



UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

~ ~ ~

ANNO ACCADEMICO 2024–2025

# Strutture Proiettive Convesse su Superfici, un Esempio di Strutture Geometriche

**RELATRICE**

Chiar.ma Prof.ssa  
Maria Beatrice POZZETTI

**PRESENTATA DA:**

Mario MONECHI  
0001089927

DATA: 25 Luglio 2025

---





*A Mamma e Babbo*

---

# Ringraziamenti

Giunto al termine di questo percorso, voglio esprimere la mia gratitudine verso tutte le persone che mi sono state accanto: nessun traguardo, grande o piccolo che sia, si raggiunge da soli.

Innanzitutto ringrazio la mia relatrice, la professoressa Pozzetti, per la disponibilità e la gentilezza che ha dimostrato durante la stesura di questa tesi.

Un grazie speciale va a mio fratello Filippo, mia sorella Anna, i nonni, Paolo e Mara, e a tutta la mia famiglia che fa sempre il tifo per me. In particolare, grazie ai miei genitori, che non hanno mai chiesto da me più di quanto io pretenda da me stesso, permettendomi di studiare ciò che amo in modo libero, privo di pressioni o aspettative.

Un grande grazie lo devo ad Alice, Anna, Giulia, Virgi, Jacopo e Edo per la leggerezza, l'allegria e le risate che hanno portato nelle mie sessioni, semestri e serate in questa città, consapevole che senza di voi non sarebbe lo stesso. Grazie ai due Pietro, Cecchi e Criso, e a tutti i ragazzi passati dallo studentato, per aver fatto di quel posto una seconda casa. Grazie a Giulio, Lorenzo, Pitero, Allegra, Momo e tutti i ragazzi di Reggello e dintorni, che quando torno mi accolgono come se non fossi mai andato via.

Infine, grazie a Sara, che più di tutti mi è stata accanto in questi anni, insegnandomi più di quanto una laurea potrà mai fare.



## Sommario

Nel 1872, con il celebre Erlangen Program, Felix Klein pose le basi per un nuovo approccio alla geometria, fondato sulla teoria dei gruppi e sull'analisi dello spazio attraverso le sue simmetrie.

Oggi raccogliamo l'eredità di questa visione, e uno dei modi classici di fare geometria è attraverso il concetto di  $(G,X)$ -struttura, dove  $X$  è una varietà modello e  $G$  è un gruppo di automorfismi di  $X$ .

Dopo una panoramica sulle basi di questo framework, ci concentreremo sulle strutture proiettive convesse su superfici topologiche, esempi significativi di strutture modellate sul piano proiettivo  $\mathbb{RP}^2$ .



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Strutture Geometriche</b>	<b>5</b>
1.1 (G,X)-strutture . . . . .	5
1.2 Proprietà di Estensione Unica . . . . .	8
1.3 Costruzione della mappa Sviluppante . . . . .	10
1.4 Sviluppante ed Olonomia . . . . .	16
1.5 Significato della Coppia Sviluppante . . . . .	20
<b>2 Strutture Proiettive Convesse</b>	<b>25</b>
2.1 Fondamenti di Geometria Proiettiva . . . . .	25
2.2 Estensione Unica e Coppia Sviluppante . . . . .	28
2.3 Strutture Proiettive Convesse . . . . .	32
<b>3 Strutture sui Pantaloni</b>	<b>37</b>
3.1 Bandiere . . . . .	38
3.2 Triple Ratio . . . . .	43
3.3 Cross Ratio . . . . .	48
3.4 Costruzione di una Struttura Convessa su $P$ . . . . .	50
<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

**Elenco delle Figure**

**63**

# Introduzione

Nella seconda metà dell'Ottocento, Sophus Lie sviluppò la teoria dei gruppi continui di trasformazioni, oggi noti come gruppi di Lie. Dotati di una struttura differenziabile, questi gruppi possono essere studiati sia con gli strumenti dell'algebra sia con quelli dell'analisi e del calcolo infinitesimale. Le idee di Lie hanno influenzato in modo profondo la matematica moderna, trovando successo e applicazione in gran parte dei suoi rami, dalla geometria alla fisica teorica.

Il primo a coglierne il potenziale fu Felix Klein, che nel 1872 usò la simmetria come principio unificatore delle diverse nozioni di geometria nel suo celebre *Erlangen Program*. Klein definisce *geometria* una coppia  $(G, X)$ , o più in particolare, lo studio delle proprietà di uno spazio  $X$  invarianti rispetto ad un gruppo  $G$  di trasformazioni di  $X$ . Secondo questa impostazione la *geometria euclidea* è la geometria fatta nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , invariante rispetto al gruppo  $E(n)$  dei moti rigidi dello spazio, dato da

$$E(n) = \{v \mapsto A(v) + w \mid A \in O(n), w \in \mathbb{R}^n\} \cong O(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Una trasformazione  $g \in E(n)$  porta un oggetto  $\xi$  in un oggetto  $\xi'$  ad esso congruente, preservando distanza, angoli, rette, parallelismo, area e molte altre proprietà geometriche. Prendendo invece le

trasformazioni presenti nel *gruppo affine*

$$\text{Aff}(n) = \{v \mapsto A(v) + w \mid A \in GL_n(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^n\} \cong GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

parliamo di *geometria affine*, dove perdiamo le nozioni di angolo e distanza, conservando il parallelismo e le relazioni di incidenza tra rette e punti (come la collinearità di 3 punti o la concorrenza di 3 rette).

Se rinunciamo anche al parallelismo entriamo nel dominio della *geometria proiettiva*, in cui lo spazio è lo *spazio proiettivo*  $\mathbb{R}P^n$ , su cui agisce il gruppo delle trasformazioni proiettive  $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ . Delle geometrie che abbiamo elencato, la geometria proiettiva è la più flessibile, in quanto sono preservate solo le nozioni di incidenza tra rette e punti, e la più universale, poiché 'contiene' tutte le altre.

A partire dagli anni '50, con Charles Ehresmann, si è sviluppato un quadro più ampio. Nel tentativo di impartire una geometria  $(G, X)$  su una varietà  $M$  modellata su  $X$ , è stato formalizzato il concetto di  $(G, X)$ -struttura: un atlante su  $M$  i cui cambi di carta siano trasformazioni del gruppo  $G \subset \text{Omeo}(X)$ . Questo approccio, approfondito da William Thurston negli anni '70-'80 nello studio delle 3-varietà, consente di estendere e riformulare la geometria rispetto a due strumenti:

- Una rappresentazione  $h : \pi_1(M) \rightarrow G$  del gruppo fondamentale della varietà detta *olonomia*.
- Un omeomorfismo locale  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  che mappa il rivestimento universale di  $M$  sullo spazio  $X$ , detto *sviluppante*.

Vedremo che la coppia sviluppante  $(\mathbf{dev}, h)$  è equivalente ad una  $(G, X)$ -struttura su  $M$  e connette geometria, topologia e teoria delle

---

rappresentazioni tra loro.

In questo contesto si inserisce il lavoro di William Goldman, la cui ricerca si focalizza in particolare sulle strutture proiettive convesse su superfici:  $(PGL_3(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$ -strutture su una superficie  $M$  dotate di una sviluppante **dev** che mappa  $\tilde{M}$  su un dominio convesso  $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$  omeomorficamente. Nel 1990 Goldman dimostra che lo spazio  $\mathfrak{B}(S)$  delle strutture convesse su una superficie compatta  $S$  di genere  $g \geq 2$  è omeomorfo ad una cella aperta di dimensione  $-8\chi(S) = 16g - 16$ . Seguendo le orme di Goldman, presenteremo nel primo capitolo il quadro teorico delle  $(G, X)$ -strutture e degli strumenti necessari al loro studio. Nel secondo capitolo scenderemo nel particolare della geometria proiettiva, parlando di  $(PGL_3(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$ -strutture su superfici topologiche. Infine studieremo nel terzo capitolo la costruzione di una struttura proiettiva convessa sui *pantaloni*  $P$ : un esempio significativo che costituisce il cuore del risultato ottenuto da Goldman su  $\mathfrak{B}(S)$  in [1].



# Capitolo 1

## Strutture Geometriche

Sia  $X$  una varietà differenziabile e sia  $G$  un gruppo di Lie che agisce in modo transitivo su  $X$  per omeomorfismi.

La coppia  $(G, X)$  definisce una geometria: tutti gli oggetti che rimangono invariati sotto l'azione di  $G$ . Il nostro intento è di impartire la geometria del nostro spazio modello  $X$  su una varietà topologica  $M$ .

### 1.1 $(G, X)$ -strutture

Indichiamo come  $g : X \rightarrow X$  l'omeomorfismo dato dall'azione di  $g \in G$  su  $X$ .

**Definizione 1.1** (Mappa localmente- $G$ ). Sia  $U$  un aperto di  $X$  e sia  $f : U \rightarrow X$ , diciamo che  $f$  è una mappa localmente- $G$  se per ogni componente connessa  $U_i \subset U$ , esiste un elemento  $g_i \in G$ , tale che  $f$  coincida con  $g_i$  su  $U_i$ . Ossia

$$f(x) = g_i(x) \quad \forall x \in U_i.$$

*Osservazione 1.1.* Poiché le funzioni date dagli elementi  $g \in G$  sono omeomorfismi, se  $f$  è localmente- $G$  allora  $f$  è un omeomorfismo locale.

Servendoci alla nozione di  $f$  *localmente-G* definiamo un nuovo atlante sulla varietà  $M$  che abbia le carte in  $X$  e sia compatibile con l'azione di  $G$ . Per fare ciò chiediamo che le funzioni di transizione siano mappe *localmente-G*.

**Definizione 1.2** ( $(G, X)$ -Atlante). Sia  $M$  una varietà topologica e siano:

- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una collezione di aperti di  $M$  tale che  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
- $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$  una collezione di funzioni tali che  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$  sia un omeomorfismo  $\forall \alpha \in I$ .

Diciamo che  $\mathcal{A} = \{\{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}\}$  è un  $(G, X)$ -atlante su  $M$  se per ogni  $U_\alpha, U_\beta$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , vale:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow X \quad \text{sia localmente-G.}$$

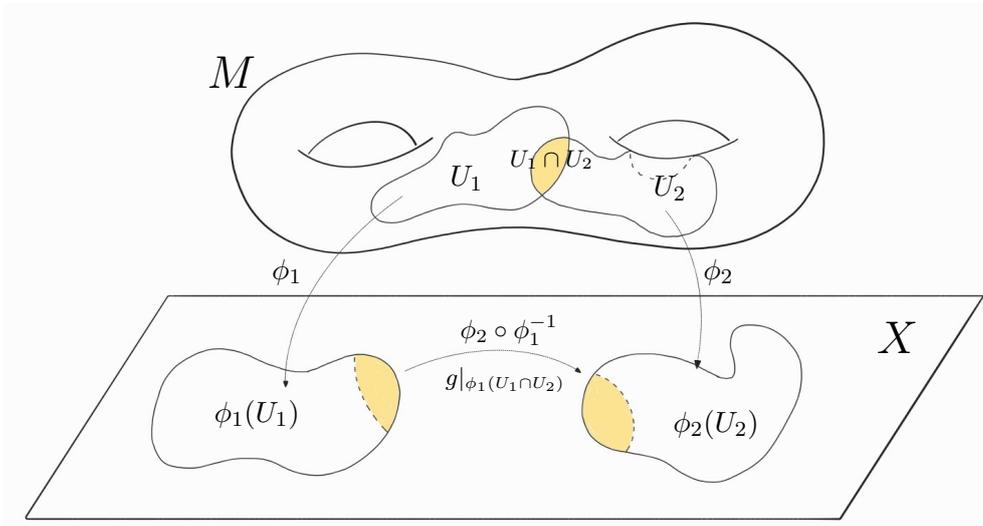


Figura 1.1: Due  $(G, X)$ -carte  $\phi_1, \phi_2$  sulla superficie  $M$ .

**Definizione 1.3** ( $(G, X)$ -Struttura). Diciamo che una  $(G, X)$ -struttura su  $M$  è un  $(G, X)$ -atlante massimale.

**Definizione 1.4** (( $G, X$ )-Varietà). Una ( $G, X$ )-varietà è una coppia  $(M, \mathcal{A})$ , dove  $M$  è una varietà topologica e  $\mathcal{A}$  è una ( $G, X$ )-struttura.

*Esempio 1.1* (Il Toro). Consideriamo il toro  $T^2$  identificandolo con  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ : esso possiede una struttura naturale di  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -varietà.

Sia  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  e  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  un suo rappresentante. Siccome l'azione  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  per traslazione è propriamente discontinua, esiste un intorno aperto  $U' \subset \mathbb{R}^2$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $g(U') \cap U' = \emptyset \quad \forall g \in \mathbb{Z}^2$ . Dunque la proiezione al quoziente  $\pi|_{U'} : U' \rightarrow \pi(U')$  è un omeomorfismo e  $U \equiv \pi(U')$  è aperto in  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Compondendo l'inverso di  $\pi|_{U'}$  con l'inclusione  $i : U' \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  ottengo la carta  $\phi := i \circ (\pi|_{U'})^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Verifichiamo adesso che le carte così costruite diano cambi di coordinate localmente- $\mathbb{Z}^2$ . Ci basta osservare che carte distinte  $\phi_1, \phi_2$  mappano  $[x, y]$  ad elementi distinti  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  in  $\pi^{-1}[x, y]$ , dunque esiste una traslazione  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  t.c.  $(x_1, y_1) = (n, m).(x_2, y_2)$ . Ciò definisce un mappa continua

$$(x, y) \mapsto \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x, y) - (x, y)$$

da  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  in  $\mathbb{Z}^2$  spazio discreto. Ne concludiamo che per ogni componente connessa di  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  esiste un unico  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  la cui azione coincide con il cambio di coordinate  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ .

Abbiamo dunque ottenuto una  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -struttura su  $T^2$ , una  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -varietà.

Vogliamo infine definire funzioni tra ( $G, X$ )-varietà che siano compatibili con la loro struttura.

**Definizione 1.5** (( $G, X$ )-Mappa). Siano  $M$  e  $N$  due ( $G, X$ )-varietà,  $f : M \rightarrow N$  diciamo che  $f$  è una ( $G, X$ )-mappa quando per ogni coppia di carte

$$\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X \quad \psi_\beta : V_\beta \rightarrow X$$

dove  $U_\alpha \subset M$  e  $V_\beta \subset N$ , la funzione

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \Big|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))}$$

è localmente- $G$ .

## 1.2 Proprietà di Estensione Unica

Supponendo che l'azione di  $G$  su  $X$  sia di natura analitica, possiamo definire la *Proprietà di Estensione Unica*, che sarà fondamentale allo sviluppo dei prossimi strumenti. Andiamo dunque a enunciarla e a fornire alcuni esempi.

**Definizione 1.6** (Proprietà di Estensione Unica). sia  $U \subset X$  aperto e connesso e  $f : U \rightarrow X$  una mappa localmente- $G$ , diciamo che  $f$  soddisfa la proprietà di estensione unica se esiste un unico  $g \in G$  tale che  $g|_U = f$ .

*Osservazione 1.2.* Sia  $M$  una ( $G, X$ )-varietà dove l'azione di  $G$  è analitica, i cambi di carte nell'atlante sono mappe localmente- $G$ , quindi siano  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  e  $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow X$  due carte nell'atlante  $\mathcal{A}$ , per ogni componente

connessa

$U_i \subset U_\alpha \cap U_\beta$  esiste un unico elemento  $g_i \in G$  tale che

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \Big|_{U_i} = g_i|_{U_i}$$

*Osservazione 1.3.* In generale, sia  $\text{Omeo}(\mathbb{R})$  che  $\text{Diff}(\mathbb{R})$  agiscono su  $\mathbb{R}$  tramite funzioni non analitiche

*Esempio 1.2.* Consideriamo l'azione di  $SL_n(\mathbb{R})$  su  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa localmente- $SL_n(\mathbb{R})$  con  $U$  insieme aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ , supponiamo  $\exists A, B \in SL_n(\mathbb{R})$  tali che

$$Ax = f(x) = Bx \quad \forall x \in U$$

A meno di traslazione possiamo supporre  $0 \in U$  e poiché  $U$  è aperto abbiamo  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset U$ .

Scegliendo una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  e moltiplicando ogni vettore per  $\frac{\varepsilon}{2}$  otteniamo una base  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B_\varepsilon(0) \subset U$  e dunque vale

$$Ax_i = Bx_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

e poiché uguali su  $n$  vettori linearmente indipendenti abbiamo  $A = B$ .

*Esempio 1.3.* Sia  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  e  $G = \text{Aut}(D)$  il suo gruppo di automorfismi.

$G \curvearrowright D$  transitivamente e sappiamo che gli automorfismi di  $D$  sono tutti e soli i biolomorfismi della forma

$$\begin{aligned} \phi_{\theta, \alpha} : D &\rightarrow D \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi), |\alpha| < 1 \\ \phi_{\theta, \alpha}(z) &= e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \forall z \in D \end{aligned}$$

Supponiamo che  $f : U \rightarrow D$ , con  $U \subset D$  connesso, sia localmente- $G$  e che  $\exists \phi_1, \phi_2 \in G$  tali che  $\phi_1|_U = f = \phi_2|_U$ .

Poichè  $\phi_1, \phi_2$  sono funzioni olomorfe su  $D$  che restringono alla stessa funzione su  $U$  abbiamo  $\phi_1 = \phi_2$ .

Tuttavia se l'azione di  $G$  non è analitica non è detto che l'estensione

unica sia valida.

*Esempio 1.4.* Consideriamo l'azione di  $\text{Omeo}(\mathbb{R})$  su  $\mathbb{R}$  e la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che  $f \in \text{Omeo}(\mathbb{R})$  ed estende  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x$ . Dunque  $g$  ammette due estensioni  $exp$  e  $f$  diverse in  $\text{Omeo}(\mathbb{R})$ .

### 1.3 Costruzione della mappa Sviluppante

Introduciamo adesso la sviluppante che, abbinata all'olonomia, ci permette di riformulare la struttura geometrica che abbiamo messo su una varietà  $M$  in relazione al suo rivestimento universale  $\tilde{M}$  e al suo gruppo fondamentale  $\pi(M)$ .

L'obbiettivo di questa sezione è dimostrare, seguendo [2] e [3], la seguente proposizione:

**Proposizione 1.1.** *Sia  $M$  una  $(G, X)$ -varietà semplicemente connessa, allora esiste una  $(G, X)$ -mappa  $f : M \rightarrow X$ .*

Per costruire la mappa  $f$  andremo ad estendere una carta  $\phi$  trasportando i cammini da  $M$  in  $X$ .

*Dimostrazione.* Dividiamo la sua dimostrazione in 2 parti.

**PARTE I:** DEFINIZIONE DI  $f$ .

Scegliamo un punto base  $x_0 \in M$  e una carta  $\phi : U \rightarrow X$  con  $x_0 \in U$ .

Preso  $x \in M$  definiamo  $f(x)$  come segue.

Scegliamo un cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x$ . Dato che l'immagine di  $\gamma$  è compatta possiamo ricoprirla con un numero finito di carte  $\{U_i\}_{0 \leq i \leq n}$ , con  $U_0 = U$  e  $\{\phi_i\}$  le rispettive  $(G, X)$ -parametrizzazioni, tali che:

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in U_i \text{ per } t \in ]a_i, b_i[ \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ \gamma(t) \in U_0 = U \text{ per } t \in [a_0, b_1[ \text{ e } \gamma(t) \in U_n \text{ per } t \in ]a_n, b_n] \end{aligned}$$

dove i punti  $\{a_i, b_i\}$  formano una partizione di  $[0, 1]$  tale che:

$$\begin{aligned} 0 = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < a_3 < \dots \\ \dots < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < b_n = 1. \end{aligned}$$

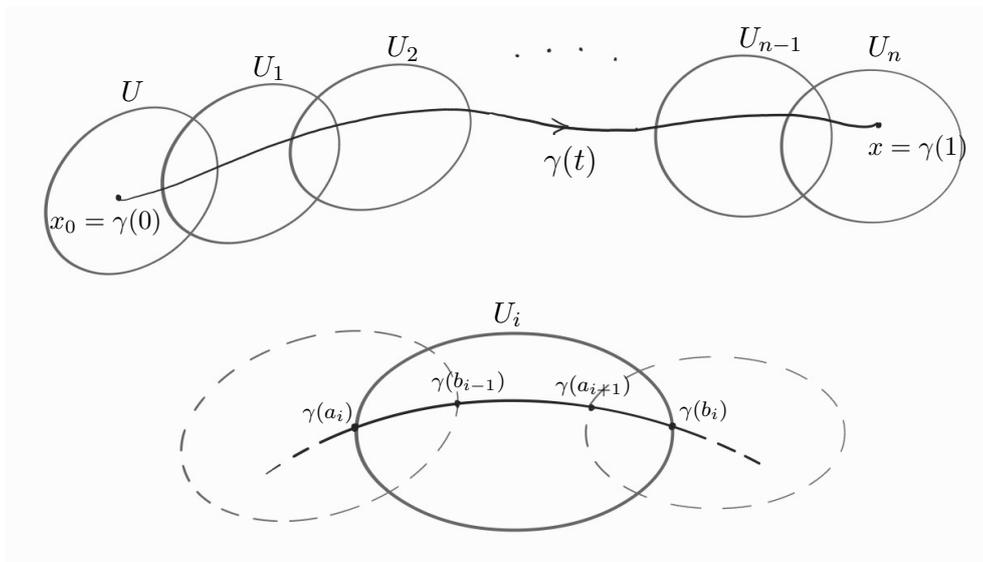


Figura 1.2: Partizione e ricoprimento di  $\gamma$ .

Per la proprietà di estensione unica abbiamo che per ogni  $i = 1, \dots, n$  esiste un unico  $g_i \in G$  tale che  $g_i = \phi_{i-1} \circ \phi_i^{-1}$  sulla componente connessa di  $U_{i-1} \cap U_i$  che contiene  $\gamma(]a_i, b_{i-1}[)$ .

In particolare vale:

$$g_i \circ \phi_i \circ \gamma(t) = \phi_{i-1} \circ \gamma(t) \quad \text{per ogni } t \in ]a_i, b_{i-1}[.$$

Costruiamo adesso un cammino  $\hat{\gamma}$  in  $X$  con punto iniziale  $\phi(x_0)$  come segue. Prendiamo una nuova partizione  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} = 1$  tale che per ogni  $i = 1, \dots, n$  valga  $a_i < t_i < b_{i-1}$ , ossia  $\gamma(t_i) \in U_{i-1} \cap U_i$ .

Osservo che  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{i-1}$  e quindi

$$\begin{aligned} \phi_{i-1} \circ \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] &\rightarrow X \quad \text{e} \\ g_i \circ \phi_i \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] &\rightarrow X \end{aligned}$$

sono due cammini in  $X$  tali che il punto d'arrivo del primo,  $\phi_{i-1}(\gamma(t_i))$ , coincide con il punto d'arrivo del secondo,  $g_i(\phi_i(\gamma(t_i)))$ .

Dunque possiamo portare  $\gamma$  in  $X$ , partendo dalla prima carta  $\phi_0 = \phi : U_0 \rightarrow X$  e prolungando  $\phi \circ \gamma$  un pezzo alla volta.

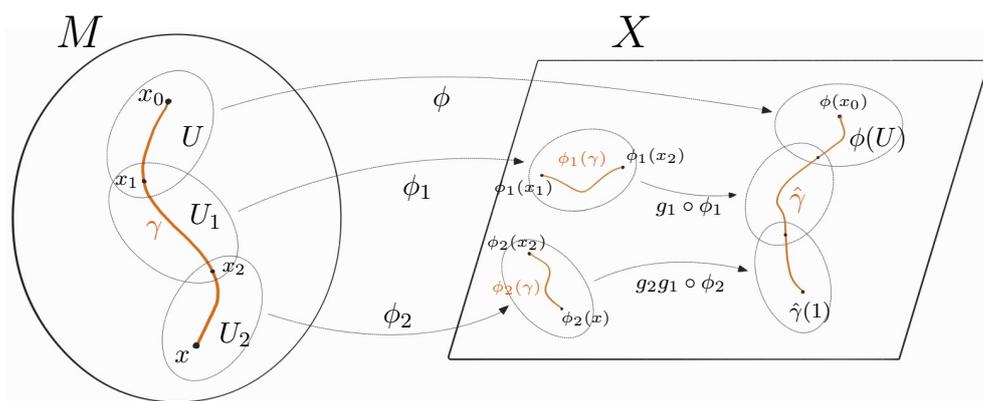


Figura 1.3: Costruzione di  $\hat{\gamma}$ .

Otteniamo così:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} : [0, 1] &\rightarrow X \quad \text{con} \quad \hat{\gamma}(0) = \phi(x_0) \quad \text{e} \\ \hat{\gamma} &= (\phi_0 \circ \gamma) * (g_1 \circ \phi_1 \circ \gamma) * (g_1 \circ g_2 \circ \phi_2 \circ \gamma) * \dots \\ &\dots * (g_1 \circ \dots \circ g_{n-1} \circ \phi_{n-1} \circ \gamma) * (g_1 \circ \dots \circ g_n \circ \phi_n \circ \gamma)\end{aligned}$$

Dove il lettore perdonerà un piccolo abuso di notazione a favore di un'espressione più chiara e tuttavia non leggera.

Adesso siamo pronti a definire la mappa dell'enunciato come

$$\begin{aligned}f(x) &:= g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ \dots \circ g_{n-1} \circ g_n \circ \phi_n(x) = \\ &= g_1 \circ \dots \circ g_n \circ \phi_n \circ \gamma(1) = \hat{\gamma}(1)\end{aligned}$$

**PARTE II:**  $f$  è ben posta.

Per verificare che  $f$  è ben definita mostriamo

A)  $f(x)$  non dipende dalla scelta del ricoprimento di carte  $\{U_i\}$ .

B)  $f(x)$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma$  tra  $x_0$  e  $x$ .

**A)** Inseriamo una nuova carta  $\psi : V \rightarrow X$  tra  $U_{i-1}$  e  $U_i$  nel nostro ricoprimento con  $\gamma(t) \in V$  per  $t \in ]a, b[$ .

Allora

$$a_{i-1} < a < a_i < b_{i-1} < b < b_i$$

Siano dunque  $h_{i-1}, h_i$  gli unici elementi di  $G$  tali che  $h_{i-1} \circ \psi = \phi_{i-1}$  sulla componente connessa di  $U_{i-1} \cap V$  contenen-

te  $\gamma(]a, b_{i-1}[)$  e  $h_i \circ \phi_i = \psi$  sulla componente di  $V \cap U_i$  contenente  $\gamma(]a_i, b[)$ . Allora sulla componente di  $V \cap U_i \cap U_{i-1}$  contenente  $\gamma(]a_i, b_{i-1}[)$  ho:

$$h_{i-1} \circ h_i \circ \phi_i = h_{i-1} \circ \psi = \phi_{i-1}$$

Dalla proprietà di estensione unica segue  $h_{i-1}h_i = g_i$ .

La nuova espressione  $f_V$  di  $f$  ottenuta dal raffinamento  $\{U_i\} \cup \{V\}$  è:

$$\begin{aligned} f_V(x) &= g_1 \circ \dots \circ g_{i-1} \circ h_{i-1} \circ h_i \circ g_{i+1} \circ \dots \circ g_n \circ \phi_n(x) = \\ &= g_1 \circ \dots \circ g_{i-1} \circ g_i \circ g_{i+1} \circ \dots \circ g_n \circ \phi_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

Ciò mostra che  $f$  è invariante per raffinamento del ricoprimento.

Consideriamo ora due ricoprimenti distinti di  $\gamma$  fatti di carte

$$\mathcal{R}' = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \leq n} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}'' = \{\psi_j : V_j \rightarrow X\}_{j \leq m}$$

da cui ricaviamo  $f'(x)$  e  $f''(x)$  rispettivamente. Poiché  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{R}''$  condividono lo stesso raffinamento  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$ , abbiamo  $f'(x) = f''(x)$ . Dunque  $f$  è invariante rispetto al ricoprimento scelto.

**B)** Consideriamo  $\eta$  un altro cammino in  $M$  tra  $x_0$  e  $x$ , siccome  $M$  è semplicemente connesso  $\eta$  e  $\gamma$  sono omotopi mediante  $H$  omotopia di cammini.

Usando la compattezza di  $[0, 1]^2$ ,  $H$  può essere spezzata in un numero finito di omotopie di cammini  $H_1, \dots, H_m$  tali che per ogni  $H_k$  esiste una partizione  $0 = t_{k_0} < t_{k_1} < \dots < t_{k_{n(k)}} = 1$  tale che per ogni cammino intermedio  $H_{k,s} = H_k(\cdot, s)$ , l'immagine di  $[t_{k_i}, t_{k_{i+1}}]$  è contenuta in una sola carta  $U_{k,i}$ . Dunque cammini omotopi mediante le 'piccole' omotopie  $H_k$  restituiscono lo stesso valore di  $f$ .

Congiungendo tali omotopie in fila ritroviamo  $H$  e concludiamo che  $\eta$  e  $\gamma$  portano alla stessa funzione:

$f(x)$  non dipende dal cammino scelto.

Infine mostriamo che  $f$  è una  $(G, X)$ -mappa.

Sia  $x \in M$  e  $\phi : V \rightarrow X$  una carta con  $x \in V$ , abbiamo

$f = g_1 \dots g_n \circ \psi_n$  in un intorno  $U_n$  di  $x$ , ed esiste  $h \in G$  tale che  $\psi_n \circ \phi^{-1}|_{\phi(U_n \cap V)} = h|_{\phi(U_n \cap V)}$ . Dunque

$$f \circ \phi^{-1}|_{\phi(U_n \cap V)} = g_1 \dots g_n \circ \psi_n \circ \phi^{-1}|_{\phi(U_n \cap V)} = g_1 \dots g_n h|_{\phi(U_n \cap V)}$$

□

*Osservazione 1.4.* La mappa  $f$  non è unica, anzi dipende dalla carta di partenza  $\phi : U_0 \rightarrow X$ .

**Lemma 1.2.** *La  $(G, X)$ -mappa  $f$  è unica a meno di post-composizione per un elemento  $g \in G$*

*Dimostrazione.* Siano  $f, f' : M \rightarrow X$  come nella proposizione, costruite a partire da  $\psi : U_0 \rightarrow X$ ,  $u_0 \in U_0$  e  $\phi : V_0 \rightarrow X$ ,  $v_0 \in V_0$  rispettivamente.

Scegliamo dunque un cammino  $\gamma$  tra  $v_0$  e  $u_0$  e un suo ricoprimento finito di carte  $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \leq n}$  con  $\phi_n = \psi$ . Poiché  $f'$  non dipende dal cammino o dal ricoprimento scelti risulta

$$f'(u_0) = \hat{\gamma}(1) = g_1 \circ \dots \circ g_n \circ \psi(u_0) = g \circ f(u_0)$$

con  $g \equiv g_1 \cdot \dots \cdot g_n$ .

Analogamente, per ogni  $x \in M$ , scegliendo il cammino  $\eta \equiv \gamma * \delta$ , con  $\delta \in \Omega(M, u_0, x)$ , e ampliando il ricoprimento di  $\gamma$  ad un ricoprimento

di  $\eta$  abbiamo

$$f'(x) = g_1 \circ \dots \circ g_n \circ h_1 \circ \dots \circ h_m \circ \psi_m(x) = g \circ f(x)$$

Dunque vale  $f' = g \circ f$ . □

*Osservazione 1.5.* Sebbene  $f$  e  $f'$  siano formalmente funzioni differenti, sono compatibili con la medesima  $(G, X)$ -struttura su  $M$  e perciò moralmente possono essere considerate come la stessa cosa.

**Definizione 1.7** (Germoglio). Sia  $x \in X$ , e due  $(G, X)$ -carte

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow X, \quad \phi_2 : U_2 \rightarrow X$$

intorno ad  $x$ , diciamo che  $\phi_1$  è in relazione con  $\phi_2$  se esiste un intorno aperto  $V \subset U_1 \cap U_2$  di  $x$  e un elemento  $g \in G$  tale che

$$\phi_1|_V = g \circ \phi_2|_V$$

e chiamiamo germoglio  $\psi$  intorno ad  $x$  una classe di equivalenza di  $(G, X)$ -carte intorno ad  $x$ .

## 1.4 Sviluppante ed Olonomia

Sia  $M$  una  $(G, X)$ -varietà e  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  il suo rivestimento universale. Vediamo che  $\tilde{M}$  eredita una  $(G, X)$ -struttura da  $M$  dal *pullback* delle carte di  $M$  tramite  $p$ .

**Lemma 1.3.** *Sia  $M$  una  $(G, X)$ -varietà, esiste una struttura naturale di  $(G, X)$ -varietà sul suo rivestimento universale  $\tilde{M}$*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in \tilde{M}$  e  $p(x) \in M$  la sua immagine mediante il rivestimento  $p$ , consideriamo  $\phi_{p(x)} : U_{p(x)} \rightarrow X$  una carta contenuta in un aperto banalizzante  $U \subset M$ . Sia  $V_x$  la componente connessa di  $p^{-1}(U)$  contenente  $x$ , sappiamo che  $V_x \cong U$  tramite  $p$ . Allora  $\tilde{\phi}_x := \phi_{p(x)} \circ p|_{V_x} : V_x \rightarrow X$  è un omeomorfismo sulla sua immagine. La collezione  $\{\tilde{\phi}_x : V_x \rightarrow X\}_{x \in M}$  è un  $(G, X)$ -atlante per  $\tilde{M}$ . Infatti siano

$$\tilde{\phi}_1 = \phi_1 \circ p|_{V_1} : V_1 \rightarrow X \quad \tilde{\phi}_2 = \phi_2 \circ p|_{V_2} : V_2 \rightarrow X$$

con  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , si ha:

$$\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1} = \phi_1 \circ p \circ p^{-1} \circ \phi_2^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$$

Dunque  $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$  è una mappa localmente  $G$ . □

*Osservazione 1.6.* il gruppo delle trasformazioni di rivestimento  $\pi_1(M)$  agisce su  $\tilde{M}$  tramite  $\gamma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ , con  $\gamma.x = \tilde{\gamma}_x(1)$  dove  $\tilde{\gamma}_x$  è l'unico sollevamento del laccio  $\gamma \in \pi(M, p(x))$  con punto iniziale  $x$ .

Allora, poiché  $p \circ \gamma = \gamma$ , presa  $\phi_{p(x)}$  carta su  $M$  e  $\phi_x$  carta su  $\tilde{M}$  come nella dimostrazione precedente, abbiamo che

$$\phi_{\gamma.x} = \phi_x \circ \gamma^{-1} : \gamma(V_x) \rightarrow X$$

è una carta e, sia  $y' = \gamma.y \in \gamma(V_x)$  vale  $\phi_{\gamma.x}(y') = \phi_x(y)$ .

**Teorema 1.4** (Teorema di Sviluppo). *Sia  $M$  una  $(G, X)$ -varietà con rivestimento universale  $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$  e gruppo fondamentale  $\pi_1(M)$ .*

*Allora esiste una coppia  $(\mathbf{dev}, h)$ , dove  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  è una  $(G, X)$ -mappa e  $h : \pi_1(M) \rightarrow G$  è un omomorfismo di gruppi tali che per*

ogni  $\gamma \in \pi_1(M)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & X \\ \gamma \downarrow & & \downarrow h(\gamma) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & X \end{array}$$

è un diagramma commutativo.

Inoltre, sia  $(\mathbf{dev}', h')$  un'altra coppia con tali proprietà, allora  $\exists g \in G$  tale che  $\mathbf{dev}' = g \circ \mathbf{dev}$  e  $h' = g \circ h \circ g^{-1}$ . Ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & X & \xrightarrow{g} & X \\ \gamma \downarrow & & \downarrow h(\gamma) & & \downarrow h'(\gamma) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

è commutativo.

Una coppia  $(\mathbf{dev}, h)$  come nell'enunciato è detta *coppia sviluppante* e l'omomorfismo  $h$  è chiamato *olonomia* o *rappresentazione olonomica*.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $p(x_0) \in M$ . Dalla proposizione 1.1 otteniamo una mappa  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  centrata sulla carta  $\phi_{p(x_0)} : U_{p(x_0)} \rightarrow X$ . Sia  $\gamma \in \pi(M, p(x))$  calcoliamo  $\mathbf{dev}(\gamma.x_0)$  scegliendo come cammino  $\tilde{\gamma}_{x_0}$  e un suo ricoprimento di carte  $\mathcal{R} = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \leq n}$  tale che  $\phi_n = \phi_{\gamma.x_0} : \gamma(U_{x_0}) \rightarrow X$  come definita nell'osservazione 1.6. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{dev}(\gamma.x_0) &= g_1 g_2 \dots g_n \circ \phi_{\gamma.x_0}(\gamma.x_0) = \\ &= g_1 g_2 \dots g_n \circ \phi_{x_0}(x_0) = g_\gamma \circ \mathbf{dev}(x_0) \end{aligned}$$

Consideriamo ora  $x \in \tilde{M}$  qualsiasi, prendiamo una carta  $\psi_x$  intorno ad  $x$ , un cammino  $\eta$  tra  $x_0$  e  $x$  ed un suo ricoprimento  $\{\psi_j\}_{j \leq m}$  con

$\psi_m = \psi_x$ : abbiamo  $\mathbf{dev}(x) = h_1 \dots h_m \psi_x(x)$ .

Calcoliamo dunque  $\mathbf{dev}(\gamma.x)$  scegliendo come cammino  $\tilde{\gamma}_{x_0} * \eta'$ , dove  $\eta' = \gamma \circ \eta$ , e ricoprimento  $\mathcal{R} \cup \{\psi'_i\}_{i \leq m}$ , dove  $\psi'_i = \psi_i \circ \gamma^{-1} : \gamma(V_i) \rightarrow X$ , in particolare  $\psi'_m = \psi_{\gamma.x}$ . Abbiamo:

$$\mathbf{dev}(\gamma.x) = g_1 \dots g_n h'_1 \dots h'_m \psi_{\gamma.x}(\gamma.x) = g_\gamma \circ h'_1 \dots h'_m \psi_x(x)$$

Osservando che  $\psi'_{j-1} \circ \psi_j^{-1} = \psi_{j-1} \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \psi_j^{-1} = \psi_{j-1} \circ \psi_j^{-1}$  abbiamo che  $h'_j = h_j \quad \forall j$ .

Dunque

$$\mathbf{dev}(\gamma.x) = g_\gamma \circ h_1 \dots h_m \psi_x(x) = g_\gamma \circ \mathbf{dev}(x)$$

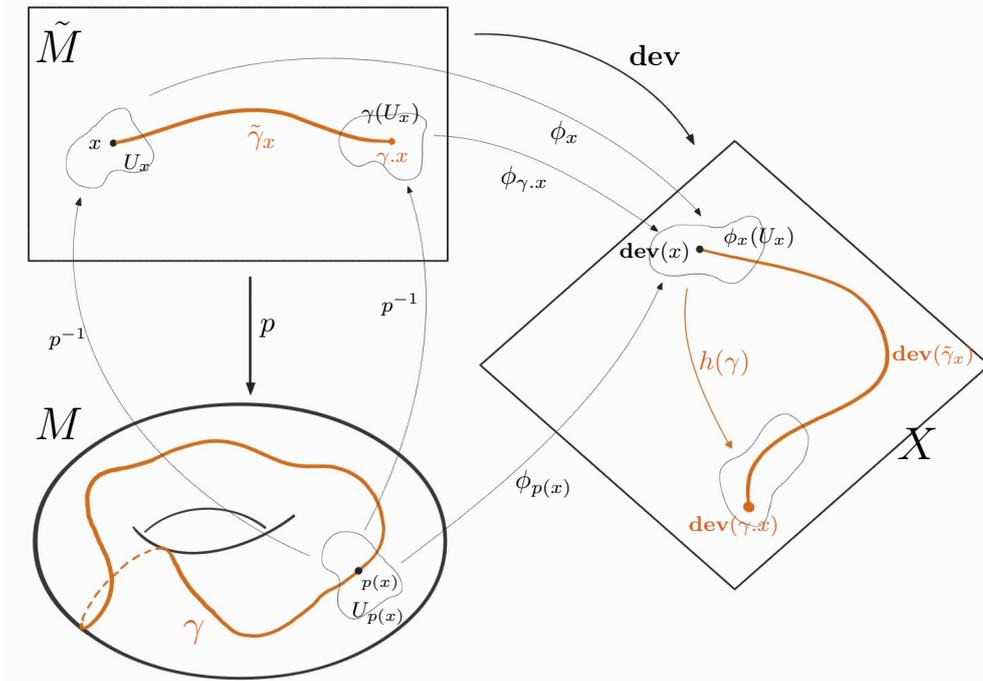


Figura 1.4: Un elemento  $\gamma \in \mathbb{Z}^2 = \pi_1(M)$  dove  $M$  è il toro  $T^2$ , viene mandato dall'olonomia in una rototraslazione di  $\mathbb{R}^2$ .

Poiché il sollevamento  $\tilde{\gamma}_x$  è unico e  $\mathbf{dev}$  è invariante per cammini

omotopi, è ben definita l'applicazione  $h : \pi_1(M) \rightarrow G$ ,  $h(\gamma) = g_\gamma$ . Inoltre  $h$  è un omomorfismo di gruppi infatti, presi  $\gamma, \eta \in \pi_1(M)$ ,  $\gamma * \eta$  solleva a  $\tilde{\gamma}_x * \tilde{\eta}_{\gamma.x}$  e  $(\gamma * \eta).x = \eta.(\gamma.x)$ , quindi

$$\mathbf{dev}((\gamma * \eta).x) = \mathbf{dev}(\eta.(\gamma.x)) = g_\eta \circ \mathbf{dev}(\gamma.x) = g_\eta g_\gamma \circ \mathbf{dev}(x)$$

Ossia

$$h(\gamma * \eta) = h(\eta) \cdot h(\gamma)$$

Dunque  $h$  è un omomorfismo e la coppia  $(\mathbf{dev}, h)$  fa commutare il diagramma nell'enunciato.

Sia  $(\mathbf{dev}', h')$  un'altra coppia sviluppante, dal lemma 1.2 segue immediatamente che  $\mathbf{dev}' = g \circ \mathbf{dev}$ . Da ciò abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{dev}'(\gamma.x) &= g \circ \mathbf{dev}(\gamma.x) = g \circ h(\gamma) \circ \mathbf{dev}(x) = \\ &= g \circ h(\gamma) \circ g^{-1} \circ \mathbf{dev}'(x) = h'(\gamma) \circ \mathbf{dev}'(x) \end{aligned}$$

Ossia  $h' = g \circ h \circ g^{-1}$ .

□

*Osservazione 1.7.* Possiamo costruire  $\mathbf{dev}$  e  $\mathbf{dev}'$  attorno allo stesso punto base  $x \in \tilde{M}$  a partire da carte appartenenti allo stesso germoglio. Ciò dimostra che il comportamento locale della sviluppante la determina globalmente in modo univoco.

## 1.5 Significato della Coppia Sviluppante

Concludiamo questo primo capitolo parlando brevemente del significato della coppia sviluppante e le ragioni che la motivano.

**Definizione 1.8** (Gruppo di Olonomia). Chiamiamo gruppo di olonomia il sottogruppo  $\Gamma \leq G$  dato dall'immagine di  $h$ .

**Lemma 1.5.** *Preso una coppia sviluppante  $(\mathbf{dev}, h)$ , se  $\mathbf{dev}$  è un omeomorfismo allora valgono:*

1.  $h$  è un isomorfismo tra  $\pi_1(M)$  e  $\Gamma$ .
2.  $\Gamma$  agisce su  $\mathbf{dev}(\tilde{M})$  in modo propriamente discontinuo.

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\gamma \in \pi_1(M)$  tale che  $h(\gamma) = 1$ . Dal teorema 1.4 abbiamo:

$$\mathbf{dev}(\gamma.x) = h(\gamma).\mathbf{dev}(x) = \mathbf{dev}(x)$$

Da  $\mathbf{dev}$  iniettivo segue  $\gamma.x = x$  e poiché  $\pi_1(M)$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo abbiamo  $\gamma = 1$ . Dunque  $h$  è iniettivo e di conseguenza un isomorfismo sull'immagine  $\Gamma$ .

2. Osserviamo innanzitutto che  $\mathbf{dev}(\tilde{M})$  è invariante per  $\Gamma$ , infatti per ogni  $\gamma \in \pi_1(M)$  e  $x \in \tilde{M}$  abbiamo

$$h(\gamma)(\mathbf{dev}(x)) = \mathbf{dev}(\gamma.x) \in \mathbf{dev}(\tilde{M})$$

Sia ora  $y \in \mathbf{dev}(\tilde{M})$  e  $x = \mathbf{dev}^{-1}(y)$ , preso  $\gamma \in \pi_1(M)$  con  $\gamma \neq 1$ , esiste un intorno aperto  $V \subset \tilde{M}$  di  $x$  tale che  $\gamma(V) \cap V = \emptyset$ . Applicando  $\mathbf{dev}$  abbiamo

$$h(\gamma)(\mathbf{dev}(V)) = \mathbf{dev}(\gamma(V))$$

per punto 1 sappiamo  $h(\gamma) \neq 1$ , quindi

$$\begin{aligned} h(\gamma)(\mathbf{dev}(V)) \cap \mathbf{dev}(V) &= \mathbf{dev}(\gamma(V)) \cap \mathbf{dev}(V) = \\ &= \mathbf{dev}(\gamma(V) \cap V) = \emptyset \end{aligned}$$

Dunque  $\mathbf{dev}(V)$  è un intorno aperto di  $y$  tale che per ogni  $g \in \Gamma$  vale  $g(\mathbf{dev}(V)) \cap \mathbf{dev}(V) = \emptyset$ .

□

Abbiamo definito la funzione sviluppante  $\mathbf{dev}$  a partire dalla  $(G, X)$ -struttura su  $\tilde{M}$ , ereditata da  $M$ , e abbiamo visto che è unica a meno di un elemento di  $G$ . Adesso mostriamo che, dimenticandoci della  $(G, X)$ -struttura presente su  $M$ , possiamo usare la coppia sviluppante per definire un atlante, e quindi una struttura, su  $M$ .

**Proposizione 1.6.** *Data una  $(G, X)$ -varietà  $M$ , equipaggiata con una coppia  $(\mathbf{dev}, h)$ , esiste un  $(G, X)$ -atlante su  $M$  per cui i cambi di coordinate stanno in  $\Gamma$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  proiezione di rivestimento, consideriamo un ricoprimento aperto  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  di  $M$  fatto da aperti banalizzanti e per ognuno una componente connessa  $\tilde{U}_\alpha$  della sua controimmagine. Dunque possiamo riscrivere  $p^{-1}(U_\alpha)$  come

$$p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{\gamma \in \pi_1(M)} \gamma(\tilde{U}_\alpha)$$

e ricavare un ricoprimento aperto  $\{\gamma(\tilde{U}_\alpha)\}_{\alpha \in I, \gamma \in \pi_1(M)}$  di  $\tilde{M}$ .

Osserviamo che  $\mathbf{dev}$ , in quanto  $(G, X)$ -mappa, è un omeomorfismo locale e a meno di restringere gli aperti  $U_\alpha$  possiamo supporre che  $\mathbf{dev}|_{\tilde{U}_\alpha}$  sia un omeomorfismo sull'immagine per ogni  $\alpha \in I$ . Ponendo

$p^{-1} = (p|_{\tilde{U}_\alpha})^{-1} : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ , definiamo ora le funzioni

$$\phi_{\gamma,\alpha} := \mathbf{dev} \circ \gamma \circ p^{-1} : U_\alpha \rightarrow X$$

che per costruzione sono omeomorfismi sull'immagine.

Consideriamo  $U_\alpha, U_\beta$  con intersezione non nulla e due funzioni  $\phi_{\gamma,\alpha}, \phi_{\gamma',\beta}$  come sopra. Allora su  $U_\alpha \cap U_\beta$  vale:

$$\begin{aligned} \phi_{\gamma',\beta} \circ \phi_{\gamma,\alpha}^{-1} &= \mathbf{dev} \circ \gamma' \circ p^{-1} \circ p \circ \gamma^{-1} \circ \mathbf{dev}^{-1} = \\ &= \mathbf{dev} \circ (\gamma' \gamma^{-1}) \circ \mathbf{dev}^{-1} \stackrel{\eta = \gamma' \gamma^{-1}}{=} \mathbf{dev} \circ \eta \circ \mathbf{dev}^{-1} = \\ &= h(\eta) \circ \mathbf{dev} \circ \mathbf{dev}^{-1} = h(\eta) \in \Gamma \end{aligned}$$

Dunque la collezione  $\{(U_\alpha, \phi_{\gamma,\alpha})\}$  forma un atlante su  $M$  i cui cambi di carte stanno in  $\Gamma$ .

□

L'atlante così ottenuto è compatibile con quello già presente su  $M$ , individuando dunque la stessa  $(G, X)$ -struttura. Invece  $\Gamma$  è il più piccolo sottogruppo di  $G$  tale che  $M$  ammette una  $(\Gamma, X)$ -struttura.

*Osservazione 1.8.* Sviluppanti diverse costruite a partire da carte nello stesso germoglio producono su  $M$  atlanti diversi, ma compatibili, che raffinano ad un'unica  $(G, X)$ -struttura. Viceversa, carte appartenenti a germogli differenti producono strutture differenti. Ciò descrive una relazione tra i germogli intorno ad un punto base  $x \in \tilde{M}$  e le possibili  $(G, X)$ -strutture su una varietà  $M$  che verrà approfondita nei prossimi capitoli.



## Capitolo 2

# Strutture Proiettive Convesse

Dopo aver definito gli strumenti volti allo studio delle strutture geometriche nel capitolo precedente, sostituendo  $X$  con  $\mathbb{RP}^2$  e  $G$  con  $PGL_3(\mathbb{R})$  introduciamo le cosiddette *strutture proiettive*. Infine, dopo aver trattato i fondamentali e dato le definizioni necessarie ci dedicheremo allo studio delle strutture proiettive convesse.

### 2.1 Fondamenti di Geometria Proiettiva

Preso un campo  $\mathbb{K}$ , e il relativo spazio euclideo  $\mathbb{K}^{n+1}$ , lo spazio proiettivo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  è in sostanza l'insieme di tutte le rette in  $\mathbb{K}^{n+1}$  passanti per l'origine. Di conseguenza, le applicazioni da questo spazio in sé stesso portano rette in altre rette di  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Un tipo particolare di tali applicazioni sono le trasformazioni proiettive e lo studio degli oggetti invarianti sotto la loro azione prende il nome di *geometria proiettiva*. Per dare maggiore contesto e rigore a questa frase occorrono alcune definizioni, che daremo restringendoci al caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.1** (Spazio Proiettivo Reale). Sia  $n \in \mathbb{N}^+$  definiamo lo

spazio proiettivo reale come

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

dove

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tale che } v' = \lambda v$$

Dato  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , la sua classe di equivalenza è indicata in *coordinate omogenee* con  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ .

Consideriamo ora  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ , ognuno dei suoi elementi è univocamente associato ad un isomorfismo di  $\mathbb{R}^{n+1}$  che preserva le rette passanti per l'origine. Di conseguenza la trasformazione lineare data da  $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$  passa al quoziente e induce  $[v] \mapsto [A(v)]$  su  $\mathbb{RP}^n$ .

*Esempio 2.1.* Una matrice generica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

induce  $g : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ ,  $g([x : y]) = [ax + by : cx + dy]$ .

Osserviamo che multipli scalari della stessa matrice inducono la stessa trasformazione  $g$ .

**Definizione 2.2** (Gruppo Proiettivo). Chiamiamo *gruppo lineare proiettivo* o *gruppo proiettivo* il quoziente

$$PGL_{n+1}(\mathbb{R}) = GL_{n+1}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$$

Esso conserva la struttura di gruppo in quanto  $\mathbb{R}^* \trianglelefteq GL_{n+1}(\mathbb{R})$ . Chiamiamo *trasformazioni proiettive* le trasformazioni indotte dai suoi elementi su  $\mathbb{RP}^n$ .

Il gruppo  $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  agisce dunque sullo spazio proiettivo con azione:

$$\begin{aligned} PGL_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^n &\rightarrow \mathbb{RP}^n \\ ([A], [v]) &\mapsto [A(v)] \end{aligned}$$

Osserviamo che le trasformazioni proiettive sono automorfismi di  $\mathbb{RP}^n$  e la loro azione è transitiva, infatti dati  $v, v' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , abbiamo sempre una classe di matrici  $[A] \in PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  tale che  $A(\text{span}(v)) = \text{span}(v')$ , ossia  $[A] \cdot [v] = [v']$ .

Il nostro interesse va in particolare al caso  $n = 2$ :  $\mathbb{RP}^2$  è chiamato *piano proiettivo* e vediamo che il suo gruppo di trasformazioni proiettive  $PGL_3(\mathbb{R})$  gode di un utile isomorfismo.

**Lemma 2.1.**  $PGL_3(\mathbb{R}) \cong SL_3(\mathbb{R})$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'applicazione continua, nonché omomorfismo di gruppi

$$\begin{aligned} \phi : GL_3(\mathbb{R}) &\rightarrow SL_3(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \frac{1}{\det(A)^{\frac{1}{3}}} A \end{aligned}$$

Abbiamo che  $\phi$  è suriettiva e  $\text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}^*$ . Perciò  $\phi$  passa al quoziente e otteniamo l'omeomorfismo e isomorfismo di gruppi  $\Phi : PGL_3(\mathbb{R}) \rightarrow SL_3(\mathbb{R})$  che associa ad ogni classe di matrici il suo unico rappresentante con determinante 1.  $\square$

D'ora in avanti lavoreremo sul piano proiettivo con  $SL_3(\mathbb{R})$ , usando tacitamente l'isomorfismo  $\Phi$ .

*Osservazione 2.1.* In generale  $PGL_n(\mathbb{R}) \not\cong SL_n(\mathbb{R})$ , infatti per  $n$  pari non possiamo estrarre la radice di un determinante negativo, dunque non è possibile definire  $\phi$  come nella dimostrazione.

La coppia  $(SL_3(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$  è del tipo  $(G, X)$  descritto nel primo capitolo e gli oggetti invarianti per l'azione di  $SL_3(\mathbb{R})$  definiscono una geometria detta *geometria proiettiva*.

## 2.2 Estensione Unica e Coppia Sviluppante

Per applicare il teorema 1.4 dobbiamo prima verificare che l'azione di  $SL_3(\mathbb{R})$  soddisfi la proprietà di estensione unica.

**Definizione 2.3** (Indipendenza Proiettiva). Diciamo che  $n+1$  punti  $[v_0], \dots, [v_n] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$  sono proiettivamente indipendenti se  $v_0, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definizione 2.4** (Sistema di Riferimento). Diciamo che una  $(n+2)$ -upla  $\{[v_0], [v_1], \dots, [v_n], [v_{n+1}]\}$  di punti in  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  forma un sistema di riferimento quando per ogni  $(n+1)$ -upla del tipo

$$[v_0], \dots, [v_{i-1}], [v_{i+1}], \dots, [v_{n+1}] \text{ con } i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$$

è fatta di punti proiettivamente indipendenti.

*Esempio 2.2.* Un sistema di riferimento in  $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$  è dato dai punti:

$$p_0 = [1 : 1 : 1], p_1 = [1 : 0 : 0], p_2 = [0 : 1 : 0], p_3 = [0 : 0 : 1]$$

Una trasformazione proiettiva  $[A] \in PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  manda sistemi di riferimento in sistemi di riferimento: presa una  $(n+1)$ -upla  $[v_0], \dots, [v_{i-1}], [v_{i+1}], \dots, [v_{n+1}]$  da un sistema di riferimento, abbiamo che

$$[A(v_0)], \dots, [A(v_{i-1})], [A(v_{i+1})], \dots, [A(v_{n+1})]$$

sono ancora proiettivamente indipendenti, dunque  $[A(v_0)], \dots, [A(v_{n+1})]$  è un sistema di riferimento. Ciò significa che  $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  agisce sui sistemi di riferimento e in particolare agisce in modo proprio, ossia vale il seguente:

**Lemma 2.2.** *Siano  $[A], [B] \in PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S} = \{[v_0], \dots, [v_{n+1}]\}$  un sistema di riferimento per  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ , se vale*

$$[A] \cdot [v_i] = [B] \cdot [v_i] \quad \text{per ogni } i \in \{0, \dots, n+1\}$$

allora  $[A] = [B]$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che sia  $[v] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$

$$[A] \cdot [v] = [B] \cdot [v] \iff [A][B^{-1}] \cdot [v] = [v] \iff [AB^{-1}] \cdot [v] = [v].$$

Dunque è sufficiente mostrare

$$[A] \cdot [v_i] = [v_i] \text{ per ogni } i \Rightarrow [A] = [I_{n+1}].$$

Sappiamo che  $[A(v_i)] = [v_i] \iff A(v_i) = \lambda_i v_i$ , in particolare abbiamo  $A(v_0) = \lambda_0 v_0$ . Poiché  $\mathcal{S}$  è un sistema di riferimento possiamo scrivere  $v_0 = a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1}$  con  $a_i \neq 0 \forall i$ . Applicando  $A$  e moltiplicando per  $\lambda_0$  otteniamo:

$$\lambda_0 v_0 = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} \tag{2.1}$$

$$\lambda_0 v_0 = a_1 \lambda_0 v_1 + \dots + a_{n+1} \lambda_0 v_{n+1} \tag{2.2}$$

Sottraendo la 2.2 dalla 2.1 abbiamo

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_0)v_1 + \dots + a_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_0)v_{n+1}$$

Per la lineare indipendenza di  $v_1, \dots, v_{n+1}$  vale

$$a_i(\lambda_i - \lambda_0) = 0 \stackrel{a_i \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_i = \lambda_0 \quad \forall i$$

Concludiamo  $A = \lambda_0 I_{n+1}$  e quindi  $[A] = [\lambda_0 I_{n+1}] = [I_{n+1}]$ .  $\square$

Consideriamo ora  $U \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  una mappa *localmente proiettiva*, ossia localmente- $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ , e supponiamo che esistano  $g, g' \in PGL_{n+1}(\mathbb{R})$  tali che

$$g|_U = f = g'|_U.$$

Sia  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  la proiezione sul proiettivo,  $\pi^{-1}(U)$  è aperto in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e in quanto tale contiene una base  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Presa una combinazione lineare  $v_0 = a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1}$  tale che  $v_0 \in \pi^{-1}(U)$  e  $a_i \neq 0 \forall i$  risulta che  $\{[v_0], [v_1], \dots, [v_{n+1}]\} \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  è un sistema di riferimento. Allora poiché

$$g([v_i]) = g'([v_i]) \quad \forall i$$

concludiamo per lemma precedente  $g = g'$ , cioè  $f$  soddisfa la proprietà di estensione unica.

Tornando quindi allo studio della coppia  $(SL_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}\mathbb{P}^2)$ , enunciamo alcune importanti definizioni e teoremi già affrontati adattandole a questo caso particolare.

**Definizione 2.5** (Atlante Proiettivo). Sia  $M$  una varietà topologica e siano:

- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un ricoprimento aperto di  $M$

- $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{RP}^2\}_{\alpha \in I}$  una collezione di *carte proiettive*, ossia funzioni tali che  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$  sia un omeomorfismo  $\forall \alpha \in I$ .

Diciamo che  $\mathcal{A} = \{\{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}\}$  è un *atlante proiettivo* su  $M$  se per ogni  $U_\alpha, U_\beta$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , vale:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow X \quad \text{sia localmente } - SL_3(\mathbb{R}).$$

**Definizione 2.6** (Struttura Proiettiva). Diciamo che una *struttura proiettiva* su  $M$  è un atlante proiettivo  $\mathcal{A}$  massimale.

Diremo che una tale coppia  $(M, \mathcal{A})$  è una *varietà proiettiva*. Invece chiameremo *mappa proiettiva* o  $\mathbb{RP}^2$  – *mappa* una funzione  $f : M \rightarrow M'$  tra varietà proiettive che sia una  $(SL_3(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$ -mappa secondo la definizione 1.5. Grazie alla proprietà di estensione unica abbiamo infine:

**Teorema 2.3.** *Sia  $M$  una varietà proiettiva con rivestimento universale  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  e gruppo fondamentale  $\pi_1(M)$ .*

*Allora esiste una coppia  $(\mathbf{dev}, h)$ , dove  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  è una mappa proiettiva e  $h : \pi_1(M) \rightarrow SL_3(\mathbb{R})$  è un omomorfismo di gruppi tali che per ogni  $\gamma \in \pi_1(M)$*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & \mathbb{RP}^2 \\ \gamma \downarrow & & \downarrow h(\gamma) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

*è un diagramma commutativo.*

*Inoltre, sia  $(\mathbf{dev}', h')$  un'altra coppia con tali proprietà, allora esiste una trasformazione proiettiva  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  tale che  $\mathbf{dev}' = g \circ \mathbf{dev}$  e*

$h' = g \circ h \circ g^{-1}$ . Ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{RP}^2 \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow h(\gamma) & & \downarrow h'(\gamma) \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{RP}^2
 \end{array}$$

è commutativo.

*Osservazione 2.2.* Se  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  è un omeomorfismo, allora per lemma 1.5  $\Gamma$  è un sottogruppo discreto di  $SL_3(\mathbb{R})$  che agisce su  $\mathbf{dev}(\tilde{M})$  in modo propriamente discontinuo e  $\pi_1(M) \cong \Gamma$ .

## 2.3 Strutture Proiettive Convesse

Preso un piano  $L \subset \mathbb{R}^3$ , la sua proiezione sul piano proiettivo  $\mathbb{RP}^2$  è una *linea proiettiva*  $l = \pi(L)$  omeomorfa a  $\mathbb{RP}^1$ . Poiché per ogni due rette distinte passanti per l'origine in  $\mathbb{R}^3$  esiste un unico piano che le racchiude entrambe, per ogni coppia di punti  $p, q \in \mathbb{RP}^2$  esiste un'unica linea proiettiva  $l$  che li congiunge. Il complementare  $\mathbb{RP}^2 \setminus l$  di una linea proiettiva è chiamato *piano affine*. Un esempio privilegiato di piano affine sono le *carte affini*

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_i \neq 0\} \quad \text{con } i = 0, 1, 2$$

omeomorfe ad  $\mathbb{R}^2$  mediante

$$\begin{aligned}\varphi_0[x_0 : x_1 : x_2] &= \left( \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \\ \varphi_1[x_0 : x_1 : x_2] &= \left( \frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \right) \\ \varphi_2[x_0 : x_1 : x_2] &= \left( \frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right)\end{aligned}$$

Poiché per ogni piano affine  $\mathbb{A}$  esiste una trasformazione proiettiva che lo mappa su una carta affine, abbiamo  $\mathbb{A} \cong \mathbb{R}^2$ .

**Definizione 2.7** (Insieme Convesso). Sia  $S \subset \mathbb{RP}^2$  diciamo che  $S$  è convesso se esiste un piano affine  $\mathbb{A} \subset \mathbb{RP}^2$  tale che  $S \subseteq \mathbb{A}$  e per ogni coppia di punti  $p, q \in S$ , il segmento di linea proiettiva  $\overline{pq}$  è contenuto in  $S$ , o equivalentemente,  $\pi^{-1}(S)$  è un cono convesso in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

*Osservazione 2.3.* Il piano  $\mathbb{RP}^2$  stesso non è convesso, invece lo è ogni piano affine  $\mathbb{RP}^2 \setminus l$ .

*Osservazione 2.4.* Una trasformazione proiettiva  $g$  manda convessi in convessi:  $g$  solleva ad un'unica applicazione lineare  $\tilde{g} \in SL_3(\mathbb{R})$  tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{RP}^2\end{array}$$

commuta; da ciò segue che preso un convesso  $S \subset \mathbb{RP}^2$ , abbiamo che  $\pi^{-1}(g(S))$  coincide con il cono convesso  $\tilde{g}(\pi^{-1}(S))$ , quindi  $g(S)$  è convesso secondo la definizione 2.7.

Utilizzando la nozione di convessità in  $\mathbb{RP}^2$  possiamo definire un particolare tipo di strutture proiettive che saranno l'argomento d'interesse delle prossime sezioni.

**Definizione 2.8** (Struttura Proiettiva Convessa). Data una struttura proiettiva su una varietà  $M$  e una coppia sviluppante  $(\mathbf{dev}, h)$  con

$$\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \quad \text{e} \quad h : \pi_1(M) \rightarrow SL_3(\mathbb{R})$$

diciamo che tale struttura è una *struttura proiettiva convessa* quando  $\mathbf{dev}$  mappa  $\tilde{M}$  su un aperto e convesso  $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$  e  $\mathbf{dev} : \tilde{M} \rightarrow \Omega$  è un omeomorfismo.

*Osservazione 2.5.* La definizione è una buona definizione poiché non dipende dalla scelta della coppia  $(\mathbf{dev}, h)$ . Infatti, sia  $\mathbf{dev}'$  un'altra sviluppante, abbiamo  $\mathbf{dev}'(\tilde{M}) = g(\mathbf{dev}(\tilde{M}))$  con  $g$  trasformazione proiettiva e quindi  $\mathbf{dev}'(\tilde{M})$  convesso.

Come già abbiamo osservato,  $\Gamma$  è un gruppo discreto che agisce su  $\Omega$  in modo libero e propriamente discontinuo, quindi la proiezione al quoziente  $q : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$  è anche un rivestimento ed esiste un atlante proiettivo naturale sul quoziente dato da  $q^{-1}$  ristretta agli aperti banalizzanti. Osserviamo ora che dati  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$  e  $x, y \in \Omega$  con  $x = \mathbf{dev}(\tilde{x})$  e  $y = \mathbf{dev}(\tilde{y})$  vale:

$$\begin{aligned} p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) &\iff \exists \gamma \in \pi_1(M) : \gamma.\tilde{x} = \tilde{y} \iff \\ &\iff \exists \gamma \in \pi_1(M) : \mathbf{dev}(\gamma.\tilde{x}) = \mathbf{dev}(\tilde{y}) \iff \\ &\iff \exists h(\gamma) \in \Gamma : h(\gamma).x = y \iff q(x) = q(y). \end{aligned}$$

Dunque  $\mathbf{dev}$  induce un omeomorfismo  $F : M \rightarrow \Omega/\Gamma$  che fa commu-

tare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\mathbf{dev}} & \Omega \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{F} & \Omega/\Gamma \end{array}$$

Prendiamo ora due aperti banalizzanti  $U \subset M$  e  $V \subset \Omega/\Gamma$  e le carte

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{RP}^2 \quad \text{e} \quad \varphi = (q|_V)^{-1} : V \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

Sapendo che  $\phi$  solleva ad una carta  $\tilde{\phi}$  su  $\tilde{M}$ , abbiamo che sull'insieme  $\phi(U \cap F^{-1}(V))$  vale:

$$\begin{aligned} \varphi \circ F \circ \phi^{-1} &= \varphi \circ q \circ \mathbf{dev} \circ p^{-1} \circ \phi^{-1} = \\ &= q^{-1} \circ q \circ \mathbf{dev} \circ \tilde{\phi}^{-1} = \mathbf{dev} \circ \tilde{\phi}^{-1}. \end{aligned}$$

Poiché  $\mathbf{dev}$  è una mappa proiettiva,  $\varphi \circ F \circ \phi^{-1} = \mathbf{dev} \circ \tilde{\phi}^{-1}$  è localmente proiettiva, quindi  $F$  è un omeomorfismo proiettivo che ci permette di identificare  $M$  e  $\Omega/\Gamma$ .

*Esempio 2.3* (Struttura Convessa sul Toro). Otteniamo senza grande sforzo una struttura proiettiva convessa sul toro  $T^2$  mandando il suo rivestimento universale  $\mathbb{R}^2$  in un piano affine. Consideriamo per esempio

$$\begin{aligned} \mathbf{dev} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow U_0 \\ (x, y) &\mapsto [1 : x : y] \end{aligned}$$

Sappiamo che  $\mathbf{dev}$  è un omeomorfismo poiché inversa di una carta

affine. Preso ora  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 = \pi_1(T^2)$  vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{dev}((n, m).(x, y)) &= \mathbf{dev}(x + n, y + m) = \\ &= [1 : x + n : y + m] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ x + n \\ y + m \end{pmatrix} \right] = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot [1 : x : y] \end{aligned}$$

dunque l'olonomia  $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow SL_3(\mathbb{R})$  associa a  $(n, m)$  una matrice come sopra e il risultante gruppo d'olonomia è

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

sottogruppo discreto di  $SL_3(\mathbb{R})$  isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ .

## Capitolo 3

# Strutture sui Pantaloni

Tra le varie superfici su cui possiamo costruire una struttura proiettiva convessa, un esempio di notevole importanza è quello dei *pantaloni*  $P$ , la superficie ottenuta rimuovendo 3 punti dalla sfera  $S^2$ . Tramite una retrazione di  $P$  otteniamo  $\bar{P}$ , una superficie che ha come bordo 3 curve chiuse e disgiunte.

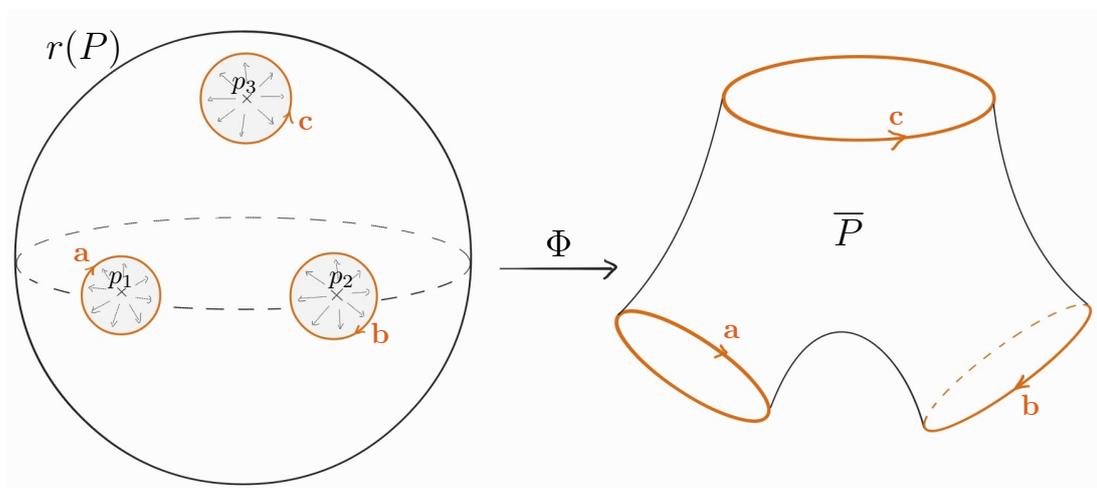


Figura 3.1: Applicando la retrazione  $r : S^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\} \rightarrow S^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ , allarghiamo i buchi sulla sfera fino alle curve  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Tramite l'omeomorfismo  $\Phi$  otteniamo  $\bar{P}$ .

Si può mostrare che una qualsiasi superficie  $S$  di genere  $g \geq 2$  può essere ottenuta incollando varie copie di  $\bar{P}$  lungo i loro bordi ed è

possibile ricavare una struttura proiettiva convessa su  $S$  "incollando" tra loro le strutture convesse presenti su  $\overline{P}$ .

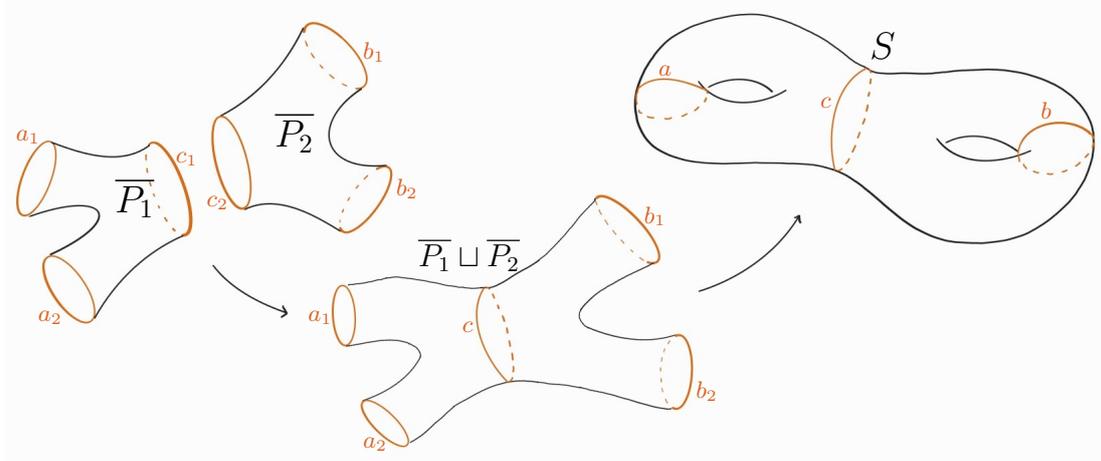


Figura 3.2: Incollando i due pantaloni  $\overline{P}_1$  e  $\overline{P}_2$  lungo i bordi  $c_1$  e  $c_2$  ottengo  $\overline{P}_1 \sqcup \overline{P}_2$ . Incollando anche  $a_1$  con  $a_2$  e  $b_1$  con  $b_2$  otteniamo una superficie  $S$  di genere 2.

Poiché tal tipo di costruzioni va al di là degli scopi di questa tesi, in questo capitolo ci limiteremo a studiare strutture proiettive convesse su  $P$  e come queste possano essere parametrizzate.

### 3.1 Bandiere

Dato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$ , diciamo che una *bandiera completa* in  $V$  è una collezione di sottospazi  $F = \{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  con

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

e tali che  $\dim(V_i) = i$ . Dunque posto  $V = \mathbb{R}^3$  una bandiera completa è individuata da una retta  $r = \text{Span}\{v\}$  per  $v \in \mathbb{R}^3$  e un piano  $L \subset \mathbb{R}^3$  che contenga  $r$ . Pensando  $L$  come il nucleo di un'applicazione del

duale  $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ , possiamo rappresentare le bandiere di  $\mathbb{R}^3$  come la collezione

$$\{(v, \phi) \in \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \mid \phi(v) = 0\}$$

Osserviamo che ogni applicazione duale  $\phi$  individua una linea proiettiva  $l$  data dalla proiezione del suo nucleo, ossia  $l = \pi(Ker(\phi))$  e poiché i multipli di  $\phi$  diversi da zero hanno lo stesso nucleo, determinano la stessa linea proiettiva.

**Definizione 3.1** (Duale). Chiamiamo duale di  $\mathbb{RP}^2$  il quoziente

$$(\mathbb{RP}^2)^* = (\mathbb{R}^3)^* \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$$

Data la corrispondenza tra un elemento  $[\phi] \in (\mathbb{RP}^2)^*$  e una linea proiettiva  $l \subset \mathbb{RP}^2$ , possiamo interpretare il duale proiettivo come l'insieme di tutte le linee proiettive. Usando questa notazione, la nozione di bandiera si può estendere facilmente sul piano proiettivo ottenendo l'insieme

$$\mathcal{F} = \{([v], [\phi]) \in \mathbb{RP}^2 \times (\mathbb{RP}^2)^* \mid \phi(v) = 0\}$$

di tutte le bandiere in  $\mathbb{RP}^2$ .

**Lemma 3.1.**  $SL_3(\mathbb{R})$  agisce in modo transitivo su  $\mathcal{F}$ .

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che, date due bandiere  $F = ([v], [\phi])$  e  $F' = ([v'], [\phi'])$ , esiste  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  tale che

$$g.F = (g.[v], g.[\phi]) = ([g(v)], [\phi \circ g^{-1}]) = ([v'], [\phi']) = F'.$$

Sia  $L = Ker(\phi)$ , completiamo  $\{v\}$  per ottenere una base  $\{v, w\}$  di  $L$ , poi completiamo questa per ottenere una base  $\mathcal{B} = \{v, w, u\}$  di  $\mathbb{R}^3$  e,

facendo lo stesso per  $v'$  e  $\phi'$ , otteniamo  $\mathcal{B}' = \{v', w', u'\}$ . Sia quindi  $A \in GL_3(\mathbb{R})$  la matrice che porta  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{B}'$ , ossia tale che:

$$A(v) = v', \quad A(w) = w', \quad A(u) = u'.$$

Dunque dividendo  $A$  per  $\det(A)^{\frac{1}{3}}$  ottengo un elemento  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  che porta  $F$  in  $F'$ .  $\square$

*Osservazione 3.1.* Nella dimostrazione, i complementamenti  $w, u$  e  $w', u'$  non sono unici, infatti esiste più di una matrice in  $SL_3(\mathbb{R})$  che porta  $F$  in  $F'$ .

**Definizione 3.2** (Posizione Generica). Due bandiere  $F_1 = ([v_1], [\phi_1])$  e  $F_2 = ([v_2], [\phi_2])$  in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  si trovano in posizione generica se

$$\text{Span}\{v_1\} + \text{Ker}(\phi_2) = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \text{Span}\{v_2\} + \text{Ker}(\phi_1) = \mathbb{R}^3$$

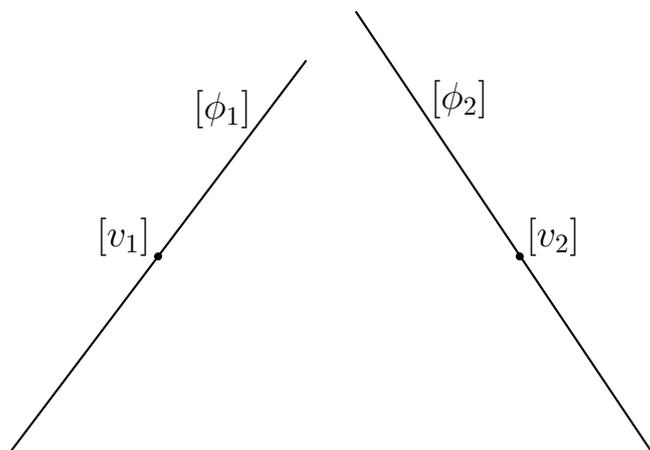


Figura 3.3: Due bandiere  $F_1$  e  $F_2$  in posizione generica.

*Osservazione 3.2.* Due bandiere  $F_1$  e  $F_2$  non si trovano in posizione generica se  $[v_1] = [v_2]$ ,  $[\phi_1] = [\phi_2]$ , oppure se  $v_i \in \text{Ker}(\phi_1) \cap \text{Ker}(\phi_2)$  per  $i = 1, 2$ .

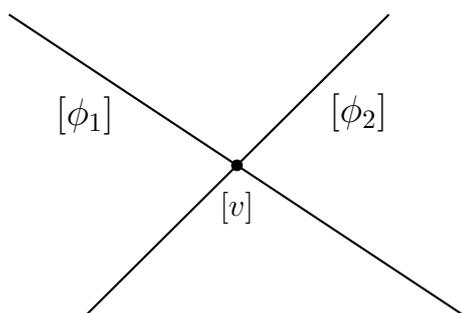
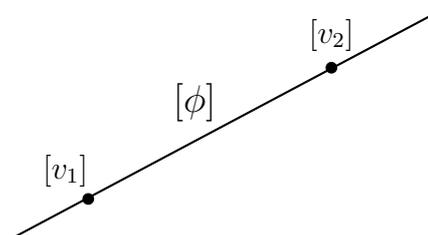
Figura 3.4: Caso  $[v_1] = [v_2] = [v]$ .Figura 3.5: Caso  $[\phi_1] = [\phi_2] = [\phi]$ .

Figura 3.6: Esempi di bandiere in posizioni non generiche.

La nozione di posizione generica può anche essere estesa, con alcuni accorgimenti, ad una  $n$ -upla di bandiere proiettive.

**Definizione 3.3.** Diciamo che una collezione di  $n$  bandiere  $\{F_1, \dots, F_n\}$  in  $\mathbb{RP}^2$  con  $n > 2$ , diciamo che si trovano in posizione generica se

1. per ogni coppia  $(i, j)$  con  $1 \leq i < j \leq n$ , le bandiere  $F_i$  e  $F_j$  si trovano in posizione generica.
2. per ogni terna di indici  $(i, j, k)$  i punti  $[v_i]$ ,  $[v_j]$  e  $[v_k]$  sono proiettivamente indipendenti.

Indichiamo le  $n$ -uple di bandiere in  $\mathbb{RP}^2$  in posizione generica con

$$\mathcal{F}^{(n)} = \{(F_1, \dots, F_n) \mid F_1, \dots, F_n \text{ si trovano in posizione generica}\} \subset \mathcal{F}^n$$

**Lemma 3.2.**  $SL_3(\mathbb{R})$  agisce in modo transitivo su  $\mathcal{F}^{(2)}$ .

*Dimostrazione.* Prese due coppie di bandiere  $(F_1, F_2)$  e  $(F'_1, F'_2)$  in  $\mathcal{F}^{(2)}$ , con  $F_i = ([v_i], [\phi_i])$  e  $F'_i = ([v'_i], [\phi'_i])$ . Poiché  $F_1$  e  $F_2$  si trovano in posizione generica vale  $[\phi_1] \neq [\phi_2]$ , ossia  $\text{Ker}(\phi_1) \neq \text{Ker}(\phi_2)$ , quindi abbiamo

$$\dim(\text{Ker}(\phi_1) \cap \text{Ker}(\phi_2)) = 1.$$

Sia  $u \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{Span}\{u\} = \text{Ker}(\phi_1) \cap \text{Ker}(\phi_2)$ ,

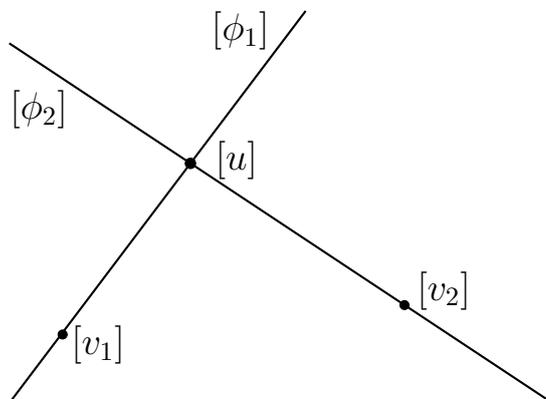


Figura 3.7: Il punto proiettivo  $[u]$  è l'intersezione tra le linee  $[\phi_1]$  e  $[\phi_2]$ .

da  $[v_1] \neq [v_2]$  segue che  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$  è una base per  $\mathbb{R}^3$ . Adottando lo stesso procedimento per la seconda coppia ottengo un'altra base  $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, u'\}$ . Sia  $A \in GL_3(\mathbb{R})$  la matrice che porta  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{B}'$ , normalizzando il determinante di  $A$  otteniamo  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  tale che

$$g.(F_1, F_2) = (F'_1, F'_2).$$

□

*Osservazione 3.3.* L'elemento  $g$  ottenuto nella dimostrazione non è unico, infatti affinché una matrice  $A$  porti  $(F_1, F_2)$  in  $(F'_1, F'_2)$  è sufficiente che valgano

$$g(v_1) = \lambda_1 v'_1, \quad g(v_2) = \lambda_2 v'_2 \quad \text{e} \quad g(u) = \lambda_3 u'$$

Imponendo  $\det(A) = 1$  possiamo esprimere  $\lambda_1$  in funzione di  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  e quindi abbiamo 2 gradi di libertà nella scelta di  $g$ .

### 3.2 Triple Ratio

Un elemento  $T \in \mathcal{F}^{(3)}$  consiste in una terna di bandiere  $(F_1, F_2, F_3)$  in posizione generica con  $F_i = ([v_i], [\phi_i])$ .

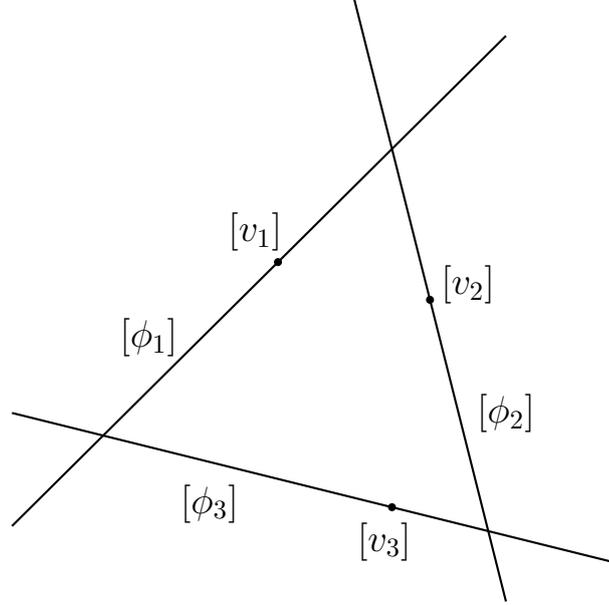


Figura 3.8: Esempio di una terna di bandiere  $T = ([v_i], [\phi_i])_{i=1,2,3}$  in posizione generica.

Contrariamente a quanto abbiamo visto per  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{(2)}$ , l'azione di  $SL_3(\mathbb{R})$  non è transitiva, ma esiste un utile invariante proiettivo che aiuta a distinguere terne appartenenti alla stessa orbita.

**Definizione 3.4** (Triple Ratio). Sia  $T \in \mathcal{F}^{(3)}$ ,  $T = (F_1, F_2, F_3)$ , dove  $F_i = ([v_i], [\phi_i]) \quad \forall i = 1, 2, 3$ , chiamiamo *triple ratio* il numero

$$\tau(T) = \frac{\phi_1(v_2)\phi_2(v_3)\phi_3(v_1)}{\phi_1(v_3)\phi_2(v_1)\phi_3(v_2)}$$

Osserviamo che tale  $\tau(T)$  è ben definito, infatti poiché ogni  $\phi_i$  e  $v_j$  appaiono esattamente una volta sia a numeratore che a denominatore, perciò eventuali costanti moltiplicative si semplificano tra loro. Inoltre

la genericità di  $T$  garantisce che  $\phi_i(v_j) \neq 0$  per ogni  $i \neq j$ , quindi  $\tau$  è sempre definito e diverso da 0.

Mostriamo ora che  $\tau$  è un invariante completo in  $\mathcal{F}^{(3)}$ , ossia che vale il seguente:

**Proposizione 3.3.** *Siano  $T, T' \in \mathcal{F}^{(3)}$  vale*

$$\exists g \in SL_3(\mathbb{R}) \text{ tale che } g.T = T' \iff \tau(T) = \tau(T')$$

*Dimostrazione.* Mostriamo entrambe le implicazioni.

$\Rightarrow$ ] Il gruppo  $SL_3(\mathbb{R})$  agisce su  $\mathbb{RP}^2$  come  $g.[v] = [g(v)]$  e su  $(\mathbb{RP}^2)^*$  come  $g.[\phi] = [\phi \circ g^{-1}]$ . Quindi presi  $[v'_i] = g.[v_i]$  e  $[\phi'_j] = g.[\phi_j]$  vale

$$\phi'_j(v'_i) = (\phi_j \circ g^{-1})(g(v_i)) = \phi_j(v_i)$$

E di conseguenza

$$\tau(T) = \tau(F_1, F_2, F_3) = \tau(g.F_1, g.F_2, g.F_3) = \tau(g.T)$$

$\Leftarrow$ ] Mostriamo che presa una terna  $T = ([v_i], [\phi_i])_{i=1,2,3}$  e triple ratio  $\tau$  è nella stessa orbita di una terna  $T'$  di forma

$$T' = (([e_1], [e_2^*]), ([e_2], [e_1^*]), ([e_1 + e_2 + e_3], [\tau e_1^* + e_2^* - (1 + \tau)e_3^*]))$$

dove  $\{e_1, e_2, e_3\}$  è la base canonica per  $\mathbb{R}^3$  e  $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  la rispettiva base duale.

Per Lemma 3.2 esiste  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  tale che  $g.([v_1], [\phi_1]) = ([e_1], [e_2^*])$  e  $g.([v_2], [\phi_2]) = ([e_2], [e_1^*])$ . Prendiamo dunque la base data da  $\{v_1, v_2, u\}$ ,

con  $u \in \text{Ker}(\phi_1) \cap \text{Ker}(\phi_2)$  e osserviamo che necessariamente vale

$$g(v_1) = \lambda_1 e_1, \quad g(v_2) = \lambda_2 e_2 \quad \text{e} \quad g(u) = \lambda_3 e_3$$

Inoltre, poiché  $\phi_1(v_3) \neq 0$  e  $\phi_2(v_3) \neq 0$ , deduciamo che

$$v_3 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \quad \text{con} \quad a_i \neq 0 \quad \forall i$$

Poiché i coefficienti  $\lambda_i$  sono arbitrari, possiamo scegliere  $\lambda_i = \frac{1}{a_i}$  per ogni  $i = 1, 2, 3$  ottenendo quanto segue:

$$g(v_3) = a_1 g(v_1) + a_2 g(v_2) + a_3 g(u) = e_1 + e_2 + e_3$$

Sia  $\psi = \phi_3 \circ g^{-1}$ , esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $\psi = a e_1^* + b e_2^* + c e_3^*$  e poiché  $b = \psi(e_2) = \phi_3(v_2) \neq 0$ , a meno di dividere per  $b$  possiamo considerare  $\psi = a e_1^* + e_2^* + c e_3^*$ . Imponendo  $\psi(g(v_3)) = 0$  ricaviamo  $c = -1 - a$  e quindi  $\psi = a e_1^* + e_2^* + (-1 - a) e_3^*$ .

Per implicazione precedente vale  $\tau = \tau(T) = \tau(g.T)$ , dunque

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{e_2^*(e_2) \cdot e_1^*(e_1 + e_2 + e_3) \cdot (a e_1^* + e_2^* - (1 + a) e_3^*)(e_1)}{e_2^*(e_1 + e_2 + e_3) \cdot e_1^*(e_1) \cdot (a e_1^* + e_2^* - (1 + a) e_3^*)(e_2)} = \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot a}{1 \cdot 1 \cdot 1} = a \end{aligned}$$

e quindi  $g.T = T'$ .

Concludiamo allora che, date due terne  $T_1$  e  $T_2$  con stesso triple ratio  $\tau$ , esistono  $g_1, g_2 \in SL_3(\mathbb{R})$  tali che  $g_1.T_1 = T'$  e  $g_2.T_2 = T'$ , quindi  $g := g_2^{-1} \cdot g_1$  porta  $T_1$  in  $T_2$ .

□

*Osservazione 3.4.* Normalizzando una terna  $T \in \mathcal{F}^{(3)}$  come nella di-

mostrazione mandiamo  $\phi_3$  in  $\psi = \tau e_1^* + e_2^* - (1 + \tau)e_3^*$  e osserviamo che per  $\tau = -1$  abbiamo  $\psi(e_1 + e_2 + e_3) = 0$  contraddicendo la genericità di  $T'$ . Dunque solo i valori in  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$  sono ammissibili per  $\tau$ .

Osserviamo che tre linee proiettive  $l_1, l_2, l_3$  sollevano a tre piani  $L_1, L_2, L_3$  passanti per l'origine che dividono  $\mathbb{R}^3$  in 8 componenti connesse, che sono convesse e a due a due opposte all'origine. Proiettandole su  $\mathbb{RP}^2$  vengono identificate a due a due e otteniamo 4 componenti connesse e convesse del piano proiettivo.

Prendiamo ora una terna  $T \in \mathcal{F}^{(3)}$  con cross ratio  $\tau$ , a meno di una trasformazione proiettiva possiamo assumere che  $T$  sia la terna normalizzata come nella dimostrazione di 3.3. Le linee proiettive di  $T$  dividono  $\mathbb{RP}^2$  nelle componenti:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \{[v] \in \mathbb{RP}^2 \mid \phi_1(v), \phi_2(v), \phi_3(v) > 0\} \\ Q_1 &= \{[v] \in \mathbb{RP}^2 \mid \phi_1(v) < 0 \text{ e } \phi_2(v), \phi_3(v) > 0\} \\ Q_2 &= \{[v] \in \mathbb{RP}^2 \mid \phi_2(v) < 0 \text{ e } \phi_1(v), \phi_3(v) > 0\} \\ Q_3 &= \{[v] \in \mathbb{RP}^2 \mid \phi_2(v) < 0 \text{ e } \phi_1(v), \phi_2(v) > 0\} \end{aligned}$$

Osserviamo che se  $\tau > 0$  allora abbiamo:

$$\begin{cases} \phi_2(v_1) = e_1^*(e_1) = 1 > 0 \\ \phi_3(v_1) = (\tau e_1^* + e_2^* - (1 + \tau)e_3^*)(e_1) = \tau > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_2) = e_2^*(e_2) = 1 > 0 \\ \phi_3(v_2) = (\tau e_1^* + e_2^* - (1 + \tau)e_3^*)(e_2) = 1 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_3) = e_2^*(e_1 + e_2 + e_3) = 1 > 0 \\ \phi_2(v_3) = e_1^*(e_1 + e_2 + e_3) = 1 > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Da (1) abbiamo che  $[v_1]$  sta sulla porzione di  $[\phi_1]$  tra  $Q_0$  e  $Q_1$ . Analogamente da (2) e (3) deduciamo rispettivamente che  $[v_2]$  sta tra  $Q_0$  e  $Q_2$ , mentre  $[v_3]$  sta tra  $Q_0$  e  $Q_3$ .

Concludiamo che se  $\tau$  è positivo, allora  $[v_1], [v_2], [v_3]$  stanno sul bordo della stessa componente connessa e convessa  $Q_0$ . Ciò non è vero se  $\tau < 0$  poiché in tal caso avremmo  $v_1$  tra  $Q_1$  e  $Q_3$ .

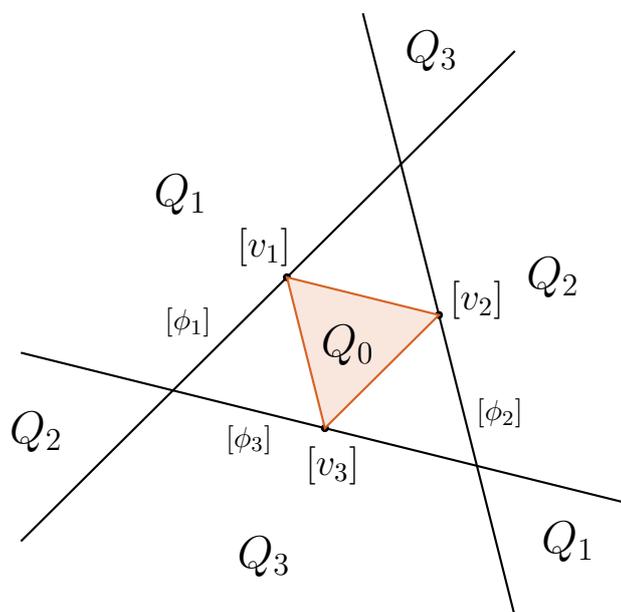


Figura 3.9: Terna generica di bandiere con triple ratio positivo.

Riassumiamo il tutto nella seguente osservazione:

*Osservazione 3.5.* I punti  $[v_1], [v_2]$  e  $[v_3]$  di una terna  $T \in \mathcal{F}^{(3)}$  giacciono ognuno su un lato del triangolo convesso  $Q_0$  individuato dalle linee  $[\phi_1], [\phi_2]$  e  $[\phi_3]$  se e solo se  $\tau > 0$ . In tal caso, il triangolo di vertici  $[v_i]$  è interamente incluso in  $Q_0$ , come raffigurato in figura 3.9.

### 3.3 Cross Ratio

Siano  $[\phi_1], [\phi_2]$  due linee proiettive distinte e siano  $[w_1], [w_2] \in \mathbb{RP}^2$  punti proiettivi distinti e tali che  $[w_j] \notin [\phi_i]$  per ogni  $i, j \in \{1, 2\}$ . Indichiamo con  $\mathcal{Q}$  l'insieme delle configurazioni di punti e linee proiettive come descritte, ossia:

$$\mathcal{Q} = \{([w_1], [w_2], [\phi_1], [\phi_2]) \mid w_i \in \mathbb{RP}^2, \phi_j \in (\mathbb{RP}^2)^* \text{ e } \phi_j(w_i) \neq 0\}$$

**Definizione 3.5** (Cross Ratio). Data una configurazione  $Q \in \mathcal{Q}$ , con  $Q = ([w_1], [w_2], [\phi_1], [\phi_2])$ , chiamiamo *cross ratio* il numero:

$$[w_1, w_2, \phi_1, \phi_2] = \frac{\phi_1(w_1)\phi_2(w_2)}{\phi_1(w_2)\phi_2(w_1)}$$

che indichiamo anche con  $\mathbf{CR}(Q)$ .

Poiché le  $\phi_i$  e i  $w_j$  appaiono una sola volta sia a numeratore che a denominatore, eventuali costanti moltiplicative si semplificano e quindi il cross ratio è ben definito. Un elemento  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  agisce su  $\mathcal{Q}$  portando una configurazione  $Q = ([w_1], [w_2], [\phi_1], [\phi_2])$  in  $g.Q = ([g(w_1)], [g(w_2)], [\phi_1 \circ g^{-1}], [\phi_2 \circ g^{-1}])$ .

*Osservazione 3.6.* Le trasformazioni proiettive preservano il cross ratio, infatti vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{CR}(g.Q) &= \frac{(\phi_1 \circ g^{-1})(g(w_1)) \cdot (\phi_2 \circ g^{-1})(g(w_2))}{(\phi_1 \circ g^{-1})(g(w_2)) \cdot (\phi_2 \circ g^{-1})(g(w_1))} = \\ &= \frac{\phi_1(w_1)\phi_2(w_2)}{\phi_1(w_2)\phi_2(w_1)} = \mathbf{CR}(Q) \end{aligned}$$

Tuttavia, avere lo stesso cross ratio non è una condizione sufficiente affinché due configurazioni  $Q, Q'$  appartengano alla stessa orbita.

Il cross ratio di  $Q = ([w_1], [w_2], [\phi_1], [\phi_2])$  è positivo quando  $\phi_1(w_1)\phi_1(w_2)$  e  $\phi_2(w_1)\phi_2(w_2)$  hanno lo stesso segno. Dal punto di vista geometrico ciò si traduce in una condizione sulla posizione di  $[w_1]$  e  $[w_2]$ . Gli iperpiani  $Ker(\phi_1)$  e  $Ker(\phi_2)$  dividono  $\mathbb{R}^3$  in quattro componenti connesse e convesse che sono a due a due opposte all'origine. Passando al proiettivo da quattro diventano due:  $C_+$  e  $C_-$ .

*Osservazione 3.7.* Il cross ratio di  $Q = ([w_1], [w_2], [\phi_1], [\phi_2])$  è positivo quando  $\frac{\phi_1(w_1)}{\phi_1(w_2)}$  e  $\frac{\phi_2(w_1)}{\phi_2(w_2)}$  hanno lo stesso segno. Dal punto di vista geometrico ciò si traduce in una condizione sulla posizione di  $[w_1]$  e  $[w_2]$ : il cross ratio è positivo se  $[w_1], [w_2]$  appartengono entrambi alla stessa componente connessa  $C_+$  o  $C_-$  e negativo altrimenti. Diamo in figura 3.10 un disegno impreciso, ma intuitivo di ciò in  $\mathbb{RP}^2$ .

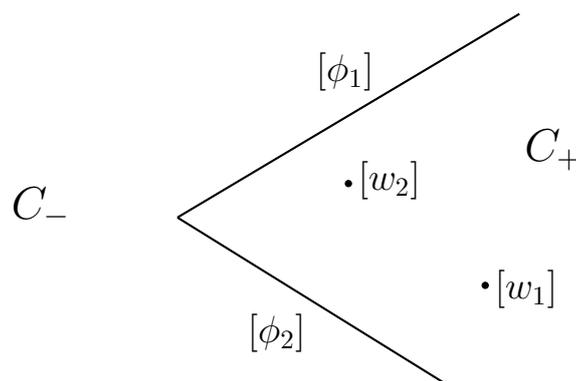


Figura 3.10: In questo caso  $[w_1]$  e  $[w_2]$  si trovano entrambi in  $C_+$ , risultando in un cross ratio positivo.

### 3.4 Costruzione di una Struttura Convessa su $P$

Torniamo a lavorare sui pantaloni  $P$ , prendendo come modello la sfera  $S^2$  tolti 3 punti  $p_1, p_2, p_3$ . Tramite la proiezione stereografica che mappa  $S^2 \setminus \{p_3\}$  sul piano, abbiamo  $P \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm 1\}$ , dunque  $\pi_1(P) = \mathbb{F}_2$ , dove  $\mathbb{F}_2 = \langle A, B \rangle$  è il gruppo libero sui due generatori  $A$  e  $B$ , corrispondenti ai lacci intorno  $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente.

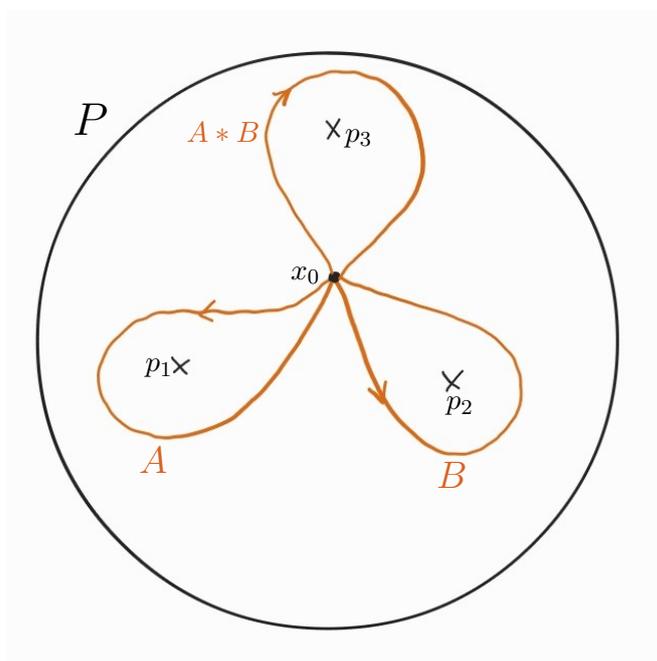


Figura 3.11: I generatori di  $\pi_1(P, x_0)$  sono i lacci  $A$  e  $B$  intorno a  $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente.

Consideriamo ora gli archi  $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$  che congiungono a due a due i punti  $p_i$  rimossi dalla sfera seguendo traiettorie geodetiche. Questi formano una *triangolazione ideale* di  $P$ , ossia una collezione di archi  $\mu = \{\mu_i\}$  tale che ogni componente di  $P \setminus \mu$  è omeomorfa ad un disco aperto ed è delimitata da un numero di archi minore o uguale a 3. La triangolazione su  $P$  è data da 2 triangoli ideali  $T_1, T_2$  che condividono gli stessi 3 archi come bordi.

Essendo uno spazio connesso e localmente semplicemente connesso,  $P$  ammette un rivestimento universale. In particolare possiamo rivestire i pantaloni usando il disco unitario  $\mathbb{D}$  e ottenere quindi il rivestimento  $p : \mathbb{D} \rightarrow P$ . Allora la triangolazione ideale su  $P$  solleva ad una triangolazione ideale del disco fatta di numerabili triangoli ideali. Il gruppo fondamentale  $\pi_1(P)$  agisce su tali triangoli tramite trasformazioni di rivestimento in modo propriamente transitivo e li partiziona in due orbite:  $p^{-1}(T_1)$  e  $p^{-1}(T_2)$ .

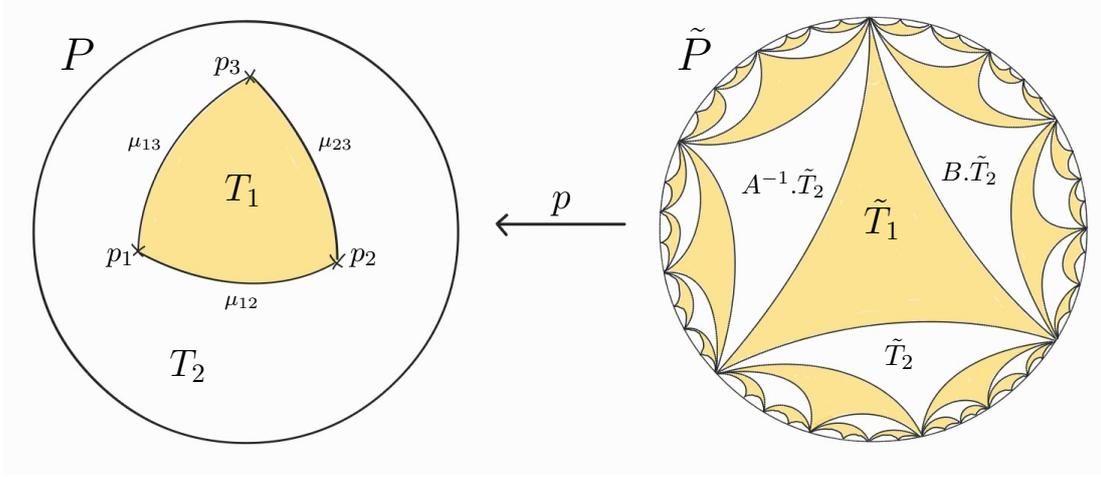


Figura 3.12:  $P$  si divide nei due triangoli  $T_1$  e  $T_2$ . Sollevando tutto a  $\tilde{P}$  vediamo la distinzione tra le orbite sul disco grazie ai colori.

Fissiamo quindi  $\tilde{T}_1$  una componente connessa di  $p^{-1}(T_1)$  e  $\tilde{T}_2$  una componente connessa di  $p^{-1}(T_2)$  adiacenti, ossia che condividano un lato. Allora abbiamo:

$$\tilde{P} = \left( \coprod_{\gamma \in \pi_1(P)} \gamma(\tilde{T}_1) \right) \cup \left( \coprod_{\gamma \in \pi_1(P)} \gamma(\tilde{T}_2) \right)$$

Osservando poi che  $\pi_1(P) = \langle A, B \rangle$  ha cardinalità numerabile possiamo ordinare tutti i triangoli che tassellano  $\tilde{P}$  in una sequenza  $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $P_k = \bigcup_{n \leq k} \mathcal{T}_n$  sia unione connessa di triangoli adiacenti per

ogni  $k \in \mathbb{N}$  e che quindi  $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  formi un'esaustione in poligoni di  $\tilde{P}$ , ossia valgono:

$$P_k \subset P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k = \tilde{P}$$

Inoltre, a meno di rinumerare i triangoli, possiamo supporre che  $P_0 = \tilde{T}_1$  w  $P_1 = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$ .

Per costruire una struttura proiettiva su  $P$  abbiamo bisogno di costruire una coppia sviluppante. Per farlo possiamo mappare  $\tilde{P}$  su  $\mathbb{RP}^2$  con un omeomorfismo locale, che diventerà la nostra sviluppante **dev**, e poi identificare tra loro le immagini dei triangoli  $\mathcal{T}_n$  tra loro con trasformazioni proiettive coerenti con l'azione di  $\pi_1(P)$ . Inoltre, se **dev** è iniettiva e **dev**( $\tilde{P}$ ) è convesso, ciò che otteniamo è una struttura proiettiva convessa su  $P$ .

Vediamo adesso che ogni struttura convessa su  $P$  può essere costruita in modo geometrico a partire da 8 numeri reali positivi, usando gli strumenti introdotti in precedenza. Questo ci porta ad enunciare il teorema conclusivo di questa tesi:

**Teorema 3.4.** *Le strutture proiettive convesse su  $P$  sono parametrizzate da  $(\mathbb{R}^+)^8$ .*

*Dimostrazione.* Partendo da un elemento

$$(\tau_1, \tau_2, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in (\mathbb{R}^+)^8$$

mostriamo come possiamo costruire induttivamente una successione di sviluppanti parziali **dev**<sup>(n)</sup> :  $P_n \rightarrow \mathbb{RP}^2$  che mappano il poligono ideale  $P_n$  su un convesso proiettivo. Poi mostriamo che il limite di

questa successione dà una sviluppante  $\mathbf{dev} : \tilde{P} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  iniettiva con immagine convessa.

**PARTE I:** COSTRUZIONE DI  $\mathbf{dev}^{(n)}$ .

Consideriamo il triangolo ideale  $P_0 \subset \tilde{P}$ , usando una carta affine possiamo mappare omeomorficamente  $P_0$  su un triangolo proiettivo in  $\mathbb{RP}^2$  al quale abbiamo tolto i vertici. Possiamo supporre senza perdere generalità che tale triangolo abbia vertici

$$p_1 = [e_1], \quad p_2 = [e_2], \quad p_3 = [e_1 + e_2 + e_3]$$

indichiamo i suoi lati (meno i vertici  $p_i$ ) con  $l_{12}, l_{13}$  e  $l_{2,3}$ , il suo interno con  $\Delta_{p_1 p_2 p_3}$  e  $\overline{\Delta_{p_1 p_2 p_3}}$  la loro unione, ossia un triangolo senza i vertici.

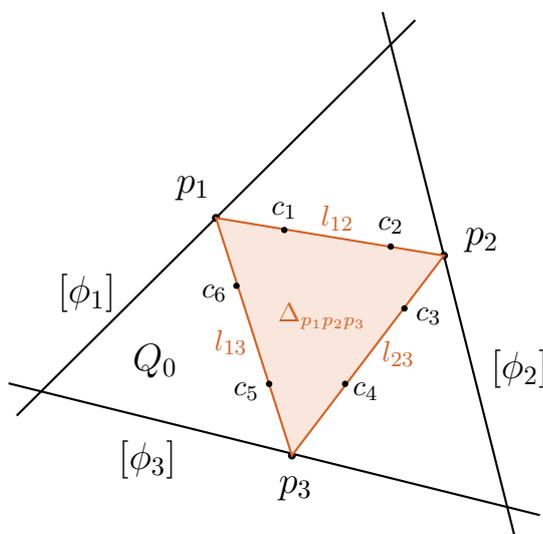


Figura 3.13: Triangolo iniziale decorato con i  $c_i$ .

Abbinando ad ogni vertice le rispettive linee proiettive

$$[\phi_1] = [e_2^*], \quad [\phi_2] = [e_1^*], \quad [\phi_3] = [\tau_1 e_1^* + e_2^* - (1 + \tau_1) e_3^*]$$

otteniamo una terna di  $\mathcal{F}^{(3)}$  che ha triple ratio  $\tau_1$  e poiché  $\tau_1 > 0$  sappiamo che  $\Delta_{p_1 p_2 p_3}$  e i lati  $l_{jk}$  sono contenuti in un triangolo convesso  $Q_0$  delimitato dalle  $[\phi_i]$ . Inoltre osserviamo che ad ogni lato  $l_{jk}$  corrisponde una linea del duale:

$$\begin{aligned} l_{12} &= [ \text{Span}\{e_1, e_2\} ] = [e_3^*] \\ l_{13} &= [ \text{Span}\{e_1, e_1 + e_2 + e_3\} ] = [e_2^* - e_3^*] \\ l_{23} &= [ \text{Span}\{e_2, e_1 + e_2 + e_3\} ] = [e_1^* - e_3^*] \end{aligned}$$

Decoriamo dunque questa costruzione abbinando ad ogni  $l_{jk}$  una coppia di costanti  $c_i$  come in Figura 3.13.

Leggendo  $c_1$  e  $c_2$  come dei cross ratio possiamo trovare un nuovo punto  $p_4$  esterno a  $\Delta_{p_1 p_2 p_3}$  ponendo

$$c_1 = -[p_3, p_4, \phi_1, l_{12}] \quad \text{e} \quad c_2 = -[p_3, p_4, \phi_2, l_{12}].$$

Poiché  $p \notin [\phi_1] = [e_2^*]$  possiamo scriverlo in coordinate omogenee come  $p_4 = [\alpha e_1 + e_2 + \beta e_3]$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sviluppando le espressioni per il cross ratio otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{e_2^*(e_1 + e_2 + e_3) \cdot e_3^*(\alpha e_1 + e_2 + \beta e_3)}{e_2^*(\alpha e_1 + e_2 + \beta e_3) \cdot e_3^*(e_1 + e_2 + e_3)} \\ c_2 = -\frac{e_1^*(e_1 + e_2 + e_3) \cdot e_3^*(\alpha e_1 + e_2 + \beta e_3)}{e_1^*(\alpha e_1 + e_2 + \beta e_3) \cdot e_3^*(e_1 + e_2 + e_3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1 \cdot \beta}{1 \cdot 1} = -\beta \\ c_2 = -\frac{1 \cdot \beta}{\alpha \cdot 1} = -\frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

Possiamo risolvere facilmente per  $\alpha$  e  $\beta$  ottenendo le coordinate omogenee di  $p$  in funzione dei parametri  $c_1, c_2$ :

$$p_4 = \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ \frac{c_1}{c_2}e_1 + e_2 + -c_1e_3 \end{array} \right].$$

Poiché  $l_{12}(p_3)$  e  $l_{12}(p_4)$  hanno segno opposto, per Osservazione 3.7 risulta che  $p_4$  appartiene al triangolo delimitato da  $[\phi_1], [\phi_2]$  e  $l_{12}$ . Tracciando le linee proiettive  $l_{14}$  e  $l_{24}$  otteniamo un nuovo triangolo  $\overline{\Delta_{p_1p_2p_4}} \subset Q_0$  che condivide il lato  $l_{12}$  con  $\overline{\Delta_{p_1p_2p_3}}$ . Chiamiamo  $\Delta_1$  il quadrilatero convesso ottenuto dall'unione di questi 2 triangoli.

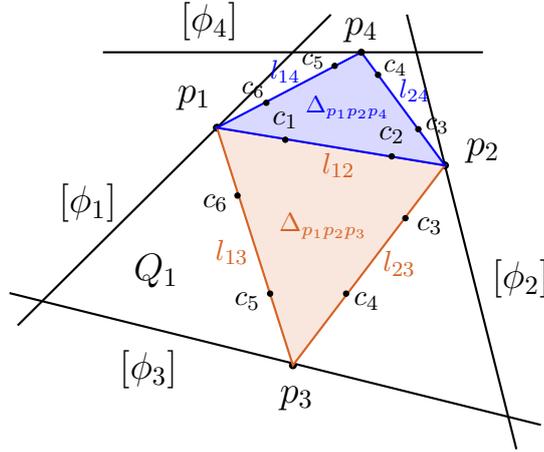


Figura 3.14: Il quadrilatero appena costruito.

I punti  $p_1$  e  $p_2$  già hanno associata una linea proiettiva, dunque esiste un'unica scelta per  $[\phi_4]$  che ci dà una terna generica di bandiere con triple ratio  $\tau_2$ . Inoltre,  $[\phi_4]$  taglia via una porzione  $Q_0$ , individuando così  $Q_1$ , un quadrilatero convesso che racchiude  $\Delta_1$ .

Possiamo mappare  $P_1 = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1$  su  $\Delta_1 = \overline{\Delta_{p_1p_2p_3}} \cup \overline{\Delta_{p_1p_2p_4}}$  con la funzione

$$\mathbf{dev}^{(1)} : P_1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

in modo che  $\mathbf{dev}^{(1)}$  mappa  $\mathcal{T}_0$  su  $\overline{\Delta_{p_1 p_2 p_3}}$  e  $\mathcal{T}_1$  su  $\overline{\Delta_{p_1 p_2 p_4}}$  omeomorficamente. Dunque  $\mathbf{dev}^{(1)}$  è una sviluppante parziale iniettiva con immagine convessa. Decorando  $l_{14}$  con i cross ratios  $c_6, c_5$  e  $l_{24}$  con  $c_3, c_4$ , siamo pronti a ripetere il processo aggiungendo un nuovo triangolo.

Supponiamo ora di avere una sviluppante parziale iniettiva con immagine convessa

$$\mathbf{dev}^{(n)} : P_n \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

ottenuta proseguendo la costruzione precedente. Allora  $\mathbf{dev}^{(n)}$  mappa  $P_n$  su un poligono proiettivo  $\Delta_n$  i cui lati sono decorati dalle costanti  $c_i$  e ai triangoli che lo compongono sono abbinati i triple ratio  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . In particolare, per il procedimento che abbiamo seguito, ad un triangolo  $\Delta \subset \mathbf{dev}^{(n)}$  corrisponde  $\tau_1$  se

$$\left(\mathbf{dev}^{(n)}\right)^{-1}(\Delta) \subset p^{-1}(T_1)$$

e gli corrisponde  $\tau_2$  se

$$\left(\mathbf{dev}^{(n)}\right)^{-1}(\Delta) \subset p^{-1}(T_2).$$

Sappiamo inoltre che  $\Delta_n \subset Q_n$ , dove  $Q_n$  è la componente connessa e convessa delimitata dalle bandiere dei vari triangoli.

Prendiamo ora  $\mathcal{T}_{n+1}$ , possiamo supporre senza perdere generalità che tale triangolo condivida un lato  $\mu$  con  $\mathcal{T}_n$  e che

$$\mathcal{T}_{n+1} = \gamma \cdot \mathcal{T}_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_n = \eta \cdot \mathcal{T}_1$$

per opportuni  $\gamma, \eta \in \pi_1(P)$ . Poniamo quindi  $\overline{\Delta_{pqr}} = \mathbf{dev}^{(n)}(\mathcal{T}_n)$ ,  $l_{pq} = \mathbf{dev}^{(n)}(\mu)$  il lato tra i vertici  $p$  e  $q$ , e  $l_p, l_q, l_r$  le linee proiettive delle rispettive bandiere centrate nei vertici e troviamo quindi un nuovo punto  $s$  leggendo le costanti  $c_i$  e  $c_{i+1}$  sul lato  $l_{pq}$  come i cross ratio

$$c_i = -[r, s, l_p, l_{pq}] \quad \text{e} \quad c_{i+1} = -[r, s, l_q, l_{pq}].$$

Le condizioni di positività su  $c_i, c_{i+1}$  garantiscono che  $s$  si trovi nella componente delimitata da  $l_p, l_q$  e  $l_{pq}$ ; tracciando  $l_{ps}$  e  $l_{qs}$  otteniamo un nuovo triangolo  $\overline{\Delta_{pqs}}$  come già visto nel passo base e un nuovo poligono

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \Delta_{pqs}$$

che per costruzione è convesso. Infine, imponendo il triple ratio  $\tau_2$  sul nuovo triangolo, otteniamo una nuova linea proiettiva  $l_s$  passante per  $s$ , che delimita un poligono convesso  $Q_{n+1}$ .

A questo punto estendiamo  $\mathbf{dev}^{(n)}$  con un omeomorfismo che manda  $\mathcal{T}_{n+1}$  in  $\overline{\Delta_{pqs}}$  e concorda con  $\mathbf{dev}^{(n)}$  su  $\mu$ , ottenendo una nuova sviluppante parziale iniettiva con immagine convessa:

$$\mathbf{dev}^{(n+1)} : P_{n+1} \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

**PARTE II:  $\mathbf{dev}$  È INIETTIVA CON IMMAGINE CONVESSA.**

Consideriamo il limite delle sviluppanti parziali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{dev}^{(n)} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

Ricordando che  $\bigcup P_n = \tilde{P}$  lo riscriviamo come

$$\mathbf{dev} : \tilde{P} \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Supponiamo che esistano  $x, y \in \tilde{P}$  tali che  $\mathbf{dev}(x) = \mathbf{dev}(y)$ . Sappiamo che  $\tilde{P} = \bigcup P_n$ , quindi esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $x, y \in P_{\bar{n}}$ . Poiché  $\mathbf{dev}|_{P_{\bar{n}}} = \mathbf{dev}^{(\bar{n})}$  è un omeomorfismo, vale  $x = y$  e quindi  $\mathbf{dev}$  è una mappa iniettiva.

Poiché per costruzione  $\forall n \in \mathbb{N}$  valgono

$$\mathbf{dev}^{(n)}(P_n) = \Delta_n \subset Q_n \subset Q_0 \quad \text{e} \quad \Delta_n \subset \Delta_{n+1},$$

sia  $\Omega = \mathbf{dev}(\tilde{P}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ , abbiamo  $\Omega \subset Q_0$ .

Inoltre, presi  $p, q \in \Omega$ , esiste  $\bar{m} \in \mathbb{N}$  tale che  $p, q \in \Delta_{\bar{m}}$ . Poiché  $\Delta_{\bar{m}}$  per costruzione è convesso, abbiamo

$$\overline{pq} \subset \Delta_{\bar{m}} \subset \Omega$$

ossia il segmento di linea proiettiva  $\overline{pq}$  tra i due punti è contenuto in  $\Omega$ . Ciò rende  $\Omega$  un insieme convesso di  $\mathbb{RP}^2$  strettamente contenuto in  $Q_0$  e quindi in un piano affine.

Concludiamo che  $\mathbf{dev} : \tilde{P} \rightarrow \Omega$  è la mappa sviluppante di una struttura proiettiva convessa su  $P$ . Inoltre, poiché triangoli  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  appartenenti alla stessa orbita in  $\tilde{P}$  vengono mandati da  $\mathbf{dev}$  in triangoli aventi lo stesso triple ratio, per Proposizione 3.3 esiste un'unica trasformazione proiettiva  $g \in SL_3(\mathbb{R})$  che porta la terna di bandiere  $T$  relativa a  $\mathbf{dev}(\mathcal{T})$  nella terna  $T'$  relativa a  $\mathbf{dev}(\mathcal{T}')$ . Preservando le terne di bandiere,  $g$  preserva i cross ratio e la struttura di invarianti usata per costruire  $\mathbf{dev}$ . Associando l'elemento  $\gamma \in \pi_1(P)$  che porta

$\mathcal{T}$  in  $\mathcal{T}'$  a  $g$  otteniamo l'olonomia  $h$  e quindi una coppia sviluppante  $(\mathbf{dev}, h)$  che individua una struttura proiettiva convessa su  $P$ .

□



# Bibliografia

- [1] William M. Goldman. «Convex real projective structures on compact surfaces». In: *Journal of Differential Geometry* 31.3 (1990), pp. 791–845.
- [2] William M. Goldman. *Geometric Structures on Manifolds*. Vol. 227. Graduate Studies in Mathematics. © 2022. Providence, RI: American Mathematical Society, 2022.
- [3] Stephan Schmidt. *Geometric Manifolds*. Lecture notes. University of Heidelberg, 2015.

## BIBLIOGRAFIA

---

## Elenco delle figure

1.1	Due $(G, X)$ -carte $\phi_1, \phi_2$ sulla superficie $M$ . . . . .	6
1.2	Partizione e ricoprimento di $\gamma$ . . . . .	11
1.3	Costruzione di $\hat{\gamma}$ . . . . .	12
1.4	Olonomia di $\gamma$ . . . . .	19
3.1	Pantaloni con bordo. . . . .	37
3.2	Incollamento di pantaloni. . . . .	38
3.3	Posizione generica. . . . .	40
3.4	Caso $[v_1] = [v_2] = [v]$ . . . . .	41
3.5	Caso $[\phi_1] = [\phi_2] = [\phi]$ . . . . .	41
3.6	Esempi di posizioni non generiche. . . . .	41
3.7	Intersezione di due linee proiettive. . . . .	42
3.8	Tre bandiere in posizione generica. . . . .	43
3.9	Triple ratio positivo. . . . .	47
3.10	Cross ratio positivo. . . . .	49
3.11	Generatori di $\pi_1(P)$ . . . . .	50
3.12	Triangolazione ideale. . . . .	51
3.13	Triangolo decorato. . . . .	53
3.14	Costruzione del poligono. . . . .	55

