A) = Zf(D)Z^{-1} = Z\text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))Z^{-1}$, quindi $f(A)$ ha gli stessi autovettori di A e gli autovalori si ottengono applicando f a quelli di A .

Osservazione 5. Notiamo che la 2.2 può essere ottenuta da considerazioni sulla serie di Taylor. Scriviamo $J_k = \lambda_k I + N_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ dove N_k è la matrice nilpotente in forma canonica di Jordan di ordine m_k . Ad esempio se $m_k = 3$ abbiamo

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3^3 = 0.$$

In generale N_k^n sposta la sopradiagonale di $n - 1$ verso l'angolo in alto a destra.

Se f ha uno sviluppo in serie di potenze convergente

$$f(t) = f(\lambda_k) + f'(\lambda_k)(t - \lambda_k) + \dots + \frac{f^{(j)}(\lambda_k)(t - \lambda_k)^j}{j!} + \dots,$$

sostituendo J_k al posto di t e ricordando che $J_k - \lambda_k I = N_k$ otteniamo la somma finita

$$f(t) = f(\lambda_k)I + f'(\lambda_k)N_k + \dots + \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)N_k^{m_k-1}}{(m_k - 1)!}.$$

Questa espressione coincide con 2.2.

Osservazione 6. La Definizione 2.1 richiede che i valori di f sullo spettro di A siano ben definiti e nel caso di multifunzioni (come ad esempio le radici di indice pari o il logaritmo) deve essere scelto un singolo ramo, che deve essere lo stesso in ogni blocco (se lo stesso autovalore compare in più blocchi). Se quest'ultima

condizione non è rispettata si ottiene una funzione di matrici cosiddetta “non primaria”.

Interpolazione polinomiale

Per ogni $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e per ogni $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ è ovvio che $p(A)$ è definita sostituendo A a t e che p è definito sullo spettro di A . Il nostro interesse nei polinomi sta nel fatto che i valori di p sullo spettro di A determinano $p(A)$.

Teorema 2.1. *Siano p, q polinomi e $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $p(A) = q(A)$ se e solo se p e q hanno gli stessi valori sullo spettro di A .*

Dimostrazione. Supponiamo che $p(A) = q(A)$ e sia $d = p - q$. Allora $d(A) = 0$, per cui d è divisibile per φ_A . Quindi d assume solo il valore 0 sullo spettro di A . Segue che p e q assumono gli stessi valori sullo spettro di A .

Viceversa, supponiamo che p e q assumano gli stessi valori sullo spettro di A . Allora $d = p - q = 0$ sullo spettro di A e quindi deve essere divisibile per φ_A (poichè λ_k è radice di molteplicità $n_k \dots$). Dunque $d = \varphi_A r$ per qualche r , per cui $d(A) = \varphi_A(A)r(A) = 0$ e quindi $p(A) = q(A)$. \square

È quindi una proprietà dei polinomi che la matrice $p(A)$ sia determinata dai valori di p sullo spettro di A . Generalizziamo questa proprietà a funzioni f arbitrarie definendo $f(A)$ in un modo tale per cui sia completamente determinata dai valori di f sullo spettro di A .

Definizione 2.2. *Sia f definita sullo spettro di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e sia φ_A il polinomio minimo di A . Allora $f(A) := p(A)$ dove p è il polinomio di grado minore di $\sum_{i=1}^s n_i = \deg(\varphi_A)$ che soddisfa le condizioni di interpolazione*

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$$

per ogni $j = 0, \dots, n_i - 1$ e per ogni $i = 1, \dots, s$.

Esempio 3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \sqrt{t}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (2-t)(3-t) - 2 = (t-4)(t-1)$, per cui A ha autovalori $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ con molteplicità $n_1 = n_2 = 1$. Consideriamo il ramo principale della radice quadrata (quello positivo). Le condizioni di interpolazione sono $p(1) = f(1) = 1, p(4) = f(4) = 2$ per cui

$$p(t) = f(1) \frac{t-4}{1-4} + f(4) \frac{t-1}{4-1} = \frac{1}{3}(t-2).$$

Dunque

$$f(A) := p(A) = \frac{1}{3}(A + 2I) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che $f(A)^2 = A$.

Osservazione 7. Il polinomio p della Definizione 2.2 dipende da A (tramite i valori di f sullo spettro di A).

Osservazione 8. Se f è data come serie di potenze, la Definizione 2.2 ci dice che $f(A)$ è comunque esprimibile come un polinomio in A di grado al massimo $n-1$ (si può arrivare alla stessa conclusione anche sfruttando il teorema di Cayley-Hamilton per osservare che ogni potenza di A di ordine maggiore o uguale a n si può esprimere come potenza di A di ordine minore di n).

Si può dimostrare che le due definizioni date sono equivalenti (si veda [1]).

2.1.2 Proprietà di $f(A)$

Elenchiamo qualche proprietà che segue dalla definizione di $f(A)$.

Teorema 2.2. *Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e f definita sullo spettro di A . Allora:*

1. $f(A)$ commuta con A ;
2. $f(A^T) = (f(A))^T$;
3. $f(XAX^{-1}) = Xf(A)X^{-1}$;
4. Se λ_i sono gli autovalori di A , allora $f(\lambda_i)$ sono gli autovalori di $f(A)$;
5. Se X commuta con A allora X commuta anche con $f(A)$;

6. Se $A = (A_{i,j})$ è triangolare a blocchi allora $F = f(A)$ è triangolare a blocchi con la stessa struttura di A e $F_{i,i} = f(A_{i,i})$
7. Se $A = \text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{m,m})$ è diagonale a blocchi allora $f(A) = \text{diag}(f(A_{1,1}), \dots, f(A_{m,m}))$.

Teorema 2.3. *Con le stesse notazioni usate fino ad ora, $f(A) = g(A)$ se e solo se f e g assumono gli stessi valori sullo spettro di A .*

Osservazione 9. Per i polinomi sostituire la matrice A al posto dell'indeterminata t è valido e le dimostrazioni di molti risultati si riconducono a questo fatto.

Teorema 2.4. *Siano f, g definite sullo spettro di A .*

1. Se $h(t) = f(t) + g(t)$ allora $h(A) = f(A) + g(A)$.
2. Se $h(t) = f(t)g(t)$ allora $h(A) = f(A)g(A)$.

Inoltre le realizzazioni funzionali scalari di natura polinomiale sono preservate dalle funzioni di matrici. Ad esempio $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I$ oppure $e^{iA} = \cos(A) + i \sin(A)$. Però generalizzazioni che riguardano due o più matrici che non commutano potrebbero non essere vere, ad esempio e^{A+B} , $e^A e^B$ ed $e^B e^A$ sono in genere differenti se $AB \neq BA$.

Il seguente teorema ci sarà utile per avere una definizione operativa dell'esponenziale di matrice.

Teorema 2.5. *Supponiamo che f abbia uno sviluppo in serie di potenze convergente*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \alpha)^k$$

con punto iniziale α e raggio di convergenza R . Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e ogni autovalore λ_i di A soddisfa $|\lambda_i - \alpha| < R$ allora $f(A)$ è definita ed è data da

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - \alpha I)^k.$$

2.2 Condizionamento

Nella pratica molti dati sono inesatti o incerti e i calcoli con i dati esatti sono soggetti a errori di arrotondamento (che possono essere interpretati come perturbazioni nei dati). È quindi importante capire la sensibilità (delle funzioni di matrici nel nostro caso) di un problema rispetto alle perturbazioni nei dati. La sensibilità è misurata dai numeri di condizionamento, i quali sono strettamente legati alla derivata di Frechet.

2.2.1 Numeri di Condizionamento

Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un dato x e di voler calcolare $f(x)$. Se abbiamo $\bar{x} \approx x$, quanto $\bar{y} = f(\bar{x})$ è vicino a y ?

Definizione 2.3. Diciamo che \bar{y} è vicino a y in senso assoluto se

$$|\bar{y} - y| \approx C_f(x)|\bar{x} - x|,$$

dove $C_f(x) \in \mathbb{R}$ è detto numero di condizionamento assoluto di f in x .

Se f è sufficientemente regolare, in prima approssimazione si ha

$$\bar{y} - y = f(\bar{x}) - f(x) = \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x}(\bar{x} - x) \approx f'(x)(\bar{x} - x),$$

per cui $C_f(x) \approx |f'(x)|$.

Definizione 2.4. Diciamo che \bar{y} è vicino a y in senso relativo se

$$\frac{|\bar{y} - y|}{|y|} \approx K_f(x) \frac{|\bar{x} - x|}{|x|},$$

dove $K_f(x) \in \mathbb{R}$ è detto numero di condizionamento relativo di f in x .

Con passaggi analoghi a quelli svolti prima, se f è sufficientemente regolare si trova $K_f(x) \approx \frac{|f'(x)x|}{|f(x)|} = C_f(x) \frac{|x|}{|f(x)|}$.

Osserviamo che $K_f(x)$ tiene conto dell'ordine di grandezza dei dati.

Diremo che un problema è *ben posto in senso assoluto (relativo)* se $C_f(x)$ ($K_f(x)$) è moderato (ha lo stesso ordine di grandezza delle unità).

Più rigorosamente si può definire il numero di condizionamento relativo di f nel punto x come

$$\text{cond}_{\text{rel}}(f, x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|\Delta x| \leq \epsilon |x|} \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\epsilon f(x)} \right|, \quad (2.3)$$

che misura di quanto, al massimo, i piccoli cambiamenti nei dati possono essere amplificati nel valore della funzione (entrambe le variazioni sono misurate in senso relativo).

Assumendo sempre che f sia sufficientemente regolare abbiamo

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Da cui

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} = \left[\frac{f'(x)x}{f(x)} \right] \Delta x \frac{1}{x} + o(\Delta x).$$

Facendo infine il limite e applicando il sup:

$$\text{cond}_{\text{rel}}(f, x) = \left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right| \quad (2.4)$$

La definizione in (2.3) si estende alle funzioni di matrici $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\text{cond}_{\text{rel}}(f, X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|E\| \leq \epsilon \|X\|} \frac{\|f(X + E) - f(X)\|}{\epsilon \|f(X)\|} \quad (2.5)$$

Da (2.5) segue che

$$\frac{\|f(X + E) - f(X)\|}{\|f(X)\|} \leq \text{cond}_{\text{rel}}(f, X) \frac{\|E\|}{\|X\|} + o(\|E\|),$$

e quindi abbiamo una stima dell'errore dovuto alla perturbazione dei dati (E è la matrice di perturbazione).

Analogamente possiamo definire il numero di condizionamento assoluto:

$$\text{cond}_{\text{abs}}(f, X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|E\| \leq \epsilon} \frac{\|f(X + E) - f(X)\|}{\epsilon} \quad (2.6)$$

Osservazione 10. I numeri di condizionamento relativo e assoluto differiscono solo per una costante moltiplicativa:

$$\text{cond}_{\text{rel}}(f, X) = \text{cond}_{\text{abs}}(f, X) \frac{\|X\|}{\|f(X)\|}. \quad (2.7)$$

Solitamente siamo interessati al numero di condizionamento relativo, ma è più conveniente enunciare i risultati per il numero di condizionamento assoluto.

2.2.2 Derivata di Frechet

Per ottenere un'espressione analoga a (2.4) abbiamo bisogno di una definizione appropriata di derivata per funzioni di matrici.

Definizione 2.5 (derivata di Frechet). *La derivata di Frechet di una funzione di matrici $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ in un punto $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è una funzione lineare*

$$\begin{aligned} L_f(X, \cdot) : \mathbb{C}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ E &\mapsto L_f(X, E) \end{aligned}$$

tale che per ogni $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valga

$$f(X + E) - f(X) = L_f(X, E) + o(\|E\|). \quad (2.8)$$

La notazione $L_f(X, E)$ può essere letta come “la derivata di Frechet di f in X nella direzione E ”. Se ci vogliamo riferire alla “funzione” in X e non al suo valore in una particolare direzione scriviamo $L_f(X)$. Nel caso in cui $n = 1$ abbiamo banalmente $L_f(x, e) = f'(x)e$. Quest'ultimo fatto si può generalizzare: se X ed E commutano allora $L_f(X, E) = f'(X)E = Ef'(X)$.

Osservazione 11. La derivata di Frechet potrebbe non esistere, ma se esiste è unica.

Dimostrazione. Supponiamo che L_f e M_f siano derivate di Frechet di f . Da (2.8) si ha

$$L_f(X, E) + o(\|E\|) = f(X + E) - f(X) = M_f(X, E) + o(\|E\|)$$

per ogni $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$, per cui

$$L_f(X, E) - M_f(X, E) = o(\|E\|).$$

Fissato E , per linearità di L_f e M_f si ha che per ogni $t > 0$

$$L_f(X, tE) - M_f(X, tE) = t[L_f(X, E) - M_f(X, E)] = o(t\|E\|)$$

e quindi

$$L_f(X, E) - M_f(X, E) = \frac{o(t\|E\|)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

$$\Rightarrow L_f(X, E) = M_f(X, E).$$

Dall'arbitrarietà di E segue l'unicità. \square

Il nostro interesse nella derivata di Frechet sta nel fatto che i numeri di condizionamento assoluto e relativo possono essere espressi in funzione della norma di $L_f(X)$, la quale è definita da

$$\|L_f(X)\| := \max_{\|E\| \neq 0} \frac{\|L_f(X, E)\|}{\|E\|} = \max_{\|E\|=1} \|L_f(X, E)\|. \quad (2.9)$$

Teorema 2.6 (Rice). *Il numero di condizionamento assoluto è dato da*

$$\text{cond}_{\text{abs}}(f, X) = \|L_f(X)\| \quad (2.10)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \text{cond}_{\text{abs}}(f, X) &\stackrel{(2.6)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|E\| \leq \epsilon} \frac{\|f(X+E) - f(X)\|}{\epsilon} \\ &\stackrel{\text{def di } L_f}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|E\| \leq \epsilon} \left\| \frac{L_f(X, E) + o(\|E\|)}{\epsilon} \right\| \\ &\stackrel{\text{linearità di } L_f}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|E\| \leq \epsilon} \left\| L_f\left(X, \frac{E}{\epsilon}\right) + \frac{o(\|E\|)}{\epsilon} \right\| \\ &\stackrel{Z := \frac{E}{\epsilon} \Rightarrow \|Z\| \leq 1}{=} \sup_{\|Z\| \leq 1} \|L_f(X, Z)\| \\ &\stackrel{\frac{o(\|E\|)}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0}{=} \sup_{\|Z\| \leq 1} \|L_f(X, Z)\| \\ &\stackrel{(2.9)}{=} \|L_f(X)\|. \end{aligned}$$

\square

Da (2.7) e dal Teorema 2.6 segue che

$$\text{cond}_{\text{rel}}(f, X) = \frac{\|L_f(X)\| \|X\|}{\|f(X)\|} \quad (2.11)$$

Esempio 4. Sia $f(X) = X^2$. Allora

$$\begin{aligned} f(X+E) - f(X) &= X^2 + XE + EX + E^2 - X^2 \\ &\stackrel{E^2 = o(\|E\|)}{=} XE + EX + o(\|E\|) \end{aligned}$$

Segue che $L_f(X, E) = XE + EX$ e quindi

$$\|L_f(X, E)\| = \max_{\|E\|=1} \|XE + EX\| \leq \max_{\|E\| \leq 1} (\|X\| \|E\| + \|E\| \|X\|) = 2 \|X\|$$

Al contrario dell'ultimo esempio, di solito non è così immediato ottenere una formula esplicita per L_f .

2.3 Esponenziale di Matrice

L'esponenziale di matrice è la funzione di matrici più studiata. La sua importanza deriva dal suo ruolo centrale nella risoluzione delle equazioni differenziali e, più recentemente, dal suo ruolo nell'analisi di reti complesse.

2.3.1 Proprietà di base

Poichè la serie di Taylor con punto iniziale $c = 0$ della funzione esponenziale $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ ha raggio di convergenza $R = \infty$, in virtù del Teorema 2.5, l'esponenziale di matrice è definita da

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \quad (2.12)$$

Osserviamo che se $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ commutano, allora $e^{A+B} = e^A e^B$ (questa è una condizione sufficiente ma non necessaria).

Differenziando termine a termine in (2.12) otteniamo

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (2.13)$$

Teorema 2.7. *Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Per ogni norma matriciale indotta vale*

$$e^{-\|A\|} \leq \|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Dimostrazione. Usando (2.12) e la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}.$$

Per dimostrare la prima disuguaglianza osserviamo che $I = e^A e^{-A}$, $\|I\| = 1$ (vale l'uguaglianza perchè la norma è indotta) e per quanto appena dimostrato $\|e^{-A}\| \leq e^{-\|A\|} = e^{\|A\|}$, dunque

$$1 = \|e^A e^{-A}\| \leq \|e^A\| \|e^{-A}\| \leq \|e^A\| e^{\|A\|}$$

da cui $\|e^A\| \geq e^{-\|A\|}$. □

2.3.2 Metodo di scalatura e quadratura

Sono stati proposti numerosi metodi per calcolare e^A (vedi [2]) ma molti di questi sono inutilizzabili.

Potremmo inizialmente pensare di utilizzare uno sviluppo di Taylor troncato ad un opportuno ordine. Sfortunatamente questo approccio non è computazionalmente efficiente, a meno che la matrice di cui si vuole calcolare l'esponenziale abbia norma minore di 1.

Un secondo tentativo è di sfruttare le funzioni razionali (approssimanti di Padè): come gli approssimanti di Taylor, si comportano bene soltanto per matrici con norma nell'ordine delle unità, ma rispetto a questi ultimi permettono di ottenere un'accuratezza fissata con costo computazionale inferiore, dunque sono da preferirsi. Un approssimante di Padè di una generica funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è del tipo

$$r_{k,m}(x) = \frac{p_{k,m}(x)}{q_{k,m}(x)}$$

dove $p_{k,m}$ e $q_{k,m}$ sono polinomi di grado rispettivamente k e m che soddisfano la relazione $f(x) - r_{k,m}(x) = O(x^{k+m+1})$. Per quanto riguarda l'esponenziale questi polinomi sono noti per ogni grado di numeratore e denominatore.

Il metodo di scalatura e quadratura sfrutta la relazione $e^A = (e^{A/\sigma})^\sigma$ per matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\sigma \in \mathbb{C}$ assieme a quanto detto per le approssimazioni di Padè. L'idea è di scegliere come σ una potenza di 2 tale per cui la norma di A/σ sia dell'ordine delle unità. A questo punto si sfrutta il fatto che gli approssimanti di Padè siano validi per matrici di norma vicino a 1 e quindi si calcola $e^{A/\sigma} \approx r_{k,m}(A/\sigma)$. Infine $e^A \approx r_{k,m}(A/\sigma)^\sigma$ è ottenuta elevando ripetutamente al quadrato la matrice ottenuta dalla scalatura. L'algoritmo che si ottiene in questo modo è uno dei migliori al momento conosciuti, e per una trattazione completa si rimanda il lettore interessato a [1]. Questo è anche il metodo usato dalla funzione `expm` in MATLAB.

Capitolo 3

Reti Complesse

Come già accennato nell'introduzione, vediamo una rete come un grafo non pesato e non orientato. Indichiamo con n il numero di nodi del grafo e consideriamo la matrice di adiacenza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Definizione 1.18), caratterizzata dall'avere un 1 nelle entrate corrispondenti ai collegamenti tra i nodi e 0 altrove. Ricordiamo che poichè stiamo considerando un grafo non orientato, A è simmetrica. Supponiamo anche che non ci siano cappi, ossia che $a_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Siamo interessati a definire un concetto di *centralità* (importanza) dei nodi. La misura più semplice, introdotta da Freeman ([3]), è data dal grado (Definizione 1.17) e come già visto conta il numero di archi che coinvolgono il nodo in esame.

Ricordiamo che il grado conta i cammini chiusi di lunghezza 2 contenenti il nodo stesso, ma non tiene in considerazione tutti gli altri collegamenti. La Figura 3.1 mostra un semplice esempio in cui due nodi (i numeri 3 e 4) hanno lo stesso grado ma la cui importanza è chiaramente diversa. Cerchiamo quindi delle misure che tengano conto anche dei nodi più lontani.

Per il Teorema 1.2 le quantità $(A^m)_{ij}$ contano il numero di cammini di lunghezza m tra i nodi i e j .

È logico attribuire più importanza ad un nodo quanti più saranno i cammini chiusi (di ogni lunghezza) che si possono creare a partire da quel nodo. È

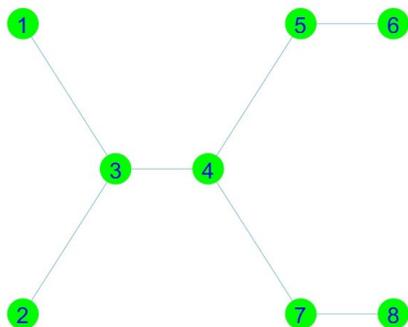


Figura 3.1: Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

anche ragionevole valorizzare maggiormente i cammini corti (le informazioni passano da un nodo ad un altro tanto più velocemente quanto più il cammino che li collega è breve). Consideriamo ad esempio il nodo i . L'idea è quella di considerare una somma pesata di tutti i cammini chiusi di lunghezza arbitraria contenenti tale nodo:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k (A^k)_{ii}.$$

Poichè $A^0 = I$ e visto che $a_{jj} = 0$ per ogni nodo j , possiamo aggiungere anche gli addendi per $k = 0, 1$ ottenendo, sempre in riferimento al nodo i ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (A^k)_{ii} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \right)_{ii}.$$

Quest'ultima espressione può essere vista, a patto di scegliere i coefficienti c_k in modo tale che la somma converga, come lo sviluppo in serie di una funzione di matrice (di cui poi considereremo solo gli elementi diagonali). Estrada e Rodríguez-Velázquez ([4]) hanno proposto di penalizzare i cammini di lunghezza k con $c_k = 1/(k!)$. Tale scelta conduce direttamente all'esponenziale di matrice (vedi (2.12)).

Definizione 3.1 (Indice di Centralità Esponenziale). *Chiamiamo indice di centralità esponenziale del nodo i la quantità*

$$\exp(A)_{ii}.$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per coppie di nodi distinti i e j , e quantificare la facilità con cui le informazioni si trasmettono tra essi.

Definizione 3.2 (Indice di Comunicabilità Esponenziale). *Chiamiamo indice di comunicabilità esponenziale tra i nodi distinti i e j la quantità*

$$\exp(A)_{ij}.$$

Un'altra misura interessante è l'*indice di influenza (esponenziale)* di un nodo (o *betweenness centrality*). Questo indice è utilizzato per quantificare l'importanza di un nodo nel far trasferire l'informazione nella rete, valutando come varia la comunicabilità totale in seguito alla rimozione di tutti gli archi incidenti al nodo di interesse.

Definizione 3.3 (Indice di Influenza Esponenziale). *L'indice di influenza esponenziale del nodo r è definito da*

$$\frac{1}{(n-1)^2 - (n-1)} \sum_{i \neq j, i \neq r, j \neq r} \frac{(\exp(A)_{ij} - \exp(A - E(r))_{ij})}{\exp(A)_{ij}},$$

dove $A - E(r)$ è la matrice di adiacenza della rete una volta rimosso il nodo r .

Osserviamo che il termine prima della sommatoria nella Definizione 3.3 rappresenta una normalizzazione (dividiamo per il numero di elementi della somma).

L'utilizzo del fattoriale come penalizzazione ha diversi benefici (come il fatto di permettere l'uso di una funzione di matrice ben conosciuta) ma si possono adottare coefficienti differenti. Ad esempio un'altra opzione molto usata è la funzione di transizione (o risolvete):

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{n-1}\right)^{-1}. \quad (3.1)$$

I pesi per arrivare a questa funzione sono ottenuti considerando il numero di cammini di un grafo completo (Definizione 1.19) e approssimandoli opportunamente. La giustificazione dietro questa scelta sta nel fatto che nel grafo completo ci sono tutti i possibili collegamenti tra due nodi (il massimo numero

di cammini, fissato il numero di nodi), in questo modo è possibile paragonare il numero di connessioni reali della rete con un limite superiore rispetto a tutte le reti con un certo numero di nodi.

Per valutare il numero di cammini di lunghezza k tra due nodi nel grafo completo, è sufficiente considerare gli elementi di $(J - I)^k$ (per il Teorema 1.2 e per il Lemma 1.2).

Lemma 3.1. *Con le notazioni usate fin qui vale*

$$(J - I)^k = ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} + (-1)^k I.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione.

Passo base: $k = 2$.

$$\begin{aligned} (J - I)^2 &= J^2 - JI - IJ + I \stackrel{J^2=IJ=JI}{=} nJ - 2J + I \\ &= (n - 2)J + I = (n^2 - 2n) \frac{J}{n} + I = (n^2 - 2n + 1 - 1) \frac{J}{n} + I \\ &= ((n - 1)^2 - (-1)^2) \frac{J}{n} + (-1)^2 I. \end{aligned}$$

Passo induttivo. Supponiamo che $(J - I)^k = ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} + (-1)^k I$. Vogliamo dimostrare $(J - I)^{k+1} = ((n - 1)^{k+1} - (-1)^{k+1}) \frac{J}{n} + (-1)^{k+1} I$.

$$\begin{aligned} (J - I)^{k+1} &= \left[((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} + (-1)^k I \right] (J - I) \\ &= ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J^2}{n} + (-1)^k J - ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} - (-1)^k I \\ &= ((n - 1)^k - (-1)^k) J + (-1)^k J - ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} - (-1)^k I \\ &= (n - 1)^k J - ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} - (-1)^k I \\ &= ((n - 1)^k n) \frac{J}{n} - ((n - 1)^k - (-1)^k) \frac{J}{n} - (-1)^k I \\ &= ((n - 1)^k n - (n - 1)^k + (-1)^k) \frac{J}{n} + (-1)^{k+1} I \\ &= ((n - 1)^k (n - 1) - (-1)(-1)^k) \frac{J}{n} + (-1)^{k+1} I \\ &= ((n - 1)^{k+1} - (-1)^{k+1}) \frac{J}{n} + (-1)^{k+1} I. \end{aligned}$$

□

Guardando gli elementi diagonali (per i cammini chiusi) e non diagonali (per cammini tra nodi distinti) della matrice $(J - I)^k$ abbiamo il seguente corollario.

Corollario 3.1. *Consideriamo un grafo completo con n nodi. I cammini di lunghezza k tra due nodi distinti sono*

$$\frac{((n-1)^k - (-1)^k)}{n}.$$

Per ogni nodo r , i cammini chiusi di lunghezza k contenenti tale nodo sono

$$\frac{((n-1)^k - (-1)^k)}{n} + (-1)^k.$$

Nessuna delle due espressioni ottenute nel Corollario 3.1 rappresenta i coefficienti di una serie di Taylor per una funzione ragionevole. Utilizziamo quindi l'approssimazione $(n-1)^{k-1}$ per penalizzare i cammini di lunghezza k . Questa è proprio la scelta che porta a (3.1), a meno di un fattore moltiplicativo che possiamo però trascurare:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{k-1}} x^k = (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^k} x^k = (n-1) \left(1 - \frac{x}{n-1}\right)^{-1}.$$

Poichè stiamo guardando reti di grandi dimensioni (n è grande e A è sparsa), non ci sono problemi di invertibilità (infatti dalla sparsità di A e dal fatto che i suoi coefficienti sono 0 oppure 1 segue che $\|A\|_{\infty} < n-1$ e l'invertibilità di $(I - \frac{A}{n-1})^{-1}$ segue dal Lemma 1.1).

Possiamo ora riformulare Definizione 3.1, Definizione 3.2 e Definizione 3.3 in termini della funzione risolvente.

Più in generale per una generica funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita sullo spettro di A abbiamo la seguente definizione.

Definizione 3.4. *Chiamiamo indice di f -centralità del nodo i la quantità*

$$f(A)_{ii}.$$

Chiamiamo indice di f -comunicabilità del nodo i la quantità

$$f(A)_{ij}$$

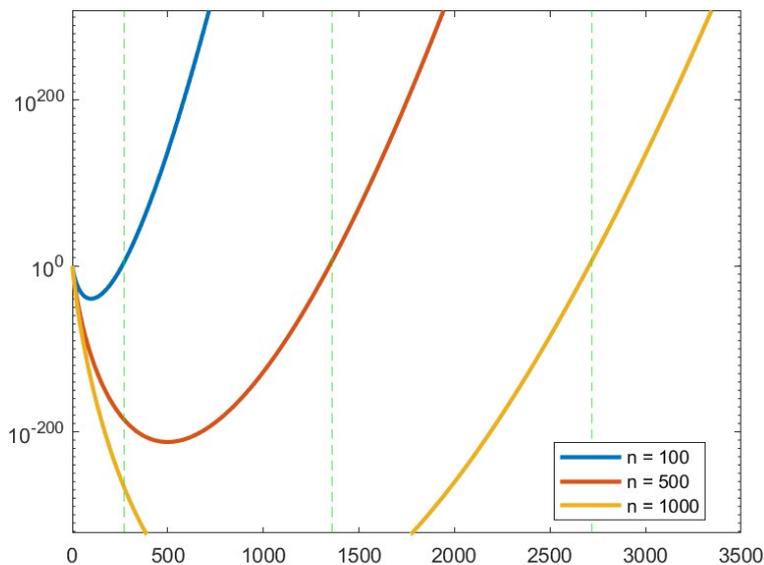


Figura 3.2: Rapporto tra $k!$ e $(n-1)^{k-1}$ per alcuni valori di n .

Chiamiamo *indice di f -influenza del nodo r* la quantità

$$\frac{1}{(n-1)^2 - (n-1)} \sum_{i \neq j, i \neq r, j \neq r} \frac{(f(A)_{ij} - f(A - E(r))_{ij})}{f(A)_{ij}}$$

Investighiamo quindi la differenza tra la misura esponenziale e quella definita dal risolvete. Confrontando i coefficienti che definiscono le due funzioni si vede che i cammini corti sono pesati di più dall'esponenziale (si veda ad esempio [5]). A tal fine in Figura 3.2 mostriamo un grafico del rapporto tra i (denominatori dei) pesi dell'esponenziale e del risolvete: per valori piccoli di k (più piccoli di circa il doppio della dimensione della rete) il rapporto è minore di 1, cosicché la misura data dal risolvete penalizza maggiormente queste connessioni.

Facendo alcuni esperimenti numerici si vede che l'indice di centralità del risolvete fornisce valori intermedi tra quelli dati dal grado e dall'indice di centralità dell'esponenziale. In ogni caso tra risolvete e grado è da preferirsi il primo in quanto fornisce valori nel continuo e si può estendere per dare misure di comunicabilità e influenza come fatto per l'esponenziale.

Infine menzioniamo un'ulteriore misura, introdotta da Katz nel 1953 ([6]), per la quale l'importanza del nodo i è ottenuta sommando gli indici di comunicabilità risolvete tra i e tutti gli altri nodi.

Definizione 3.5 (Centralità di Katz). *Definiamo la centralità di Katz del nodo i come*

$$\text{KC}_i := \sum_{j=1}^n f(A)_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(I - \frac{A}{n-1} \right)_{ij}^{-1} = \left(\left(I - \frac{A}{n-1} \right)^{-1} \mathbb{1} \right)_i. \quad (3.2)$$

Chiaramente possiamo fare lo stesso ragionamento per altre funzioni, ad esempio se usiamo l'esponenziale otteniamo quella che viene chiamata *comunicabilità totale*:

$$\text{TC}_i := (\exp(A)\mathbb{1})_i. \quad (3.3)$$

In MATLAB l'indice di influenza (*betweenness centrality*) di un nodo r misura la frequenza con cui il nodo r appare nei cammini più corti tra altri nodi della rete:

$$\sum_{i,j \neq r} \frac{n_{ij}(r)}{N_{ij}}, \quad (3.4)$$

dove $n_{ij}(r)$ è il numero di cammini più corti tra i nodi i e j che passano per il nodo r mentre N_{ij} è il numero totale di cammini più corti tra i e j (nella sommatoria si considerano solo le coppie di nodi i, j collegate da almeno un cammino).

3.1 Reti Multistrato

Fino ad ora ci siamo concentrati su reti "singole", ma in molte applicazioni può capitare di avere a che fare con strutture più complicate, ad esempio quando si considerano reti che evolvono nel tempo (ci concentreremo su queste) o in situazioni in cui il fenomeno da studiare presenta di per sé più livelli/strati (o layer). Il secondo caso può verificarsi banalmente per una rete di trasporto urbano, in cui i nodi sono le fermate, ogni layer rappresenta i collegamenti che derivano da un particolare mezzo e infine i collegamenti tra i vari strati indicano le fermate comuni alle varie linee (si veda [7]).

3.1.1 Evoluzione in tempi discreti

Consideriamo il caso di una rete che evolve a tempi discreti. In questo contesto l'*evoluzione* della rete riguarda solamente la struttura delle connessioni: alcuni archi possono essere aggiunti per indicare la formazione di nuove interazioni e altri possono essere rimossi ad indicare che un legame che esisteva ad un certo tempo ha smesso di esistere. In ogni caso sottolineiamo che l'insieme dei nodi resta immutato.

Data una sequenza $\{t_k\}_{k=1,\dots,M}$ di istanti temporali di interesse, la rete al tempo t_k è rappresentata dalla sua matrice di adiacenza $A^{[k]}$. Siamo interessati a rappresentare l'evoluzione della rete con una singola matrice (di dimensioni nM) in modo da poter continuare a utilizzare le funzioni di matrice per attribuire una misura di importanza ai vari nodi (che questa volta terrà conto della storia della rete). Poichè stiamo considerando collegamenti che dipendono dal tempo, dobbiamo tenere conto della sua direzionalità: l'informazione fluisce solo in avanti e non all'indietro. Ad esempio se al tempo t_1 soltanto i nodi A e B sono collegati e al tempo t_2 soltanto i nodi B e C sono collegati, allora il flusso $A \rightarrow B \rightarrow C$ ha senso mentre il flusso $C \rightarrow B \rightarrow A$ non è ammissibile. Da questa idea nasce il concetto di *cammino dinamico*.

Definizione 3.6 (Cammino Dinamico). *Un cammino dinamico è costituito da una sequenza ordinata di nodi $i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1}$ e da una sequenza non decrescente di tempi $t_{r_1} \leq t_{r_2} \leq \dots \leq t_{r_p}$ tali che $A_{i_m, i_{m+1}}^{[r_m]} \neq 0$ per ogni $m = 1, \dots, p$.*

Osserviamo che nella Definizione 3.6 i tempi non devono essere consecutivi: ci possono essere tempi in cui si sta fermi sia tempi in cui si percorre più di un arco.

Ricordando come sia stata usata la funzione risolvente per ottenere una misura di centralità per i vari nodi, possiamo analogamente introdurre la *matrice di comunicabilità dinamica*.

Definizione 3.7 (Matrice di Comunicabilità Dinamica). *Definiamo la matrice di comunicabilità dinamica della rete fino al tempo t_j come:*

$$Q^{[j]} = (I - aA^{[1]})^{-1}(I - aA^{[2]})^{-1} \cdots (I - aA^{[j]})^{-1} = \prod_{s=1}^j (I - aA^{[s]})^{-1}, \quad (3.5)$$

dove

$$a < \frac{1}{\max_s \rho(A^{[s]})}$$

e con $\rho(A^{[s]})$ indichiamo il raggio spettrale della matrice $A^{[s]}$.

Osserviamo che a è scelto in modo da rendere tutte le matrici da invertire non singolari.

La quantità $(Q^{[M]})_{ij}$ può essere vista come una somma pesata del numero di cammini dinamici tra i nodi i e j . Sfruttando questa matrice si possono introdurre due indici di influenza dinamica: la *nodal betweenness* e la *temporal betweenness*. Indichiamo con $\bar{A}_r^{[k]}$ la matrice ottenuta da $A^{[k]}$ sostituendo riga e colonna r -esima con tutti zeri. Allora la matrice

$$\bar{Q}_r^{[j]} = \prod_{s=1}^j (I - a\bar{A}_r^{[s]})^{-1} \quad (3.6)$$

quantifica la capacità dei nodi di comunicare senza il nodo r .

Definizione 3.8 (Influenza Nodale). *L'influenza nodale (o nodal betweenness) del nodo r è definita come*

$$\text{NB}_r := \frac{1}{(n-1)^2 - (n-1)} \sum_{i \neq j \neq r} \frac{(Q^{[M]})_{ij} - (\bar{Q}_r^{[M]})_{ij}}{(Q^{[M]})_{ij}}. \quad (3.7)$$

La Definizione 3.8 generalizza la definizione di *indice di influenza risolvete* data per reti con un solo livello.

Analogamente si può definire la *temporal betweenness* al tempo q sostituendo la matrice nulla alla matrice di adiacenza della rete al tempo q stesso per misurare quanto la comunicabilità cambia senza le connessioni dello step temporale di interesse.

Cerchiamo ora una rappresentazione matriciale a blocchi per la nostra rete che ci permetta di scrivere la nodal betweenness come una funzione di matrice. Il punto di partenza è considerare una matrice a blocchi dove i blocchi diagonali sono le matrici di adiacenza dei vari step temporali (in ordine):

$$\begin{pmatrix} A^{[1]} & & & \\ & A^{[2]} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{[M]} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Ricordiamo che un cammino dinamico può usare un qualunque numero di collegamenti per ogni step temporale e potrebbe anche aspettare fino a un certo tempo futuro e continuare a far fluire informazioni ripartendo da quel punto. Per catturare questa caratteristica si introduce un collegamento tra un nodo a un certo tempo e lo stesso nodo al tempo successivo. Concretamente questo viene fatto aggiungendo matrici identità nei blocchi sopradiagonali, ottenendo

$$B := \begin{pmatrix} \alpha A^{[1]} & \beta_2 I & & & \\ & \alpha A^{[2]} & \beta_3 I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha A^{[M-1]} & \beta_M I \\ & & & & \alpha A^{[M]} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

dove α e β_i sono parametri. Se consideriamo $\beta_i = 1$ e $\alpha = a$ (dove a è lo stesso parametro in (3.5)), si ha che

$$\text{NB}_r = \frac{1}{(n-1)^2 - (n-1)} \sum_{i \neq j \neq r} \frac{[f(B)]_{1M}^{ij} - [f(\bar{B}_r)]_{1M}^{ij}}{[f(B)]_{1M}^{ij}} \quad (3.10)$$

dove $f(x) = (1-x)^{-1}$ e $[f(B)]_{1M}^{ij}$ indica l'elemento (i, j) del blocco $(1, M)$ della matrice $f(B)$. La giustificazione di questo fatto si ottiene osservando che il blocco $(1, M)$ di $f(B)$ è proprio $Q^{[M]}$ (si veda [8]).

3.1.2 Centralità Marginali

Introduciamo ora una seconda classe di misure, nata in un contesto differente (si veda la Figura 3.3, nella quale i collegamenti tra i layer rappresentano le

fermate comuni tra le linee di trasporto pubblico e la matrice che rappresenta la rete multistrato è simmetrica, poichè non si considerano sensi unici; per una trattazione approfondita si rimanda a [7]) ma vedremo che sarà utile anche per il nostro esempio.

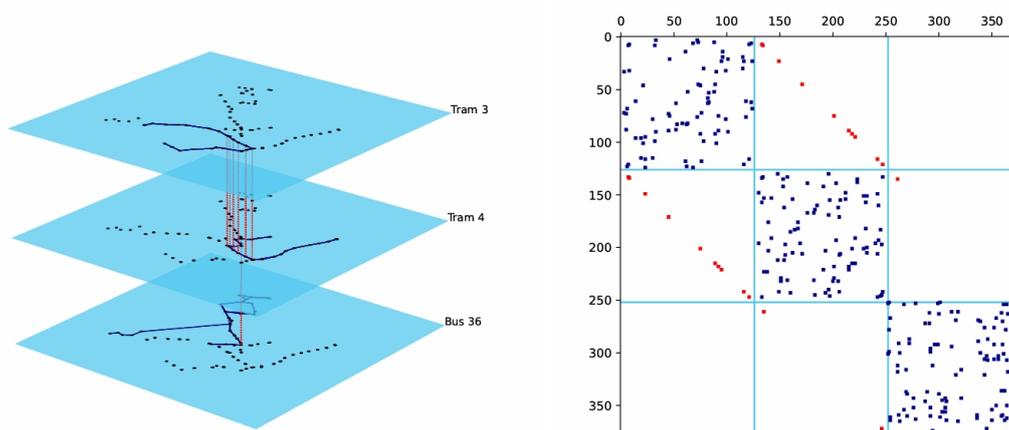


Figura 3.3: Esempio (sotto)rete di trasporto pubblico

Supponiamo di avere una rappresentazione matriciale a blocchi B per la rete multistrato ed assumiamo anche che B rappresenti una rete statica (con un solo strato) con nM nodi distinti. Calcolando la centralità di tutti gli nM nodi (ad esempio quella definita dall'esponenziale o dal risolvete), si ottiene una misura di quanto le coppie nodo-strato siano importanti.

Definizione 3.9 (Centralità Congiunta). *Chiamiamo centralità congiunta (o joint centrality) esponenziale della coppia nodo-strato (i, l) , dove $i = 1, \dots, n$ rappresenta il nodo ed $l = 1, \dots, M$ rappresenta il layer, la quantità*

$$\text{JC}(i, l) = \exp(A)_{rr},$$

dove $r = nl + i$.

La Definizione 3.9 può essere estesa al caso di misure di centralità non ottenute tramite funzioni di matrici, come ad esempio (3.4).

Infine, sommando in modo opportuno le centralità congiunte si ottengono delle misure di quanto i singoli nodi (o i singoli layer) siano importanti per la rete nella sua totalità.

Definizione 3.10 (Centralità Marginale per i Nodi). *Definiamo la centralità marginale di un nodo i (o marginal node centrality) come*

$$\text{MNC}_i := \sum_{l=1}^M \text{JC}(i, l). \quad (3.11)$$

In modo analogo si può definire la *marginal layer centrality* sommando sui nodi e tenendo fisso l'indice che si riferisce al layer.

Definizione 3.11 (Centralità Marginale per gli Strati). *Definiamo la centralità marginale di uno strato l (o marginal layer centrality) come*

$$\text{MLC}_l := \sum_{i=1}^n \text{JC}(i, l). \quad (3.12)$$

La seguente è una possibile rappresentazione alternativa del modello multi-strato:

$$\begin{pmatrix} A^{[1]} & \beta_2 E_2 & & & & \\ & A^{[2]} & \beta_2 E_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & A^{[M-1]} & \beta_M E_M & \\ & & & & A^{[M]} & \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

dove $E_k = A^{[k-1]} - A^{[k]}$ è una matrice con segno che rappresenta la modifica a cui è soggetta la rete nel passaggio da un tempo al successivo. In questo caso, il blocco non diagonale associa solo le righe e le colonne dei soli nodi che hanno subito modifiche da uno strato all'altro. Sfrutteremo tale rappresentazione per alcune delle analisi nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Analisi di un esempio applicativo

In questo capitolo analizziamo un esempio di rete complessa che evolve a tempi discreti. Per fissare le idee, assumiamo che la rete considerata sia la rete di distribuzione idrica di una piccola cittadina: gli archi rappresentano i tubi e i nodi rappresentano le giunzioni tra essi.

Nella nostra simulazione ad ogni tempo c'è la possibilità che alcuni nodi si guastino. Questo ha come risultato quello di rimuovere tutti gli archi incidenti ai nodi malfunzionanti. Chiaramente si prevede anche la possibilità di ripristino di nodi guastati, in seguito ad esempio a interventi umani di riparazione, il che ha come risultato quello di riattivare tutti gli archi con estremi in almeno uno di tali nodi.

In particolare siamo interessati a capire cosa succede alle misure di centralità che abbiamo introdotto nel Capitolo 3 durante il processo e ad osservare come la centralità dei nodi principali viene perduta o ristabilita.

I dati per queste analisi (le matrici di adiacenza delle reti) provengono dal sito <https://sparse.tamu.edu/>. In questo lavoro analizziamo solo la matrice `bcpwr02` ma alcune prove sono state fatte anche con `bcpwr01` (queste matrici nello specifico si riferiscono a modelli di reti elettriche).

Il codice da noi sviluppato per la simulazione permette di scegliere il numero

massimo di nodi da eliminare o ripristinare ad ogni step temporale, e dà anche la possibilità di scegliere un numero minimo di nodi guasti sotto al quale nessun intervento di ripristino è consentito:

```
k_max = 10;    % numero massimo di step temporali
max_del = 5;  % numero massimo di nodi eliminati per step
max_rep = 2;  % numero massimo di nodi ripristinati per step

non_functioning_nodes = [];    % lista con i nodi guasti
functioning_nodes = 1:n;      % lista con i nodi funzionanti

threshold = 5; % soglia per consentire il ripristino dei nodi
```

I nodi da ripristinare o guastare sono estratti in modo casuale rispettivamente dalle liste `non_functioning_nodes` (inizialmente vuota) e `functioning_nodes` (contenente inizialmente tutti i nodi).

L'evoluzione della rete viene decisa in un primo blocco di codice e salvata in una struttura:

```
operations = struct('what_to_do', [], 'nodes', []);
operations(n).what_to_do = [];
```

Chiaramente c'è anche la possibilità di impostare un comportamento predefinito per alcuni (o tutti) gli step temporali, ad esempio:

```
operations(1).what_to_do = 0;          % Guasto nodi
operations(1).nodes = [3, 8, 18, 32, 38]; % Nodi coinvolti
```

Se il campo `what_to_do` è vuoto, il comportamento per il relativo step temporale è casuale.

4.1 La rete e la sua evoluzione

Per tutte le analisi, consideriamo sempre la stessa evoluzione, schematizzata nella Tabella 4.1 e visualizzata nella Figura 4.1. Consideriamo 10 step tempo-

Tempo	Nodi disattivati da t_k a t_{k+1}	Nodi ripristinati da t_k a t_{k+1}
t_0	3, 8, 18, 32, 38	
t_1	7, 12	
t_2	1, 4, 14, 24	
t_3		3, 8, 18, 32, 38
t_4		7
t_5	8, 21	
t_6	23	
t_7	41, 35, 22	
t_8	47, 30, 11, 44	
t_9		22, 24

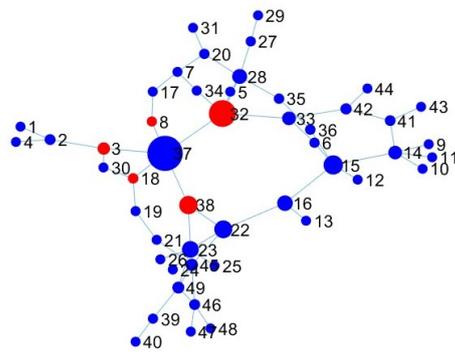
Tabella 4.1: Evoluzione della rete

rali. In rosso visualizziamo i nodi che saranno soggetti a un guasto mentre in verde i nodi che saranno ripristinati.

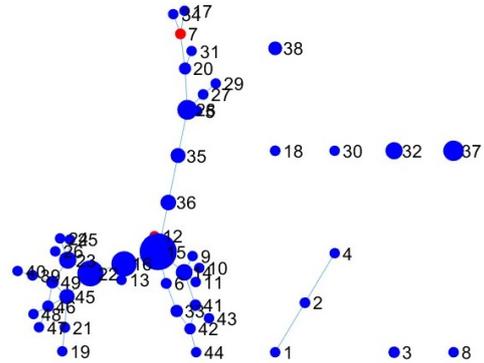
Come è immediato vedere dalla Figura 4.1a, nel primo step vengono eliminati tutti i nodi adiacenti al 37 (il più importante rispetto alla misura data dall'indice di influenza (3.4)) e al quarto step vengono ripristinati.

Studiamo l'evoluzione delle seguenti misure:

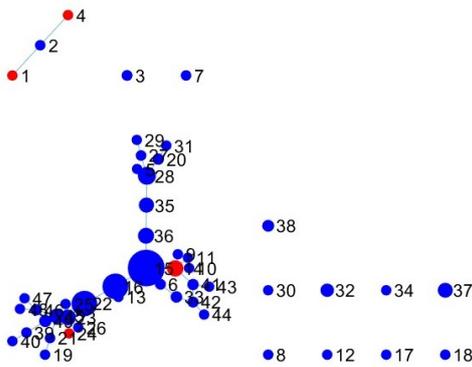
- influenza nodale tramite rappresentazione matriciale a blocchi (3.10);
- influenza nodale tramite matrici di comunicabilità dinamica (Definizione 3.8);
- centralità marginale per i nodi (Definizione 3.10) usando come misura l'indice di influenza predefinito in MATLAB (3.4) e variazioni di (3.9):
 - come prima alternativa consideriamo la matrice (3.9) con $\alpha = \beta_l = 1$;
 - in seguito i blocchi identità verranno sostituiti con dei blocchi che rappresentano la modifica apportata alla rete (sfrutteremo (3.13) con $\beta_l = 1$);
 - infine scegliamo alcuni valori da attribuire ai coefficienti β_l in (3.13).



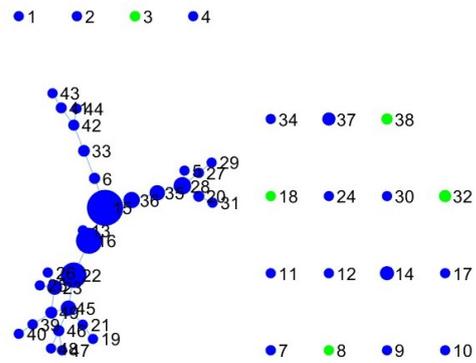
(a) t_0



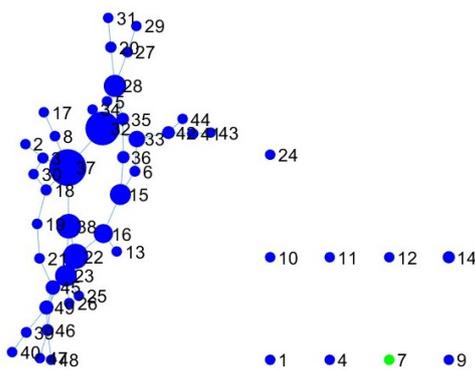
(b) t_1



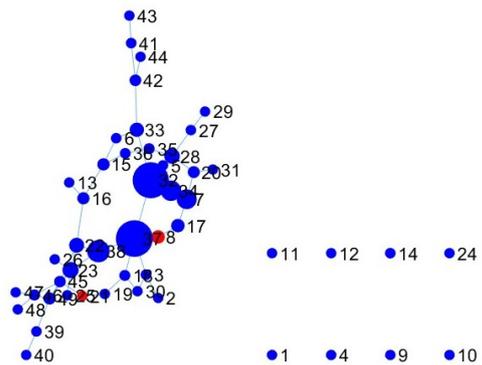
(c) t_2



(d) t_3



(e) t_4



(f) t_5

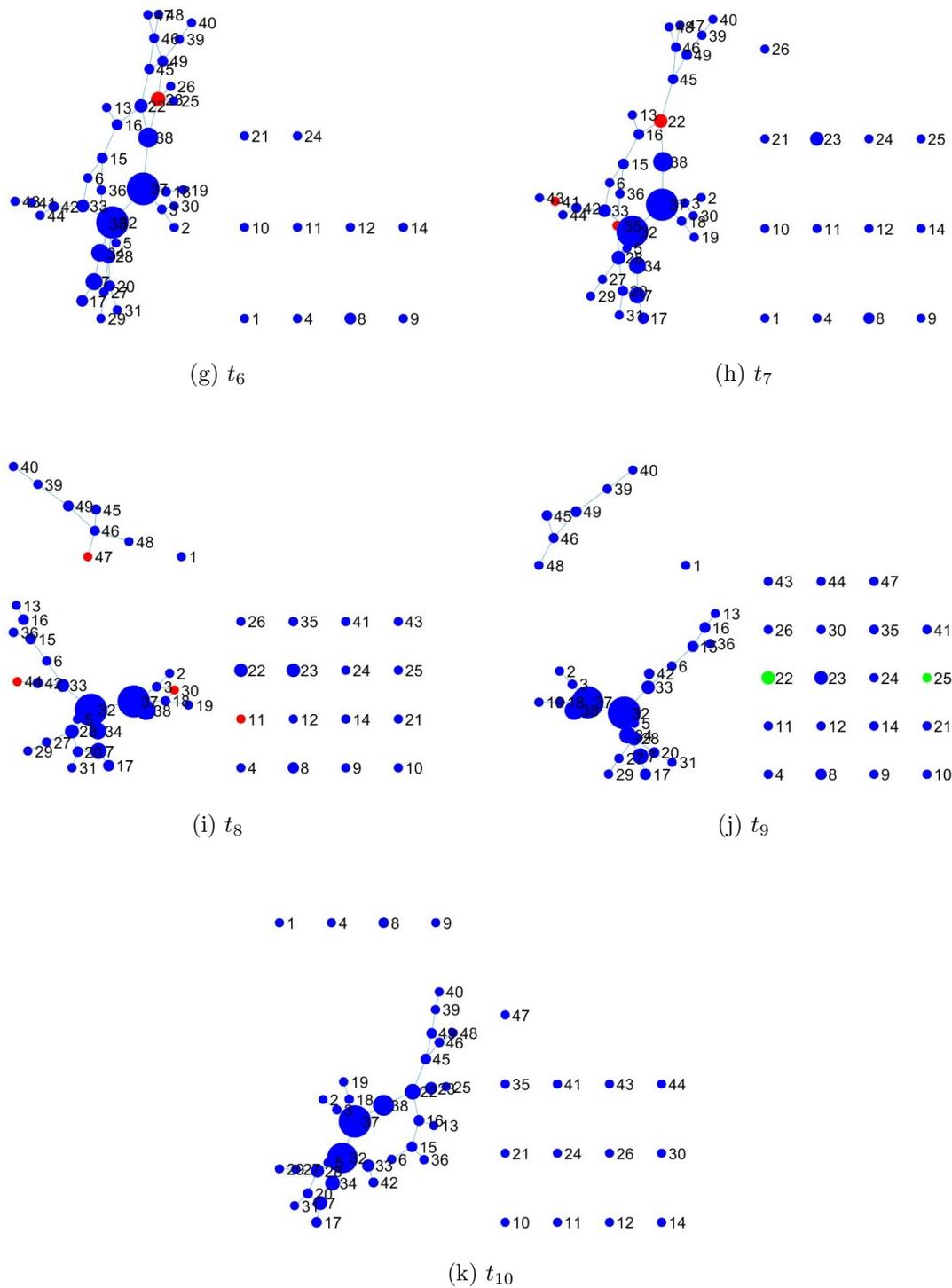


Figura 4.1: Evoluzione della rete

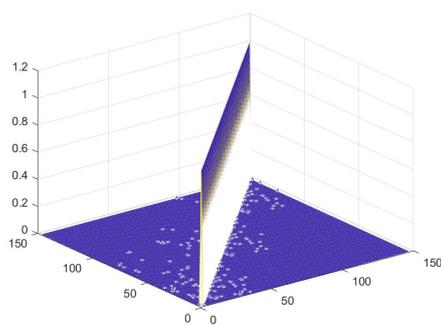
4.2 Analisi delle varie casistiche

4.2.1 Influenza Nodale tramite rappresentazione matriciale a blocchi

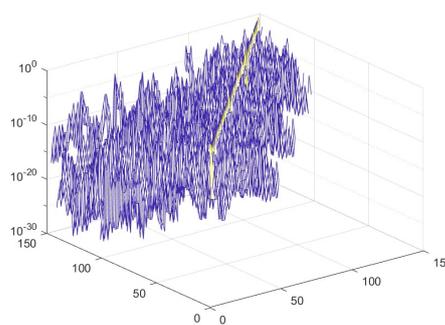
Consideriamo l'indice di influenza nodale (3.7), e sfruttiamo la formulazione matriciale a blocchi (3.9) per il calcolo di NB_r . Sfruttiamo quindi la formula data in (3.10). Escludendo le prime 2 iterazioni, otteniamo come valori per tale indice NaN, abbreviazione di *Not a Number* e restituito da MATLAB se il risultato di un'operazione non è numericamente ben definito, ad esempio capita quando si chiede di calcolare il logaritmo di un numero negativo o quando si esegue l'operazione $0/0$ (ciò che accade nella nostra simulazione). La spiegazione si ottiene visualizzando la matrice $\left(I - \frac{B}{n-1}\right)^{-1}$ con il comando `mesh` (Figura 4.2) e osservando che il blocco che interessa a noi ha molti elementi vicini a 0. Proseguendo con gli step temporali, questo comportamento si accentua sempre maggiormente: gli elementi di

$$\left(I - \frac{B}{n-1}\right)^{-1}$$

decadono mano a mano che ci si allontana dalla diagonale (in [9] viene studiato il decadimento degli elementi delle funzioni di matrici simmetriche e a banda).



(a) `mesh` $\left(\left(I - \frac{B}{n-1}\right)^{-1}\right)$ dopo 3 step temporali



(b) `mesh` $\left(\left(I - \frac{B}{n-1}\right)^{-1}\right)$ dopo 3 step temporali con asse z in scala logaritmica

Figura 4.2

Ne deduciamo che questo indice non è valutabile per questo modello multi-layer.

4.2.2 Influenza Nodale tramite Matrice di Comunicabilità Dinamica

Consideriamo sempre l'indice di influenza nodale, ma questa volta utilizziamo la Definizione 3.8 per calcolarlo: ad ogni step aggiorniamo le matrici $Q^{[j]}$ (Definizione 3.7) e $\bar{Q}_r^{[j]}$ (3.6) per ogni nodo r e sfruttiamo la Definizione 3.8 per calcolare l'influenza di ciascun nodo. Riassumiamo nella Tabella 4.2 la classifica dei nodi più importanti ad ogni step temporale.

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37
32	32	32	32	32	32	3	3	3	3	3
15	38	38	38	38	3	2	2	2	2	2
38	23	3	3	3	2	32	32	32	15	15
22	3	23	33	2	38	38	15	15	32	32
23	33	33	23	23	15	15	38	38	38	38
...

Tabella 4.2: Ranking dei nodi in base all'influenza nodale (solo i sei più importanti in ogni step)

Osserviamo che, nonostante al primo step temporale siano stati rimossi tutti gli archi incidenti al nodo 37, tale nodo resta il più importante anche negli step temporali successivi. Una possibile spiegazione è che i cammini dinamici "importanti" per il nodo 37 vengono stabiliti già al tempo t_0 , mentre i tempi successivi inciderebbero, in ogni caso, in misura inferiore sulla sua influenza nodale: tutto il flusso di informazioni, ad esempio, che ha bisogno del nodo 37 per potersi propagare da un nodo all'altro, può già trovare un percorso sufficientemente corto sfruttando solamente i collegamenti esistenti al tempo t_0 .

4.2.3 Centralità Marginale Nodale

Vorremmo ora trovare una misura che tenga in considerazione come evolve la rete e che sia sufficientemente sensibile alla rimozione ed al ripristino dei nodi: mediante l'eliminazione degli archi incidenti a un nodo, vorremmo vedere la sua importanza calare, mentre aggiungendone, vorremmo vedere la sua importanza crescere.

Per le prossime tre analisi sarà considerata la centralità marginale nodale (Definizione 3.10), mentre come centralità congiunta (Definizione 3.9) sarà usato sempre l'indice di influenza predefinito di MATLAB (3.4). In ciascuno dei casi considerati, questi indici saranno confrontati per diverse scelte della matrice a blocchi multistrato.

Formulazione di base

Consideriamo la matrice in (3.9) con $\alpha = \beta_i = 1$:

$$\begin{pmatrix} A^{[0]} & I & & & & \\ & A^{[1]} & I & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & A^{[9]} & I & \\ & & & & A^{[10]} & \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Analogamente a quanto fatto nella Sezione 4.2.2 per l'indice di influenza dinamica, riportiamo la classifica dei primi sei nodi nella Tabella 4.3.

Notiamo che il nodo 37 resta sempre il più importante durante tutti gli istanti temporali.

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
37	15	15	15	37	37	37	37	32	32	37
32	22	16	16	32	32	32	32	37	37	32
15	16	22	22	22	38	38	38	38	38	38
38	37	28	28	38	34	34	34	34	34	22
22	28	14	36	28	7	7	7	7	7	34
23	23	36	45	23	23	23	28	28	28	7
...

Tabella 4.5: Ranking dei nodi in base centralità marginale per i nodi (3.11) con terza formulazione matriciale

maggior risalto: se si è interessati ad una misura che consideri tutta l'evoluzione della rete allora è da preferirsi l'indice di influenza nodale, mentre se si desidera valutare la differenza tra step temporali successivi allora è più indicato l'indice di centralità marginale nodale (con parametri β_l scelti come visto in precedenza).

La nostra analisi si è limitata a reti di piccole dimensioni (circa 50 nodi e 10 step temporali), per cui anche le matrici (3.9) e (3.13) hanno dimensioni ragionevoli. Tuttavia, se si considerano reti più estese diventano importanti anche gli aspetti computazionali per ottenere gli indici di centralità, specialmente per quanto riguarda l'approssimazione della funzione esponenziale e del risolvete (si vedano, ad esempio, [7] e [8]).

Bibliografía

- [1] N. J. Higham. *Functions of Matrices: Theory and Computation*. SIAM, 2008.
- [2] C. B. Moler and C. F. Van Loan. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later. *SIAM Review*, 45(1):3–49, 2003.
- [3] L. C. Freeman. Centrality networks: I. Conceptual clarifications. *Social Networks*, 1(3):215–239, 1979.
- [4] E. Estrada and J. A. Rodríguez-Velázquez. Subgraph centrality in complex networks. *Physical Review E*, 71(5):056103, 2005.
- [5] E. Estrada and N. J. Higham. Network Properties Revealed through Matrix Functions. *SIAM Review*, 52(4):696–714, 2010.
- [6] L. Katz. A new index derived from sociometric data analysis. *Psychometrika*, 18(1):39–43, 1953.
- [7] K. Bergmann and M. Stoll. Orientations and Matrix Function-Based Centralities in Multiplex Network Analysis of Urban Public Transport. *Applied Network Science*, 6:90, 2021.
- [8] C. Fenu and D. J. Higham. Block Matrix Formulations for Evolving Networks. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 38(2):343–360, 2017.

- [9] M. Benzi and G. H. Golub. Bounds for the Entries of Matrix Functions with Applications to Preconditioning. *BIT Numerical Mathematics*, 39(3):417–438, 1999.

Ringraziamenti

Innanzitutto vorrei ringraziare la professoressa Valeria Simoncini, per avermi trasmesso la passione per la sua materia e per avermi guidato nella realizzazione di questa tesi con immancabile entusiasmo, professionalità e pazienza.

Ringrazio poi tutti i miei compagni di corso, con cui ho condiviso questi anni. Un grazie speciale va ad Eleonora e Federica (il mitico treppiede) per tutte le avventure e i viaggi, passati e futuri (perchè ce ne saranno eccome!), e per avermi sempre supportato e spronato a non mollare mai anche nei momenti che sembravano più bui. Grazie a Laura, sempre disponibile ad ascoltare i miei sfoghi nonostante io non sia un tipo di molte parole. Ringrazio Paolo e Lorenzo, con cui ho condiviso le gioie e le paure nascoste dietro all'ultimo esame.

Un ringraziamento speciale anche al mio gruppo di amici più stretti, Manuel, Matteo, Pietro, Riccardo Z., Enrico, Alessandro, Riccardo T. e Francesco: grazie per essere sempre al mio fianco. Ringrazio Arianna per tutte le passeggiate sfogo serali. Un grazie anche a Riccardo per tutte le escursioni in montagna, i tuffi al fiume, le avventure condivise e le foto tentatrici che ora ricevo dalla Nuova Zelanda!

Non posso che ringraziare il professor Enrico Zoli, per avermi conquistato con le sue lezioni facendomi innamorare ancora di più di questo mondo e senza il quale non avrei mai intrapreso il percorso che mi ha portato fino a qui.

Infine l'ultimo pensiero è rivolto alla mia famiglia. Ringrazio i miei genitori per il loro costante sostegno e per i loro insegnamenti, senza i quali oggi non sarei ciò che sono. Grazie a mia sorella per tutto il supporto morale dell'ultimo periodo e per tutti i gelati serali condivisi.