



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA

Tesi di Laurea Magistrale in

Turbomacchine M

**ANALISI DI SCHIERE PALARI TRANSONICHE**

Candidato:

Antonio TRAFICANTE

Relatore:

Chiar.mo Prof. Antonio Peretto

---

**Sessione I**

**Anno Accademico 2025/2026**



# SOMMARIO

La sfida ingegneristica attuale nei settori aerospaziale e dell'energia si concentra sul miglioramento delle prestazioni dei veicoli e dei motori, mirando a raggiungere velocità, portate e rapporti di pressione sempre più elevati. In questi giorni, diverse aziende di fama internazionale stanno sperimentando i loro motori e veicoli, cercando di superare la barriera del suono.

Il presente lavoro si articola in quattro obiettivi principali:

**Analisi approfondita dei compressori assiali transonici:** In questa sezione si esamina la possibilità di calcolare e dimensionare le grandezze necessarie per aumentare il rapporto di pressione totale di un compressore assiale. Successivamente, viene analizzata la dinamica dei fluidi in regime transonico, con particolare attenzione ai principali problemi legati al superamento della barriera del suono, nonché ai vantaggi e svantaggi associati.

**Analisi e confronto dei software commerciali disponibili sul mercato:** Si approfondiscono i metodi utilizzati per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, per poi passare allo studio dei metodi numerici attualmente disponibili per il trattamento dei flussi transonici e la gestione delle onde d'urto. È stata quindi redatta una classifica dei principali software, comparandoli in base a due criteri di valutazione: la capacità di risolvere e catturare le onde d'urto e la specifica applicabilità al mondo delle turbomacchine.

**Sviluppo delle camber line e dei profili alari:** Partendo da un testo pubblicato dalla NASA (ex NACA), il quale descrive le condizioni al contorno e le equazioni da utilizzare per generare i profili alari, ci si è proposti di sviluppare questi profili tramite un codice MATLAB. L'obiettivo è stato quello di generare configurazioni alari ottimizzate in base alle condizioni di volo transonico.

**Validazione di uno dei profili alari sviluppati tramite CFD:** Utilizzando il software Ansys Fluent, è stato validato uno dei profili alari progettati inizialmente in MATLAB. Il processo ha previsto la progettazione di un dominio contenente il profilo alare

selezionato per un compressore transonico, realizzato tramite il modulo CAD SpaceClaim di Ansys Fluent.

Successivamente, il profilo è stato analizzato con Fluent simulando il comportamento del flusso a numeri di Mach differenti, spaziando da condizioni subsoniche a supersoniche. Il modello CFD ha consentito di ottenere una visione dettagliata delle complesse interazioni tra il flusso e la geometria della lama, validando molte assunzioni apprese nello studio della letteratura.



# INDICE

1	Fondamenti Teorici .....	1
1.1	Compressori Transonici: Panoramica e applicazioni .....	1
1.2	Principi di Funzionamento .....	3
1.2.1	Triangoli di Velocità.....	3
1.2.2	Variabilità dei flussi .....	6
1.2.3	Coefficienti di Flusso e di Carico .....	10
1.2.4	punto di funzionamento .....	11
1.2.5	Configurazioni di Uno Stadio Transonico .....	12
2	Aerodinamica di Base .....	17
2.1	Flussi Compressibili .....	17
2.1.1	Velocità del Suono .....	19
2.1.2	Equazione Del Potenziale Linearizzata.....	21
2.1.3	Piccole Perturbazioni in una Corrente Supersonica.....	22
2.1.4	Espansioni Supersoniche in Teoria Esatta.....	23
2.1.5	Espansione di Prandtl-Meyer .....	26
2.2	Onde d'Urto .....	30
2.2.1	Urto Retto (Normal Shock Wave).....	30
2.2.2	Urti Obliqui (Oblique Shocks) .....	32
2.2.3	Onde d'urto Curve (Bow Shock) .....	37
2.2.4	Interazioni di Onde d'Urto .....	38
2.2.5	Riflessione Regolare di un'Onda d'Urto.....	40
2.3	Perdite per Onde d'urto .....	42
2.3.1	flussi secondari .....	42
2.3.2	Onde d'Urto nei Profili a Schiera .....	45
2.3.3	Interazione Urto-Strato Limite .....	47

3	Profili alari.....	52
3.1	Profilo Subsonico.....	52
3.2	Moto Supersonico su un Diedro.....	56
3.3	Camber Line .....	60
3.3.1	Linea di Camber a Carico Costante (Constant-Load Camber Line) .....	60
3.3.2	Parabolic-Arc Camber Line.....	61
3.3.3	Polynomial Camber line .....	64
3.3.4	Exponential Camber line.....	67
3.3.5	Circular-Arc Camber Line .....	71
3.3.6	Double-Circular-Arc Camber line .....	74
3.3.7	Standard Thickness Distributions (Distribuzioni dello spessore).....	78
3.4	Profili Transonici.....	83
3.4.1	NACA 65-Series Profile.....	84
3.4.2	BRITISH C.4 Profile .....	85
3.4.3	Double-Circular-Arc Profile (DCA) .....	86
3.4.4	Controlled-Diffusion Airfoils (CDA) .....	89
3.4.5	Multiple-Circule-Arc profile (MCA) .....	91
4	ANALISI CFD.....	94
4.1	Modelli di Turbolenza.....	95
4.1.1	RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) .....	95
4.1.2	LES (Large Eddy Simulation).....	96
4.1.3	DNS (Direct Numerical Simulation).....	97
4.2	Modelli di Chiusura per RANS .....	97
4.2.1	Modello Spalart-Allmaras .....	99
4.2.2	Modello K- $\omega$ .....	99
4.2.3	Modello K- $\epsilon$ .....	100
4.3	Metodi Numerici per la Risoluzione delle Onde d'Urto.....	101
4.3.1	Metodo Upwind.....	102

4.3.2	Metodo di Godunov .....	103
4.3.3	Metodi di Splitting .....	106
4.3.4	Metodi ad Alta Risoluzione e TVD (Total Variation Diminishing) .....	107
4.4	Software CFD .....	109
4.4.1	ANSYS .....	109
4.4.2	Simcenter STAR-CCM+ .....	111
4.4.3	NUMECA FINE/Open .....	112
4.4.4	Altair AcuSolve .....	113
4.4.5	Flow 3D .....	114
4.4.6	Alternative CFD .....	115
5	CREAZIONE PROFILI ED ANALISI CFD .....	117
5.1	Calcolo delle Camber line e dei Relativi Profili .....	118
5.1.1	Airfoil con Polynomial Camber-line .....	118
5.1.2	Airfoil con Exponential Camber-line .....	120
5.1.3	Airfoil con Circular-Arc Camber line .....	121
5.1.4	Airfoil con Double-Circular-Arc Camber line .....	123
5.1.5	Airfoil con Double-Circular-Arc Camber line e Multiple-Circular-Arc per il thickness .....	126
5.2	Analisi CFD del Double Circular Arc .....	128
5.2.1	Coordinate Profilo .....	128
5.2.2	Modello CAD .....	129
5.2.3	Mesh e Boundary conditions .....	132
5.2.4	Set-up e Metodi di Risoluzione .....	134
5.2.5	Risultati .....	136
6	CONCLUSIONI .....	140

# ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1 Compressori a flusso assiale transonici .....	2
Figura 1.2 Triangoli di velocità .....	4
Figura 1.3 Andamento del numero di Mach relativo.....	5
Figura 1.4 Triangoli di velocità e separazione dello strato limite .....	6
Figura 1.5 Variazione dei profili in funzione dello span.....	8
Figura 1.6 Andamento del numero di Mach fra root e tip in ingresso al rotore e allo statore.....	8
Figura 1.7 Stadio di un generico compressore assiale.....	9
Figura 1.8 Curva di carico di un compressore subsonico ed un compressore transonico.....	11
Figura 1.9 Schiera ad Impulso.....	13
Figura 1.10 Schiere supersoniche a reazione ad elevata deviazione.....	13
Figura 1.11 Schiera supersoniche a ridotta deviazione .....	14
Figura 1.12 Configurazioni di rotori di compressori transonici.....	15
Figura 1.13 Pala di un compressore transonico ad "S" .....	16
Figura 2.1 Onda piana di perturbazione.....	19
Figura 2.2 Propagazione di una perturbazione in corrente supersonica.....	22
Figura 2.3 Tubo d'urto .....	23
Figura 2.4 Espansione supersonica in teoria esatta.....	25
Figura 2.5 Compressione supersonica in teoria esatta.....	26
Figura 2.6 Espansione di Prandtl-Meyer .....	27
Figura 2.7 Numero di $M_2$ in funzione di $M_1$ .....	29
Figura 2.8 Onda di discontinuità finita.....	30
Figura 2.9 Rapporto delle pressioni in funzioni di $M_1$ .....	32
Figura 2.10 Urto obliquo.....	33
Figura 2.11 Grafico d'onda d'urto ( $M - \delta - \epsilon$ ).....	36
Figura 2.12 Onda d'urto curva .....	37
Figura 2.13 Interazione di onde d'urto .....	38
Figura 2.14 Corrente supersonica su parete concava.....	40
Figura 2.15 Riflessione regolare di un'onda d'urto.....	40
Figura 2.16 Urto senza riflessione o a $\lambda$ .....	41
Figura 2.17 Possibile andamento dei profili alari tra root e tip in una pala transonica.....	43
Figura 2.18 Flusso secondario a singolo vortice .....	44
Figura 2.19 Flusso secondario a doppio vortice .....	45

Figura 2.20 Onde d'urto in schiere transoniche .....	46
Figura 2.21 Vista 3D di un'onda d'urto in un compressore assiale transonico.....	47
Figura 2.22 Interazione onda d'urto-strato limite .....	48
Figura 2.23 Punti di Funzionamento off-design.....	49
Figura 2.24 Migrazione dello strato limite presente sulla superficie palare.....	50
Figura 2.25 Tip clearance vortex.....	51
Figura 3.1 Profilo alare subsonico in corrente supersonica .....	53
Figura 3.2 Immagini schlieren del flusso comprimibile su un profilo alare simmetrico .....	54
Figura 3.3 Immagine schematizzata della formazione di onde d'urto su profilo alare simmetrico .....	55
Figura 3.4 Lift coefficient in funzione dell'angolo d'attacco .....	56
Figura 3.5 Urto forte e urto debole su un diedro .....	57
Figura 3.6 Formazione di un'onda d'urto curva per un angolo di cono $\delta > \delta_{max}$ .....	58
Figura 3.7 Corpo tozzo in corrente supersonica .....	59
Figura 3.8 Profilo NACA65-0010 .....	61
Figura 3.9 <i>Parabolic-Arc Camber Line</i> .....	62
Figura 3.10 Polynomial Camber line .....	65
Figura 3.11 Exponential Camber line.....	67
Figura 3.12 Circular-Arc Camber Line .....	72
Figura 3.13 Double-Circular-Arc Camber line .....	74
Figura 3.14 Andamento Double-Circular-Arc camber line.....	76
Figura 3.15 Confronto tra due Double-Circular-Arc Camber line .....	77
Figura 3.16 distribuzione normale dello spessore.....	79
Figura 3.17 Andamento dello spessore su differenti tipi di camber line .....	82
Figura 3.18 Evoluzione del profilo NACA-010 nel tempo .....	84
Figura 3.19 Confronto fra profilo C4 e NACA 65.....	85
Figura 3.20 Double-Circular-Arc Profile (DCA).....	87
Figura 3.21 Double-Circular-Arc Profile in schiera.....	88
Figura 3.22 Distribuzione del numero di Mach sui Controlled-Diffusion Airfoils (CDA) .....	90
Figura 3.23 Multiple-Circle-Arc profile (MCA) .....	92
Figura 3.24 Multiple-Circle-Arc profile (MCA) in schiera .....	92
Figura 3.25 Profilo S-Tape in schiera.....	93
Figura 4.1 Modelli di chiusura delle equazioni di Navier-Stokes .....	98
Figura 4.2 Valori iniziali per il problema di Riemann .....	103
Figura 4.3 Esempio di problema di Riemann: Shock (VIOLA), contact discontinuity .....	104
Figura 4.4 Ricostruzione del dominio con origine di problemi di Riemann a bordo cella .....	105

Figura 4.5 Ricostruzione del dominio non lineare a tratti .....	106
Figura 4.6 Analisi CFD compressore radiale su ANSYS.....	110
Figura 5.1 Camber line Polinomiale .....	118
Figura 5.2 Polynomial Camber line Airfoil .....	119
Figura 5.3 Exponential Camber line.....	120
Figura 5.4 Exponential Camber line Airfoil .....	121
Figura 5.5 Circular-Arc Camber line .....	122
Figura 5.6 Circular-Arc Camber line Airfoil .....	123
Figura 5.7 Double Circular Arc Camber line.....	124
Figura 5.8 Double Circular Arc Camber line Airfoil .....	125
Figura 5.9 Camber line Double Circular Arc per Multiple Circular Arc .....	126
Figura 5.10 Multiple Circular Arc Airfoil .....	127
Figura 5.11 Coordinate Specifica NACA .....	128
Figura 5.12 Plot Coordinate Profilo .....	129
Figura 5.13 Dominio .....	130
Figura 5.14 Dominio Finale.....	131
Figura 5.15 Selezione Superfici.....	131
Figura 5.16 Fluent Mesher 2D .....	132
Figura 5.17 Inflation Layer .....	133
Figura 5.18 Mesh Finale.....	133
Figura 5.19 Setup.....	135
Figura 5.20 Flusso a Mach=0.85 .....	136
Figura 5.21 Flusso a Mach=0.95 .....	137
Figura 5.22 Flusso a Mach=1.1 .....	138
Figura 5.23 Flusso a Mach=1.4 .....	138

# ***1 FONDAMENTI TEORICI***

## ***1.1 Compressori Transonici: Panoramica e applicazioni***

I compressori a flusso assiale transonico sono componenti essenziali nei motori aeronautici moderni e nei gruppi turbogas terrestri. Questi, permettono di raggiungere rapporti di pressione elevati per stadio, riducendo così peso, dimensioni e costi operativi dei motori. Importanti ricerche analitiche e sperimentali nel campo dei compressori transonici sono state condotte a partire dagli anni '60 parallelamente allo sviluppo dei compressori supersonici i quali, rappresentano la prima linea di sviluppo nel campo dei compressori a flusso assiale ad alto carico. Un contributo considerevole per i nuovi sviluppi e progetti è stato successivamente dato dai progressi compiuti nelle tecniche di misurazione ottica e nei metodi computazionali, che hanno portato a una comprensione più approfondita dei meccanismi di perdita dei flussi relativi supersonici e transonici in queste macchine. Uno sguardo più da vicino all'andamento dei parametri di progettazione negli ultimi decenni. Gli attuali compressori a flusso assiale transonico ad alta efficienza forniscono un rapporto di pressione totale nell'ordine di 1,7-1,8 ben distante dai rapporti di compressione dei compressori subsonici nei quali i rapporti si attestano nell'ordine di 1.1-1.2. rapporti così elevati vengono ottenuti combinando elevate velocità del rotore (velocità alla punta nell'ordine di 450 m/s) e un elevato carico di stadio ( $2\Delta h / u^2$  nell'ordine di 1,0). I numeri di Mach in ingresso ad i compressori specificatamente al tip possono arrivare anche a valori di 1.8. Il campo di flusso che si sviluppa all'interno di un rotore di compressore transonico è estremamente complesso in quanto a questi valori del numero di Mach non si parla più di flussi incomprimibili ma bensì di flussi comprimibili, i quali presentano densità, temperature e pressioni differenti nelle tre direzioni fisiche (assiale, radiale e circonferenziale). Inoltre, a compressibilità dei flussi porta a fenomeni come onde d'urto, interazione shock/strato limite, flussi secondari intensi, ecc., che inducono perdite di energia e riduzione dell'efficienza. Gli alti carichi di flusso alle pale e le elevate temperature portano anche a problemi strutturali delle stesse favorendo così la ricerca in materiali sempre più

dinamici e resistenti. È importante sottolineare che i compressori transonici e i compressori supersonici, pur operando entrambi a velocità elevate, presentano differenze fondamentali. I compressori transonici lavorano in un regime in cui il flusso d'aria attraverso le pale può raggiungere velocità vicine o di poco superiori alla velocità del suono. Al contrario, nei compressori supersonici, il flusso supera la velocità del suono, richiedendo configurazioni progettuali e soluzioni ingegneristiche differenti. Di conseguenza, le sfide aerodinamiche e le strategie di ottimizzazione per ciascuno di questi compressori sono specifiche e non direttamente intercambiabili. Inoltre, i compressori transonici trovano applicazione in diverse aree come, i motori per uso civile e militare, nonché nei turbogas terrestri. Sebbene condividano principi operativi comuni, la loro progettazione e ottimizzazione possono variare significativamente in base al contesto applicativo. Nei motori aeronautici, ad esempio, le esigenze di peso, efficienza e resistenza alle condizioni operative estreme differiscono notevolmente tra i settori civile e militare. Analogamente, i compressori transonici nei turbogas terrestri sono progettati per massimizzare l'efficienza energetica e la durabilità in un contesto stazionario, il che comporta sfide tecniche specifiche rispetto alle applicazioni aeronautiche.

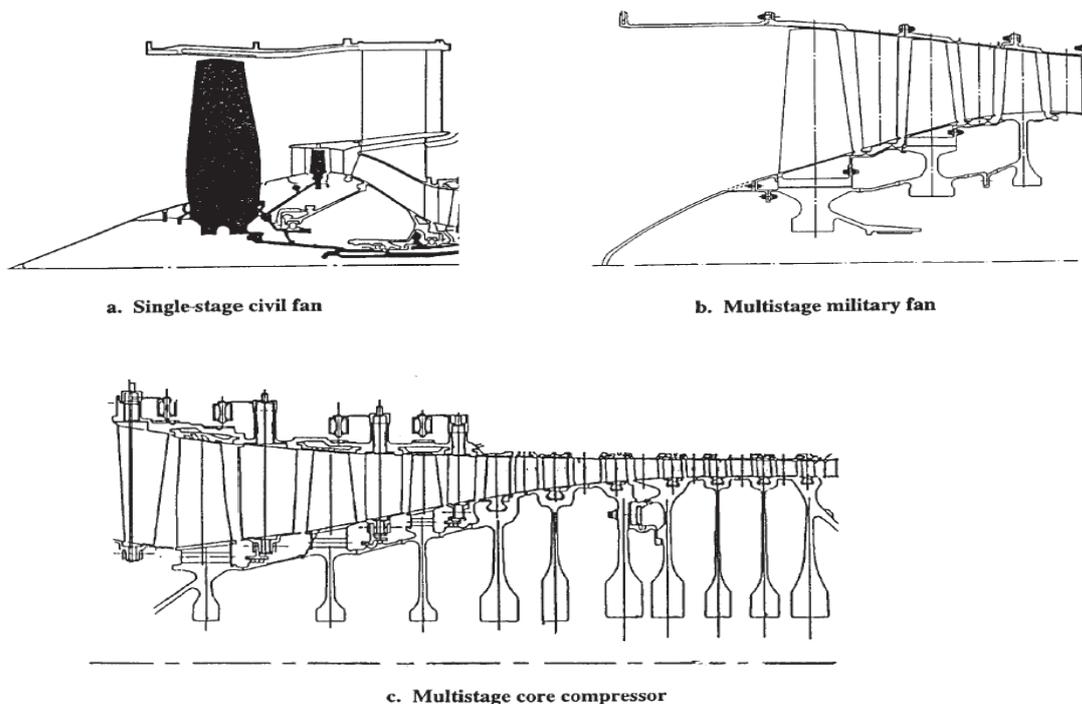


Figura 1.1 Compressori a flusso assiale transonici

## ***1.2 Principi di Funzionamento***

### ***1.2.1 Triangoli di Velocità***

I compressori transonici vengono utilizzati per il loro salto di pressione elevato nel singolo stadio. Se il rapporto di pressione è elevato, a parità di rapporto di pressione totale, possiamo ridurre il numero di stadi complessivi ottenendo una maggiore snellezza del compressore. Il rapporto di compressione per uno stadio è dato da:

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} = \left[ 1 + \frac{\eta_s U C_a (\tan\beta_1 - \tan\beta_2)}{c_p T_{01}} \right]$$

Come si può osservare, l'equazione permette di identificare i principali parametri su cui intervenire per aumentare il rapporto di pressione. Il primo fattore è U ovvero la velocità periferica, definita come:

$$U = \omega r$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare e  $r$  il raggio dello stadio. Per aumentare U, si può agire incrementando  $\omega$  o aumentando il diametro dello stadio. Analizzando i triangoli delle velocità, si nota che un aumento di U porta anche ad un incremento della velocità relativa V1, che diventa V1'. Parallelamente, l'angolo  $\beta_1$  aumenterà diventando  $\beta_1''$ . Se assumiamo che la velocità assiale C1 rimanga costante anche all'uscita del rotore, anche la velocità V2 in uscita risulterà aumentata.

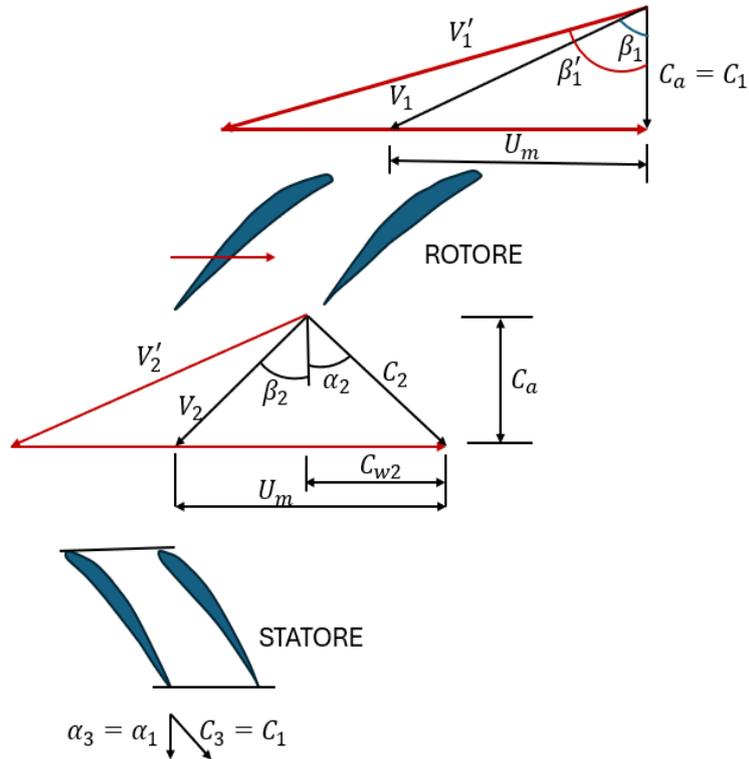


Figura 1.2 Triangoli di velocità

Se il triangolo delle velocità rappresentato è calcolato a raggio medio, spostandosi verso la punta della pala (tip),  $U$  crescerà in funzione del raggio, provocando probabilmente la formazione di flusso supersonico. Ciò comporta un aumento significativo del carico aerodinamico al tip, il che può generare problemi strutturali se non adeguatamente considerati in fase di progettazione e la formazione di onde d'urto. Inoltre, l'aumento del diametro comporta pale più lunghe, specialmente nei primi stadi, con conseguenti problemi di aeroelasticità, come flutter e vibrazioni, che devono essere attentamente gestiti per garantire la sicurezza e l'efficienza operativa del compressore.

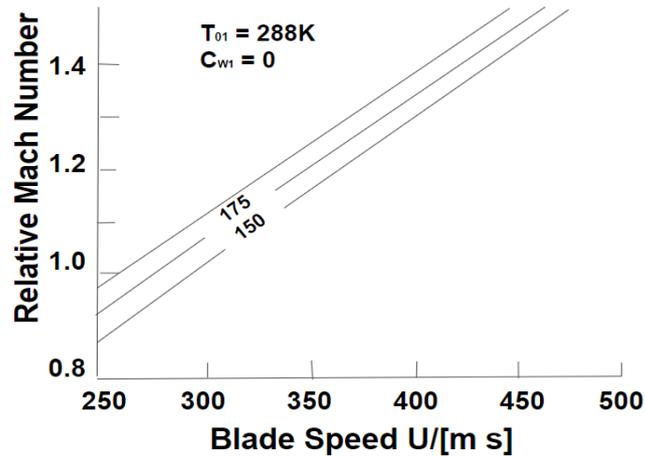


Figura 1.3 Andamento del numero di Mach relativo

Il grafico rappresenta la relazione tra il numero di Mach relativo e la velocità periferica delle pale  $U$  in metri al secondo (m/s) per diverse velocità assiali  $C_1$ . L'asse delle ordinate mostra il numero di Mach relativo, che va da 0,8 a 1,4, mentre l'asse delle ascisse rappresenta la velocità della Pala, che varia da 250 a 500 m/s. Le linee diagonali indicano diversi valori di velocità assiale  $C_1$ , con valori di 150, 175 e 200 m/s.

Una seconda opzione da percorrere è l'aumento della velocità assiale. Aumentando la velocità assiale aumenterà a sua volta la velocità relativa portando il flusso nuovamente ad essere supersonico. Inoltre, essendo la velocità assiale legata alla portata massica mediante la seguente equazione:

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot C_1$$

L'aumento di velocità assiale sarà possibile solo attraverso un aumento di portata con il conseguente aumento del diametro dello stadio.

Un'ulteriore possibilità per aumentare il carico aerodinamico sulle pale del compressore è agire sugli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ . Agendo sui due angoli si può incrementare la velocità relativa in ingresso e ridurla in uscita dal rotore, si può ottenere una maggiore diffusione. Questo richiede un profilo palare più curvo per diminuire la velocità relativa in uscita, il quale fornirà un aumento della velocità assiale in uscita  $C_2$ , che potrebbe diventare supersonica all'ingresso dello statore, migliorando ulteriormente la diffusione. Tuttavia, questa strategia comporta il rischio di separazione dello strato limite in alcune regioni

della pala a causa delle alte velocità, portando a perdite di efficienza. Per mitigare questi effetti, è fondamentale ottimizzare la curvatura del profilo palare e considerare l'uso di tecniche di controllo del flusso attivo, come soffiatori d'aria, per prevenire la separazione del flusso e mantenere un'efficienza elevata. Inoltre, queste modifiche devono essere attentamente valutate per assicurare che l'interazione tra rotore e statore rimanga stabile, evitando effetti negativi come la formazione di onde d'urto indesiderate.

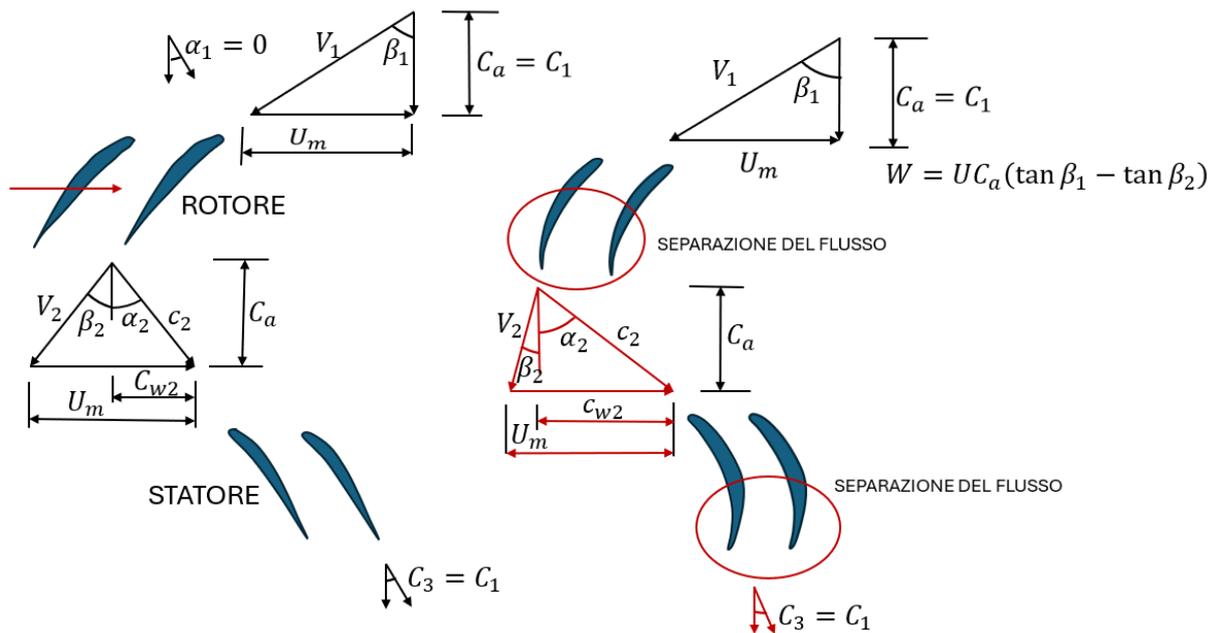


Figura 1.4 Triangoli di velocità e separazione dello strato limite

## 1.2.2 Variabilità dei flussi

Come descritto nel paragrafo 1.1, i compressori transonici si differenziano dai compressori supersonici per i valori del numero di Mach che caratterizzano i flussi attraverso di essi. Nei compressori transonici, i flussi possono raggiungere numeri di Mach fino a 1,8 o 2 nei compressori aeronautici, oppure tra 1,3 e 1,6 nei turbo-gas terrestri. Tuttavia, questi valori elevati di Mach si verificano solo in specifiche regioni

del profilo palare, con la punta della pala (Tip) che è la più soggetta a flussi transonici o supersonici.

Questa variabilità nel comportamento del flusso rende la progettazione e l'analisi di tali compressori estremamente complessa. Le pale dei compressori transonici sono solitamente progettate suddividendole in venti o più tubi di flusso, che vanno dalla radice della pala (Hub o Root) fino alla punta (Tip). Durante la progettazione, si assume inizialmente che il flusso in ingresso sia quasi tridimensionale, al fine di ipotizzare correttamente la struttura del flusso che attraversa la pala.

I principali metodi di progettazione utilizzati per gestire queste complessità sono cinque:

- Free Vortex Design: Mantiene costante il prodotto tra raggio e velocità tangenziale lungo il raggio della pala.
- Constant Reaction Vortex Design: Assicura una reazione costante del flusso lungo tutto il raggio, distribuendo equamente il lavoro tra il rotore e lo statore.
- Constant Siro Vortex Design: Mantiene costante la componente tangenziale della velocità del flusso lungo il raggio.
- Exponential Vortex Design: Utilizza una funzione esponenziale per definire la distribuzione del swirl lungo il raggio, ottimizzando specifiche caratteristiche prestazionali.
- Assigned Flow Angle Vortex Flows: Specifica e mantiene costante l'angolo del flusso lungo il raggio, ottimizzando il flusso per particolari condizioni operative.

Durante la fase di progettazione, si assume generalmente che, a raggio medio, il flusso inizi a raggiungere condizioni soniche, per poi entrare nella regione transonica. Questa transizione avviene approssimativamente al 70% dell'altezza della pala. Oltre questo punto, fino alla punta (Tip), il profilo alare bidimensionale subisce una trasformazione, diventando un profilo transonico o addirittura supersonico.

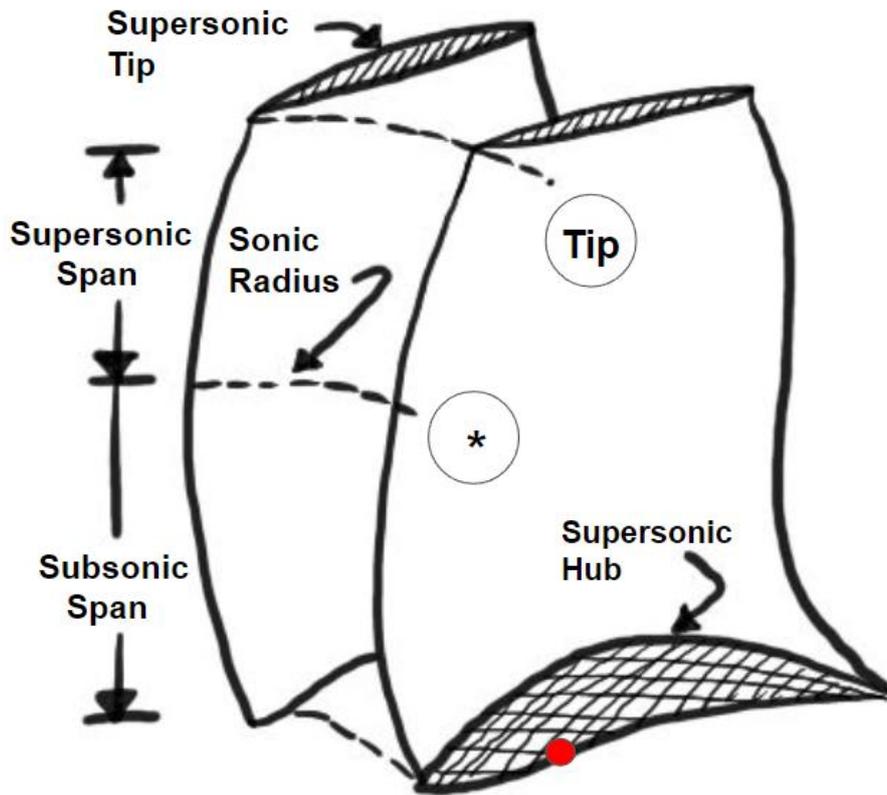


Figura 1.5 Variazione dei profili in funzione dello span

Inoltre, i flussi in ingresso al compressore sono solitamente flussi a temperatura ambiente quindi più freddi rispetto ad i flussi interni. Questo porta ad avere sicuramente flussi con Numero di Mach superiori all'unità caratterizzando anche la forma dei palettamenti dello statore.

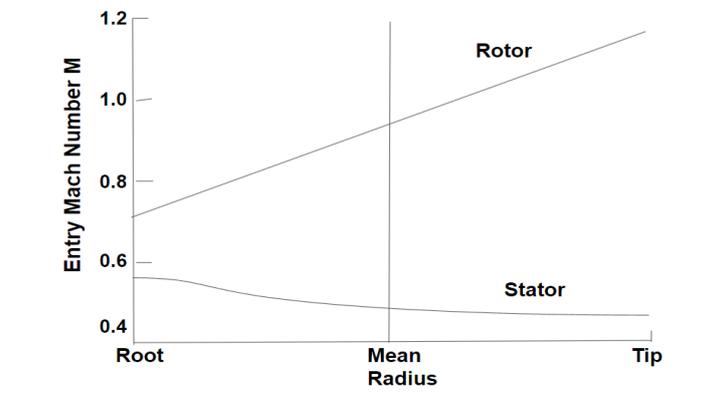


Figura 1.6 Andamento del numero di Mach fra root e tip in ingresso al rotore e allo statore

Il grafico mostra la variazione del numero di Mach all'ingresso lungo l'altezza della pala, dal Root alla punta (Tip). È evidente come nel rotore il numero di Mach aumenti progressivamente dalla radice alla punta della pala. Al raggio medio, il flusso raggiunge un valore subsonico elevato (vicino a 1), mentre continuando verso la punta, il numero di Mach supera l'unità, entrando così in regime supersonico. In contrasto, il numero di Mach nello statore diminuisce leggermente dalla radice alla punta, indicando che il flusso all'ingresso dello statore è più lento rispetto a quello nel rotore. È importante notare che lo statore è capovolto rispetto al rotore, con la punta (Tip) del rotore corrispondente alla radice (Root) dello statore. Questo rafforza ulteriormente l'ipotesi che il flusso nella radice del rotore sia subsonico, confermando la validità di questa configurazione di flusso.

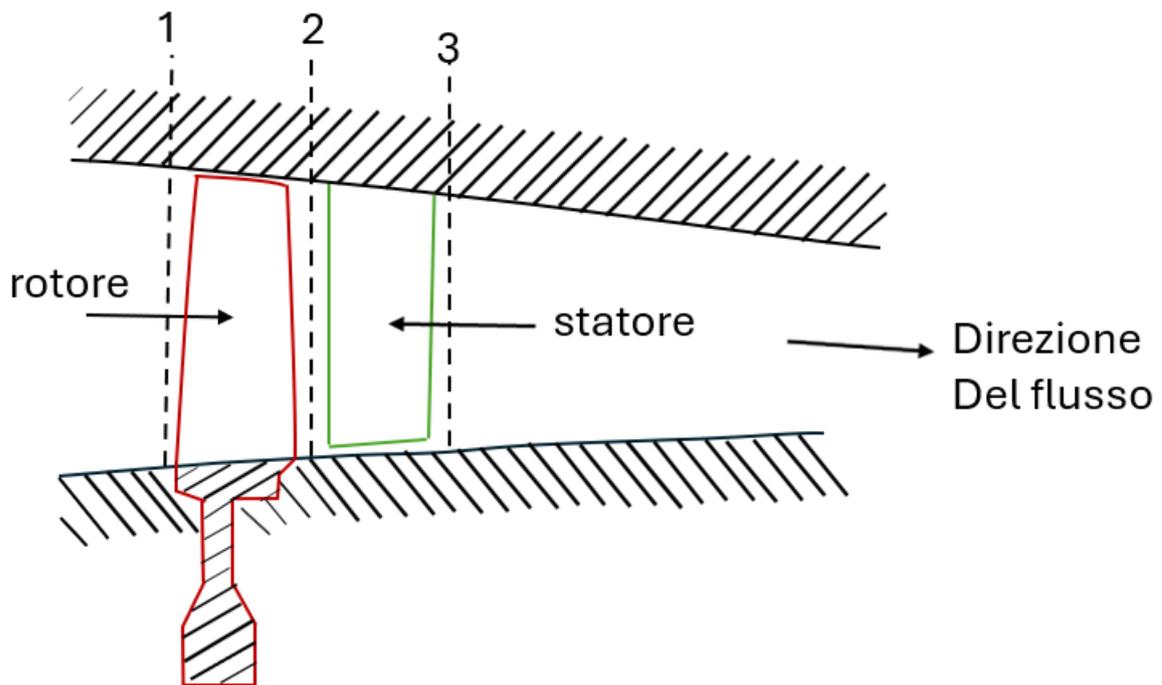


Figura 1.7 Stadio di un generico compressore assiale

### 1.2.3 Coefficienti di Flusso e di Carico

Due coefficienti fondamentali nella progettazione di un compressore assiale sono il coefficiente di flusso e il coefficiente di carico. Il coefficiente di flusso  $\Phi$ , noto anche come coefficiente di portata, è un parametro adimensionale che esprime il rapporto tra la velocità assiale ( $C$ ) e la velocità periferica ( $u$ ) delle pale. È definito matematicamente come:

$$\Phi = \frac{C_z}{u}$$

Se la velocità assiale viene espressa in funzione della portata massica  $\dot{m}$ , la formula diventa:

$$\Phi = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot u \cdot A}$$

In sostanza, il coefficiente di flusso rappresenta una misura della quantità di fluido che attraversa il compressore in relazione alla velocità delle pale, fornendo un'indicazione cruciale per la progettazione e l'analisi delle prestazioni del compressore.

Il secondo parametro è il coefficiente di carico  $\Psi$ , che rappresenta il rapporto tra il lavoro specifico  $L$  svolto dal compressore e il quadrato della velocità periferica  $u$  delle pale:

$$\Psi = \frac{L}{u^2}$$

A parità di velocità periferica ( $u$ ), un coefficiente di carico più elevato indica un maggiore carico sulle pale, traducendosi in un maggiore sforzo tensionale. Stadi di compressione molto caricati forniscono un lavoro specifico elevato, ma impongono anche sforzi maggiori sul palettamento. Inoltre, poiché il coefficiente di carico esprime l'efficienza con cui il compressore converte l'energia meccanica fornita alle pale in energia utile per il fluido (principalmente sotto forma di aumento di pressione), esso può essere espresso anche come:

$$\Psi = \frac{\Delta P_0}{\frac{1}{2} u^2}$$

Questo esprime la relazione tra l'aumento di pressione totale ( $\Delta P_0$ ) e l'energia cinetica disponibile, fornendo una misura diretta della capacità del compressore di aumentare la pressione del fluido in funzione dell'energia meccanica disponibile.

### 1.2.4 punto di funzionamento

I compressori assiali transonici sono meno flessibili nelle applicazioni poiché devono essere progettati specificamente per una determinata portata e velocità di rotazione.

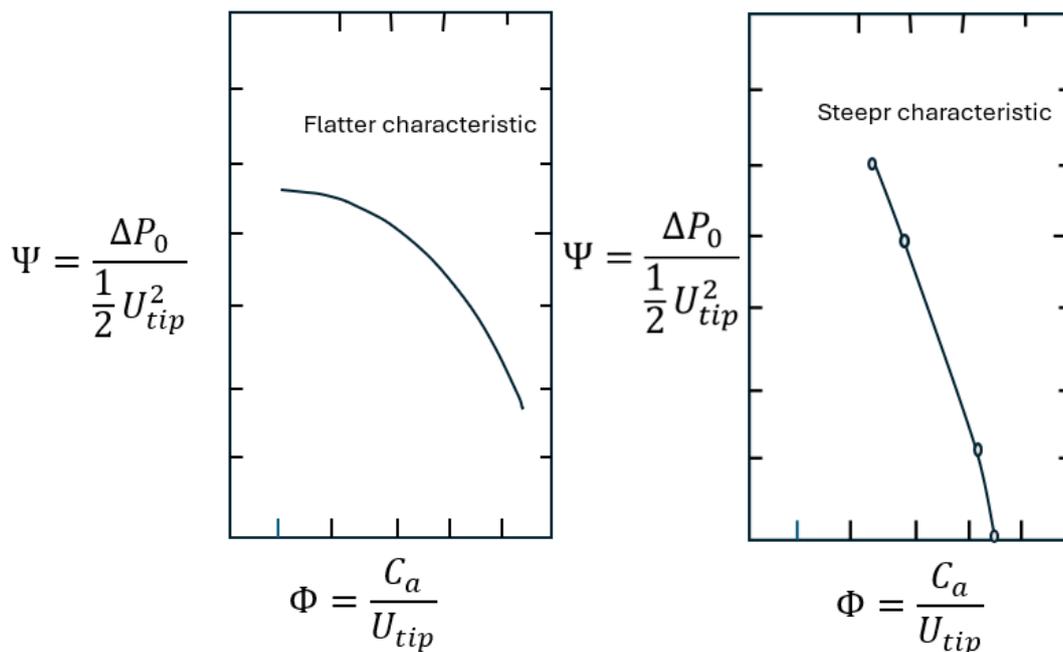


Figura 1.8 Curva di carico di un compressore subsonico ed un compressore transonico

I grafici mostrano le curve caratteristiche di due compressori assiali: a sinistra quella di un compressore subsonico e a destra quella di un compressore transonico. La curva del compressore subsonico è più piatta, poiché variazioni di portata o velocità non

conducono rapidamente allo stallo. Nei compressori transonici, il punto di funzionamento può oscillare tra regimi subsonici e transonici. La curva più ripida è dovuta alle interazioni tra il flusso e le onde d'urto, che riducono bruscamente la velocità del flusso e aumentano il rapporto di pressione, aumentando così la sensibilità del compressore alle variazioni operative.

### ***1.2.5 Configurazioni di Uno Stadio Transonico***

La configurazione delle pale nello spazio specialmente per il rotore, in un compressore transonico è di fondamentale importanza in quanto questa, comporta ad ottimizzare le strutture d'urto ed i flussi secondari. Le configurazioni possono variare notevolmente in base al design e alle esigenze di prestazione. Una prima distinzione importante è tra pale ad impulso e pale a reazione.

1) Schiere Supersoniche ad Impulso: Sono così denominate perché sono in grado di convertire la quasi totalità dell'energia meccanica del rotore in energia cinetica per il fluido. In questo tipo di schiere, la pressione statica rimane praticamente costante all'interno del rotore, mentre aumenta nello statore a causa dell'elevata velocità del fluido. Questo comportamento è simile a quello osservato negli stadi di turbine ad azione, dove la maggior parte del lavoro di conversione dell'energia si verifica nello statore. Dal punto di vista geometrico, le palette del rotore presentano una simmetria rispetto all'asse assiale, che è una caratteristica tipica di questo tipo di configurazione. Questo design permette di massimizzare l'efficienza aerodinamica e mantenere un profilo fluido più controllato, minimizzando le perdite.

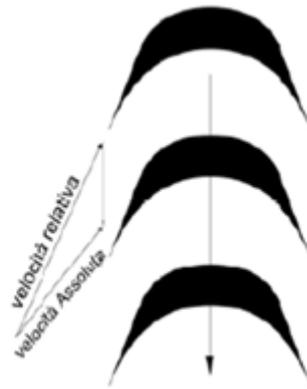


Figura 1.9 Schiera ad Impulso

2) schiere supersoniche a reazione ad elevata deviazione: Sono progettate specificamente per deviare in maniera significativa il flusso entrante, generando allo stesso tempo un notevole incremento della pressione statica all'interno della pala. Questa configurazione comporta un carico aerodinamico elevato sulla pala stessa, poiché il flusso, entrando a velocità supersoniche, subisce una forte variazione sia in termini di direzione che di velocità.

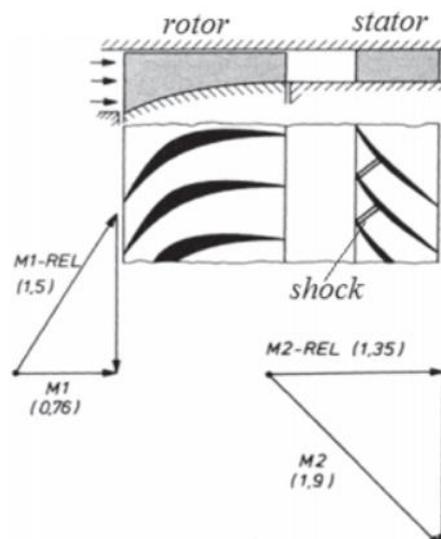


Figura 1.10 Schiere supersoniche a reazione ad elevata deviazione

In questa tipologia di schiera, lo shock avviene all'interno dello statore, il che implica che anche lo statore operi in regime transonico. Di conseguenza, lo statore deve essere progettato con profili aerodinamici adeguati a gestire le onde d'urto e minimizzare le perdite associate.

3) Schiere Supersoniche a Ridotta Deviazione: sono caratterizzate dal fatto che la deviazione del flusso non è determinata principalmente dal contatto fisico con il profilo della pala, ma piuttosto dalla riduzione di velocità del fluido. Questo rallentamento comporta un aumento della pressione statica, pur mantenendo un carico relativamente basso sul sistema. Il design di queste schiere mira quindi a ottenere un'adeguata compressione o espansione del flusso senza introdurre eccessivi carichi aerodinamici sulle palette, rendendole più efficienti e meno soggette a fenomeni di separazione del flusso o stalli aerodinamici.

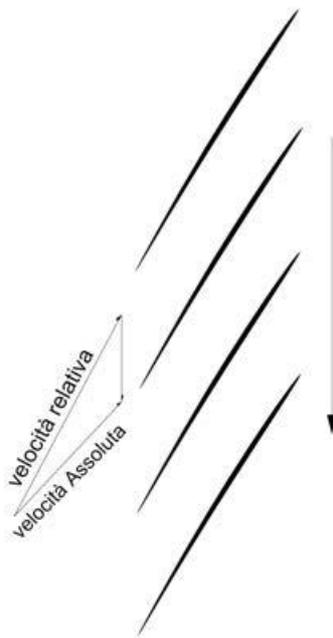


Figura 1.11 Schiera supersoniche a ridotta deviazione

Un altro fattore cruciale nella progettazione delle pale è lo Sweep, ossia l'inclinazione del bordo d'attacco o del bordo d'uscita della pala rispetto al flusso d'aria.

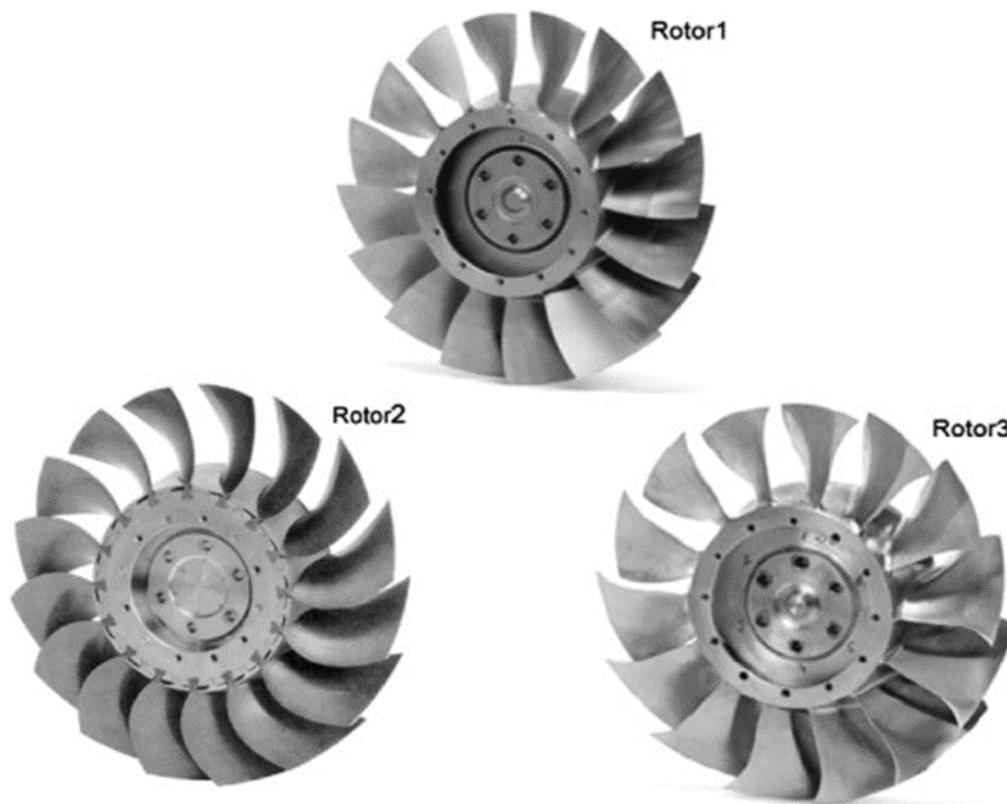


Figura 1.12 Configurazioni di rotori di compressori transonici

Le pale unswept (non inclinate - Rotor 1) sono generalmente utilizzate in condizioni di flusso subsonico, dove l'assenza di inclinazione non comporta perdite aerodinamiche significative. Tuttavia, nelle applicazioni in cui il flusso raggiunge velocità transoniche o supersoniche, lo sweep diventa cruciale. Gli sweep possibili sono due: all'indietro e in avanti, rappresentati nell'immagine come Rotor 2 e Rotor 3. La configurazione ottimale per compressori transonici è rappresentata da Rotor 3, dove è stato osservato che il margine di stallo è migliore, mantenendo un'efficienza più elevata su un intervallo più ampio di portate. Anche una specifica curvatura tridimensionale della pala può influenzare significativamente le caratteristiche del flusso interno e il comportamento aerodinamico locale del rotore, anche se l'effetto complessivo sulle prestazioni potrebbe risultare minimo a causa di fenomeni di compensazione. Ciò significa che un impatto positivo in una zona può essere bilanciato da un impatto negativo altrove. Pertanto, una combinazione appropriata di diverse curvature 3D della pala può portare a progetti ottimali. Un esempio è mostrato in figura, la quale illustra una pala di un compressore

transonico con una forma a "S", ossia spostato in avanti nella regione della punta e spostato all'indietro nel mozzo verso la regione media.

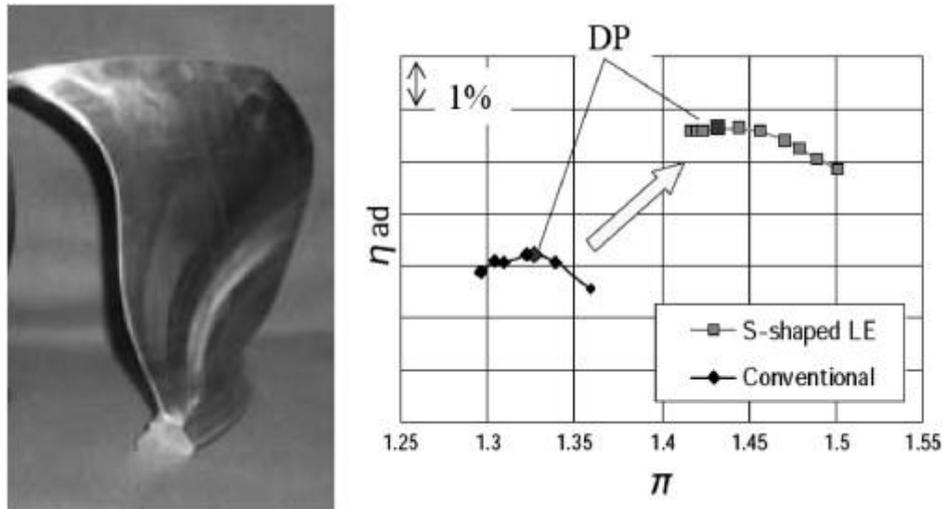


Figura 1.13 Pala di un compressore transonico ad "S"

Questo design combina due curvature differenti: la curvatura della pala con spazzata in avanti, che ha spostato la posizione dell'onda d'urto più a valle nella regione della punta, migliorando l'adattamento del flusso al bordo d'attacco e riducendo al minimo le perdite associate all'onda d'urto; e la curvatura con spazzata all'indietro, che ha mostrato un effetto negativo nella regione della punta, ma ha migliorato l'efficienza dal mozzo alla regione media correggendo l'adattamento del flusso sul bordo d'attacco. Come mostrato in figura, rispetto al design convenzionale, il nuovo rotore ha garantito una maggiore efficienza, accompagnata da un rapporto di pressione di progetto più elevato. Questa combinazione di curvature 3D dimostra come l'ottimizzazione locale delle singole regioni della pala possa portare a miglioramenti significativi nel funzionamento complessivo del compressore.

## ***2 AERODINAMICA DI BASE***

I flussi in un compressore assiale sono estremamente complessi, e lo diventano ancora di più nei compressori transonici. In queste macchine, la formazione di onde d'urto, le interazioni tra shock e strato limite, i flussi secondari e la tridimensionalità del flusso rappresentano sfide significative. Questi fenomeni non solo complicano la progettazione, ma hanno anche un impatto diretto sull'efficienza e sulla stabilità del compressore. I ricercatori e i progettisti devono affrontare queste problematiche per ottimizzare le prestazioni e garantire un funzionamento sicuro e affidabile del compressore in condizioni operative variabili.

### ***2.1 Flussi Compressibili***

Per comprendere a fondo cosa siano le onde d'urto, è fondamentale iniziare definendo cosa si intende per fluido compressibile. Un fluido compressibile è un fluido le cui proprietà intrinseche, come il volume o la densità, possono variare significativamente in risposta a cambiamenti di pressione o temperatura. Più precisamente, le variazioni di pressione in un fluido compressibile portano a cambiamenti di densità, a differenza di un fluido incomprimibile, dove la densità è considerata indipendente dalla pressione.

Abbandonando l'ipotesi di incomprimibilità, il numero di Mach, che è il rapporto tra la velocità del flusso e la velocità del suono, può assumere qualsiasi valore, sia inferiore che superiore a uno. Per calcolare il numero di Mach in ogni punto del campo di moto, è necessario conoscere la velocità  $V$  del flusso e la velocità del suono  $c$ . La velocità del suono  $c$  dipende dallo stato fisico del gas e non dalla geometria del campo di moto. L'equazione di continuità per un fluido incomprimibile è semplificata e si esprime come:

$$\text{Div}(V) = \nabla V = 0 \tag{2.1}$$

Questa semplificazione facilita notevolmente l'analisi matematica e l'analisi CFD (Computational Fluid Dynamics). Tuttavia, per un fluido compressibile, l'equazione di continuità deve tenere conto della variazione della densità e si esprime nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad (2.2)$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $t$  è il tempo, e  $V$  è il vettore velocità del flusso. Questa equazione descrive la conservazione della massa in un fluido compressibile e forma la base per l'analisi dei flussi compressibili, come quelli che danno origine alle onde d'urto. Anche l'Equazione del Potenziale per fluidi compressibili diventa molto più articolata in quanto dovrà contemplare sia la velocità del suono ed anche i termini spuri delle velocità su  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Assumendo che il moto è irrotazionale, le componenti della velocità possono essere espresse per mezzo della funzione potenziale  $\Phi$ :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Indicando con  $c$  la velocità del suono, l'equazione del Potenziale nel caso tridimensionale diventa:

$$\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(\frac{w^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{2uw}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{2vw}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Questa equazione è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine che è lineare nelle derivate ma non è possibile applicarvi il principio di sovrapposizione degli effetti. Questo tipo di equazioni vengono chiamate Equazioni di Monge-Ampère. Nel caso di moto Bidimensionale l'equazione si riduce a:

$$\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Per un fluido incompressibile avente  $M \ll 1$  i termini  $\frac{u^2}{c^2}$ ,  $\frac{v^2}{c^2}$ ,  $\frac{2uv}{c^2}$  sono trascurabili e l'equazione si riduce all'equazione di Laplace  $\nabla^2 \Phi = 0$ .

### 2.1.1 Velocità del Suono

Per calcolare la velocità del suono in un gas compressibile, consideriamo un'onda piana di piccola perturbazione che si propaga nella direzione  $x$  con una velocità pari a quella del suono,  $c$ , in un gas inizialmente in quiete.

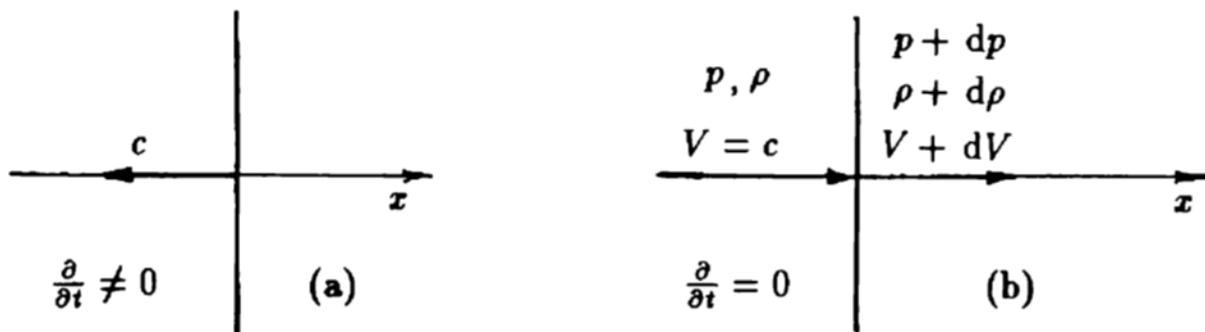


Figura 2.1 Onda piana di perturbazione

Per facilitare l'analisi, fissiamo il sistema di riferimento sull'onda stessa, comunicando a tutto il fluido una velocità  $V$  uguale e contraria a  $c$ . Se la perturbazione è molto piccola, al limite infinitesimale, le variazioni delle grandezze fisiche attraverso l'onda possono essere considerate infinitesimali, rendendo le trasformazioni nel gas reversibili. Poiché il gas è adiabatico, ovvero privo di conducibilità termica, queste trasformazioni reversibili saranno anche isoentropiche.

L'Equazione di Continuità per unità di superficie d'onda diventa:

$$\rho V = (\rho + d\rho)(V + dV) \quad (2.5)$$

Moltiplicando:

$$\rho V = \rho V + \rho dV + V d\rho + d\rho dV$$

Trascurando gli Infinitesimi di Ordine Superiore:

$$\rho dV + V d\rho = 0 \quad (2.6)$$

Allora si può ricavare che:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{dV}{Vd\rho}$$

L'Equazione di Continuità diventa:

$$-\frac{dp}{\rho} = VdV \tag{2.7}$$

Sostituendo nell'equazione di Continuità il termine  $1/\rho$  Troviamo:

$$\frac{dpdV}{Vd\rho} = VdV$$

Da cui:

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Essendo la V la velocità del suono possiamo scrivere

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{2.7}$$

Questa è l'espressione più generale per la velocità del suono in un gas. Per un gas perfetto e per una trasformazione isoentropica  $\frac{p}{\rho^k} = \text{costante}$ , poniamo  $\frac{p}{\rho^k} = A$ , per cui si ha:  $\frac{p}{d\rho} = Ak\rho^{(k-1)} = kp/\rho$ . Esprimendo il rapporto  $p/\rho$  con la legge dei gas perfetti si ottiene infine l'espressione più semplice per il calcolo di c:

$$c = \sqrt{KRT} \tag{2.8}$$

Questo dimostra come la velocità del suono dipenda dalla temperatura del mezzo. Ad esempio, nell'aria a 20°C, la velocità di propagazione del suono è di circa 343 metri al secondo (m/s) o 1235 chilometri all'ora (km/h).

### ***2.1.2 Equazione Del Potenziale Linearizzata***

Se si considera un campo di moto bidimensionale nel quale la velocità in ogni punto del campo può essere espressa come somma della velocità della corrente indisturbata e di una velocità aggiuntiva molto piccola che può essere vista come un piccolo disturbo, possiamo scrivere per il potenziale:

$$\Phi = V_{\infty} + \Phi' \quad (2.9)$$

Sostituendo questo potenziale nell'equazione di continuità e nelle equazioni di Eulero, e trascurando i termini non lineari di ordine superiore, otteniamo una versione linearizzata dell'equazione del potenziale ovvero:

$$(M_{\infty}^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.10)$$

Nota come Equazione di Burgers-Korteweg-de Vries. Tale equazione assume tre forme differenti ovvero è ellittica per  $M < 1$ , parabolica per  $M = 1$  e iperbolica per  $M > 1$  le quali riflettono le diverse nature dei flussi subsonici, transonici e ipersonici. La linearizzazione è particolarmente utile nelle analisi aerodinamiche preliminari, dove si può ottenere una stima delle caratteristiche del flusso, come la distribuzione di pressione attorno a un profilo aerodinamico, senza risolvere l'intero set di equazioni non lineari di Navier-Stokes. Inoltre, facilita l'uso di tecniche analitiche e semi analitiche, come la teoria del profilo sottile e la teoria delle onde d'urto deboli, che forniscono intuizioni fondamentali sui fenomeni fisici in gioco. Questa però non può essere applicata a flussi transonici e ipersonici per studiare fenomeni fortemente non lineari quali onde d'urto o separazione di flusso in quanto si è supposto che a priori la velocità aggiuntiva fosse di piccola entità quindi, il numero di Mach possibile dovrà essere prossimo all'unità nei casi di studio. L'approccio linearizzato è alla base di molti metodi numerici, come il Metodo dei Pannelli e il Metodo delle Differenze Finite, che vengono impiegati nei codici di simulazione aerodinamica per prevedere il comportamento dei flussi intorno a veicoli ad alta velocità.

### 2.1.3 Piccole Perturbazioni in una Corrente Supersonica

Si Consideri una corrente Supersonica indisturbata di Velocità  $V_\infty$

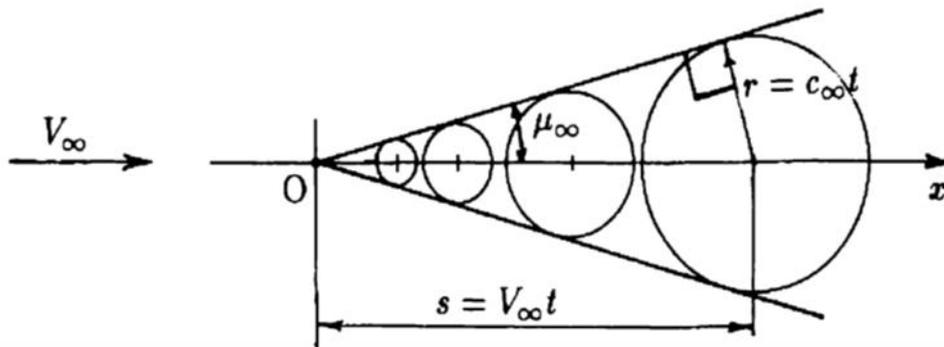


Figura 2.2 Propagazione di una perturbazione in corrente supersonica

Nel punto fisso O si trova la causa di una perturbazione quasi infinitesima che non modifica sostanzialmente né la velocità  $V_\infty$  del fluido né la velocità del suono  $c_\infty$ . La perturbazione che nasce in O e si propaga mediante onde sferiche con velocità del suono nel fluido circostante, il quale trasla con velocità  $V_\infty$ . La zona perturbata è tutta contenuta nel cono che comprende le infinite sfere di raggio  $r = c_\infty t$  e centro traslato di  $s = V_\infty t$ . A causa della corrente con velocità supersonica, queste onde non possono diffondersi in avanti e si accumulano formando una superficie conica. La semiapertura del cono, detta angolo di Mach  $\mu_\infty$  è data da:

$$\sin \mu_\infty = \frac{c_\infty}{V_\infty} = \frac{1}{M_\infty} \quad (2.11)$$

dove  $M_\infty$  è il numero di Mach. Il cono viene detto cono di Mach. In un campo di moto bidimensionale, tutti i coni di Mach vengono involuppati da due superfici piane che costituiscono delle onde di piccola perturbazione o onde semplici. La corrente che attraversa un'onda semplice viene perturbata di una quantità molto piccola, il che comporta che la sua velocità può deviare leggermente, aumentando o diminuendo, e causando variazioni sensibili di pressione. Le perturbazioni sono però così infinitesime che il processo può considerarsi reversibile. Il cono rappresenta la frontiera oltre la

quale le perturbazioni del flusso non possono influenzare il movimento dell'oggetto, creando una regione di flusso supersonico non disturbato all'interno del cono stesso.

### 2.1.4 Espansioni Supersoniche in Teoria Esatta

Nella Teoria Esatta si abbandona la teoria della *Linearizzazione* ovvero si abbandona la concezione che le perturbazioni siano piccole in tutto il campo di moto; ciò comporta che l'equazione linearizzata del potenziale non è più valida. Quindi la Velocità  $V$  non formerà più un angolo di Mach costante ma questo sarà variabile da punto a punto. Le Espansioni e Compressioni in corrente supersonica nella teoria esatta contemplano grandi deviazioni della corrente e conseguenti grandi variazioni della pressione. Da sottolineare inoltre che le espansioni e le compressioni avvengono con modalità differenti e per questo motivo queste devono essere studiate separatamente. Per capire questa affermazione si prenda in esame un tubo di lunghezza infinita riportato in figura

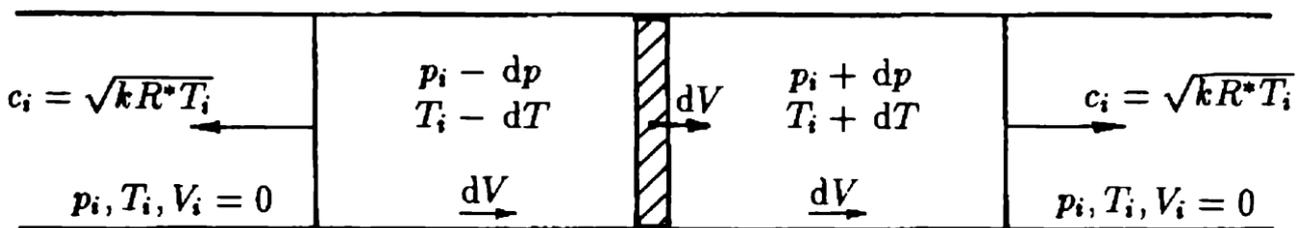


Figura 2.3 Tubo d'urto

Si supponga che il tubo contenga al suo interno uno stantuffo che separa, con tenuta stagna, il gas di destra da quello di sinistra. Supponiamo inoltre che il tubo sia riempito dello stesso gas nelle medesime condizioni iniziali di pressione e temperatura, che indichiamo con  $p_i$  e  $T_i$  e che inizialmente lo stantuffo sia fermo. All'istante  $t=0$  Immaginiamo di spostare leggermente lo stantuffo verso destra con una velocità infinitesimale  $dV$ . Questo piccolo movimento genera due onde nel gas a riposo:

1) Onda di compressione: Si muove verso destra, creando una leggera compressione nel gas, cioè un aumento di pressione e di Temperatura.

2) Onda di espansione: Si muove verso sinistra, causando una leggera espansione nel gas, cioè una diminuzione di pressione e una diminuzione di Temperatura.

Le due onde ovviamente si muovono a velocità del suono come calcolata nel caso iniziale ovvero:

$$c = \sqrt{KRT_i}$$

Al passaggio delle due Onde il Gas avrà acquistato la stessa velocità  $dV$  dello stantuffo. Se ad un istante successivo a  $t=0$  pensiamo di muovere lo stantuffo di un altro  $dV$  partiranno altre due nuove onde semplici di compressione ed espansione. Queste, si allontanano dallo stantuffo con velocità del suono misurata relativamente nei due gas. L'onda di rarefazione si allontana verso sinistra in un gas che ha acquistato già velocità  $dV$  verso destra che si è raffreddato in seguito al passaggio della prima onda di rarefazione. Quindi la sua velocità assoluta verso sinistra sarà  $\sqrt{KR(T_i - dT)} - dV < c_i$  per cui la seconda onda rimarrà sempre distanziata dalla prima onda. La seconda Onda invece si proroga nel gas di destra che ha acquistato velocità  $dV$  e si è riscaldato per cui la velocità assoluta della seconda onda di compressione sarà  $\sqrt{KR(T_i + dT)} + dV > c_i$ . Se il tubo è sufficientemente lungo la seconda onda raggiungerà la prima ma non potrà superarla quindi diremmo che fornirà una spinta alla prima con la quale si impacchetterà per formare un'onda di compressione un po' più veloce e di intensità doppia.

1. Se lo stantuffo muovendosi dalle posizioni di quiete acquista di colpo una velocità  $V$  questa, può essere pensata e scomposta come dovuta ad infiniti incrementi infinitesimi  $dV$  ai quali, corrisponderanno, verso sinistra ad infinite onde di rarefazione mentre verso destra ad infinite onde di compressione che impacchettandosi in un'unica onda di compressione chiamata onda d'urto. L'onda d'urto si propaga nel fluido verso destra con una velocità maggiore della velocità del suono e attraverso di essa si avranno variazioni finite delle grandezze fisiche del gas. La compressione non sarà più isoentropica come nel gas di sinistra dove avrò infinite onde di espansione.

Ovviamente possiamo ripercorre l'esempio del tubo d'urto infinito cambiando però l'inclinazione della parte piana con una parete a pendenza variabile come mostrata in figura.

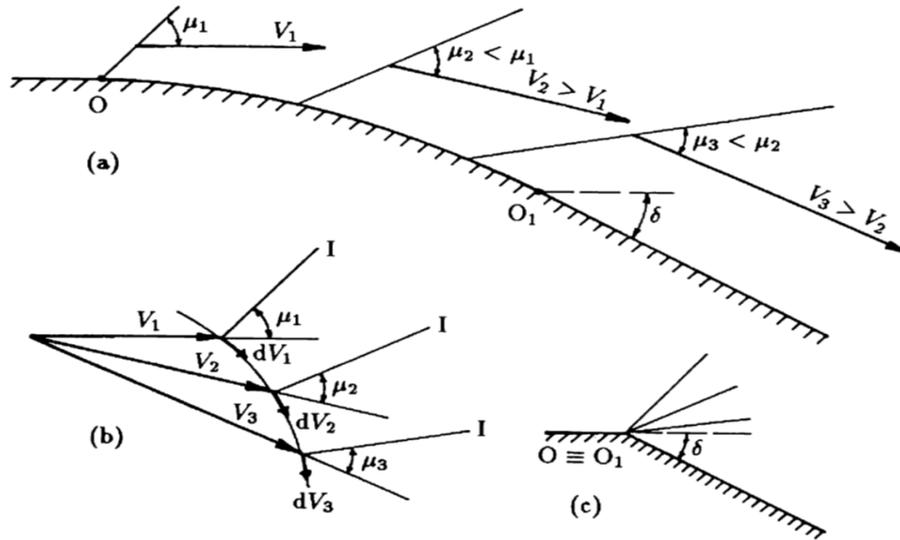


Figura 2.4 Espansione supersonica in teoria esatta

La parete in questione è piana sino al punto O per poi incurvarsi sino al punto O1. Dal tratto curvo di parete escono infinite onde semplici di Espansione che dovranno divergere. Seguendo la parete curva, la Velocità dovrà aumentare sempre più in modulo in quanto siamo di fronte ad un'espansione e si inclinerà sempre più verso destra per rispettare la condizione di tangenza. Dovendo rispettare tale condizione l'angolo di Mach dovrà diminuire in quanto il numero di Mach aumenterà in funzione della Velocità. Le Linee di Mach diverranno sempre meno inclinate rispetto al vettore velocità per cui, le linee diverranno sempre meno ripide lungo la parete curva e pertanto divergeranno senza la possibilità di intersecarsi. Questo fenomeno è identico al precedente del tubo d'urto dove le onde di espansione si distanziavano sempre più. Se il punto O coinciderà con il punto O1 ossia la parete avrà una deviazione a spigolo vivo con angolo  $\delta$ , le varie onde di espansione saranno ancora divergenti ma usciranno tutte dal medesimo punto  $O=O1$ . Ci poniamo allora la domanda di cosa avviene nel caso in cui la parete si inclini in senso antiorario. Si avrà una compressione nella quale la corrente diminuirà gradualmente di velocità in modulo e cambierà la sua direzione per rispettare la condizione di tangenza. Il numero di Mach diminuirà e l'angolo di Mach  $\mu$

aumenterà. Le onde di compressione finiranno per intersecarsi e compattarsi in modo da formare un'onda d'urto identicamente a come accadeva nel tubo d'urto. Se però analizziamo il moto di una particella prossima alla parete questa, incontrerà singole onde semplici di compressione e quindi subirà una compressione graduale ed isoentropica. Viceversa, se si osserva una particella lontana dalla parete questa, attraverserà l'onda d'urto ciò significa che riceverà una compressione improvvisa con una variazione di entropia. Se il punto  $O_1$  tenderà al punto  $O$ , l'onda d'urto si formerà direttamente nel medesimo punto declinando la scomparsa della porzione del campo di moto contenente onde semplici e compressioni graduali ed isoentropiche.

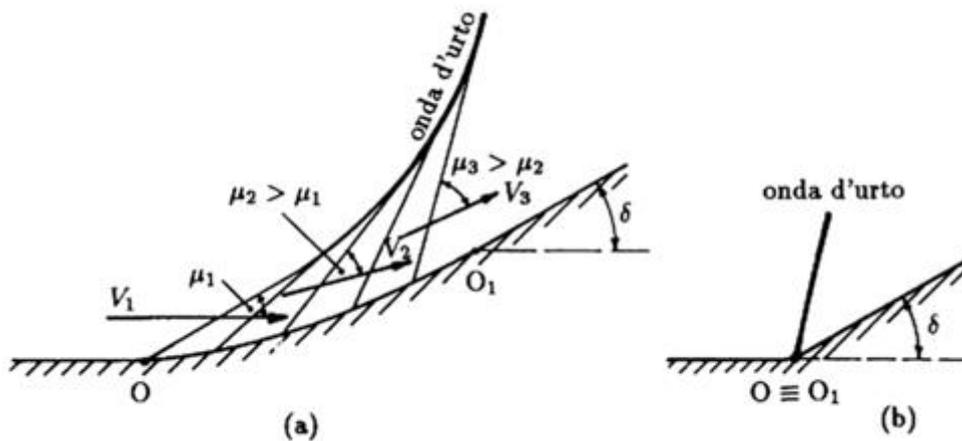


Figura 2.5 Compressione supersonica in teoria esatta

### 2.1.5 Espansione di Prandtl-Meyer

Riprendiamo in esame il tubo d'urto con inclinazione oraria positiva. La corrente  $V_\infty$  che sfiora la parete piana nel punto  $O$  devierà dell'angolo  $\delta$ . Dal punto  $O$  si dipartiranno infinite onde elementari di espansioni. Il campo di moto a monte della prima onda elementare indicata con  $a$  è ovviamente indisturbato ma anche il campo a valle dell'ultima onda elementare indicata con  $z$  sarà uniforme con velocità  $V_1$ . Se si parte da un punto denominato con  $A$  seguendo la linea caratteristica si arriva al punto  $B$  del

nuovo campo uniforme dove  $V_B = V_1$ . Poiché i vettori velocità che attraversano l'espansione devono mantenere la condizione di tangenza si deduce che il numero di Mach deve crescere e quindi deve decrescere continuamente l'angolo di Mach:  $\mu_\infty > \mu > \mu_1$ .

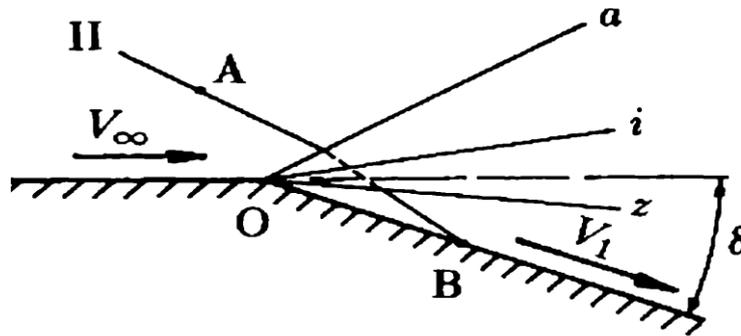


Figura 2.6 Espansione di Prandtl-Meyer

Il campo di moto compreso nel piano fisico fra la prima onda di espansione all'ultima  $z$  viene chiamato Campo di Onda Semplice. Ricordando che nelle espansioni l'entropia rimane costante e tali si conservano tutte le grandezze si può pensare di ricavare il valore  $V_1$  di fine espansione e conoscendo  $V_{cr}$  e  $V_l$  della corrente si può ricavare attraverso l'equazione dell'energia più specificatamente dalle equazioni che legano la velocità critica ed il numero di Mach, il valore  $M_1$  e quindi di tutte le grandezze statiche mediante le relazioni isoentropiche. Volendo si può ottenere un legame diretto fra la pressione  $p$  e la velocità  $V$  senza passare dal numero Mach.

Equazione dell'Energia:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V_l^2}{2}$$

Dividendo il primo membro per il secondo, si ottiene:

$$\frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1 \quad (2.11)$$

Dalle relazioni isoentropiche si ha  $\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$  per cui la (2.11) diventa:

$$\frac{p}{p_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{k}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{(k-1)}{k}} = 1 - \frac{V^2}{V_l^2}$$

Da cui si ottiene

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{V^2}{V_l^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.12)$$

E quindi

$$\frac{V}{V_l} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{(k-1)}{k}}} \quad (2.13)$$

Quest'ultima equazione ci permette di legare tra loro le velocità con le pressioni senza passare dal numero di Mach. È interessante però trovare una funzione che ci permetta di calcolare  $M_2$  in funzione di  $M_1$  e  $\delta$  o viceversa. Dato l'angolo di deflessione  $\delta$  ed il numero di Mach in ingresso ovvero  $M_1$  possiamo scrivere che:

$$\delta = v(M_2) - v(M_1)$$

Così applicando l'Equazione dell'Energia, La relazione tra Numero di Mach ed Entalpia e la Legge de Gas Perfetti si trova

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} * \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} + (M^2 - 1)\right) - \arctan(\sqrt{M^2 - 1}) \quad (2.14)$$

Questa funzione viene detta Funzione Prandtl-Meyer dove  $\gamma$  è il rapporto tra i calori specifici. Se si vuole calcolare il valore di  $M_2$  l'equazione (2.14) non può essere risolta analiticamente ma va risolta numericamente attraverso il metodo Newton-Raphson (metodo delle tangenti) o della bisezione. Un ulteriore fattore che va considerato è che la funzione non ammette il calcolo con un fluido in Ingresso Subsonico. Per risolvere il problema del flusso in ingresso subsonico che diventa supersonico bisogna utilizzare le equazioni di Rankine-Hugoniot. Inoltre, questa funzione risolve solo casi di espansione e non di compressione.

A titolo di esempio si abbia una corrente indisturbata in ingresso con Numero di Mach  $M_1 = 2$ ; la corrente incontra una deflessione in senso orario di angolo  $\delta=10^\circ$ . Risolvendo Numericamente con Newton-Raphson troveremo un valore di  $M_2 = 2.5$ . Nella Realtà i valori di  $v(M)$  sono già stati calcolati e tabellati. Il grafico riporta i valori di  $M_2$  in uscita in funzione di  $M_1$  in ingresso prendendo un angolo di deflessione di  $\delta=10^\circ$  ed utilizzando il metodo numerico Newton-Raphson come nell'esempio precedente.

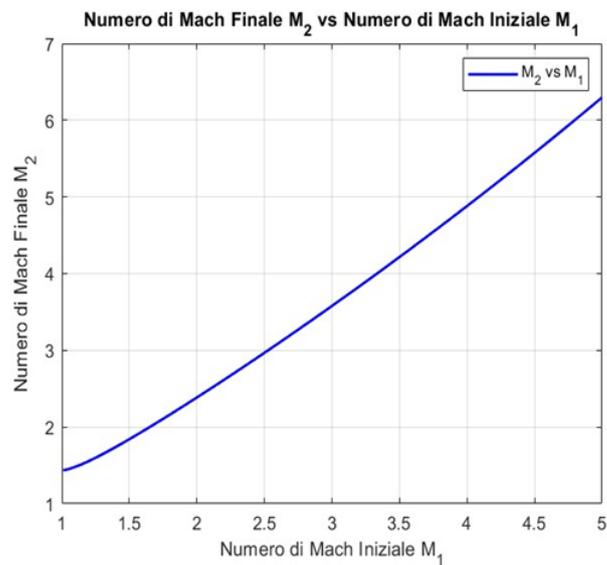


Figura 2.7 Numero di  $M_2$  in funzione di  $M_1$

## 2.2 Onde d'Urto

### 2.2.1 Urto Retto (Normal Shock Wave)

Si consideri un'onda piana finita che si propaga perpendicolarmente a sé stessa in un fluido compressibile in quiete. Ponendo il sistema di riferimento centrato sull'onda, il fluido risulta stazionario rispetto all'onda. In questa condizione, l'onda è ferma e viene investita dal fluido a monte con una velocità  $V_1$ , perpendicolare all'onda stessa.

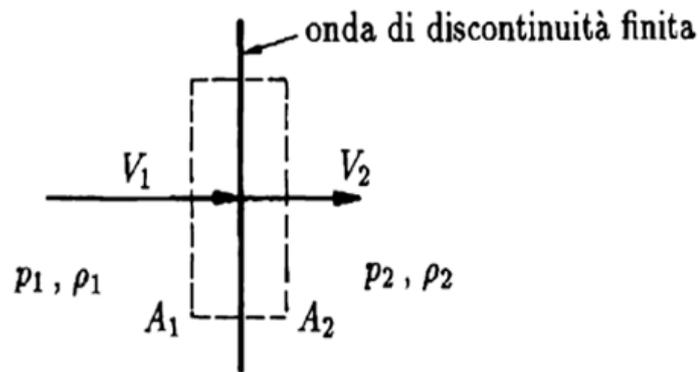


Figura 2.8 Onda di discontinuità finita

Tracciando un volume di controllo a forma di parallelepipedo con basi  $A_1 = A_2$  unitarie, possiamo scrivere l'equazione di continuità per il volume di controllo. Essendo il moto permanente, la portata in massa entrante deve uguagliare la portata in massa uscente:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (2.15)$$

Richiamando il teorema della Quantità di Moto in forma integrale:

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

dividendo membro a membro le due troviamo:

$$V_1 - V_2 = \frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1} \quad (2.16)$$

Inserendo quest'ultima nell'Equazione dell'Energia e manipolando troviamo le relazioni di Rankine-Hugoniot ovvero:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (2.17)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{k+1}{k-1}} \quad (2.18)$$

Queste due relazioni permettono di calcolare il rapporto delle pressioni  $\frac{p_2}{p_1}$  e il rapporto delle densità  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  conoscendo uno dei due rapporti, ma ci fanno anche capire che l'evoluzione della corrente attraverso un'onda di discontinuità finita non è isoentropica. Infatti, manipolando l'equazione dell'energia contenente l'equazione di continuità e della quantità di moto, otteniamo:

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V_2) \left( \frac{k+1}{2k} \frac{V_{cr}^2}{V_1 V_2} + \frac{k-1}{2k} \right) \quad (2.19)$$

Questa equazione ammette due soluzioni:

1.  $V_1 = V_2$ , il che implica che la discontinuità non esiste.
2.  $V_1 V_2 = V_{cr}^2$ , che a sua volta si divide in due possibilità:
  - Se  $V_1 < V_{cr}$  e  $V_2 > V_{cr}$ , la corrente subsonica diventa supersonica attraversando l'onda, il che implica un'onda di espansione. Tuttavia, questo scenario non è fisicamente possibile in un fluido adiabatico poiché comporterebbe una diminuzione dell'entropia.
  - Se  $V_1 > V_{cr}$  e  $V_2 < V_{cr}$ , la corrente supersonica si comprime diventando subsonica a valle dell'onda, che in questo caso prende la denominazione di onda d'urto. Questa seconda ipotesi è l'unica possibile poiché alla compressione è associato un aumento di entropia. Quindi, possiamo affermare che la velocità  $V_1$  deve essere sempre supersonica.

A conferma di ciò, esprimiamo il rapporto delle pressioni fornito dall'equazione di Rankine-Hugoniot:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)$$

Da questa relazione, vediamo che il rapporto delle pressioni è una funzione crescente di  $M_1$ . Inoltre, poiché l'urto è tanto più forte quanto maggiore è il rapporto delle pressioni, il numero di Mach  $M_1$  della corrente a monte dell'urto può essere considerato un parametro per valutare la forza dell'urto, che cresce con  $M_1$ .

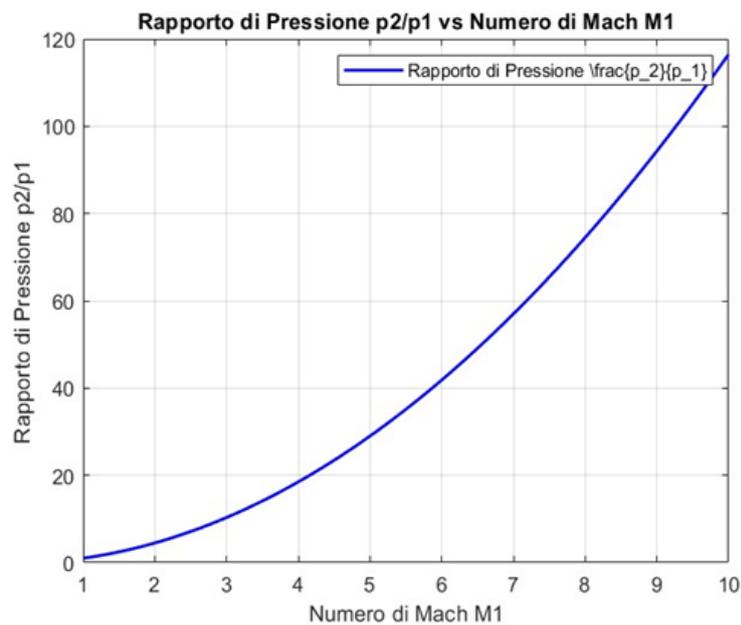


Figura 2.9 Rapporto delle pressioni in funzioni di  $M_1$

### 2.2.2 Urti Obliqui (Oblique Shocks)

È particolarmente interessante studiare gli urti obliqui e le loro proprietà. Consideriamo un'onda d'urto piana che forma un angolo  $\epsilon$  (detto angolo d'urto) con la velocità  $V_1$  del flusso uniforme a monte dell'onda. Introduciamo un sistema di assi cartesiani con  $n$  perpendicolare all'onda e  $t$  parallelo all'onda. Le velocità  $V_1$  a monte e  $V_2$  a valle dell'onda possono essere scomposte nelle loro componenti normali e tangenziali rispetto all'onda. Se consideriamo un volume di controllo costituito da un

parallelepipedo con due facce di area  $A_1 = A_2$  poste rispettivamente nei due campi di moto (1) e (2), e identifichiamo altre quattro facce con area  $S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2$ , notiamo che queste ultime due facce sono parallele al piano del moto e non vengono attraversate dal flusso.

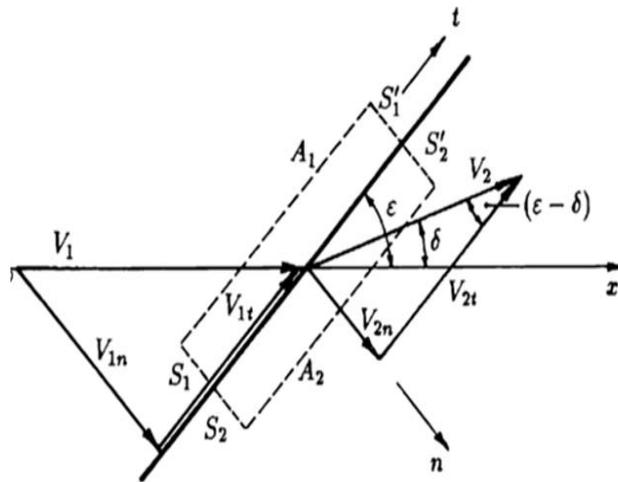


Figura 2.10 Urto obliquo

Imponiamo che sia soddisfatta l'equazione di continuit :

$$\rho_1 V_{1n} A_1 + \rho_1 V_{1t} S_1 + \rho_2 V_{2t} S_2 = \rho_2 V_{2n} A_2 + \rho_1 V_{1t} S'_1 + \rho_2 V_{2t} S'_2$$

Essendo  $A_1 = A_2$ ,  $S_1 = S'_1$ ,  $S_2 = S'_2$ , si ottiene

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \tag{2.20}$$

Se applichiamo ora il teorema della Quantit  di moto in forma integrale agli assi n e t troviamo:

Asse n

$$R_n = \int_{\sigma} \rho V_n V_{n\sigma} d\sigma \tag{2.21}$$

Dove con  $V_n$  si identifica la componente della velocit  secondo l'asse n e con  $V_{n\sigma}$  si intende la componente della velocit  normale alla superficie sigma che racchiude il volume di controllo che sar  positiva se uscente da esso. Sulla superficie  $A_1$  avremo che  $V_{1n\sigma} =$

$-V_{1n}$  e sulla superficie  $A_2$  avremo  $V_{2n\sigma} = V_{2n}$ , mentre per le superfici  $S_1$  e  $S'_1$  si ha  $V_{1n\sigma} = \pm V_{1t}$  e sulle superfici  $S_2$  e  $S'_2$  avremo  $V_{2n\sigma} = \pm V_{2t}$ .

L'integrale della (2.21) diventa:

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = -\rho_1 V_{1n}^2 A_1 + \rho_2 V_{2n}^2 A_2$$

Poiché le superfici  $S_1, S'_1, S_2, S'_2$  danno contributi che si elidono ed essendo  $A_1 = A_2$  si ottiene:

$$p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \quad (2.22)$$

Asse t

$$R_t = \int_{\sigma} \rho V_t V_{n\sigma} d\sigma \quad (2.23)$$

Facendo ragionamenti analoghi ad i precedenti si ottiene

$$V_{1t} = V_{2t} = V_t \quad (2.24)$$

Ciò significa che la componente Parallela all'onda d'urto resta costante attraverso l'urto e quindi nell'urto tale componente è nulla. Per la  $V_n$  le equazioni sono identiche alle equazioni che descrivevano la velocità in un urto retto e quindi si ritorna alle stesse relazioni di Rankine-Hugoniot. un urto obliquo può essere visto come un urto retto per le sole componenti della velocità  $V_n$  ovvero normali all'urto, al quale, si sovrappone un campo di velocità uniforme parallelo all'onda d'urto di velocità  $V_t$ . La costanza della componente tangenziale della velocità associata alla riduzione della componente normale genererà la deviazione della corrente di un angolo  $\delta$  (detto angolo di deviazione della corrente). Ciò significa che la corrente ruoterà verso l'onda d'urto stessa in modo da adagiarsi su essa. Quindi, la compente  $V_t$  attraversando l'urto resta costante mente la componente  $V_n$  diminuisce allora la velocità  $V_2$  a valle dell'onda sarà deviata rispetto alla componente a monte  $V_1$  dell'angolo  $\delta$ . Inoltre, la velocità  $V_t$  non avrà variazioni di pressione e temperatura ma sommata alla  $V_n$  aumenterà il modulo della  $V_2$ . Infine, possiamo affermare che dovendo essere  $V_{1n}$  supersonica per scaturire un urto sicuramente la velocità  $V_1$  dovrà essere supersonica e che la velocità  $V_{2n}$  a valle dell'onda d'urto sarà sicuramente subsonica ma ciò non implica che la  $V_2$  complessiva non sia ancora supersonica in quanto la  $V_{2t}$  aumenterà il modulo complessivo. essendo l'onda d'urto obliqua riconducibile ad un'onda piana solo per la compente normale all'onda

stessa è fondamentale conoscere il numero di Mach relativo alla componente normale detto *numero di Mach normale*:

$$M_1 = \frac{V_{1n}}{c_1} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{c_1} = M_1 \sin \varepsilon \quad (2.25)$$

Possiamo esprimere quindi il rapporto delle pressioni, le quali ci forniscono il valore dell'intensità dell'onda:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 \sin^2 \varepsilon - 1) \quad (2.26)$$

$M_1 \sin \varepsilon$  è quindi il parametro che definisce la forza dell'urto; a parità di  $M_1$  l'urto risulta tanto più forte quanto maggiore è l'angolo  $\varepsilon$ . L'onda normale la quale ha  $\varepsilon = 90^\circ$  è proprio quella che provoca il massimo salto di pressione. Viceversa, l'onda diventa evanescente, per il valore minimo dell'angolo d'urto che corrisponde *all'onda di Mach* ovvero:

$$M_{n1} = M_1 \sin \varepsilon = 1 \rightarrow \varepsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1} \quad (2.27)$$

Dove  $\mu$  è l'angolo di Mach.

Si può ricavare la correlazione che esiste fra il numero di Mach all'ingresso, l'angolo d'urto e l'angolo di deviazione della corrente. Esprimendo il rapporto delle densità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{(k+1)(M_1 \sin \varepsilon)^2}{2+(k-1)(M_1 \sin \varepsilon)^2} \quad (2.28)$$

Se dividiamo tutto per  $V_t$  ed esplicitiamo i termini si arriva ad ottenere:

$$\frac{1}{\tan \delta} = \left( \frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \varepsilon - 1} - 1 \right) \tan \varepsilon \quad (2.29)$$

L'equazione fornisce immediatamente tutti i valori di  $\delta$  per ogni valore di  $M_1$  e  $\varepsilon$ , mentre per ottenere  $\varepsilon$  in funzione di  $M_1$  e  $\delta$  questa, deve essere risolta numericamente. Per ogni valore di  $\delta$  si ottengono due valori di  $\varepsilon$  corrispondenti: ad un valore minimo chiamato *urto debole* e ad un valore massimo detto *urto forte*. Sul grafico  $\delta - \varepsilon - M_1$  si può individuare l'angolo  $\varepsilon$  e l'angolo  $\delta$  in funzione della curva di  $M_1$  data. Essendo le curve della curva a campana con concavità verso il basso, quando individueremo il primo punto la campana sarà divisa a metà. Nel lato destro della campana troveremo la soluzione forte, la quale sarà data dall'intersezione del punto sulla campana e la curva che rappresenta il rapporto delle pressioni. Allo stesso modo nel lato sinistro troveremo

la soluzione debole. La seconda soluzione invece è unica e corrisponde al caso di massima deviazione possibile della corrente  $\delta_{max}$ . Non avendo più soluzioni per  $\delta > \delta_{max}$  la corrente non potrà essere più deviabile con una semplice onda obliqua ma, sarà deviata attraverso un'onda curva.

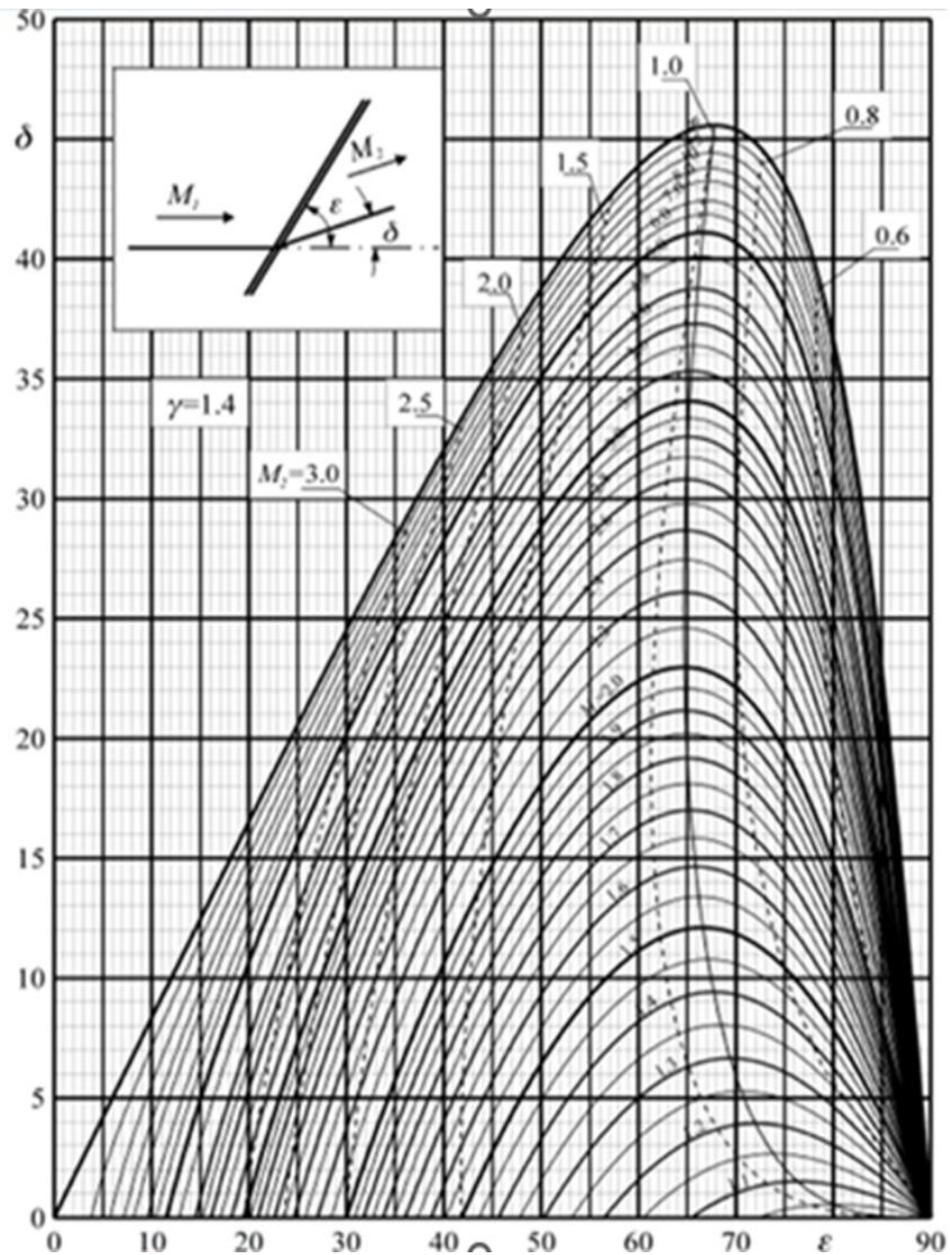


Figura 2.11 Grafico d'onda d'urto ( $M - \delta - \epsilon$ )

### 2.2.3 Onde d'urto Curva (Bow Shock)

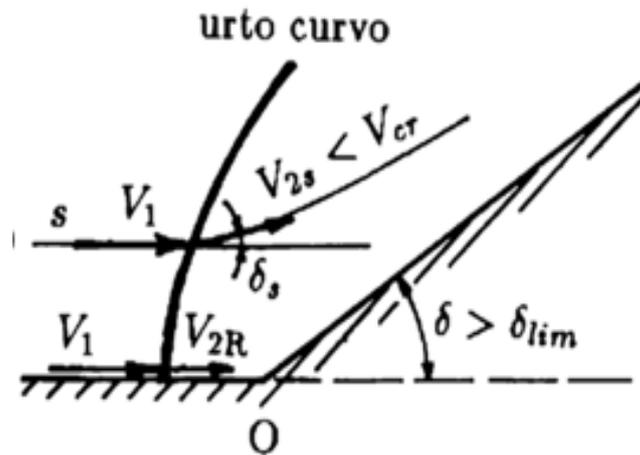


Figura 2.12 Onda d'urto curva

Riprendiamo la parete piana dove nel punto  $O$  questa si inclina in senso antiorario di angolo  $\delta$ . Se l'angolo di deviazione  $\delta$  della parete risulta maggiore dell'angolo  $\delta_{lim}$ , si genera un'onda d'urto curva la quale sarà retta in prossimità della parete ovvero ortogonale a  $V_1$ . Poiché in un urto retto non si ha deviazione della corrente, l'urto curvo dovrà allontanarsi leggermente dal punto  $O$  in cui incomincia la deviazione. Questo è dovuto in quanto la  $V_{2R}$  che è la velocità a valle dell'urto retto e parallela a  $V_1$  di rispettare la condizione di tangenza. Si genererà a valle dell'onda un campo di moto subsonico con le linee di corrente incurvate per rispettare la condizione di tangenza. possiamo quindi immaginare un'onda curva come un insieme di infiniti urti piani obliqui che si differenziano tra ogni singola linea di corrente. Consideriamo una linea di corrente staccata dalla parete ed indicata con  $s$  in figura, per questa linea di corrente l'urto non è più retto ma risulta leggermente obliquo di un angolo  $\delta_s$ . La velocità a valle dell'urto sarà un po' maggiore della  $V_{2R}$  sulla parete a valle dell'urto retto ma questa deve essere anch'essa subsonica. L'aumento di entropia sarà massimo a parete e via via diminuirà all'inclinarsi dell'onda. Il campo di moto a valle dell'onda non sarà omoentropico ma sarà variabile fra una linea di corrente e la sua successiva. Quindi, attraverso l'onda curva si avrà una variazione di velocità, la quale passerà da supersonica a subsonica con un aumento della densità. La formazione dell'onda curva

nella pratica è stata una delle sfide ingegneristiche dello scorso secolo nella progettazione di profili alari o della forma degli stessi aerei.

### 2.2.4 Interazioni di Onde d'Urto

L'interazione tra due onde d'urto è un fenomeno di grande importanza nello studio della fluidodinamica compressibile. Consideriamo una parete che presenta due inclinazioni successive, definite dagli angoli  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , come mostrato in figura.

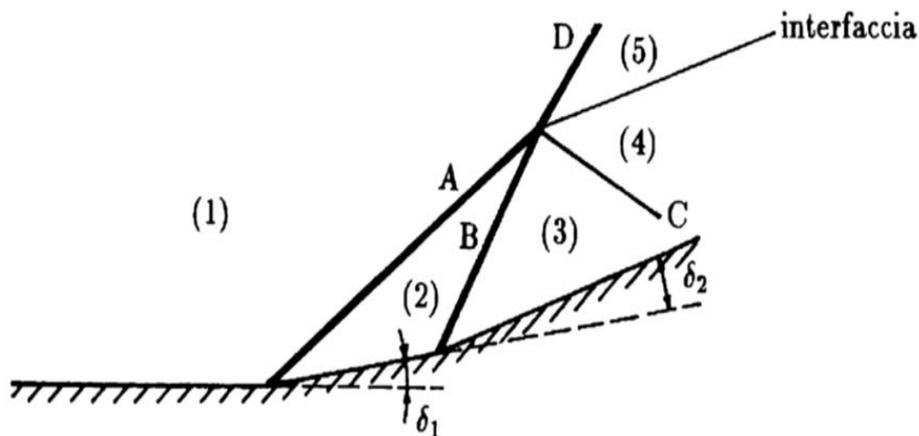


Figura 2.13 Interazione di onde d'urto

Da un'analisi qualitativa si osserva che la porzione di parete con angolo  $\delta_2$  è più ripida rispetto alla prima. Questo fa sì che l'onda d'urto B debba inevitabilmente intersecare l'onda A. Quando le due onde si incontrano, si forma una nuova onda d'urto D, che separa il campo di moto (1) dal campo di moto (5). Si potrebbe ipotizzare che i campi di moto (3) e (5) siano congiunti e che i vettori velocità in questi campi siano paralleli tra loro e inclinati di  $\delta_1 + \delta_2$  rispetto al vettore  $V_1$ . Tuttavia, ciò è possibile solo se dal punto di intersezione D si propaga un'onda, che può essere di compressione o di espansione, a seconda dell'intensità degli urti A e B e dall'inclinazione della parete. Se questa onda

non esistesse, le regioni (3) e (5) dovrebbero avere la stessa pressione e direzione della corrente. Tuttavia, la pressione e la direzione nella regione (3) sono determinate univocamente dalle condizioni iniziali e al contorno. D'altra parte, se a valle dell'urto complessivo si assume che  $V_5 = V_3$ , l'urto D è completamente determinato e in genere risulterà che  $p_5 = p_3$ . Se invece dal punto di intersezione si genera un'altra onda, è possibile regolare l'intensità di quest'ultima e quella dell'urto in modo che siano soddisfatte le condizioni:

$$V_3 = V_5 \text{ e } p_3 = p_5$$

Questo problema rappresenta un caso particolare del più generale problema di Riemann bidimensionale, la cui soluzione può essere ottenuta mediante un metodo iterativo. Se la deviazione del flusso è dovuta a un incurvamento graduale della parete, non si forma un'onda d'urto, ma dalla parete si dipartono delle onde di compressione che, solo a una certa distanza dalla parete, si impacchettano formando un'onda d'urto leggermente curva. Questa onda diventa sempre più forte man mano che si allontana dalla parete, a causa del sovrapporsi di nuove onde semplici di compressione. Ogni onda semplice che arriva sull'onda d'urto genera un'onda riflessa e una linea di scorrimento. Inoltre, nello strato limite sulla parete, la velocità varia da zero sulla superficie fino al valore  $V_e$  supersonico al confine esterno dello strato limite. Il moto nello strato limite, quindi, è in parte subsonico e in parte supersonico, separati da una linea dove sulla parete al valore  $V_e$  supersonico al confine esterno dello strato limite. Il moto nello strato limite, quindi, è in parte subsonico e in parte supersonico, separati da una linea dove  $M = 1$ .

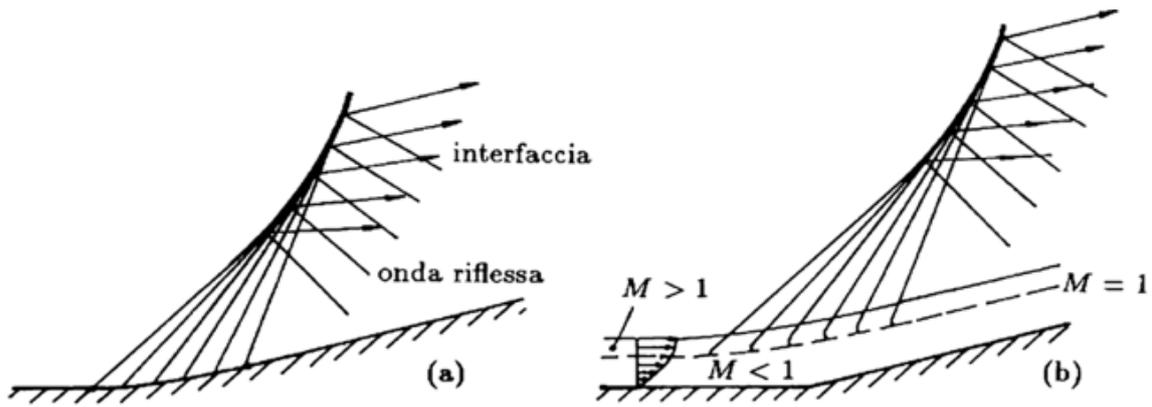


Figura 2.14 Corrente supersonica su parete concava

L'interferenza tra onde d'urto può causare variazioni locali di pressione e velocità, portando a ulteriori perdite di energia. Inoltre, l'interazione tra queste onde aumenta la turbolenza del flusso, contribuendo alla separazione dello strato limite dalla pala.

### 2.2.5 Riflessione Regolare di un'Onda d'Urto

Si abbia un convergente come illustrato in figura:

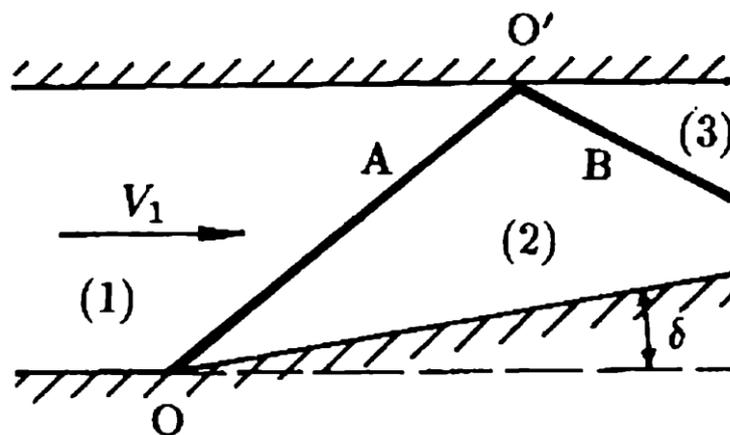


Figura 2.15 Riflessione regolare di un'onda d'urto

La corrente  $V_1$  del campo (1) si comprime attraverso l'onda d'urto A fino ad ottenere la velocità  $V_2$ . La velocità  $V_2$  non rispetta però la condizione di tangenza rispetto alla parete superiore del convergente in quanto questa risulterà tangente al piano inclinato. Nel punto  $O'$  si formerà una nuova onda d'urto B che porterà la velocità  $V_3$  nel campo (3) ad essere tangente con la parete superiore. Se però la velocità a monte dell'urto ovvero la  $V_1$  diminuisce si genererà un urto curvo che nel punto O sarà coincidente con l'urto obliquo A del caso precedente in quanto dovrà questo provocare la stessa deviazione  $\delta$ . Essendo la velocità a monte appena supersonica l'urto arriverà ortogonalmente alla parete superiore e non vi sarà riflessione d'onda. Sapendo che in un urto curvo più ci si avvicina alla base dello stesso meno la velocità sarà rallentata avremo che la velocità  $V_2$  sarà ancora supersonica e la velocità  $V_3$  sarà sicuramente subsonica. Per avere un campo di moto uniforme in qualche punto C dell'onda curva dovrà nascere un urto retto che porterà la velocità  $V_2$  ad essere subsonica. Quindi infine i campi di moto (3) e (4) saranno entrambi subsonici e rotazionali. La combinazione di questi urti prende il nome di *urto  $\alpha$   $\lambda$*  per la sua forma. Lo studio della riflessione delle onde d'urto è fondamentale nei compressori transonici in quanto cambiamenti di area come restringimenti o espansioni del condotto possono causare oscillazioni nella pressione e nella velocità del flusso, creando ulteriori perturbazioni e perdite di energia.

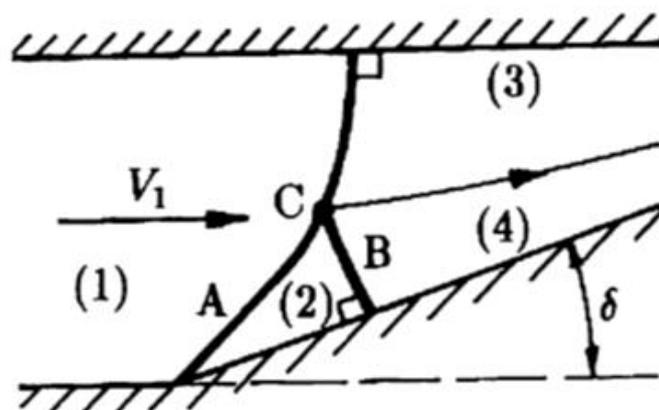


Figura 2.16 Urto senza riflessione o  $\alpha$   $\lambda$

## ***2.3 Perdite per Onde d'urto***

Le perdite dovute ad i flussi altamente tridimensionali nelle macchine assiali sono noti da tempo, ma nelle macchine transoniche queste problematiche sono amplificate dall'interazione con le onde d'urto. Sebbene non sia possibile eliminare completamente i fenomeni che si sviluppano, è possibile contenerli e ridurli al minimo. Grazie all'analisi CFD (Computational Fluid Dynamics), oggi si possono eseguire numerose simulazioni e verifiche, consentendo una comprensione sempre più approfondita della complessa natura del flusso e migliorando le prestazioni delle macchine transoniche.

### ***2.3.1 flussi secondari***

I flussi secondari nei compressori a flusso assiale sono la causa principale delle perdite. Le pale dei compressori transonici vengono progettate dividendo l'altezza della pala in 15-20 sezioni. Per ciascuna sezione vengono calcolati l'angolo di attacco e il profilo da utilizzare. Una volta ottenute le geometrie delle sezioni, queste vengono impilate una sull'altra per creare la pala tridimensionale. Ci sarà notevole una differenza nei profili alari utilizzati tra la radice e la punta.

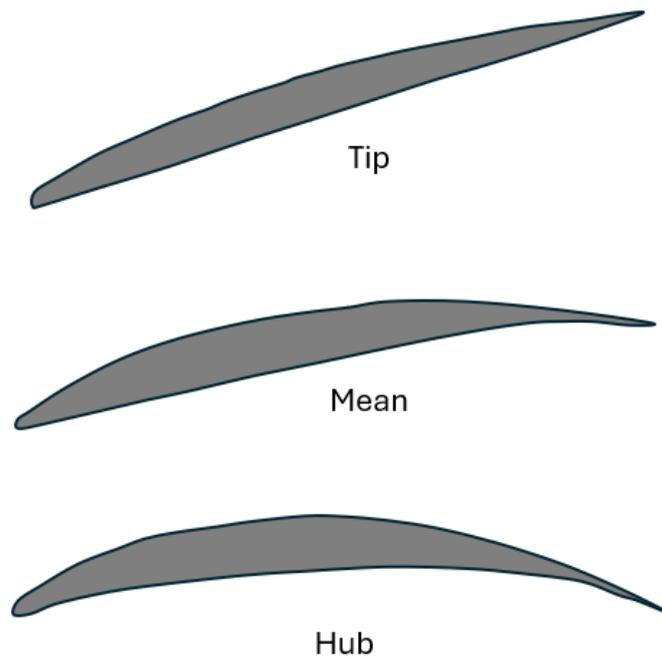


Figura 2.17 Possibile andamento dei profili alari tra root e tip in una pala transonica

La tridimensionalità della pala comporta una distribuzione della pressione molto variabile non solo tra la superficie di aspirazione e la superficie di pressione, ma anche lungo l'altezza della pala, cioè tra radice e punta.

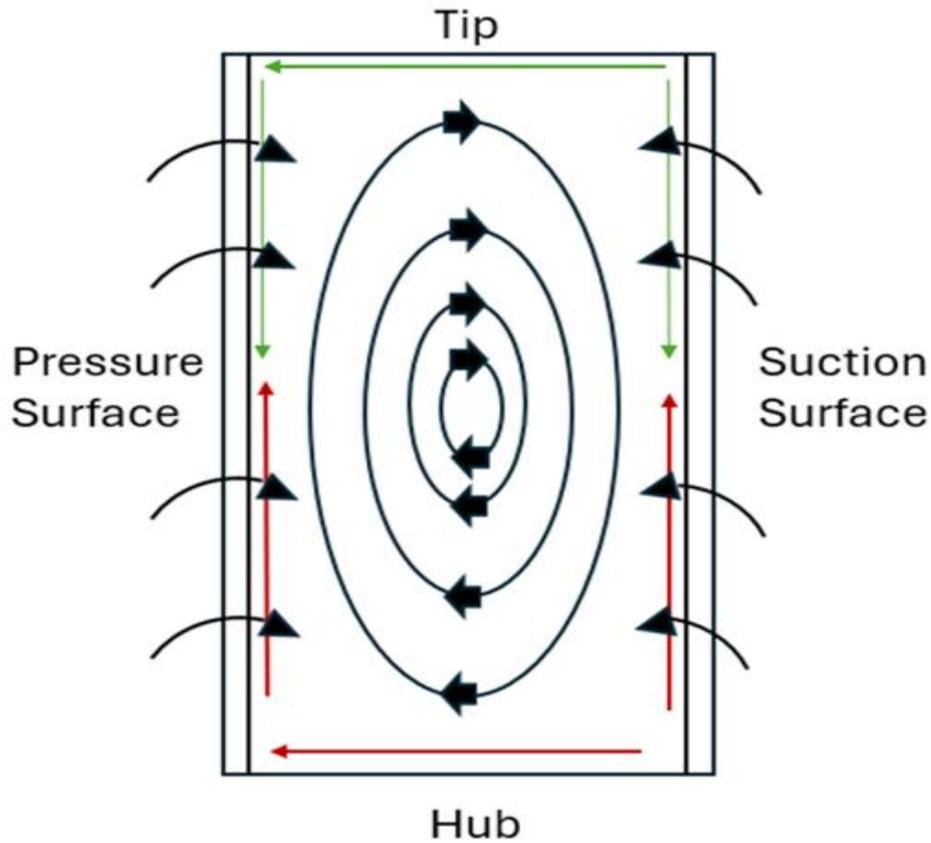


Figura 2.18 Flusso secondario a singolo vortice

Analizzando la figura, si può notare come la pressione vari tra la superficie di aspirazione, sulla destra dell'immagine, e la superficie di pressione, sulla sinistra. Tuttavia, questa pressione varia anche gradualmente lungo l'altezza della pala, tra radice e punta. A causa della forte curvatura della pala, si verifica una significativa differenza di pressione tra la radice e la punta, che mette in moto lo strato limite, generando vortici. Anche in condizioni di flusso in ingresso perfettamente laminare, la formazione di questi vortici è inevitabile. La natura di tali vortici è fortemente influenzata dal disegno del profilo della pala: un profilo diverso può generare vortici diversi.

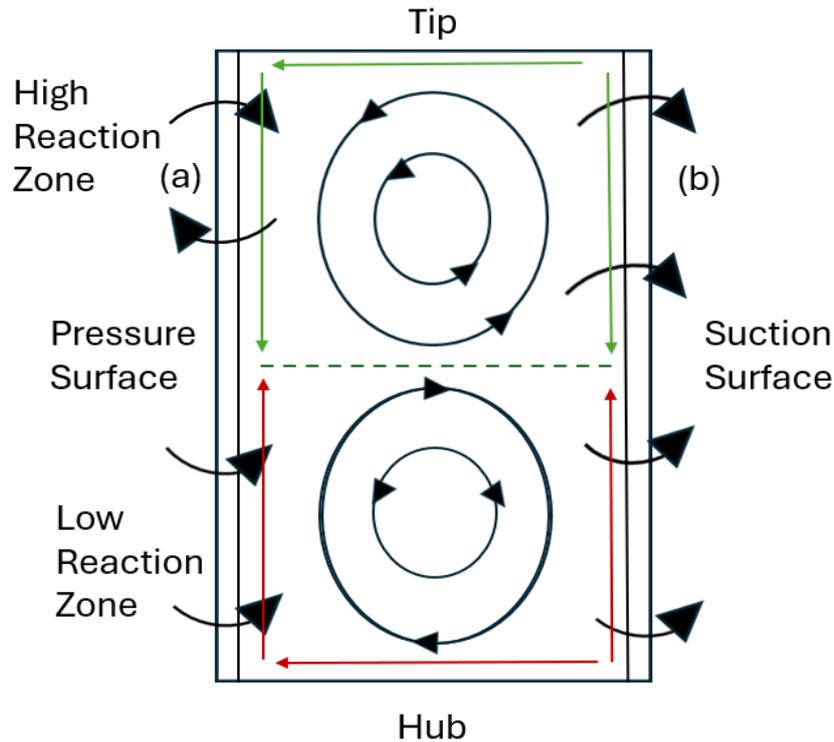


Figura 2.19 Flusso secondario a doppio vortice

La figura mostra che, a causa di una differenza marcata tra i profili utilizzati, si creano due vortici dovuti alla differenza di pressione tra la superficie di aspirazione e la superficie di pressione.

### 2.3.2 Onde d'Urto nei Profili a Schiera

La figura (a) mostra una configurazione di onde d'urto tra pale che può essere osservata in un rotore di compressore transonico. L'onda d'urto inizia dal bordo d'attacco della pala e si propaga nel canale palare; a seconda della geometria del rotore e delle condizioni operative, l'onda può svilupparsi in modi diversi, variando l'inclinazione o biforcandosi. Nella figura (b) vengono illustrate le configurazioni dell'urto all'interno di un generico rotore transonico, evidenziando come la propagazione delle onde d'urto

possa portare da una condizione di strozzamento a una di quasi stallo, mantenendo costante la velocità di rotazione.

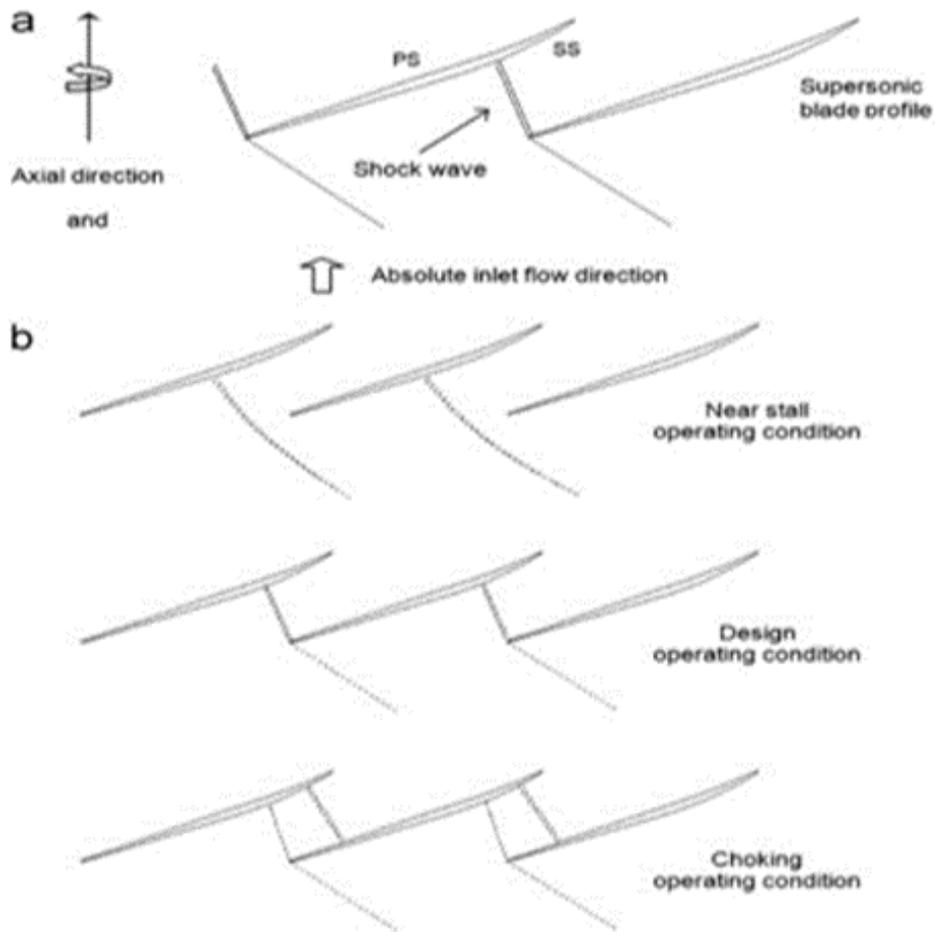


Figura 2.20 Onde d'urto in schiere transoniche

Inoltre, quando il punto operativo si sposta verso condizioni di flusso con massa inferiore, l'urto tende a spostarsi verso monte, diventando sempre più normale al flusso in entrata. Questo comportamento può essere osservato nelle viste 3D del fronte d'onda, che mostrano il flusso in condizioni di massima efficienza e in quasi stallo.

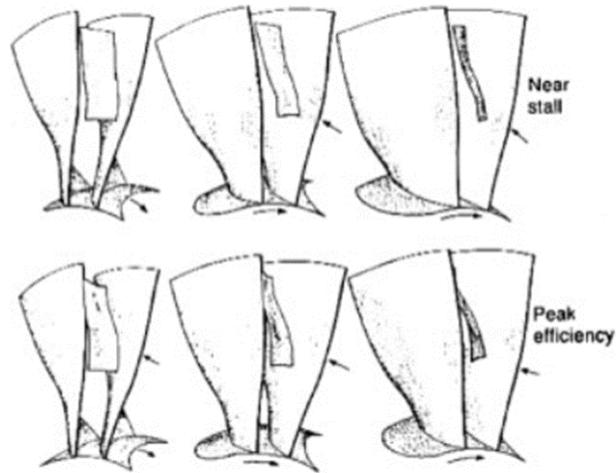


Figura 2.21 Vista 3D di un'onda d'urto in un compressore assiale transonico

### ***2.3.3 Interazione Urto-Strato Limite***

Quando si ha una forte compressione, ovvero un alto rapporto di compressione, il fluido che entra nel compressore incontra un gradiente di pressione avverso, causando un ispessimento dello strato limite sulle superfici come pale, albero o cassa. Questo ispessimento dello strato limite distorce il flusso e, essendo fluido a bassa energia, tende a ostacolare il flusso principale. A complicare ulteriormente la situazione vi è l'interazione tra strato limite e onde d'urto. Le principali conseguenze sono generalmente due: l'interazione fra onde d'urto e strato limite sulla superficie delle pale, l'interazione fra onde e vortice di punta (tip vortex).

Primo caso: Quando un flusso supersonico impatta su una superficie crea un'onda d'urto obliqua la quale, a sua volta, impatta su una superficie curva, induce un forte gradiente di pressione avverso che può portare alla separazione dello strato limite dalla superficie.

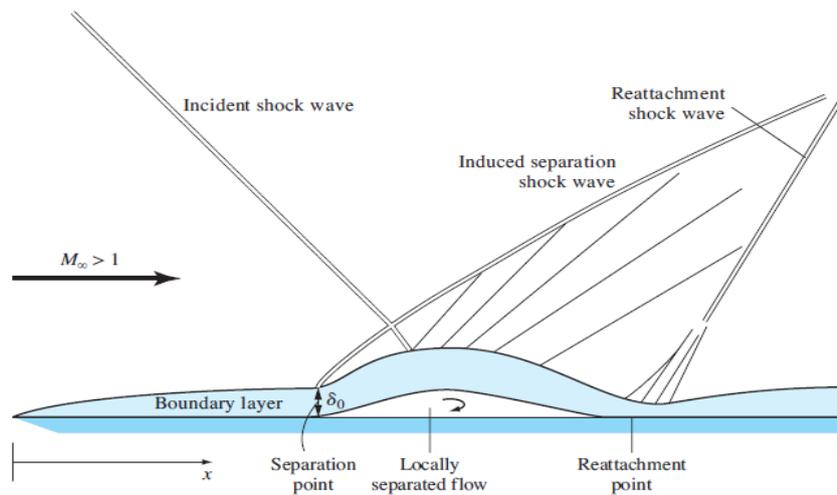


Figura 2.22 Interazione onda d'urto-strato limite

La separazione del flusso genera una bolla che crea un canale convergente-divergente per il flusso esterno. Nel punto di distacco del flusso si forma una rampa, che dà origine a un'onda obliqua nota come "Induced separation shock wave". L'intersezione tra l'onda incidente e quella di separazione non genera un'onda d'urto, ma crea ventole di espansione che si impacchettano nell'onda di separazione. Ogni onda di espansione che impatta l'onda obliqua forma un'onda riflessa e una linea di scorrimento. Il campo di moto risultante è estremamente complesso. Infine, nel punto di riattacco dello strato limite alla parete, si formano altre onde d'urto oblique che si impacchettano, creando un'onda obliqua denominata "Reattachment shock wave". In questo punto, lo strato limite diventa relativamente sottile, la pressione è elevata, e si verifica un intenso riscaldamento locale.

Nei compressori transonici questo fenomeno può avvenire tra le schiere palari.

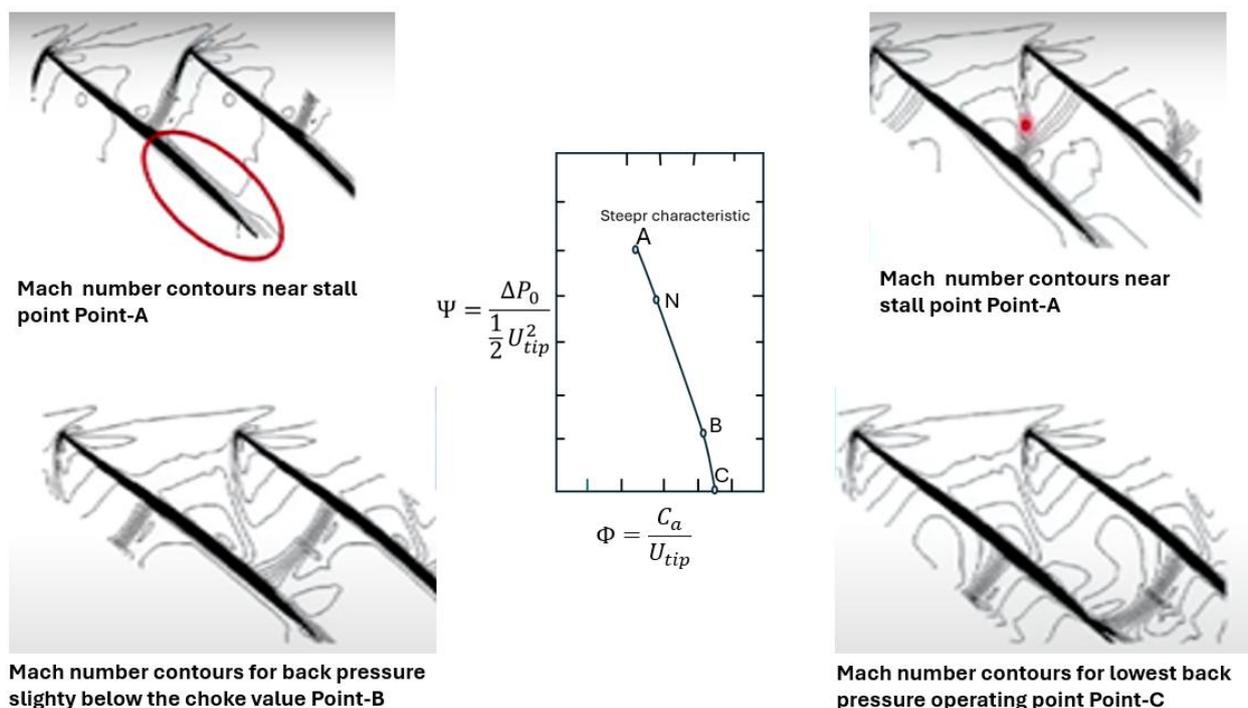


Figura 2.23 Punti di Funzionamento off-design

Osservando la curva caratteristica del compressore, si nota che nel punto A, denominato Near Stall Point (prossimo allo stallo), il numero di Mach all'ingresso del canale palare è massimo. Questo provoca un forte urto obliquo quasi retto che interseca lo strato limite sulla superficie di aspirazione della pala adiacente, causando un rigonfiamento del flusso. Se la separazione non si riattacca prima del bordo d'uscita, si sviluppano scie di pala grandi e profonde, aumentando le perdite aerodinamiche. È quindi fondamentale ridurre il numero di Mach in corrispondenza del fronte d'onda, spostandosi al punto N (massima efficienza), dove l'onda d'urto diventa maggiormente inclinata, aumentando la pressione e migliorando l'efficienza. Nel punto B, l'onda si sposta verso i bordi d'uscita all'interno del canale, provocando una condizione di "choke" (soffocamento). Una diminuzione della portata o una variazione di pressione può spostare l'onda esattamente ai bordi d'uscita, portando il compressore in stallo nel punto C. Inoltre, essendo l'onda d'urto tridimensionale, si verificherà una migrazione dello strato limite presente sulla superficie della pala, dal basso verso l'alto andando a sovrapporsi allo strato limite già presente sulla cassa del compressore. Lo strato limite sarà molto ispessito ed il rotore raschierà (scrubbing) continuamente lo strato provocando instabilità e alte vibrazioni.

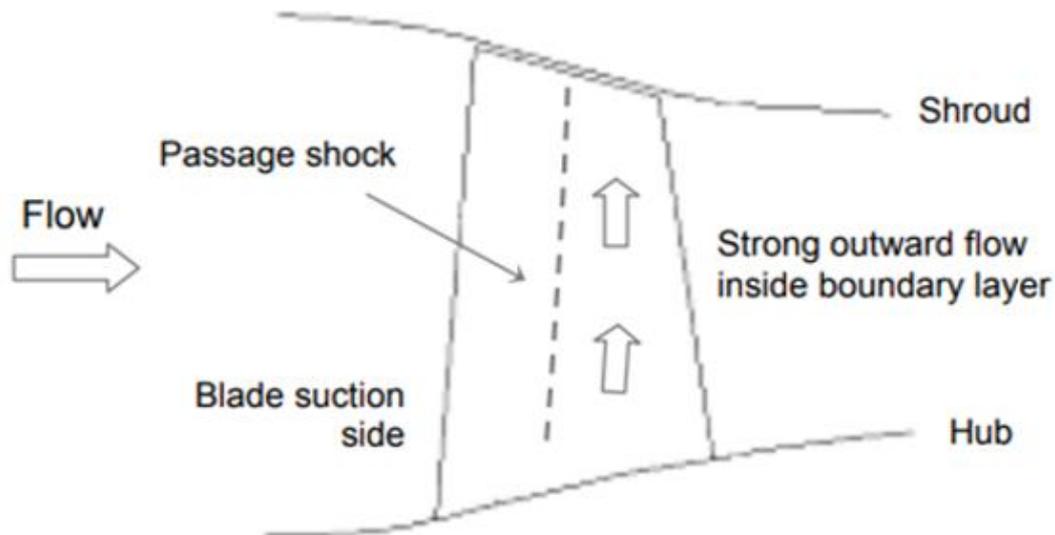


Figura 2.24 Migrazione dello strato limite presente sulla superficie palare

Secondo caso: A causa della differenza di pressione tra la superficie di aspirazione e quella di pressione nel rotore, si forma un flusso che si sposta dalla zona di pressione alla zona di aspirazione attraverso il tip della pala. Questo flusso interagisce con il flusso principale, generando un vortice noto come "tip clearance vortex". L'interazione tra questo vortice, lo strato limite accumulato sulla cassa e l'onda d'urto provoca perdite aerodinamiche, blocchi e instabilità. In particolare, l'interazione tra l'onda d'urto e il vortice è critica per l'instabilità del rotore, poiché può causare un'improvvisa decelerazione del vortice e, in condizioni di flusso ridotto, la rottura del vortice può portare allo stallo del compressore.

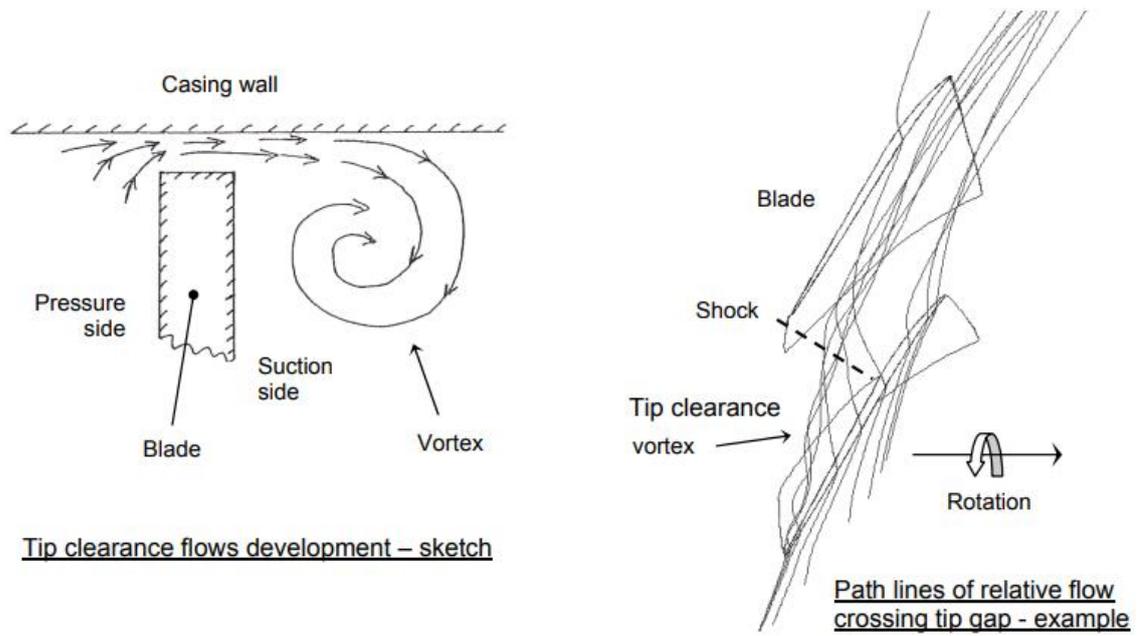


Figura 2.25 Tip clearance vortex

Le onde d'urto provocano altri problemi di minore entità come il blocco (blockage), corner separation e upstream wakes destabilization.

## **3 PROFILI ALARI**

Tradizionalmente, la progettazione aerodinamica dei compressori assiali si basava sull'impiego di varie famiglie di profili alari come riferimento per il design delle pale. Negli Stati Uniti, questa pratica era prevalentemente influenzata dalle famiglie di profili sviluppate dal National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), tra cui la più nota era la serie 65. In Gran Bretagna, invece, era comune l'uso delle famiglie della serie C, caratterizzate da camber line ad arco circolare o parabolico. Con l'aumentare della necessità di operare in condizioni transoniche, le pale con doppio arco circolare divennero sempre più popolari. Negli anni '80, con l'introduzione della fluidodinamica computazionale (CFD), vennero sviluppati i primi profili noti come pale a distribuzione di velocità prescritta, oggi comunemente chiamati profili alari a diffusione controllata. Con l'introduzione di questi profili, furono creati numerosi codici e algoritmi, tra cui l'uso di metodi di analisi diretta in modalità trial-and-error, per sviluppare nuovi design. Questo sviluppo ha eliminato la dipendenza dalle famiglie di profili storiche. Oggi, ogni azienda che si occupa di progettazione e sviluppo di turbomacchine disegna e realizza i propri profili personalizzati. Sebbene ogni azienda sviluppi un prodotto unico, la teoria e le linee guida fondamentali che guidano la progettazione sono comuni a tutti.

### **3.1 Profilo Subsonico**

Si prenda in esame un profilo alare subsonico come indicato in figura. Se questo è investito da una corrente indisturbata  $V_\infty$  e subsonica  $M_\infty < 1$ , ci saranno dei punti sul profilo in cui la velocità  $V$  sarà maggiore di  $V_\infty$  e il numero di Mach  $M$  sarà maggiore di  $M_\infty$ . Se la velocità della corrente indisturbata  $V_\infty$  continua a crescere, anche il corrispondente numero di Mach aumenterà fino a raggiungere un valore uguale a 1, che chiameremo *Mach critico*  $M_{\infty,cr}$ . Se la corrente indisturbata continua a crescere e supera questo valore, si formeranno sicuramente delle zone, solitamente situate sul dorso del

profilo, dove la velocità sarà supersonica. I punti del profilo in cui  $V$  sarà maggiore di  $V_\infty$  saranno prevalentemente sulla superficie di aspirazione (suction surface), dove il fluido accelera a causa della curvatura del profilo stesso.

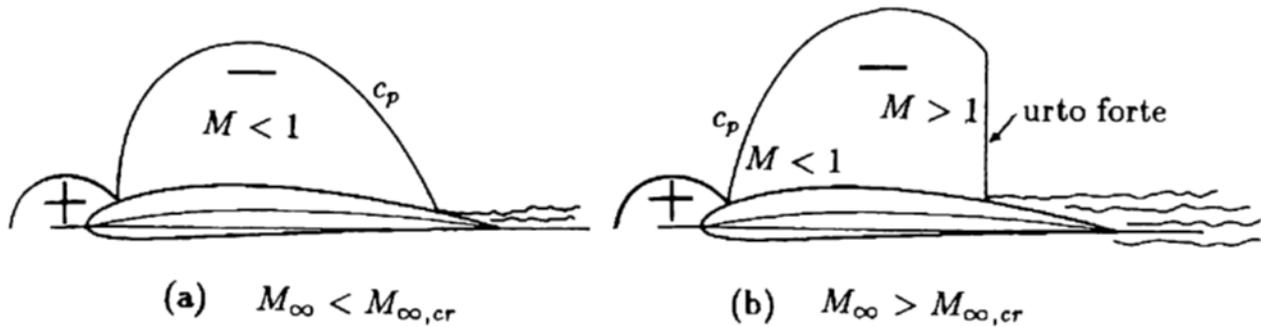


Figura 3.1 Profilo alare subsonico in corrente supersonica

Come si è visto nel capitolo precedente, è noto che quando la corrente deve ricomporsi, lo fa attraverso un'onda d'urto, provocando un aumento improvviso della pressione che, in alcuni casi, può causare il distacco anticipato dello strato limite in zone dove quest'ultimo è ancora spesso. Questo fenomeno genera una scia di depressione molto più ampia rispetto a quella che si avrebbe se lo strato limite si separasse in prossimità del bordo di uscita, causando così un aumento della resistenza di scia. Il distacco dello strato limite a valle di un'onda d'urto è noto come stallo d'urto. Prima degli anni '50, si parlava della "barriera del suono," un termine utilizzato per descrivere l'elevata resistenza che un aereo incontrava avvicinandosi alla velocità del suono, Mach 1. Tuttavia, oggi sappiamo che non esiste una barriera aerodinamica intrinseca per raggiungere velocità supersoniche, a condizione che sia disponibile una spinta sufficiente per superare la resistenza aerodinamica. Con l'introduzione dei motori turbogetto, furono avviate numerose ricerche dedicate alla compressione e agli effetti della comprimibilità sui profili alari, specialmente utilizzando le gallerie del vento. La seguente figura mostra immagini schlieren del flusso comprimibile su un profilo alare simmetrico con un rapporto spessore-corda del 10% e un angolo di attacco di 2 gradi.

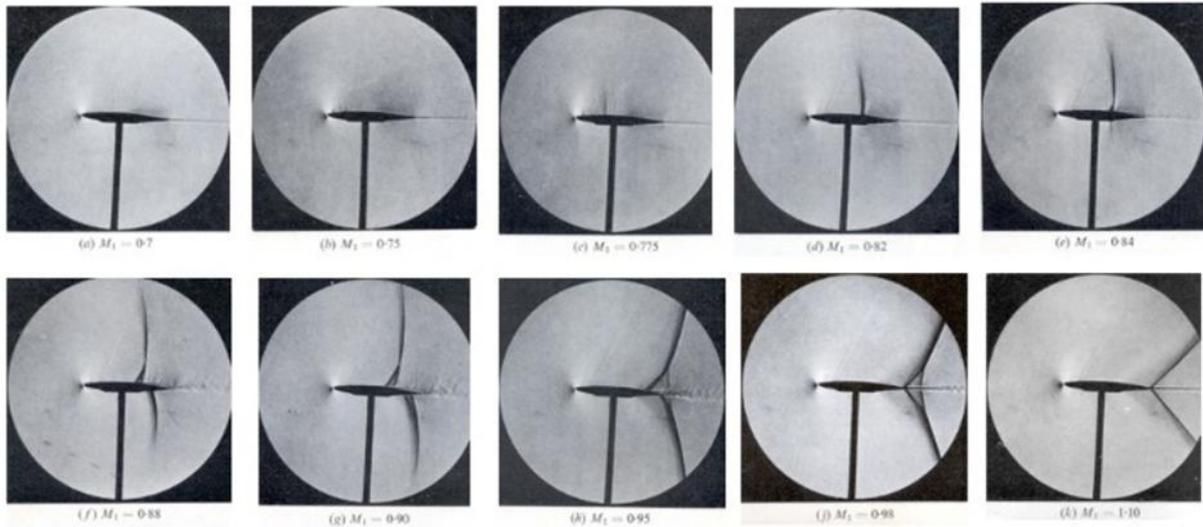


Figura 3.2 Immagini schlieren del flusso comprimibile su un profilo alare simmetrico

Questa sequenza di immagini mostra cosa accade al flusso attorno al profilo alare quando il numero di Mach del flusso libero aumenta gradualmente, passando da subsonico a poco sotto il Mach critico, attraversando condizioni transoniche fino a diventare appena supersonico. Già a  $M_\infty=0.7$  si può notare una piccola linea scura all'incirca al 25% della corda, suggerendo che il numero di Mach critico è stato raggiunto sulla superficie di aspirazione. A  $M_\infty = 0,75$ , una serie di piccoli shocklet (onde d'urto lievi) può essere vista tra il 10% e il 30% della corda. A  $M_\infty = 0,775$ , si è formata una debole onda d'urto, ma non si nota ancora la presenza di nessuna onda sul ventre del profilo.

Con  $M_\infty = 0,82$ , un'onda d'urto più consistente si è formata sulla superficie superiore e si è spostata a poppa sulla corda. A  $M_\infty = 0,84$ , un'onda d'urto si sviluppa anche sulla superficie inferiore. Inoltre, vi è una chiara evidenza di ispessimento dello strato limite nella parte inferiore dell'onda d'urto superiore sulla superficie del profilo alare, risultante dal gradiente di pressione avverso prodotto in quella zona.

A  $M_\infty = 0,88$ , sia l'onda d'urto sulla superficie superiore che quella sulla superficie inferiore continuano a crescere di intensità. L'onda d'urto sulla superficie superiore si biforca sulla superficie del profilo alare mentre interagisce con lo strato limite, e la visualizzazione del flusso suggerisce che lo strato limite a valle è ora relativamente spesso. A  $M_\infty = 0,90$ , lo strato limite si è separato a valle dell'onda d'urto sulla superficie

superiore, un fenomeno noto come separazione del flusso indotta dall'onda d'urto, solitamente chiamata separazione indotta dall'urto.

A  $M_\infty = 0,95$ , entrambe le onde d'urto hanno raggiunto il bordo di uscita e si sono notevolmente biforcute a causa della loro interazione con lo strato limite, ormai relativamente spesso. Dopodiché, il flusso diventa completamente supersonico. Un riepilogo di queste osservazioni è mostrato di seguito in forma di schema per una maggiore chiarezza.

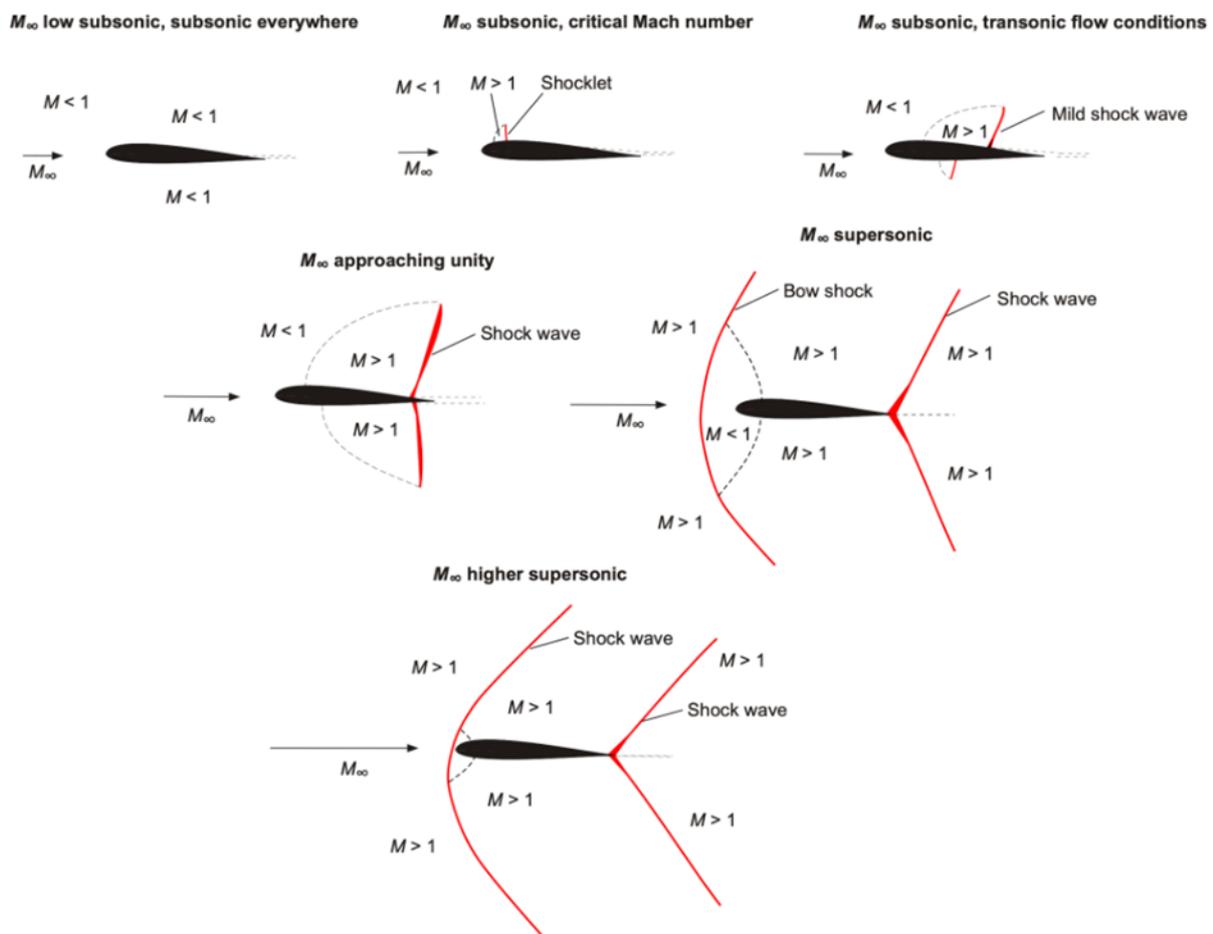


Figura 3.3 Immagine schematizzata della formazione di onde d'urto su profilo alare simmetrico

Sebbene le immagini di visualizzazione del flusso precedenti siano interessanti e di grande valore, anche le forze e i momenti risultanti sul profilo alare sono importanti. Gli effetti del numero di Mach e, quindi, la comprimibilità del flusso sulla curva di

portanza sono mostrati nella figura sottostante. In genere, il flusso con un numero di Mach inferiore a 0,3 è considerato incomprimibile e un profilo alare avrà una pendenza della curva di portanza di circa  $2\pi$  per radiante o 0,11 per grado. Tuttavia, si può vedere che la pendenza della curva di portanza aumenta rapidamente ai numeri di Mach più alti a causa degli effetti della comprimibilità. Si noti inoltre che la massima portanza del profilo alare diminuisce con l'aumento del numero di Mach. Quando il numero di Mach si avvicina al numero di Mach critico ovvero all'inizio della regione transonica (circa 0,7), il coefficiente di portanza (Lift Coefficient) massimo raggiungibile senza produrre separazione del flusso e stallo può essere visto come relativamente basso.

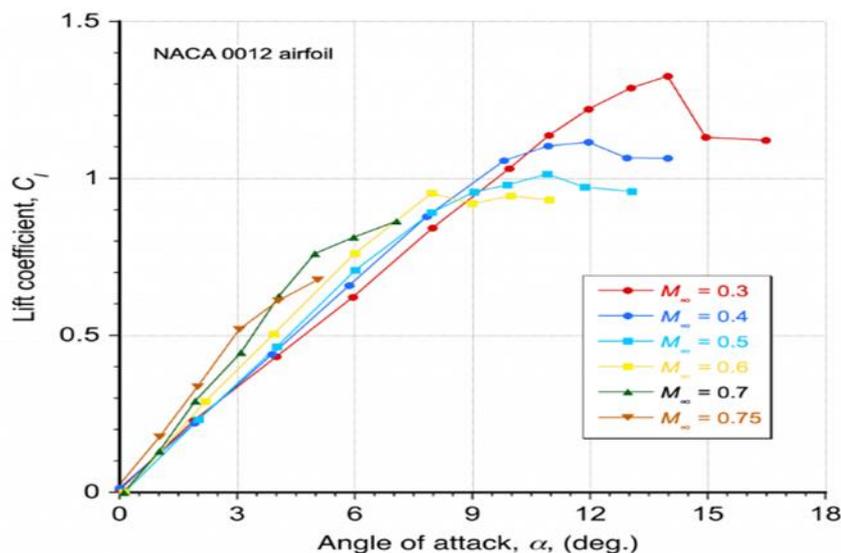


Figura 3.4 Lift coefficient in funzione dell'angolo d'attacco

### 3.2 Moto Supersonico su un Diedro

Per capire il passaggio da un profilo subsonico ad un profilo transonico o supersonico, è utile iniziare dall'analisi di un cuneo o diedro immerso in una corrente supersonica. Come discusso nel capitolo precedente sulle onde curve (Sott-paragrafo 2.2.3), quando l'angolo di inclinazione della parete  $\delta$  è maggiore di un certo angolo limite  $\delta_{lim}$ , l'onda d'urto obliqua si staccherà dal bordo e si propagherà come un'onda curva. Nella parte

più prossima alla parete, l'onda sarà un'onda piana. applicando l'equazione (si dovrà inserire il numero) al cuneo, per un dato numero di Mach, possiamo trovare due soluzioni di  $\epsilon$  in funzione di  $\delta$  e del numero di Mach  $M_1$ . La prima soluzione di  $\epsilon$  plottata sul grafico  $\delta - \epsilon - M_1$  ci fornisce due valori di  $\delta$ , un valore minimo che corrisponderà alla soluzione debole e un valore massimo che corrisponderà alla soluzione forte. L'esperienza nelle analisi sperimentali mostra che la soluzione fisica più realistica è quella debole. Nella prima soluzione l'angolo di deviazione  $\delta$  sarà minore dell'angolo di deviazione massima e all'aumentare di questo e al diminuire del Numero del Numero di Mach a monte, i due angoli di inclinazione  $\epsilon$  tendono ad avvicinarsi sino a coincidere ad una soluzione unica.

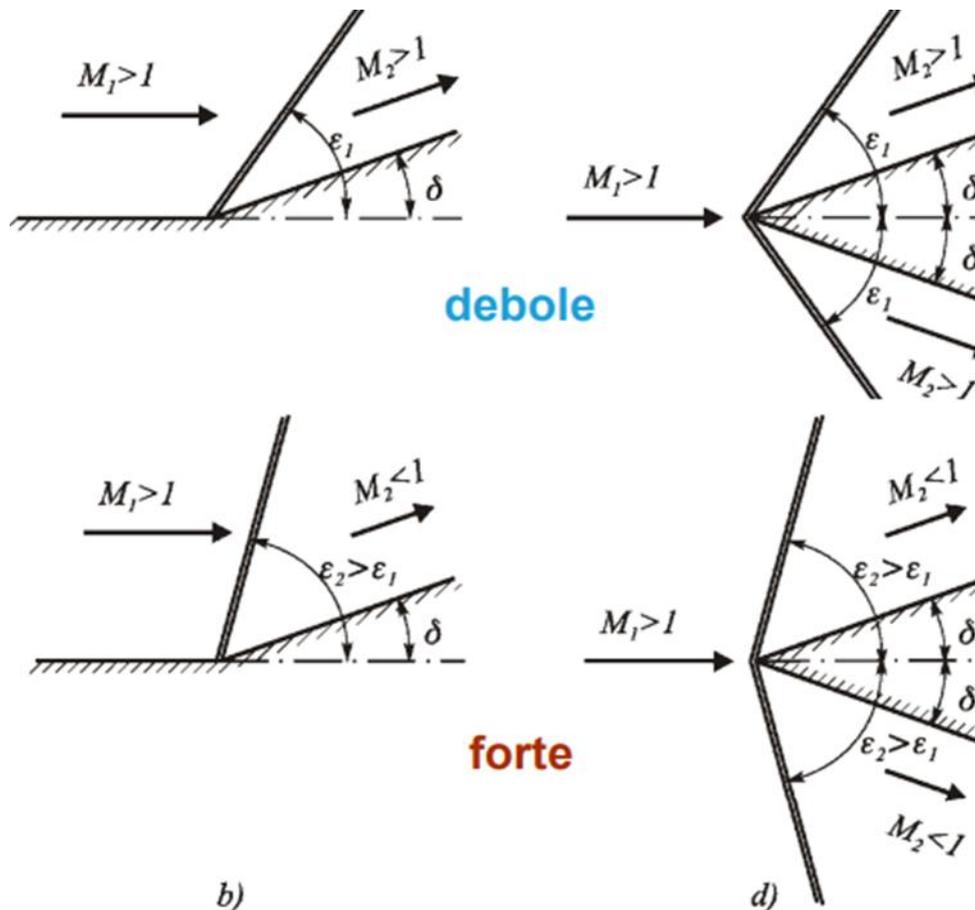


Figura 3.5 Urto forte e urto debole su un diedro

La seconda soluzione sarà  $\delta > \delta_{max}$  la quale dovrà essere nulla in quanto, non esiste un'onda d'urto in grado di deviare la corrente dell'angolo  $\delta$ . L'onda d'urto allora si

staccherà dal punto angoloso e si sposterà a monte di quest'ultimo ottenendo un'onda d'urto staccata. Inoltre, poiché sul piano di mezzeria del cono la corrente non deve essere deviata, e poiché le uniche onde che non deviano la corrente sono quelle normali o quelle di Mach, l'onda d'urto in mezzeria deve essere necessariamente normale alla direzione della corrente. Questa renderà il moto subsonico permettendo al flusso di deviare di un angolo maggiore di  $\delta_{max}$ .

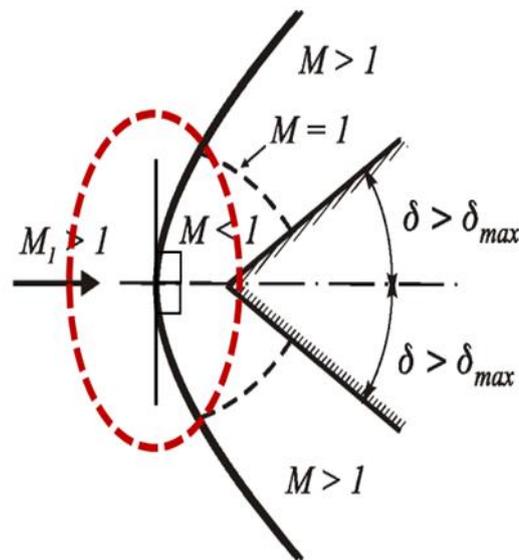


Figura 3.6 Formazione di un'onda d'urto curva per un angolo di cono  $\delta > \delta_{max}$

L'angolo massimo di apertura del cono per dato numero di Mach in ingresso viene ricavato dalla seguente equazione:

$$\delta < \frac{4(M_1^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{M_1^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\gamma + 1)}$$

Nel caso di  $\gamma = 1.4$ , per qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se  $\delta > 45.58^\circ$  che il limite per  $M \rightarrow \infty$ . L'onda d'urto allora si stacca dal punto angoloso e si sposta a monte di quest'ultimo (Bow Shock Wave).

Inoltre, Per un corpo tozzo ovvero non affilato, in una corrente supersonica, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulti minore dell'angolo di deviazione massimo, vi sarà sicuramente la presenza di un'onda

d'urto staccata dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di  $\delta_{max}$ .

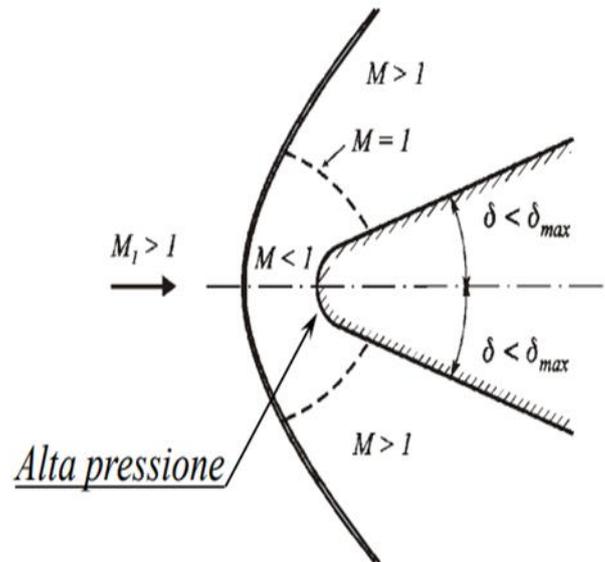


Figura 3.7 Corpo tozzo in corrente supersonica

Infine, se un corpo in regime supersonico deve avere il più basso coefficiente di resistenza, è preferibile che il suo bordo di attacco sia il più affilato possibile, in modo da evitare elevate deviazioni del flusso che lo investe e ridurre le alte compressioni nella zona frontale del corpo.

### ***3.3 Camber Line***

Le camber line rappresentano un elemento essenziale nella progettazione dei profili aerodinamici, influenzando significativamente il comportamento del flusso e le prestazioni delle pale nei compressori e nelle turbine. La scelta della camber line corretta consente di ottimizzare parametri come la portanza e la resistenza, oltre a garantire la stabilità del flusso in diverse condizioni operative. Ogni configurazione di camber line offre vantaggi specifici in termini di distribuzione del carico aerodinamico e flessibilità progettuale. Con l'introduzione della CFD, molte aziende hanno sviluppato profili personalizzati, mantenendoli segreti e difficilmente accessibili nella letteratura tecnica. Tuttavia, esperti del settore affermano che non è necessaria una vasta libreria di profili aerodinamici; seguendo semplici linee guida, è possibile progettare profili efficaci. Queste linee guida si basano proprio sul disegno delle varie camber line esistenti e disponibili in letteratura.

#### ***3.3.1 Linea di Camber a Carico Costante (Constant-Load Camber Line)***

La Linea di Camber a Carico Costante (Constant-Load Camber Line) è una configurazione utilizzata nel design dei profili aerodinamici in cui si cerca di mantenere una distribuzione uniforme del carico lungo la corda del profilo. Questo significa che la differenza di pressione tra la superficie superiore (di aspirazione) e la superficie inferiore (di pressione) del profilo rimane costante lungo tutta la lunghezza della corda. Questo tipo di linea di camber è stata originariamente sviluppata e utilizzata nei profili della serie NACA, come parte degli sforzi per creare profili alari che potessero garantire prestazioni prevedibili e stabili. La linea di camber a carico costante è particolarmente utile in applicazioni dove è necessario minimizzare le variazioni di portanza e resistenza, garantendo un comportamento aerodinamico lineare e facilmente controllabile. Tuttavia, la rigidità imposta da questa configurazione può limitare la

flessibilità nel design aerodinamico, specialmente in condizioni operative variabili o in presenza di flussi complessi, come quelli transonici. Nonostante ciò, la linea di camber a carico costante rappresenta un approccio fondamentale e storicamente importante nel design dei profili aerodinamici.

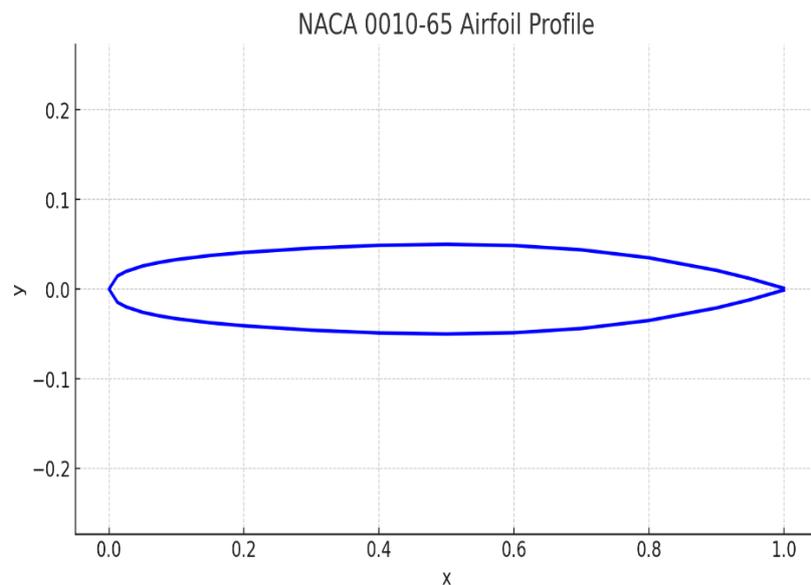


Figura 3.8 Profilo NACA65-0010

La figura riporta un profilo NACA65-0010 il quale viene costruito mediante la Linea di Camber a Carico Costante.

### ***3.3.2 Parabolic-Arc Camber Line***

La linea di curvatura parabolica (parabolic camber line) è una configurazione usata nel design di profili aerodinamici, in cui la curvatura segue una parabola lungo la corda del profilo. A differenza della camber line ad arco circolare, dove il massimo camber è sempre al centro della corda, la linea parabolica consente di posizionare il massimo camber in punti specifici lungo la corda. Questa caratteristica offre ai progettisti una

maggior flessibilità nella distribuzione del carico aerodinamico, permettendo di ottimizzare le prestazioni del profilo in termini di portanza e resistenza, particolarmente utile in condizioni operative come i flussi transonici. Questa linea di curvatura può essere progettata per distribuire il carico in modo da ritardare la separazione del flusso e migliorare la stabilità del profilo, riducendo al contempo le perdite aerodinamiche. Inoltre, la linea di curvatura parabolica è spesso utilizzata in combinazione con altre caratteristiche del profilo, come la diffusione controllata, per ottimizzare ulteriormente le prestazioni aerodinamiche, specialmente in applicazioni ad alta velocità come compressori e turbine.

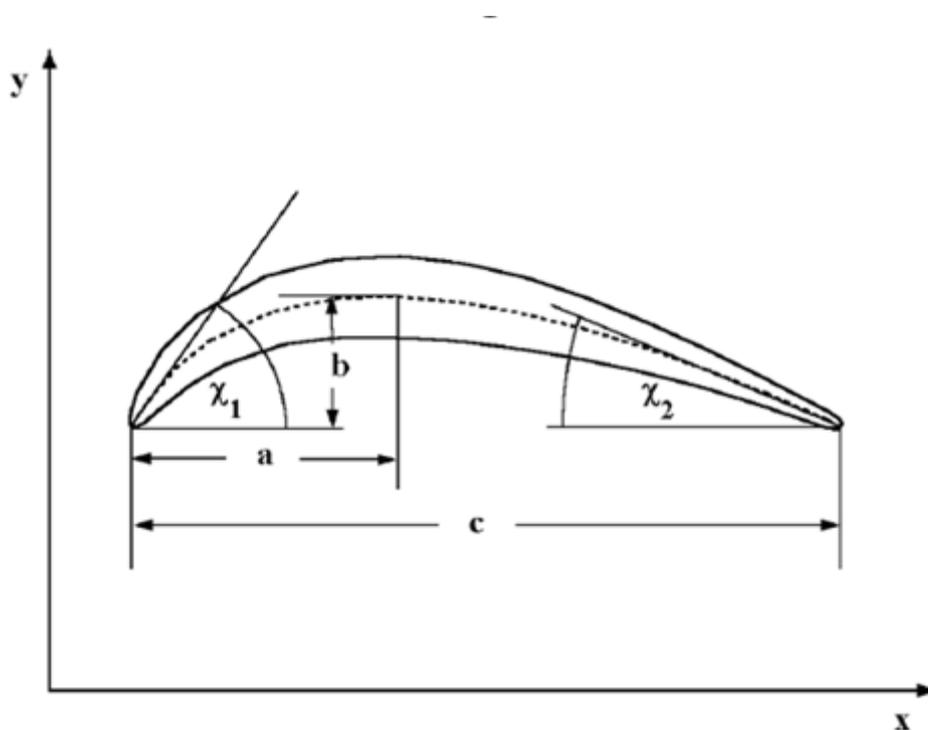


Figura 3.9 *Parabolic-Arc Camber Line*

La figura mostra un generico profilo costruito mediante camber line parabolico. Il punto di massimo camber in questo caso è in  $x = a$  e  $y = b$ . Per costruire tale profilo

Si può partire da semplici vincoli geometrici, quali:

$$y(0) = 0 \tag{3.1}$$

$$y(c) = 0$$

$$y(a) = b$$

$$y'(a) = 0$$

La camber line è generata mediante l'equazione della parabola:

$$Ax^2 + 2\sqrt{AE}xy + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (3.2)$$

Essendo quattro le equazioni di vincolo e cinque i coefficienti, si può ipotizzare arbitrariamente un coefficiente, oppure si può pensare di dividere il tutto per uno di essi, ad esempio B

$$x^2 + \frac{c-2a}{b}xy + \frac{(c-2a)^2}{4b^2}y^2 - cx - \frac{c^2-4ac}{4b}y = 0 \quad (3.3)$$

Si può notare che non è presente l'angolo  $\theta$  in figura, perché nel caso di questo tipo di camber line è preferibile esprimere gli angoli  $\chi_1$  e  $\chi_2$  (sarebbero  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ) relativi alle tangenti del bordo di ingresso e di uscita. Differenziando quindi l'equazione precedente e valutando le derivate nei punti  $x = 0$  e  $x = c$  troviamo:

$$\tan\chi_1 = \frac{4b}{(4a-c)} \quad (3.4)$$

$$\tan\chi_2 = \frac{4b}{(3c-4a)} \quad (3.5)$$

Combinando le equazioni, troviamo:

$$\frac{b}{c} = \frac{\left\{ \sqrt{1+(4\tan\theta)^2 \left[ \frac{a}{c} - \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{3}{16} \right]} - 1 \right\}}{(4\tan\theta)} \quad (3.6)$$

L'equazione definisce la camber line in funzione del camber e del rapporto  $a/c$ . Per le pale del compressore, si può pensare di limitare gli angoli al bordo d'attacco e al bordo d'uscita a meno di  $90^\circ$  per evitare problematiche aerodinamiche o strutturali. Ciò può essere effettuato mantenendo il punto di massimo camber all'interno dell'intervallo  $0,25 < \frac{a}{c} < 0,75$ .

L'equazione quadratica può essere risolta per qualsiasi punto della corda, dove per qualsiasi valore di  $x$  si può trovare un valore di  $y$ . Se  $\frac{a}{c} = 0,5$ , cioè il massimo camber si trova esattamente a metà della corda, alcuni termini dell'equazione quadratica si

annullano, rendendo la soluzione molto più semplice e diretta. Entrambi i casi possono essere risolti attraverso un'equazione ricorsiva numerica della forma:

$$y = \frac{x(c-x)}{\left[ \frac{(c-2a)^2}{4b^2}y + \frac{c-2a}{b}x - \frac{c^2-4ac}{4b} \right]} \quad (3.7)$$

Partendo da un valore di  $y=0$  e iterando fino a trovare il valore finale.

### ***3.3.3 Polynomial Camber line***

A differenza dei due Camber line descritti precedentemente il Polynomial camber line ed i prossimi che saranno descritti seguono le stesse condizioni al contorno quali:

$$\text{Per } x = 0 : y = 0 \quad (3.8)$$

$$y' = \tan\alpha_1$$

$$y'' = P(y'')_{max}$$

$$\text{Per } x = 1 : y' = \tan\alpha_2 \quad (3.9)$$

$$y'' = Q(y'')_{max}$$

Dove P rappresenta il valore della norma del camber line rispetto al bordo d'attacco mentre, Q rappresenta il valore della norma del camber line rispetto al bordo d'uscita.

Per questo tipo di Camber line la letteratura suggerisce di utilizzare un polinomio di quarto grado in modo che quando si effettua la derivata seconda il polinomio presenta ancora un grado uguale a due il quale, permette una buona flessibilità in termini di progettazione.

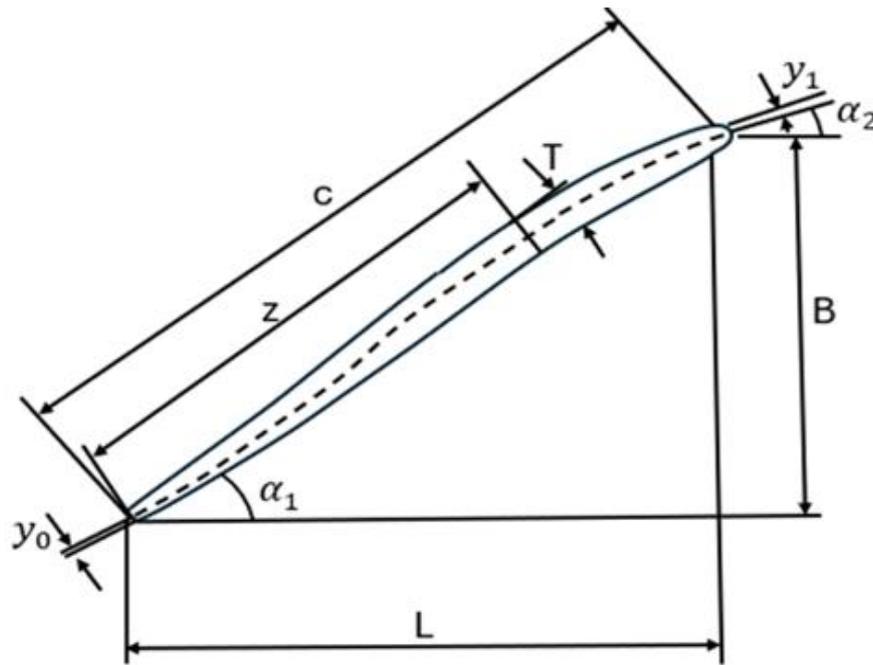


Figura 3.10 Polynomial Camber line

Per iniziare è molto conveniente partire dall'equazione di una parabola:

$$(x - h)^2 = 4a(y'' - k) \quad (3.10)$$

Che può essere scritta come:

$$y'' = \frac{1}{4a}(x - h)^2 + k$$

Dove h è il punto sull'asse x nel quale la derivata seconda assume valore massimo o minimo con k uguale al valore della derivata.

Integrando si ottiene:

$$y' = \frac{1}{12a}(x - h)^3 + kx + b \quad (3.11)$$

$$y = \frac{1}{48a}(x - h)^4 + \frac{k}{2}x^2 + bx + c \quad (3.12)$$

Le quali applicate insieme alle condizioni al contorno (3.8-3.9) forniscono:

$$(1) x = 0, y = 0$$

$$c = -\frac{h^4}{48a}$$

$$(2) \quad x = 0, \quad y' = \tan \alpha_1$$

$$b = \frac{h^3}{12a} + \tan \alpha_1$$

$$(3) \quad x = 0, \quad y'' = P(y'')_{max}$$

$$k = -\frac{h^2}{4a(1-P)}$$

$$(4) \quad x = 1, \quad y' = \tan \alpha_2$$

$$a = \frac{1}{4(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)} \left[ \frac{P}{1-P} h^2 + h - \frac{1}{3} \right]$$

$$(5) \quad x = 1, \quad y'' = Q(y'')_{max}$$

$$h = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1-Q}{1-P}}}$$

$$(6) \quad L^2 + B^2 = chord^2$$

$$(7) \quad x = L, \quad y = B$$

$$B = \frac{(L-h)^4}{48a} + \frac{k}{2} L^2 + b \cdot L + c$$

Per evitare singolarità i valori di P e di Q questi, devono essere compresi fra zero ed uno. Generalmente si è visto che un valore di P pari a zero ed un valore pari a 0,5 porta a risultanti alquanto soddisfacenti. Inoltre, vi è la possibilità di differenziare questi valori fra il mozzo e la punta, ad esempio, verso il mozzo è consigliato avere valori leggermente positivi per P mentre alla punta avere piccoli valori negativi. Tuttavia, questo tipo di camber line non produce attraenti profili. I parametri in input per generare tale camber line sono generalmente:

- 1) Angolo di inclinazione in gradi ( $\xi$ )
- 2) Lunghezza della corda in cm (chord)
- 3) Posizione dello spessore massimo dal bordo d'attacco in % della corda (z)
- 4) Raggio del bordo d'attacco (cm) (yle)
- 5) Raggio del bordo d'uscita (cm) (yte)

- 6) Rapporto spessore massimo su corda in % ( $t$ )
- 7) Numero di punti da generare su ciascuna delle superfici di pressione e aspirazione
- 8) Angolo di inclinazione del bordo d'attacco della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_1$ )
- 9) Angolo di inclinazione del bordo d'uscita della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_2$ )
- 10) Curvatura normalizzata della linea di curvatura al bordo d'attacco ( $0 < P < 1$ )
- 11) Curvatura normalizzata della linea di curvatura al bordo d'uscita ( $0 < Q < 1$ )

### 3.3.4 Exponential Camber line

Questo tipo di camber line nasce per risolvere un principale problema ovvero di poter spostare il punto di flesso della mia curva in qualsiasi posizione.

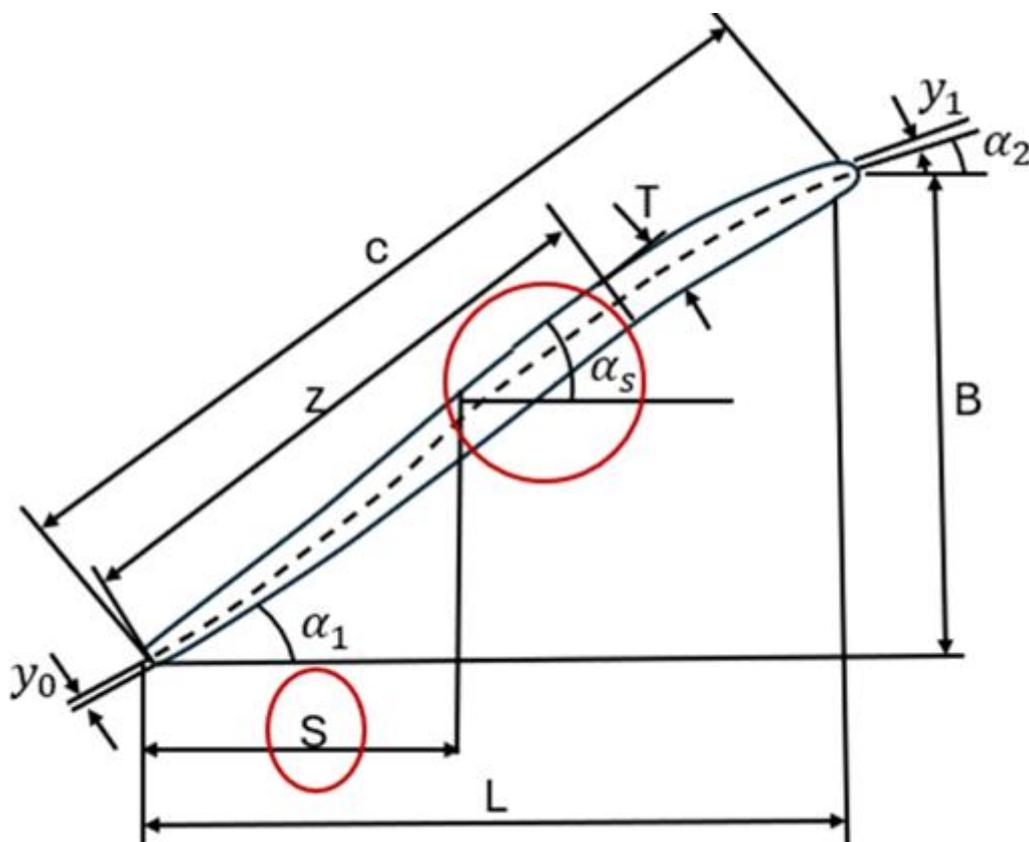


Figura 3.11 Exponential Camber line

Se si analizza la figura si può notare come individuando il punto di flesso questo, permette di dividere il profilo in due parti conferendo una maggiore flessibilità in termini di progettazione. Ad esempio, si potrebbe avere una linea retta nella parte sottostante al punto di flesso ovvero da 0 ad S ed un profilo molto arcuato nella regione superiore al punto di flesso ovvero fra S ed 1. Il camber line in questo caso è descritto da un'equazione esponenziale quale:

$$y'' = b(x - s)e^{a(x-s)} \quad (3.13)$$

La quale, rappresenta un'equazione esponenziale. Aggiungendo il punto di flesso dobbiamo aggiungere a sua volta una sesta condizione al contorno quale:

$$x = s \quad y' = \tan \alpha_s \quad (3.14)$$

Considerando la regione che va da  $0 < x < S$  integrando avremo:

$$y_1' = \frac{b_1}{a_1^2} e^{a_1(x-s)} [a_1(x-s) - 1] + c_1 \quad (3.15)$$

e

$$y_1 = \frac{b_1}{a_1^3} e^{a_1(x-s)} [a_1(x-s) - 2] + c_1 \cdot x + d_1 \quad (3.16)$$

Andando a determinare le costanti attraverso le condizioni al contorno (3.8-3.9):

$$(1) \quad x = 0 \quad y_1 = 0$$

$$d_1 = (a_1 s + 2) \frac{b_1}{a_1^3} e^{-a_1 s}$$

$$(2) \quad x = 0 \quad y' = \tan \alpha_1$$

$$c_1 = \tan \alpha_1 + (a_1 s + 1) \frac{b_1}{a_1^2} e^{-a_1 s}$$

$$(3) \quad x = 0 \quad y_1'' = P(y_1'')_{max}$$

$$P = a_1 S e^{(1-a_1 S)}$$

$$(4) \quad x = S \quad y_1' = \tan \alpha_s$$

$$c_1 = \tan \alpha_s + \frac{b_1}{a_1^2}$$

Si noti che avremo due valori per  $c_1$  i quali ci permetteranno di trovare  $b_1$

$$b_1 = a_1^2 \frac{(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_s)}{(1 - (a_1 S + 1)e^{-a_1 S})}$$

Considerando ora la regione  $S < x < 1$  avremo

$$y_2 = \frac{b_2}{a_2^3} e^{a_2(x-s)} [a_2(x-s) - 2] + c_2 \cdot x + d_2 \quad (3.17)$$

Andando nuovamente a determinare le costanti attraverso le condizioni al contorno:

$$(5) \quad x = S \quad y_2' = \tan \alpha_s$$

$$c_2 = \tan \alpha_s + \frac{b_2}{a_2^2}$$

$$(6) \quad x = S \quad y_1 = y_2$$

$$d_2 = 2 \left( \frac{b_2}{a_2^2} - \frac{b_1}{a_1^2} \right) + S \cdot (c_1 - c_2) + d_1$$

$$(7) \quad x = L \quad y_2' = \tan \alpha_2$$

$$c_2 = \tan \alpha_2 - \frac{b_2}{a_2^2} e^{a_2(L-S)} \times [a_2(L-S) - 1]$$

Ed essendoci nuovamente due valori di  $c_2$  si può ricavare  $b_2$

$$b_2 = a_2^2 \frac{(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_s)}{(1 + (a_2(1-S) + 1)e^{a_2 S})}$$

$$(8) \quad x = L \quad y_2'' = Q(y_2'')_{max}$$

$$Q = a_2(S-L)e^{(1+a_2(L-S))}$$

$$(9) L^2 + B^2 = \text{corda}$$

$$(10) x = L \quad y = B$$

$$B = \frac{b_2}{a_2^3} e^{a_2(L-S)} [a_2(L-S) - 2] + c_2 \cdot L + d_2$$

Le equazioni ottenute per determinare  $a_1$  e  $a_2$  sono implicite e richiedono una soluzione iterativa. In entrambi i casi, esistono due possibili soluzioni per la costante, assumendo che P e Q siano inferiori a uno. Poiché si desidera che il valore massimo della seconda derivata venga raggiunto tra il punto di flesso e il bordo d'attacco o d'uscita, a seconda della situazione, ne consegue che:

$$a_1 > \frac{1}{s} \quad e \quad a_2 < \frac{1}{s-1}$$

In questo caso i parametri in Input per generare la linea del camber sono:

- 1) Angolo di inclinazione in gradi ( $\xi_1$ )
- 2) Lunghezza della corda in cm (chord)
- 3) Posizione dello spessore massimo dal bordo d'attacco in % della corda (z)
- 4) Raggio del bordo d'attacco (cm) (yle)
- 5) Raggio del bordo d'uscita (cm) (yte)
- 6) Rapporto spessore massimo su corda in % (t)
- 7) Numero di punti da generare su ciascuna delle superfici di pressione e aspirazione
- 8) Angolo di inclinazione del bordo d'attacco della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_1$ )
- 9) Angolo di inclinazione del bordo d'uscita della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_2$ )
- 10) Curvatura normalizzata della linea di curvatura al bordo d'attacco ( $0 < P < 1$ )
- 11) Curvatura normalizzata della linea di curvatura al bordo d'uscita ( $0 < Q < 1$ )
- 12) Posizione del punto di flesso in % della corda dal bordo d'attacco (s)
- 13) Angolo di inclinazione della linea di curvatura al punto di flesso in gradi ( $\alpha_s$ )

### ***3.3.5 Circular-Arc Camber Line***

La circular-arc camber line è una linea di curvatura utilizzata nel design dei profili aerodinamici, particolarmente in applicazioni come le pale di compressori e le ali degli aeromobili. Questa linea di curvatura è caratterizzata da una curvatura uniforme, che forma un arco di cerchio lungo la corda del profilo. Viene spesso scelta per la sua semplicità e per le proprietà aerodinamiche che offre, poiché consente una distribuzione del carico relativamente uniforme lungo la superficie del profilo. Inoltre, l'utilizzo della circular-arc camber line può aiutare a mitigare i problemi associati alle pendenze infinite della linea di curvatura ai bordi d'entrata e d'uscita, che possono causare difficoltà nella definizione degli angoli critici del profilo, come l'angolo di incidenza e l'angolo di deviazione. Per queste ragioni, la circular-arc camber line è comunemente applicata a profili aerodinamici come quelli della serie NACA 65 e nella serie C Britannica, contribuendo a migliorare l'integrità strutturale e le prestazioni aerodinamiche complessive. Per questo specifico camber line la derivata seconda di  $y$  è superflua in quanto non apporta e non può apportare alcuna modifica al camber line essendo questo un semplice arco singolo.

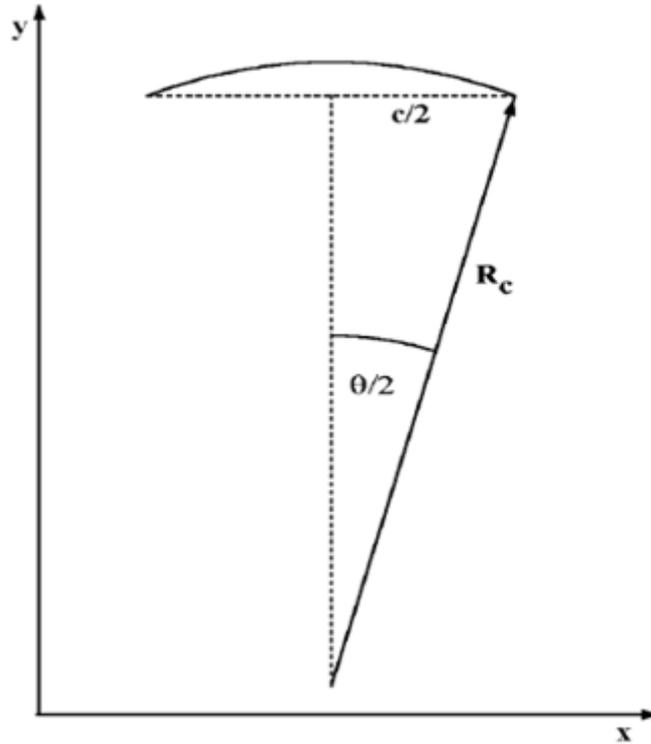


Figura 3.12 Circular-Arc Camber Line

L'equazione di base per questo tipo di camber line è della forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (3.18)$$

Dove,  $(x_0, y_0)$  rappresentano il centro mentre,  $R$  rappresenta il raggio del cerchio.

Partendo dalla condizione  $x = 1$  (3.9), e per un valore di  $R$  possiamo ricavare

$$\tan \alpha_2 = \frac{(1 - x_0)}{y_2 - y_0}$$

Dove  $y_2$  rappresenta la  $y$  quando  $x = 1$ . Risolvendo per  $x_0$ :

$$x_0 = (y_2 - y_0) \tan \alpha_2 + 1 \quad (3.19)$$

Esplicitando la (3.18):

$$(y_2 - y_0)^2 = R^2 - x_0^2 + 2x_0 - 1 \quad (3.20)$$

Dalle condizioni al contorno, fissando il bordo d'attacco nell'origine del sistema di coordinate si ottiene:

$$y_0^2 = R^2 - x_0^2 \quad (3.21)$$

Inserendo nella (3.20) la (3.19) e (3.21) troviamo:

$$(y_2 - y_0)^2 = y_0^2 + 2(y_2 - y_0) \tan \alpha_2 + 1 \quad (3.22)$$

Risolvendo per  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{y_2^2 - 2y_2 \tan \alpha_2 - 1}{2(y_2 - \tan \alpha_2)} \quad (3.23)$$

Si può trovare allora:

$$x_0 = \frac{(y_2^2 - 1) \tan \alpha_2 + 2y_2}{2(y_2 - \tan \alpha_2)} \quad (3.24)$$

$$R^2 = \frac{(y_2^2 + 1)^2 \sec^2 \alpha_2}{4(y_2 - \tan \alpha_2)^2} \quad (3.25)$$

Queste condizioni sono calcolate premettendo che la linea del camber sia costante in modo da lasciare la  $y_2$  indeterminata. Se, aggiungiamo una terza condizione al contorno, quale:

$$x_0 = -y_0 \tan \alpha_1 \quad (3.26)$$

Combinando la (3.19) e la (3.24) possiamo trovare  $y_2$  come:

$$y_2 = \frac{y_0(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) - 1}{\tan \alpha_2}$$

La quale sostituita nella (3.23) fornisce:

$$y_0 = \frac{-\tan \alpha_1 \sec^2 \alpha_2 \pm \tan \alpha_2 \sec \alpha_1 \sec \alpha_2}{\tan^2 \alpha_1 - \tan^2 \alpha_2}$$

### 3.3.6 Double-Circular-Arc Camber line

La double-circular-arc camber line rappresenta un'evoluzione del concetto di camber line ad arco circolare, permettendo la creazione di una linea di curvatura composta da due segmenti distinti. Questi segmenti possono essere entrambi archi circolari, linee rette, o una combinazione di entrambi, offrendo una notevole flessibilità nella progettazione di profili aerodinamici complessi. Ad esempio, è possibile creare le cosiddette "S-blades", formate da due archi circolari, o le "J-blades", che combinano un arco circolare con una linea retta. La logica con cui si è creato questo tipo di camber line è la stessa dell'exponential camber line ovvero, trovare ed avere un punto di flesso. Diverse sono le formulazioni per questo tipo di camber line, le quali sono ad oggi ancora in sviluppo.

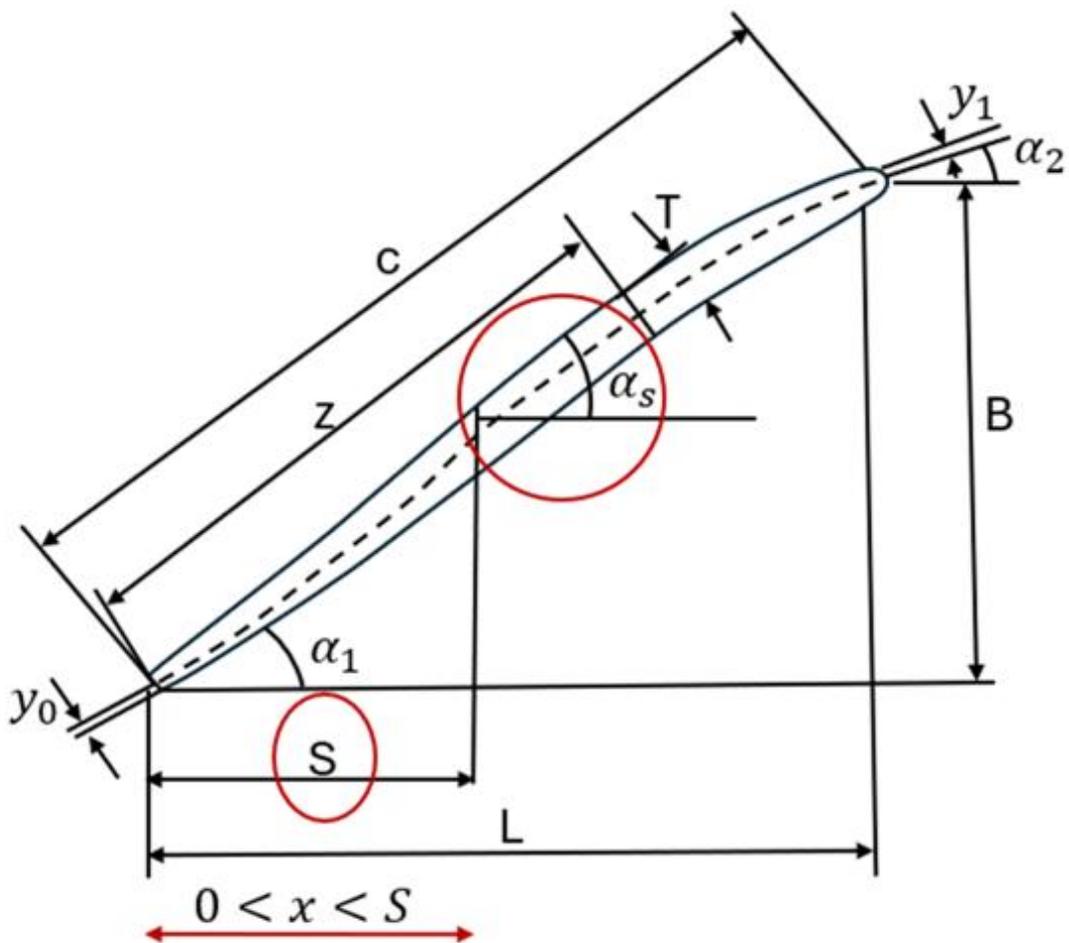


Figura 3.13 Double-Circular-Arc Camber line

A titolo di esempio, consideriamo la nostra linea che va da 0 ad S come una retta, la quale viene descritta da:

$$y_1 = \tan \alpha_1 \cdot x$$

Per la linea che va da S ad 1 utilizzeremo invece l'equazione della circonferenza

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Andando a determinare i valori delle costanti attraverso le condizioni al contorno

$$(1) \quad x = 0 \quad y'_1 = \tan \alpha_1$$

$$x_0 = -y_0 \tan \alpha_1$$

$$(2) \quad x = L \quad y' = \tan \alpha_2$$

$$(B - y_0) \tan \alpha_2 = x_0 - L$$

$$(3) \quad x = 0 \quad y = 0$$

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2$$

$$(4) \quad L^2 + B^2 = \text{chord}^2$$

$$(5) \quad x = L \quad y = B$$

$$(L - x_0)^2 + (B - y_0)^2 = R^2$$

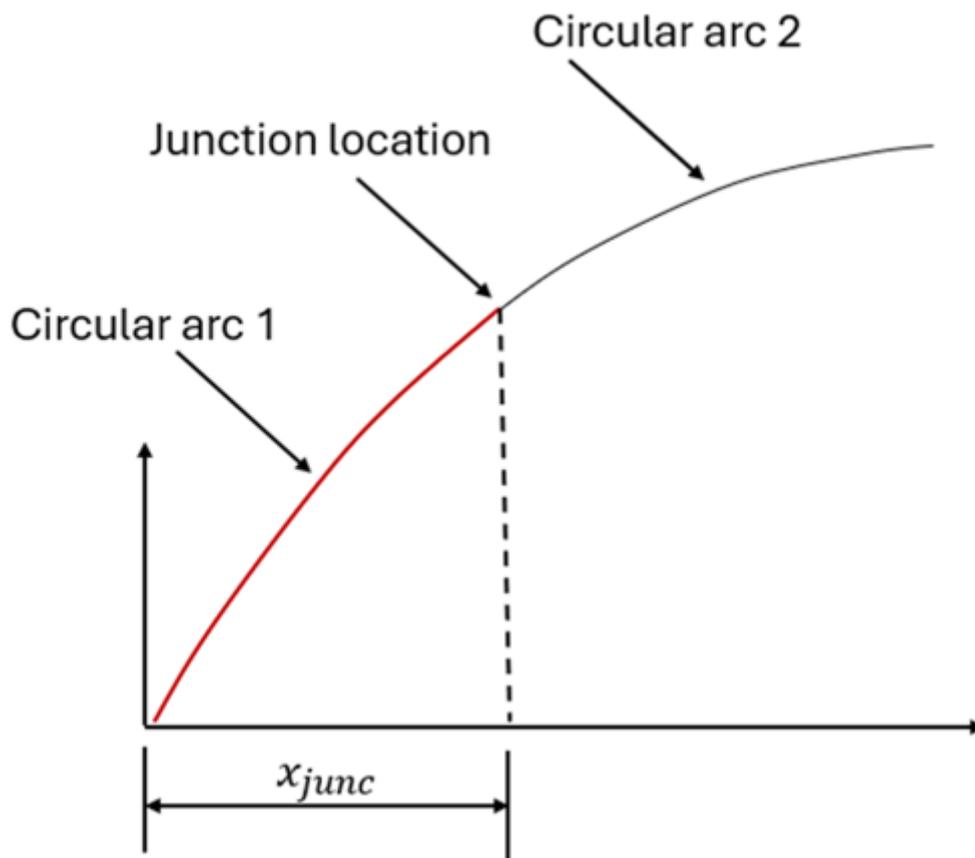


Figura 3.14 Andamento Double-Circular-Arc camber line

Dalla figura si evince che i due archi si incontrano in un punto di giunzione. Grazie a questo punto di giunzione, è possibile gestire separatamente l'andamento dei due archi, permettendo di ottenere un cambiamento improvviso della pendenza, una curvatura più morbida, o di posizionare il punto di massimo camber in una posizione specifica lungo la corda.

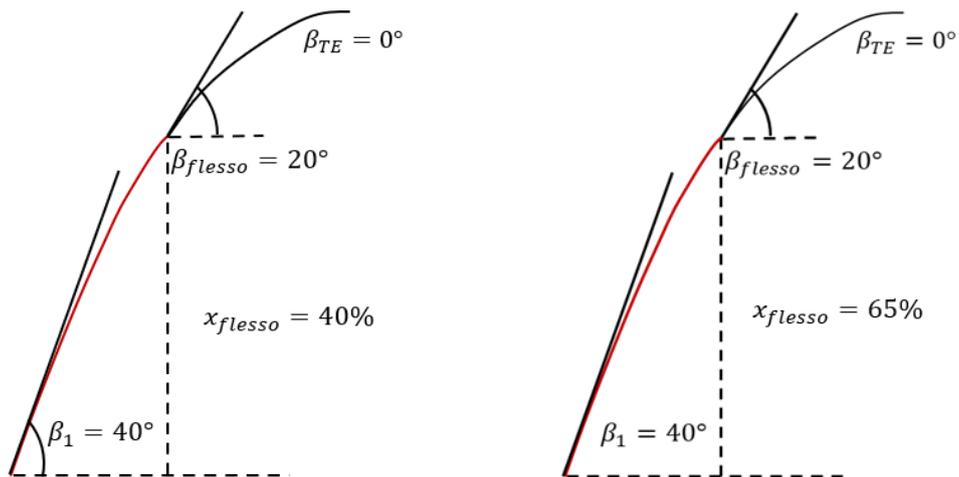


Figura 3.15 Confronto tra due Double-Circular-Arc Camber line

I parametri in input in questo caso sono:

- 1) Angolo di inclinazione in gradi ( $\xi_1$ )
  - 2) Lunghezza della corda in cm (chord)
  - 3) Posizione dello spessore massimo dal bordo d'attacco in % della corda ( $z$ )
  - 4) Raggio del bordo d'attacco (cm) ( $y_l$ )
  - 5) Raggio del bordo d'uscita (cm) ( $y_t$ )
  - 6) Rapporto spessore massimo su corda in % ( $t$ )
  - 7) Numero di punti da generare su ciascuna delle superfici di pressione e aspirazione
  - 8) Angolo di inclinazione del bordo d'attacco della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_1$ )
  - 9) Angolo di inclinazione del bordo d'uscita della linea di curvatura in gradi ( $\alpha_2$ )
- Posizione di inizio dell'arco circolare dal bordo d'attacco in % della corda ( $s$ )

### ***3.3.7 Standard Thickness Distributions (Distribuzioni dello spessore)***

Per progettare un profilo aerodinamico per un compressore transonico-supersonico, è stato ritenuto essenziale definire la distribuzione dello spessore mediante equazioni, in modo simile a quanto fatto per la linea di curvatura (camber line). Si desideravano in particolare cinque caratteristiche: primo, lo spessore massimo doveva essere arbitrario e posizionabile in qualsiasi punto della metà posteriore del profilo. Secondo, la curvatura del profilo doveva essere continua fino alla seconda derivata, senza discontinuità. Terzo, per ragioni strutturali, la distribuzione dello spessore doveva essere continuamente convessa, evitando inversioni di curvatura. Quarto, il bordo d'attacco doveva essere il più sottile possibile, pur rispettando le condizioni precedenti. Dopo aver esaminato diverse equazioni, nessuna singola formula si è rivelata in grado di soddisfare tutti questi requisiti. Pertanto, è stato deciso di definire la distribuzione dello spessore con due equazioni distinte: una per la sezione anteriore fino al punto di massimo spessore e un'altra dal punto di massimo spessore fino al bordo d'uscita. Nel punto di giunzione, sono stati resi continui lo spessore e le sue derivate prima e seconda. Per evitare una curvatura riflessa vicino al bordo d'attacco, la seconda derivata dello spessore è stata impostata a zero in quel punto. Il massimo spessore è stato posizionato in un punto  $Z$  lungo una linea di curvatura di lunghezza unitaria, che non coincide con la linea di corda. Inoltre, lo spessore dei bordi d'attacco e d'uscita è stato specificato indipendentemente, permettendo differenze tra i due. Il bordo d'attacco è stato modellato con un arco circolare, mentre il bordo d'uscita è stato troncato collegando i due punti finali con una linea retta.

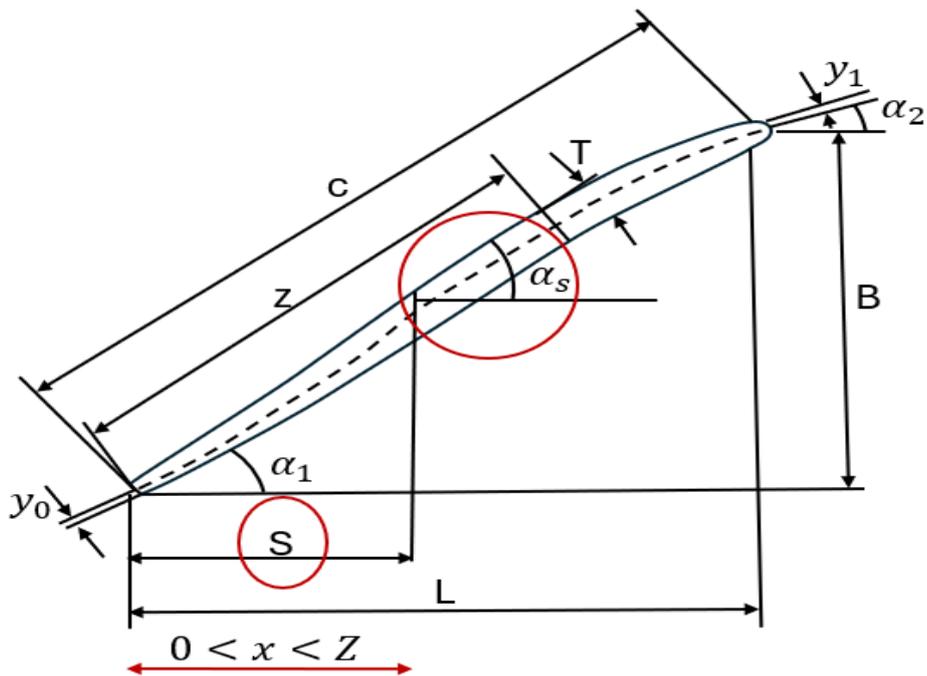


Figura 3.16 distribuzione normale dello spessore

Le condizioni al contorno scelte per i due segmenti della distribuzione dello spessore possono essere riassunte come segue:

Per la sezione anteriore  $0 < x < Z$ :

$$x = 0, \quad y = y_0 \quad y'' = 0$$

$$x = Z, \quad y = \frac{T}{2} \quad y' = 0$$

Per la sezione superiore  $Z < x < 1$ :

$$x = Z, \quad y = \frac{T}{2} \quad y' = 0 \quad y'' = y''_{\text{met\`a sezione}}$$

$$x = 1, \quad y = y_1$$

Si noti che  $y$  rappresenta la met\`a dello spessore dell'elemento del profilo e  $T$  \`e il valore totale dello spessore massimo. Entrambi sono scalati in proporzione a una lunghezza della linea di curvatura (camber line) pari a uno. Il parametro  $Z$  denota la posizione in

cui si verifica lo spessore massimo sulla linea di curvatura. Per la sezione anteriore  $0 < x < Z$ , è stato utilizzato un semplice polinomio di terzo grado nella forma:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

Applicando le condizioni al contorno si trovano le costanti:

$$a = -\frac{\frac{T}{2} - y_0}{2Z^3}$$

$$b = 0$$

$$c = \frac{3\left(\frac{T}{2} - y_0\right)}{2Z}$$

$$d = y_1$$

E per  $x = Z$  troviamo:

$$y'' = -\frac{3\left(\frac{T}{2} - y_0\right)}{Z^2}$$

Per la sezione superiore  $Z < x < 1$  troviamo ugualmente un polinomio di terzo grado:

$$y = e(x - Z)^3 + f(x - Z)^2 + g(x - Z) + h$$

$$y' = 3e(x - Z)^2 + 2f(x - Z) + g$$

$$y'' = 6e(x - Z) + 2f$$

Applicando le condizioni al contorno avremo:

$$e = \frac{3\left(\frac{T}{2} - y_0\right)}{2Z^2(1 - Z)} - \frac{\left(\frac{T}{2} - y_1\right)}{(1 - Z)^3}$$

$$f = -\frac{3\left(\frac{T}{2} - y_0\right)}{2Z^2}$$

$$g = 0$$

$$h = \frac{T}{2}$$

Poiché le equazioni per le due parti della distribuzione dello spessore sono cubiche, esiste potenzialmente la possibilità di incorrere in punti di flesso indesiderati nella distribuzione dello spessore. Nella parte anteriore dello spessore la derivata seconda posta pari a zero sul bordo d'attacco limita la possibilità di incontrare un punto di flesso. Per quanto riguarda la parte posteriore, l'esame delle equazioni mostra che esiste un valore minimo di  $Z$  (il punto di massimo spessore) che impedisce al punto di flesso di trovarsi sulla superficie della pala. Questo è dato da:

$$Z_{min} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1 - \frac{2y_1}{T}}{1 - \frac{2y_0}{T}}}}$$

Quando  $Z = 0.5$ , il punto di massimo spessore si trova esattamente al 50% della lunghezza della corda del profilo, a metà strada tra il bordo d'attacco e il bordo d'uscita. In questa configurazione, se gli spessori del bordo d'attacco e del bordo d'uscita sono uguali, non si verifica un punto di flesso nella distribuzione dello spessore. Tuttavia, se il rapporto tra lo spessore del bordo d'uscita e quello del bordo d'attacco aumenta, il valore di  $Z$  cresce di conseguenza, spostando il punto di massimo spessore verso il bordo d'uscita.

Se si ipotizzano dei dati in ingresso per un profilo in schiera si possono visualizzare i vari camber line descritti in precedenza con il proprio spessore:

- 1) Lunghezza della corda: 8,6 cm
- 2) Solidità (c/s): 2
- 3) Deviazione del flusso ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ): 48,4 gradi
- 4) Angolo di inclinazione: 16 gradi
- 5) Spessore massimo al 20% della corda
- 6) Valore dello spessore massimo: 7,4% della corda (6,8% in esponenziale)
- 7) Raggio del bordo d'attacco ( $y_{le}$ ): 0,04 cm

- 8)  $P = 0,25$
- 9) Raggio del bordo d'uscita (yte): 0,02 cm
- 10)  $Q = 0,5$
- 11) Posizione del punto di flesso (se applicabile): 60% della corda
- 12) Inclinazione al punto di flesso (se applicabile): 70 gradi
- 13) Distribuzione dello spessore: Distribuzione dello spessore ad arco circolare
- 14) Numero di Mach in entrata: 0,70

Avremo quindi:

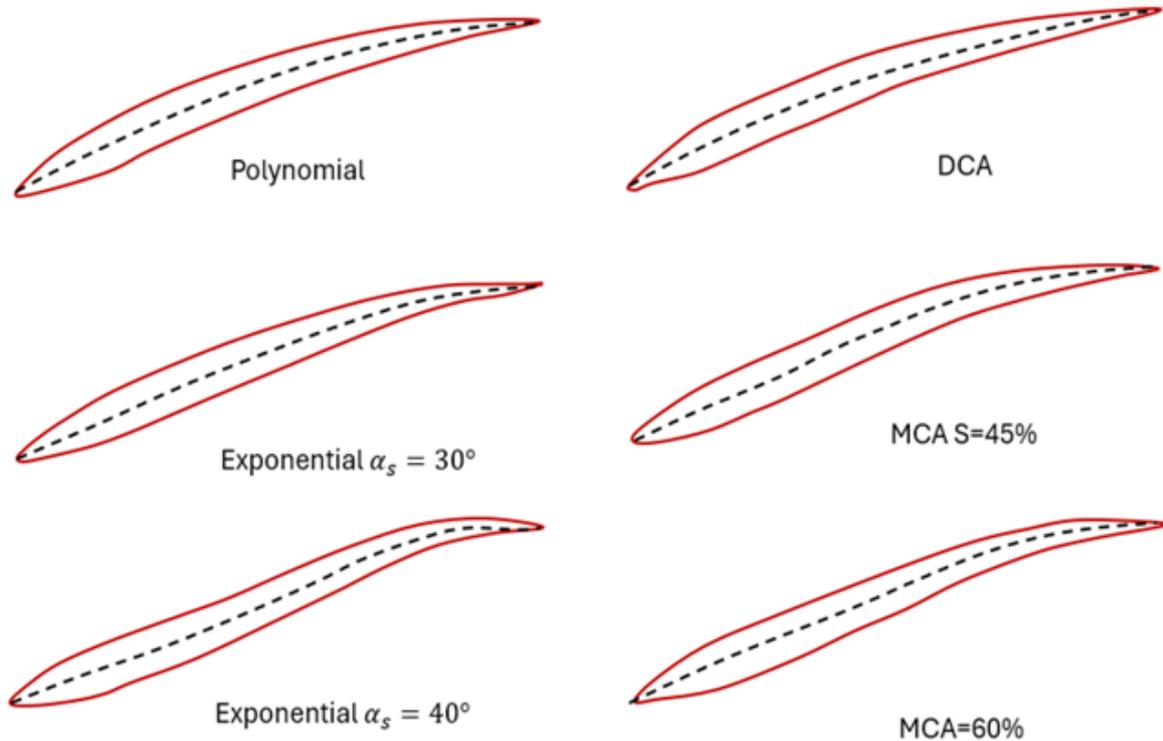


Figura 3.17 Andamento dello spessore su differenti tipi di camber line

Le linee di camber utilizzate oggi nel campo transonico sono principalmente: Exponential Camber Line, Polynomial Camber Line, e Double Circular Arc Camber

Line, mentre la Circular Camber Line e la Parabolic Camber Line vengono impiegate principalmente per applicazioni subsoniche.

### ***3.4 Profili Transonici***

Come discusso nel paragrafo precedente, nel caso di flussi supersonici, i profili devono avere bordi acuminati e taglienti in modo tale che l'onda d'urto rimanga ancorata ad essi, riducendo al minimo le perdite. Tuttavia, nel caso di condizioni off-design, ovvero quando si opera con flussi diversi da quelli di progetto, come flussi subsonici, un profilo acuminato genera una separazione del flusso che porta il profilo in rapido stallo, causando il fenomeno del surge nel compressore. Pertanto, nel caso di flussi transonici, dove il flusso varia da supersonico a subsonico o viceversa, si è considerato sin dall'inizio l'utilizzo di profili leggermente smussati. Tuttavia, questi profili tendono a generare onde d'urto curve (Bow Shock Wave) che, come visto, causano molte più perdite rispetto alle onde oblique. Si è pensato quindi, che i profili dovessero essere in grado di ottenere una diffusione controllata, permettendo così di gestire le onde d'urto facendole generare in punti specifici. Così i profili subsonici già esistenti furono in primo luogo elaborati e reinventati. Esistono diverse famiglie di profili, specialmente quelli della serie NACA o della serie britannica. Tuttavia, successivamente all'introduzione della CFD (Computational Fluid Dynamics) e alla creazione del primo profilo a diffusione controllata negli anni '80, le aziende operanti nel campo della ricerca e dello sviluppo di questi profili hanno limitato la divulgazione delle loro geometrie. Sebbene non vi sia una letteratura ampia e dettagliata che rappresenti questi tipi di profili, esiste comunque la possibilità di progettarli seguendo regole stabilite nel corso degli anni. Queste regole si basano principalmente sulla definizione delle linee di curvatura (camber line) e delle loro caratteristiche.

### 3.4.1 NACA 65-Series Profile

Il profilo NACA 65 è una delle serie più conosciute e utilizzate nel design di compressori assiali, originariamente sviluppata dall'NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) negli anni '40. Tuttavia, questo profilo si dimostrò fin da subito non adatto per l'applicazione nelle schiere dei compressori, poiché presentava problemi di integrità strutturale dovuti alla significativa riduzione dello spessore verso il bordo d'uscita. Inoltre, il profilo mostrava una rigidità in termini di progettazione, poiché il massimo camber si trovava all'incirca al 40% della corda. Furono apportate diverse modifiche al profilo nella speranza di poterlo adattare all'uso nei compressori, ma si dovette aspettare vent'anni per ottenere una modifica soddisfacente. Questa venne proposta da Kovach e Sandercock: la posizione del massimo camber fu spostata al 60% della corda, consentendo di far variare linearmente il profilo fino all'80% della corda, ottenendo così un raccordo sul bordo d'uscita più ampio e spesso. Inoltre, il profilo originale presentava una pendenza della linea di curvatura che diventava infinita ai bordi d'entrata e d'uscita. Per risolvere questo problema, fu adottata una linea di curvatura ad arco di cerchio (circular-arc camber line), che migliorò l'integrità strutturale e le prestazioni aerodinamiche del profilo.

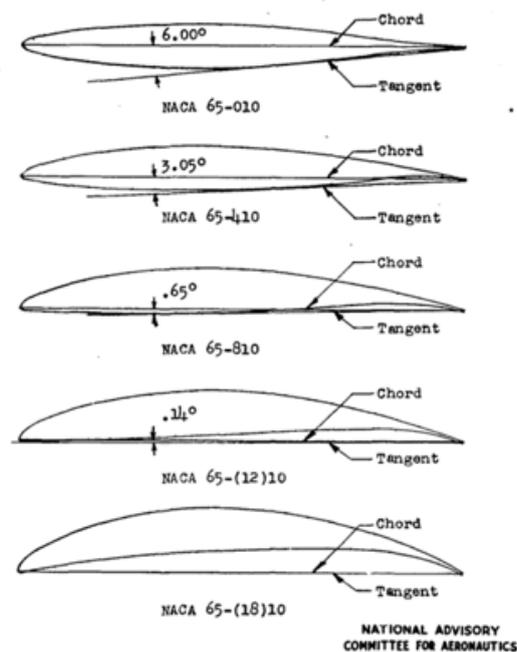


Figura 3.18 Evoluzione del profilo NACA-010 nel tempo

Nella figura si può apprezzare come il profilo originale NACA-010 sia stato modificato per meglio adattarsi alle schiere.

### **3.4.2 BRITISH C.4 Profile**

Il profilo C.4 è un membro ben noto dei profili alari della serie C britannica, sviluppati nella Seconda guerra mondiale. La serie C.4 si distingue nella letteratura per le sue prestazioni aerodinamiche, in particolare se confrontata con altri profili come la serie NACA 65. In particolare, il profilo C.4 è più spesso verso il bordo d'attacco, con spessore massimo al 30% della corda, a differenza della serie NACA 65, dove lo spessore massimo è al 40%. Questo design rende il profilo C.4 più robusto e più adatto per numeri di Mach inferiori, mentre la serie NACA 65 è in genere preferita per numeri di Mach superiori a causa del suo bordo d'attacco più sottile. I vantaggi strutturali del profilo C.4, in particolare i bordi di attacco e di uscita più spessi, contribuiscono a una migliore integrità meccanica, rendendolo una buona scelta nelle applicazioni in cui la durata è critica.

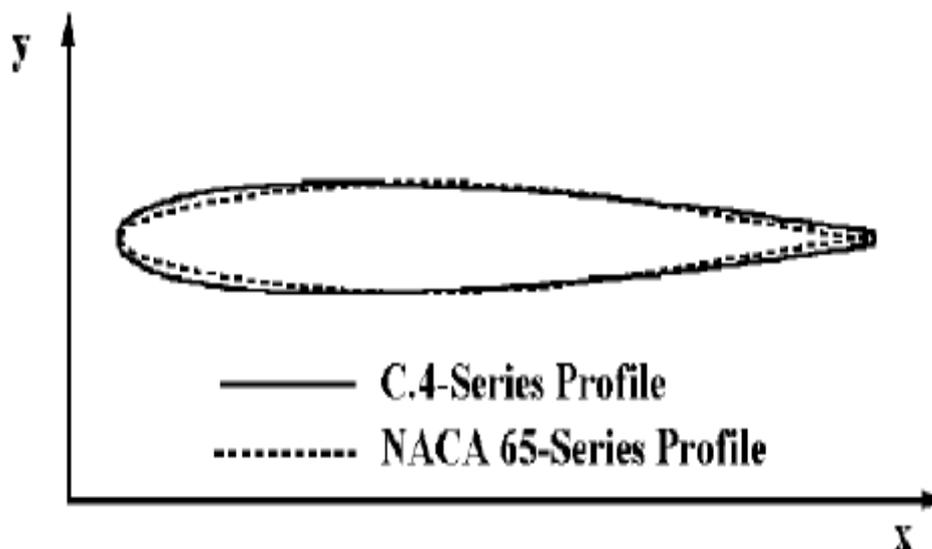


Figura 3.19 Confronto fra profilo C4 e NACA 65

Inoltre, i profili della serie C, incluso il C.4, sono spesso combinati con diverse camber line, come le camber line ad arco circolare o parabolico, per ottimizzare le prestazioni. Sviluppi successivi, come il profilo C.7, condividono molte caratteristiche con la serie NACA 65, ma sono stati utilizzati più frequentemente nei compressori per le loro prestazioni migliorate a velocità più elevate.

### ***3.4.3 Double-Circular-Arc Profile (DCA)***

Con l'introduzione della camber line ad arco circolare, venne sviluppato il profilo a doppio arco circolare intorno agli anni '60. In questo profilo, entrambe le superfici, superiore e inferiore, sono costituite da archi circolari che si uniscono nel naso della pala, garantendo una transizione fluida e riducendo la resistenza aerodinamica. Questo profilo si caratterizza per la sua applicazione in flussi con numero di Mach superiore a 1, fino a  $M = 1.3-1.4$ , offrendo prestazioni migliorate rispetto alla serie NACA 65, che supportava flussi in ingresso fino a  $M = 0.8$ . È interessante studiare le equazioni per la distribuzione dello spessore. Verrà illustrata solo l'equazione per la superficie superiore in quanto la superficie inferiore è molto simile eccetto per il  $t_b$  e  $r_0$  a cui si dovranno dare dei valori negativi. La distanza  $\Delta x_U$  dalla mid-chord al centro del raggio di punto sul bordo d'uscita è data da:

$$\Delta x_U = (R_U - r_0) \sin\left(\frac{\theta_U}{2}\right) = \frac{c}{2} - r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Dove  $\theta$  è il blade camber angle.

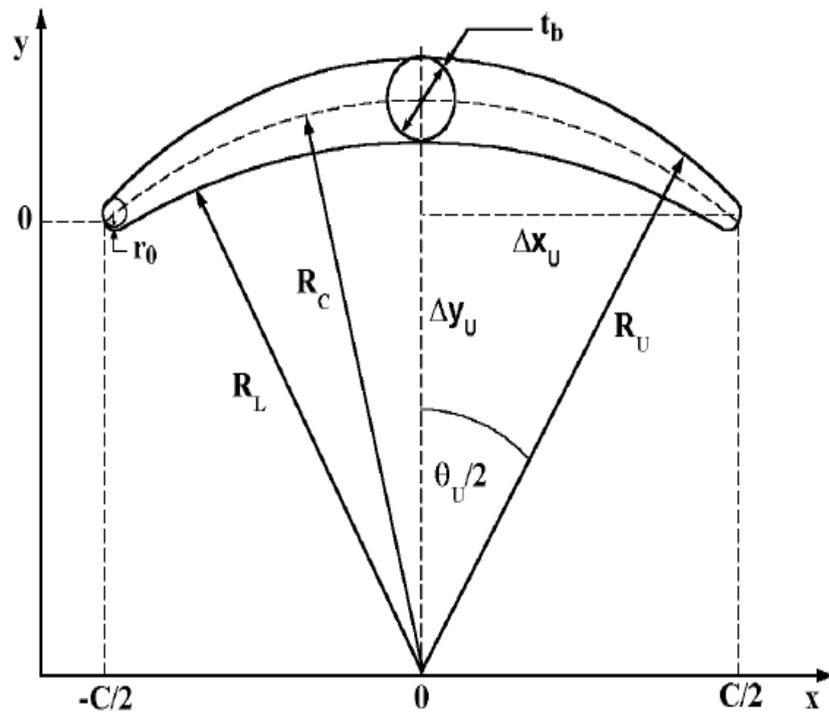


Figura 3.20 Double-Circular-Arc Profile (DCA)

Per l'asse y avremo:

$$\Delta y_U = R_U - y(0) - \frac{t_b}{2} + r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = R_U - d$$

Dove la  $y_0$  ovvero la coordinata del camber line viene ricavata a priori dal calcolo della linea di camber. Il parametro  $d$  viene definito come:

$$d = y(0) + \frac{t_b}{2} - r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo destro del profilo:

$$[R_U - r_0]^2 = [R_U - d]^2 + \left[\frac{c}{2} - r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2$$

Ottenendo così:

$$R_U = \frac{d^2 - r_0^2 + \left[\frac{c}{2} - r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}{2(d - r_0)}$$

L'arco superiore quindi si estende da  $-\frac{\theta_U}{2}$  a  $\frac{\theta_U}{2}$  ed è realizzato mediante il raggio  $R_U$ . La posizione dell'origine è nel punto  $x = 0$  e  $y = y(0) + \frac{t_b}{2} - R_U$ . L'intersezione delle superfici superiori e inferiori avviene nel trailing edge e nel leading edge dove le due linee vengono troncate per essere sostituite da due semi circonferenze di raggio  $r_0$  con centro in  $y = r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  e  $x = \pm \left[\frac{c}{2} - r_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$ .

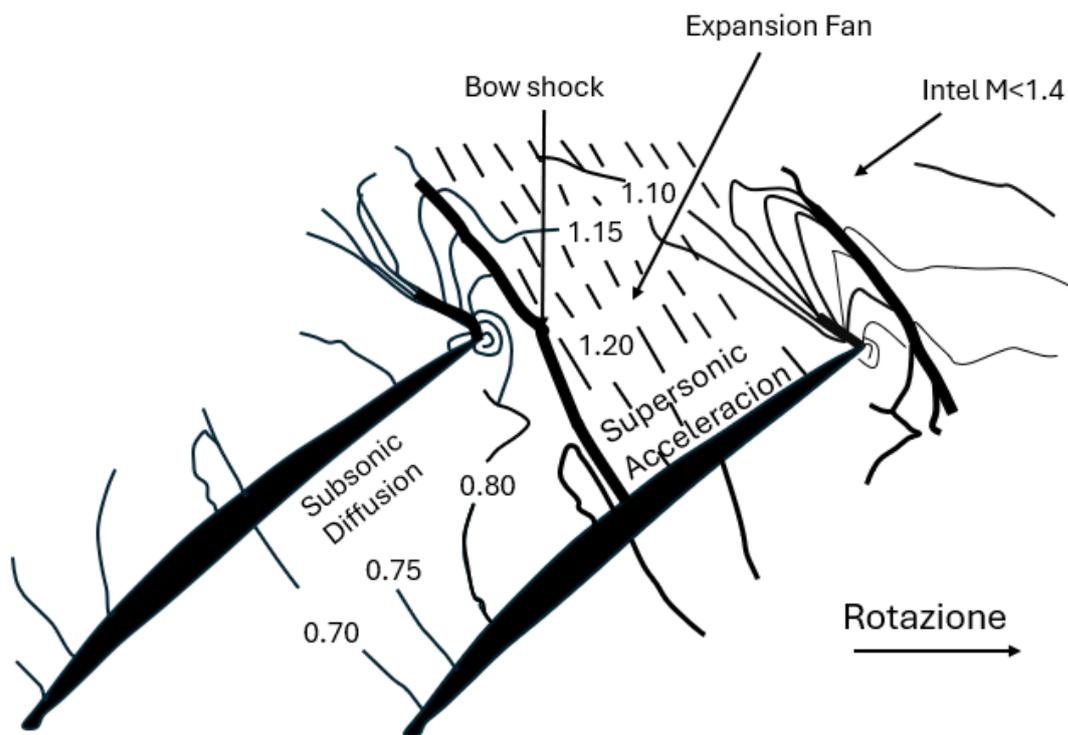


Figura 3.21 Double-Circular-Arc Profile in schiera

La figura mostra un'analisi CFD di profili DCA disposti in schiera. A causa del bordo d'attacco leggermente smussato, l'onda d'urto generatasi si staccherà dal leading edge, formando una Bow Wave che ridurrà la velocità del flusso. La Bow Wave si propagerà verso l'alto come un'onda obliqua, mentre verso destra sarà normale al flusso che percorre il canale palare. Inoltre, il flusso all'interno del canale, nella parte della suction surface, verrà prima decelerato a causa della seconda Bow Wave generata sul secondo profilo, per poi accelerare attraverso le ventole di espansione, raggiungendo nuovamente valori supersonici, per poi decelerare nuovamente a causa dell'onda

normale generata dalla prima Bow Wave. Il salto di pressione si verificherà quindi in corrispondenza dell'onda d'urto normale. Questa decelerazione da supersonico a subsonico, dovuta al salto di pressione, è chiamata "Jump Diffusion". Se si desiderano salti di pressione più elevati, oppure se si hanno velocità di rotazione molto elevate o una lunghezza significativa delle pale, si raggiungeranno certamente numeri di Mach molto più elevati di 1,4. In questi casi, sarà necessario optare per altri tipi di profili, che verranno esaminati in seguito.

#### ***3.4.4 Controlled-Diffusion Airfoils (CDA)***

Con il passare degli anni e con l'aumento dei numeri di Mach in ingresso, i ricercatori hanno esplorato alternative che offrono una gamma migliorata di numeri di Mach e una maggiore efficienza. Uno sviluppo degno di nota sono i profili alari a diffusione controllata (CDA). Questi profili furono i primi a essere realizzati mediante analisi CFD negli anni '80. I CDA presero spunto dai profili alari supercritici impiegati in aviazione copiandone le strategie di progettazione. Le strategie di base per la progettazione di questo profilo possono essere riassunte come:

- 1) L'accelerazione del flusso deve essere continua lungo la superficie di aspirazione, specialmente vicino al bordo d'attacco della pala. Ciò è fondamentale per mantenere un flusso d'aria regolare e impedire la separazione dello strato limite laminare.
- 2) Il numero di Mach massimo non dovrebbe superare 1.3 per evitare la separazione indotta dall'onda d'urto. Quando il numero di Mach supera questo valore, l'onda d'urto può interagire con lo strato limite, causando una separazione prematura e perdite aerodinamiche.
- 3) Decelerazione controllata lungo la superficie di aspirazione: Dopo il picco del numero di Mach, è essenziale una decelerazione attentamente gestita lungo la superficie di aspirazione per prevenire la separazione turbolenta dello strato limite prima del bordo d'uscita.

4) Distribuzione del numero di Mach quasi costante sulla superficie di pressione: Questo aiuta a mantenere il flusso stabile ea evitare perdite energetiche.

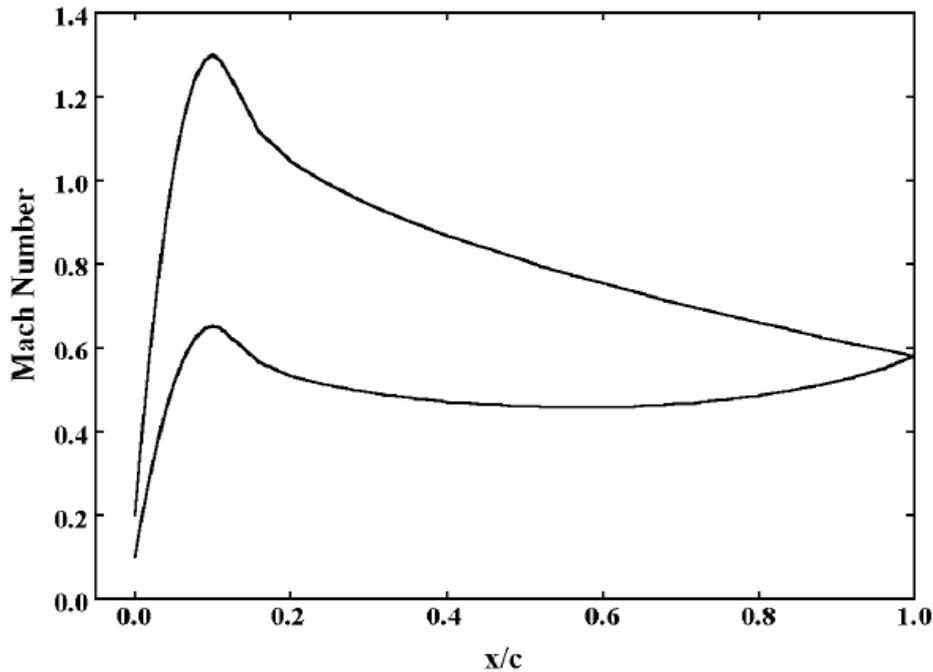


Figura 3.22 Distribuzione del numero di Mach sui Controlled-Diffusion Airfoils (CDA)

Il diagramma rappresenta schematicamente il tipo di distribuzione del numero di Mach utilizzato in questi profili. Il design mira a evitare l'interazione tra l'onda d'urto e lo strato limite, consentendo un'analisi più efficace dello strato limite per stabilire le caratteristiche di diffusione controllata lungo la superficie di aspirazione. Inizialmente, per progettare questi profili, si utilizzavano tecniche inverse, che permettevano di calcolare la geometria della pala a partire da una distribuzione specifica del numero di Mach. Con l'evoluzione della progettazione, sono stati sviluppati metodi diretti per perfezionare iterativamente la geometria delle pale, al fine di raggiungere le caratteristiche aerodinamiche desiderate. I profili CDA tendono a essere più robusti rispetto alla serie NACA 65, specialmente nella parte anteriore del profilo, mentre la parte posteriore è relativamente sottile con uno spessore quasi costante. Tuttavia, questa non è una regola generale, poiché i profili CDA sono progettati per obiettivi specifici e sono spesso considerati design proprietari piuttosto che una famiglia

standardizzata di profili aerodinamici. Questi principi guidano lo sviluppo di pale con caratteristiche aerodinamiche controllate, migliorando l'efficienza e riducendo le perdite nei compressori ad alte prestazioni.

I profili aerodinamici hanno trovato largo impiego nei compressori assiali industriali, dove lo sviluppo di profili unici per ogni compressore non è economicamente praticabile. Tuttavia, per poter applicare con successo questo concetto, è necessario progettare inizialmente profili specifici che soddisfino le caratteristiche desiderate. Questi profili devono essere studiati in modo da adattarsi alle esigenze operative dei compressori industriali. Inoltre, è fondamentale sviluppare modelli di previsione delle prestazioni, poiché i modelli tradizionali, utilizzati per profili standard, potrebbero non essere sufficientemente accurati per descrivere i nuovi profili specifici. Pertanto, la progettazione e la simulazione preliminare sono fasi cruciali per garantire che i profili aerodinamici adottati offrano le prestazioni necessarie in un contesto industriale.

### ***3.4.5 Multiple-Circule-Arc profile (MCA)***

Con l'introduzione della CFD, è stato possibile spingere i limiti delle prestazioni aerodinamiche sempre più in alto. Considerando la linea di camber a doppio arco di cerchio, è possibile applicare a questo una distribuzione di spessore variabile sia al di sotto che al di sopra del punto di flesso, e differenziare la distribuzione tra il dorso ed il ventre della pala, ottenendo così un profilo a quattro archi circolari. Questo tipo di profilo rappresenta l'evoluzione più moderna e permette di lavorare con flussi in ingresso anche superiori a  $M = 1.8$ , fino a  $M = 2$ .

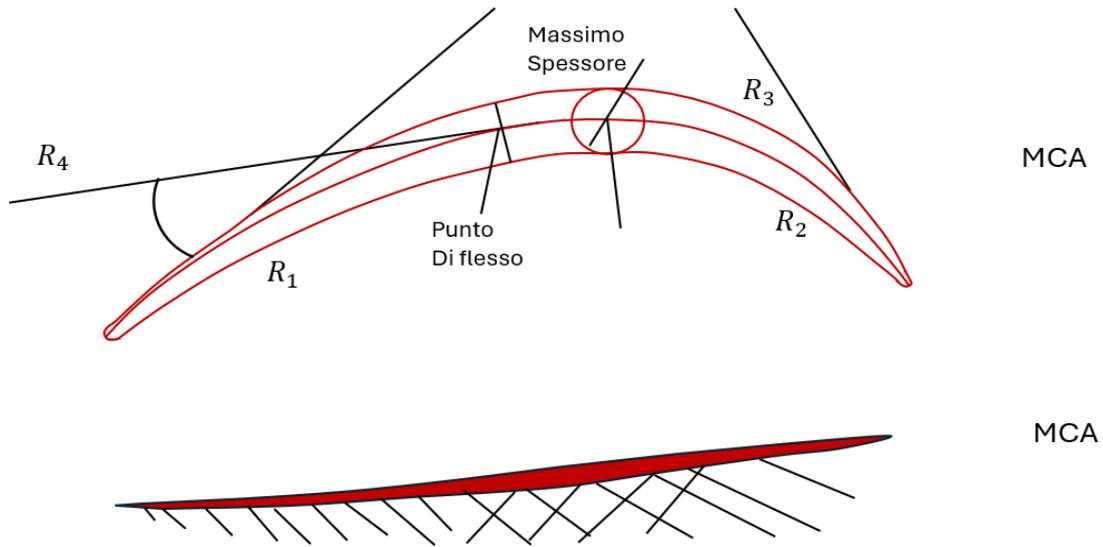


Figura 3.23 Multiple-Circle-Arc profile (MCA)

Come discusso nel caso della linea di camber a doppio arco circolare, con questo profilo è possibile spostare la zona di camber massimo, aumentando l'area di diffusione.

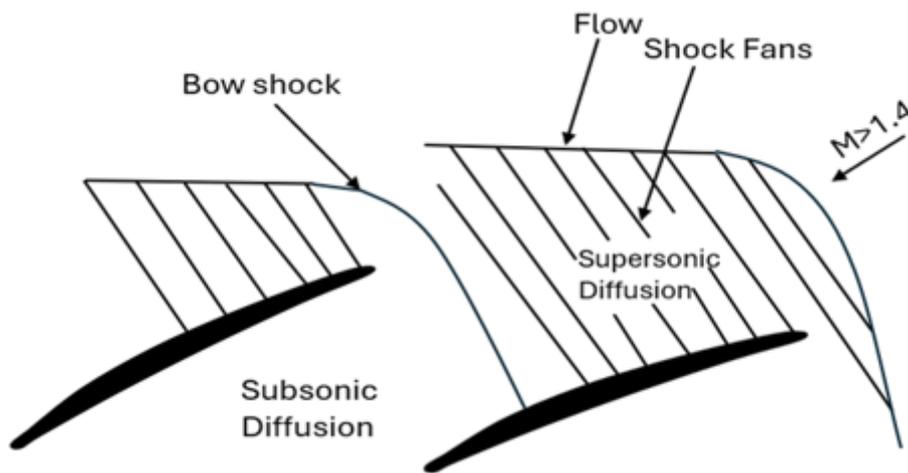


Figura 3.24 Multiple-Circle-Arc profile (MCA) in schiera

La figura mostra come questi profili, posti in schiera, hanno una zona di diffusione molto maggiore rispetto a quelli a doppio arco circolare. Ciò è reso possibile dalla curvatura

del profilo nel bordo d'attacco (leading edge), che induce un'onda curva a inclinarsi, formando un'onda ad arco. Questo fa sì che l'onda normale al flusso nel canale intersechi il profilo quasi al bordo d'uscita (trailing edge), riducendo la migrazione del flusso e minimizzando gli effetti di scia.

Il profilo più performante progettato fino ad ora con questa distribuzione di spessore è chiamato profilo S-Tape, o profilo ad "S". La sua peculiarità risiede nello spessore ridotto, che si avvicina a quello dei profili supersonici. Questo profilo è anche noto come profilo "a corda larga" poiché è molto snello e allungato.

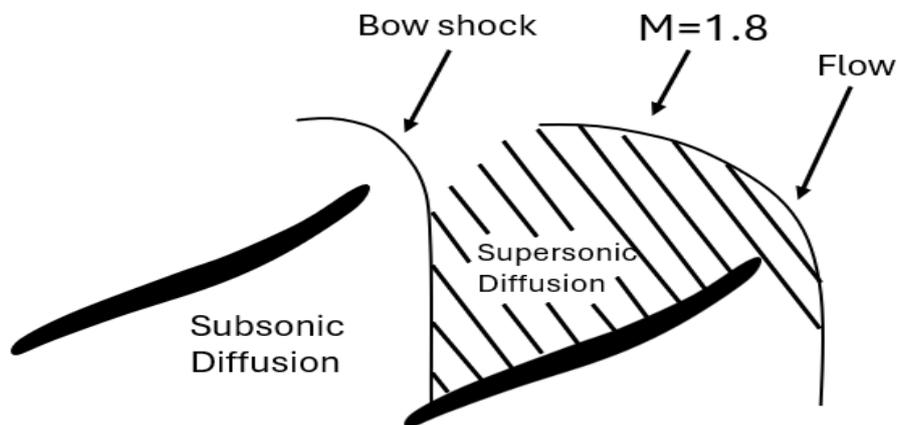


Figura 3.25 Profilo S-Tape in schiera

Osservando la figura, si può notare come la Bow Wave, staccandosi dal leading edge, assuma una forma molto accentuata a causa dell'alto numero di Mach in ingresso e della curvatura quasi concava della superficie di aspirazione. Quest'ultima è molto ampia in questo tipo di profilo, portando il flusso all'interno del canale palare a diventare supersonico. Inoltre, l'onda d'urto generata dal profilo superiore arriva a intersecare il profilo inferiore quasi al trailing edge, evitando così la separazione dello strato limite al centro del canale, che causerebbe gli effetti negativi descritti nel capitolo 2.

## ***4 ANALISI CFD***

Negli anni '80 si iniziò a sviluppare i primi profili a diffusione controllata (CDA), come descritto nel capitolo 3. Questi profili furono progettati interamente tramite l'uso di computer, in particolare attraverso software di CFD (Computational Fluid Dynamics). Questa svolta tecnologica fu di fondamentale importanza, poiché ridusse significativamente i costi legati alla progettazione e alla validazione dei profili, che precedentemente avvenivano principalmente mediante l'uso di gallerie del vento. Inoltre, aprì nuove opportunità di ricerca a migliaia di aziende in tutto il mondo. Quando si parla di CFD, generalmente ci si riferisce alla risoluzione delle equazioni che governano il moto dei fluidi, ovvero le equazioni di Navier-Stokes, che descrivono in dettaglio il comportamento di fluidi viscosi come l'aria o l'acqua. Le equazioni di Navier-Stokes possono essere risolte analiticamente solo in casi molto semplici e ideali. Queste equazioni, infatti, rappresentano ancora uno dei sette problemi del millennio, poiché non è completamente chiaro se esistano soluzioni regolari e uniche in forma chiusa per tutte le condizioni. Solo in presenza di flussi laminari è possibile trovare soluzioni analitiche utilizzando le equazioni di Navier-Stokes, mentre nel caso di flussi turbolenti, queste equazioni non sono direttamente risolvibili analiticamente. Per ottenere informazioni sul comportamento del fluido, come il campo di velocità o la distribuzione di pressione, si ricorre quindi a tecniche numeriche, che permettono di elaborare soluzioni approssimate partendo da condizioni al contorno assegnate. Nel campo dei compressori transonici-supersonici il flusso in movimento è di natura fortemente compressibile. Come si è visto in questi compressori la vorticità del fluido non è l'unico problema da contemplare ma vi sono anche le onde d'urto.

## ***4.1 Modelli di Turbolenza***

Il problema della turbolenza, il cui aspetto principale è lo studio e la modellazione dei vortici (spesso indicati come *eddy*), può essere affrontato utilizzando diverse metodologie, ognuna con i propri vantaggi e svantaggi. Queste metodologie variano per complessità, accuratezza e costi computazionali, e possono essere suddivise in tre grandi categorie, ognuna delle quali racchiude a sua volta numerose sottoclassi.

### ***4.1.1 RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)***

Questo tipo di approssimazione risale a Reynolds stesso, il quale propose di considerare la velocità del fluido come la somma di una componente media e di una componente fluttuante. Applicò questa assunzione alle equazioni di Navier-Stokes, ottenendo così una formulazione semplificata, nota come Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS). In questa formulazione, le variabili del flusso, come la velocità, vengono scomposte in una parte media (che rappresenta il comportamento a lungo termine del flusso) e una parte fluttuante (che descrive le variazioni turbolente intorno alla media). L'adozione di questa scomposizione permette di trasformare le equazioni di Navier-Stokes originali in una forma media, semplificando il problema della simulazione dei flussi turbolenti. Tuttavia, questa operazione introduce delle nuove incognite, note come stress di Reynolds, che devono essere modellate attraverso ulteriori approssimazioni, dette modelli di chiusura. Questi modelli sono essenziali per determinare il comportamento delle turbolenze senza dover risolvere direttamente tutte le fluttuazioni del flusso. Il vantaggio principale di questo approccio è la possibilità di utilizzare griglie computazionali più larghe rispetto a modelli più dettagliati, come la Large Eddy Simulation (LES), riducendo significativamente i tempi di calcolo. Tuttavia, a causa della mediazione temporale delle fluttuazioni, i dettagli delle turbolenze su piccola scala non sono rappresentati in modo diretto, il che riduce la precisione della simulazione in confronto a metodi più avanzati. Nonostante queste limitazioni, i metodi RANS

rimangono ampiamente utilizzati nelle simulazioni fluidodinamiche grazie al loro buon compromesso tra accuratezza e costi computazionali. Esistono diverse varianti dei modelli RANS, che si distinguono principalmente in base al numero di equazioni aggiuntive introdotte per chiudere il sistema e renderlo determinato, come sarà discusso nelle sezioni successive.

#### ***4.1.2 LES (Large Eddy Simulation)***

Il modello LES (Large Eddy Simulation) è una metodologia avanzata di simulazione turbolenta che risolve direttamente le strutture turbolente di grandi dimensioni (eddy), mentre modella solo le turbolenze più piccole tramite approssimazioni. A differenza dei modelli RANS, che mediano tutte le fluttuazioni turbolente, il LES si concentra sulla risoluzione diretta dei vortici più grandi, che contengono la maggior parte dell'energia turbolenta. Questo approccio fornisce una descrizione più accurata del comportamento del flusso turbolento, soprattutto in presenza di fenomeni complessi come la separazione del flusso e le interazioni tra onde d'urto e strati limite, tipiche dei compressori transonici. Il vantaggio principale del LES è la sua capacità di fornire informazioni dettagliate sulle strutture turbolente, permettendo una previsione più precisa del comportamento del flusso rispetto ai modelli mediati come i RANS. Tuttavia, questo approccio richiede una griglia computazionale molto fine, specialmente nelle regioni di flusso vicino alle pareti, e un tempo di calcolo significativamente maggiore. Per questo motivo, il LES è tipicamente utilizzato in simulazioni ad alta fedeltà o per scopi di ricerca, dove l'accuratezza dei dettagli del flusso è prioritaria rispetto al costo computazionale. In contesti industriali, viene spesso applicato a studi locali di parti critiche, mentre per simulazioni su larga scala è più comune un compromesso tra modelli RANS e LES.

### ***4.1.3 DNS (Direct Numerical Simulation)***

Il DNS (Direct Numerical Simulation) è il metodo più accurato per la simulazione dei flussi turbolenti, in quanto risolve direttamente tutte le scale di moto turbolento senza ricorrere ad alcuna approssimazione o modellazione delle fluttuazioni. A differenza dei modelli RANS e LES, che mediano o approssimano parti delle turbolenze, il DNS risolve le equazioni di Navier-Stokes esattamente su tutta la gamma di scale temporali e spaziali presenti nel flusso. Questo rende il DNS incredibilmente preciso e in grado di fornire dettagli completi e realistici sulla dinamica turbolenta, ma a un costo computazionale estremamente elevato. Il DNS richiede una discretizzazione molto fine del dominio di calcolo per catturare sia i vortici più grandi che le turbolenze su scala microscopica, rendendo necessarie risorse computazionali proibitive per applicazioni ingegneristiche complesse, come quelle nei compressori transonici. Per questo motivo, il DNS è utilizzato principalmente per studi accademici e ricerche fondamentali, dove lo scopo è comprendere a fondo la fisica dei flussi turbolenti piuttosto che ottenere risultati pratici per l'industria. In ambito industriale, a causa dei suoi requisiti elevati, il DNS è raramente utilizzato, se non per studi mirati su sezioni molto piccole del dominio o per convalidare altri modelli di simulazione meno complessi come RANS o LES.

## ***4.2 Modelli di Chiusura per RANS***

I modelli di chiusura per RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) sono necessari per risolvere il sistema di equazioni derivato dalla scomposizione delle equazioni di Navier-Stokes in una parte media e una fluttuante. Questa scomposizione introduce nuove incognite, note come stress di Reynolds, che rappresentano gli effetti delle fluttuazioni turbolente non risolte direttamente. Per chiudere il sistema e renderlo risolvibile, è necessario introdurre modelli che descrivano il comportamento di questi stress. I modelli di chiusura, quindi, forniscono relazioni empiriche o semi-empiriche che

permettono di collegare gli stress di Reynolds alle variabili del flusso medio, come velocità e pressione.

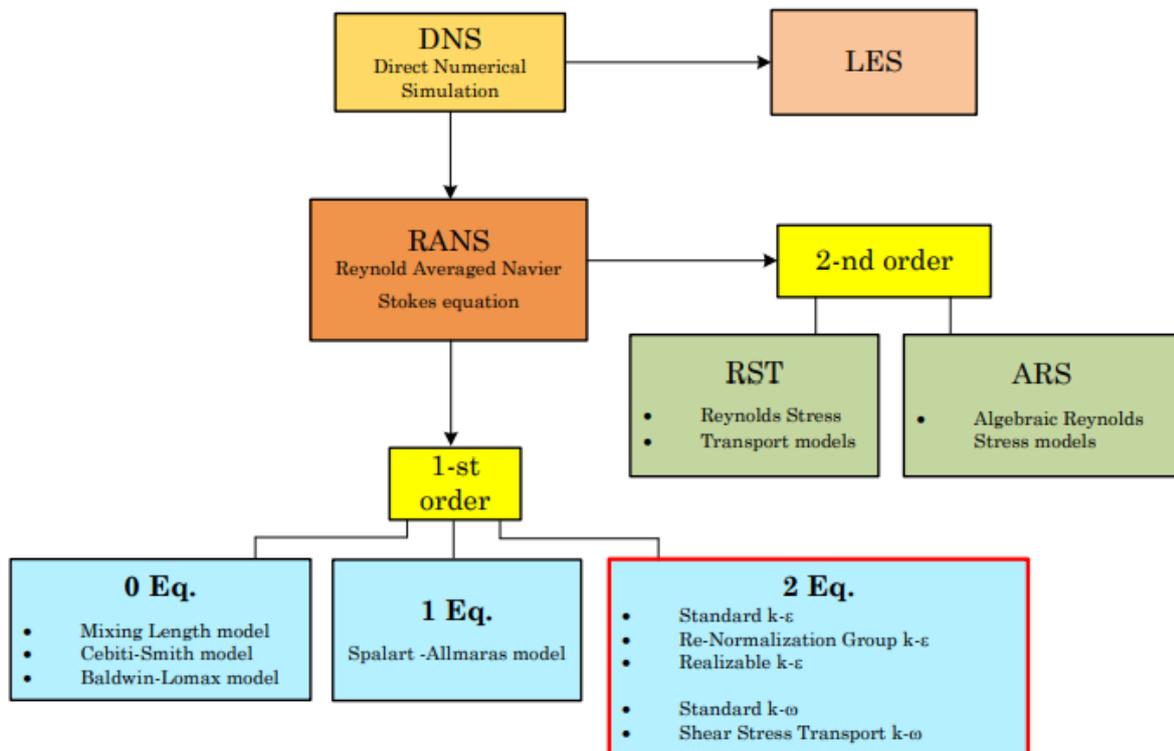


Figura 4.1 Modelli di chiusura delle equazioni di Navier-Stockes

Una prima distinzione tra i modelli di chiusura riguarda quelli di primo ordine e quelli di secondo ordine. I modelli di primo ordine, a loro volta, possono essere suddivisi in base al numero di equazioni di trasporto utilizzate. Nel caso di questa tesi, l'attenzione si concentra sui modelli di primo ordine a una o due equazioni. In particolare, verranno esaminati modelli specifici che rientrano in queste categorie, con un focus sui loro vantaggi e limitazioni nelle simulazioni di flussi turbolenti.

### ***4.2.1 Modello Spalart-Allmaras***

Si tratta di un modello semplificato e relativamente leggero dal punto di vista computazionale, ideale per la simulazione di flussi con strato limite ben sviluppato, senza separazioni turbolente significative. Il modello si basa su un'equazione di trasporto per una variabile che rappresenta la viscosità turbolenta modificata. Uno dei vantaggi principali del modello Spalart-Allmaras è la sua efficienza computazionale, che lo rende adatto per simulazioni rapide su geometrie complesse. Tuttavia, il modello tende a essere meno preciso in presenza di flussi altamente separati o turbolenze complesse, situazioni in cui modelli più avanzati, come i modelli a due equazioni  $k-\omega$  o  $k-\varepsilon$ , possono fornire previsioni più accurate. Nonostante questi limiti, il modello Spalart-Allmaras è ampiamente utilizzato in applicazioni industriali dove la rapidità e l'efficienza sono prioritarie.

### ***4.2.2 Modello $K-\omega$***

Il modello  $k-\omega$  è un modello di turbolenza a due equazioni che risolve l'energia cinetica turbolenta ( $k$ ) e la frequenza specifica della dissipazione ( $\omega$ ), fornendo una descrizione accurata della turbolenza sia nelle regioni interne del flusso che vicino alle pareti. Uno dei principali punti di forza del modello  $k-\omega$  è la sua capacità di gestire con precisione i flussi con strati limite in prossimità delle superfici solide, come quelli che si sviluppano attorno a pale di compressori, turbine o profili aerodinamici. Questo lo rende particolarmente adatto per flussi transonici e compressibili, dove la risoluzione dello strato limite è cruciale. Tuttavia, il modello  $k-\omega$ , nella sua forma standard, può risultare troppo sensibile alle condizioni al contorno del flusso libero, il che può limitare la sua applicabilità in alcune situazioni.

### 4.2.3 Modello $K-\varepsilon$

Il modello  $k-\varepsilon$  è uno dei modelli di turbolenza a due equazioni più utilizzati in fluidodinamica computazionale (CFD). Risolve l'energia cinetica turbolenta ( $k$ ) e il suo tasso di dissipazione ( $\varepsilon$ ), fornendo una descrizione della turbolenza nel flusso. Il modello  $k-\varepsilon$  è particolarmente efficace nella simulazione di flussi completamente turbolenti e in flussi con grandi volumi o geometrie complesse, come quelli incontrati nelle applicazioni industriali. Tuttavia, la sua precisione può ridursi nelle regioni vicino alle pareti, dove la transizione laminare-turbolento e i fenomeni legati allo strato limite richiedono un modello più sofisticato per catturare i dettagli del flusso. Per migliorare l'accuratezza in queste aree, sono state sviluppate varie versioni modificate del modello, come il  $k-\varepsilon$  realizzabile e il  $k-\varepsilon$  RNG, che introducono correzioni per la curvatura del flusso o per la rotazione. Il modello  $k-\varepsilon$  rimane una scelta comune per molte applicazioni ingegneristiche, grazie alla sua robustezza e semplicità, anche se per simulazioni che richiedono una risoluzione più precisa dello strato limite e dei fenomeni transitori, si preferiscono modelli come il  $k-\omega$  SST.

Per la simulazione di flussi transonici su schiere palari si utilizza una mediazione fra il modello  $K-\omega$  ed il modello  $K-\varepsilon$  noto come  $k-\omega$  SST (Shear Stress Transport), il quale sfrutta il modello  $k-\omega$  nelle regioni vicine alle pareti ed il modello  $k-\varepsilon$  nelle regioni di flusso libero.

### ***4.3 Metodi Numerici per la Risoluzione delle Onde d'Urto***

L'analisi CFD di flussi compressibili, in particolare nei contesti transonici e supersonici, richiede l'uso di metodi numerici avanzati per risolvere le equazioni di Navier-Stokes. Uno degli aspetti più complessi da gestire in questi flussi è la presenza delle onde d'urto, discontinuità improvvise e localizzate nelle variabili di stato del fluido, come la pressione, la densità e la velocità. Queste discontinuità non possono essere catturate accuratamente con metodi numerici tradizionali senza introdurre errori o oscillazioni spurie, richiedendo quindi approcci specifici e ben calibrati. I principali metodi numerici per risolvere onde d'urto possono essere suddivisi in tre categorie principali:

1. Metodi basati su schemi di differenza e di volume finito: Questi metodi si fondano sulla discretizzazione delle equazioni di flusso, dove le variabili vengono calcolate su una griglia di punti, usando differenze finite o volumi finiti. Tra questi schemi troviamo il metodo upwind e il metodo di Godunov, che utilizzano l'informazione del flusso a monte per calcolare le variabili a valle.
2. Metodi di splitting del flusso: Questi metodi dividono le equazioni di conservazione in base ai flussi attraverso i confini di ciascun volume di controllo o cella della griglia. Un esempio significativo è il Roe-FDS (Flux Difference Splitting), che utilizza una linearizzazione delle equazioni per risolvere i flussi nelle regioni delle onde d'urto.
3. Metodi ad alta risoluzione e TVD (Total Variation Diminishing): Questi metodi sono progettati per migliorare la risoluzione delle discontinuità senza introdurre oscillazioni spurie. Schemi come il MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) e i metodi TVD permettono una migliore cattura delle onde d'urto mantenendo la stabilità numerica.

Ognuna di queste categorie rappresenta un approccio specifico per risolvere le discontinuità, come le onde d'urto, con tecniche diverse di discretizzazione e calcolo del flusso. Nei paragrafi successivi, saranno analizzati in dettaglio i singoli metodi, con particolare attenzione ai loro principi fondamentali, ai campi di applicazione e all'adeguatezza nelle simulazioni di compressori transonici.

### ***4.3.1 Metodo Upwind***

Il metodo upwind è uno dei metodi numerici più utilizzati per la risoluzione dei flussi compressibili con onde d'urto. La sua caratteristica principale è che, per calcolare i flussi in ogni punto della griglia, prende in considerazione le informazioni che provengono dalla direzione a monte del flusso, ovvero nella direzione da cui il fluido si muove. Questo approccio sfrutta il fatto che le informazioni nel flusso si propagano nella direzione del flusso stesso, prevenendo instabilità numeriche e oscillazioni non fisiche che possono verificarsi nelle vicinanze di discontinuità come le onde d'urto. In pratica, il metodo upwind si fonda su una differenza finita asimmetrica, dove il calcolo della derivata in un punto dipende dai valori delle variabili di flusso solo dal lato a monte del flusso. Nei flussi compressibili, dove onde d'urto e discontinuità locali possono causare variazioni improvvise nelle grandezze del flusso, questo metodo garantisce che la soluzione numerica segua correttamente la direzione del trasporto delle informazioni. Esistono diverse varianti del metodo upwind, tra cui lo schema upwind di primo ordine, che è semplice e robusto, ma tende a essere diffuso numericamente (ossia, smussa le discontinuità), e gli schemi upwind ad alta risoluzione, che cercano di migliorare la precisione senza compromettere la stabilità. Un esempio comune è lo schema upwind di secondo ordine, che utilizza interpolazioni più accurate per ridurre la diffusione numerica e migliorare la capacità di catturare con precisione onde d'urto e altre discontinuità. Il metodo upwind è particolarmente indicato nei flussi compressibili dove si verificano onde d'urto, poiché la sua struttura evita le oscillazioni spurie (le cosiddette "oscillazioni non fisiche" che si verificano con schemi centrali) che tendono ad apparire in prossimità di discontinuità forti. Tuttavia, la sua semplicità può portare a una perdita di precisione in zone dove il flusso dovrebbe essere regolare, richiedendo l'uso di metodi più avanzati in tali contesti.

### 4.3.2 Metodo di Godunov

Il metodo di Godunov è uno dei metodi numerici più utilizzati per la risoluzione delle equazioni di conservazione, come quelle di Eulero, che governano i flussi compressibili. La sua principale innovazione risiede nella risoluzione del problema di Riemann tra le celle della griglia. Il problema di Riemann è un problema fondamentale nella fluidodinamica computazionale, che descrive l'evoluzione di una discontinuità iniziale tra due stati del fluido (tipicamente detti "a sinistra" e "a destra") e prevede l'interazione tra onde di rarefazione, onde d'urto e discontinuità di contatto.

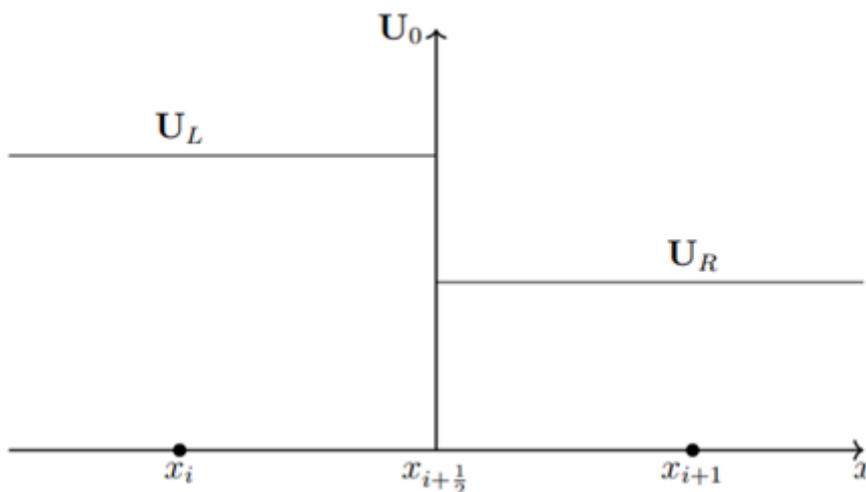


Figura 4.2 Valori iniziali per il problema di Riemann

Nel metodo di Godunov, il dominio del flusso viene discretizzato in celle, e il flusso tra ogni coppia di celle adiacenti è calcolato risolvendo un problema di Riemann locale all'interfaccia tra queste celle. In altre parole, si assume che ogni interfaccia rappresenti una discontinuità iniziale tra i due stati del fluido nelle celle adiacenti, e si cerca di prevedere come questa discontinuità evolverà nel tempo. Il metodo calcola l'interazione tra i due stati del fluido e genera una soluzione che rispetta le leggi di conservazione (massa, quantità di moto ed energia).

Il problema di Riemann può avere tre soluzioni a seconda delle condizioni iniziali e della natura del flusso, e può generare onde d'urto, onde di rarefazione o una combinazione di entrambe. Per esempio:

- Se la pressione e la densità tra le due celle variano notevolmente, potrebbe formarsi un'onda d'urto.
- Se la differenza di pressione è minore, potrebbe formarsi un'onda di rarefazione.
- Se la densità è solo la densità è discontinua fra la regione di valle e la regione di monte allora avremo il terzo caso. La velocità e la pressione rimarranno costanti attraverso la discontinuità in quanto, non si tratterà di un'onda vera e propria, ma solo una separazione tra le due regioni del fluido.

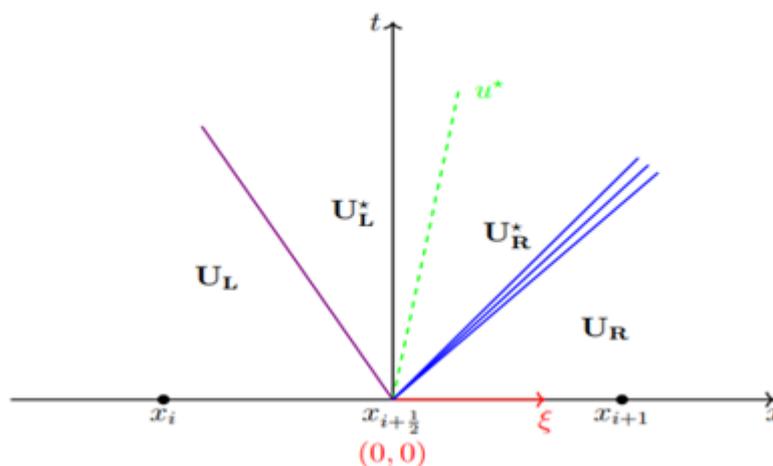


Figura 4.3 Esempio di problema di Riemann: Shock (VIOLA), contact discontinuity (verde), rarefaction fan (blu)

Nel metodo di Godunov di primo ordine, viene risolta una soluzione esatta o approssimata del problema di Riemann a ciascuna interfaccia, che determina il flusso tra le celle adiacenti. Questo approccio rispetta rigorosamente le leggi di conservazione, garantendo una gestione accurata delle discontinuità, come le onde d'urto.

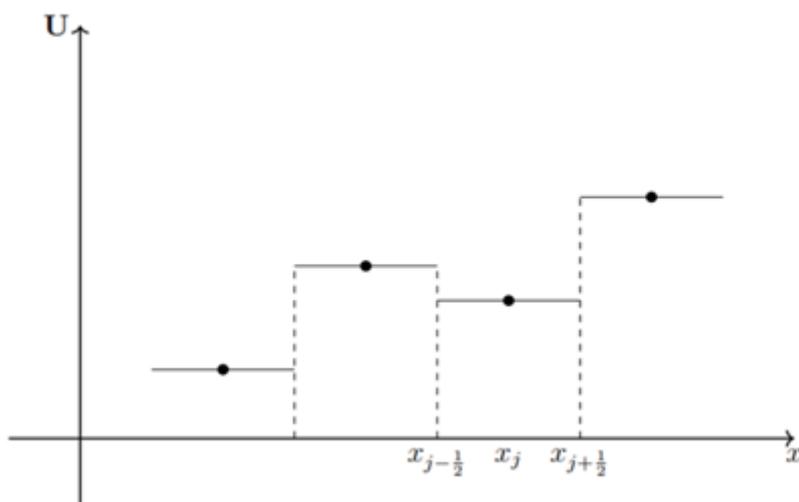


Figura 4.4 Ricostruzione del dominio con origine di problemi di Riemann a bordo cella

Per migliorare l'accuratezza del metodo e ridurre la diffusione numerica, il metodo di Godunov è stato esteso al secondo ordine tramite schemi come MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws). In questa versione migliorata, vengono utilizzate interpolazioni lineari per approssimare le variabili all'interno di ciascuna cella, anziché assumere che le proprietà del fluido siano costanti in ogni cella (come avviene nel metodo di primo ordine). Tuttavia, l'uso di interpolazioni di ordine superiore introduce il rischio di oscillazioni spurie nelle zone di discontinuità, come le onde d'urto. Per risolvere questo problema, vengono utilizzati limiter monotoni, che regolano l'interpolazione nelle regioni in cui potrebbero verificarsi discontinuità, mantenendo la stabilità del metodo e garantendo che la soluzione non presenti oscillazioni non fisiche.

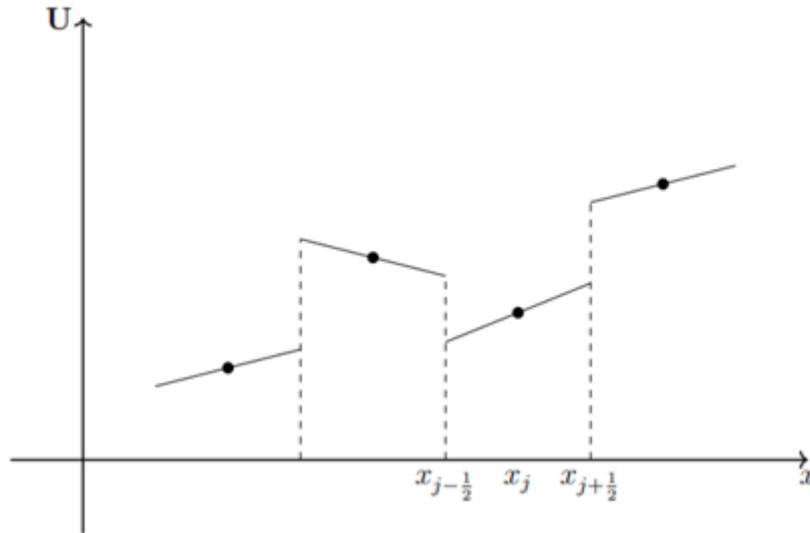


Figura 4.5 Ricostruzione del dominio non lineare a tratti

### 4.3.3 Metodi di Splitting

I metodi di splitting del flusso sono tecniche numeriche avanzate utilizzate per risolvere le equazioni di conservazione in flussi compressibili. L'idea principale di questi metodi è quella di suddividere il calcolo del flusso attraverso le interfacce delle celle in diverse componenti, trattando separatamente le caratteristiche del flusso, come le onde d'urto e le rarefazioni. Un esempio rappresentativo di questi metodi è il metodo di Roe (Roe-FDS), che utilizza una linearizzazione delle equazioni di conservazione tramite una matrice Jacobiana approssimata. Il Jacobiano rappresenta la variazione del flusso rispetto alle variabili conservative (densità, quantità di moto e energia) e fornisce informazioni su come si propagano le onde attraverso l'interfaccia. Nel metodo di Roe, la matrice Jacobiana viene calcolata e usata per risolvere il flusso tra le celle, rendendo possibile una gestione accurata delle discontinuità. La linearizzazione attraverso il Jacobiano permette di ridurre la complessità del problema di Riemann rispetto a una soluzione esatta, mantenendo comunque un buon livello di accuratezza. Questo approccio gestisce in modo più preciso le onde d'urto e le discontinuità di contatto rispetto ai metodi più semplici. Nel metodo di Godunov, invece, la risoluzione del problema di Riemann, specialmente nella sua versione di primo ordine, si basa su una

soluzione esatta o approssimata, ma le variabili del flusso vengono considerate costanti all'interno di ciascuna cella. Questo porta a una significativa diffusione numerica, con onde d'urto meno nitide e una minore accuratezza complessiva. I metodi di splitting del flusso, grazie all'uso del Jacobiano, riescono a ridurre questa diffusione numerica. Inoltre, possono essere estesi a schemi di ordine superiore (come il metodo MUSCL), migliorando ulteriormente la precisione nella rappresentazione delle onde d'urto e delle rarefazioni. Tuttavia, la gestione del Jacobiano approssimato e l'estensione a ordini superiori comportano un aumento del costo computazionale. Mentre il metodo di Godunov di primo ordine è più semplice e richiede meno risorse di calcolo, i metodi di splitting del flusso, come Roe, sono più computazionalmente intensivi, poiché richiedono la risoluzione delle caratteristiche tramite il Jacobiano e una gestione più sofisticata delle interfacce.

#### ***4.3.4 Metodi ad Alta Risoluzione e TVD (Total Variation Diminishing)***

I metodi ad alta risoluzione sono progettati per migliorare la precisione nella risoluzione dei flussi compressibili, specialmente nelle zone di discontinuità come le onde d'urto. Uno degli schemi più efficaci in questo contesto è il TVD (Total Variation Diminishing), che impone una condizione chiave: la variazione totale della soluzione non deve aumentare nel tempo. Questa condizione è essenziale per evitare che le oscillazioni numeriche spurie, tipicamente introdotte nelle regioni di forti variazioni come le onde d'urto, contaminino la simulazione. La variazione totale misura i cambiamenti complessivi tra i valori delle variabili conservative (ad esempio, densità, velocità e pressione) da una cella all'altra. La condizione TVD assicura che questa variazione totale rimanga stabile o diminuisca, mantenendo così la stabilità della soluzione. Per garantire che la variazione totale non aumenti, lo schema TVD utilizza i limiter monotoni. Questi limiter agiscono come correttori che limitano la pendenza dell'interpolazione nelle celle adiacenti alle discontinuità. Quando una variazione troppo brusca rischia di generare oscillazioni non fisiche, il limiter riduce l'intensità di

tale variazione, assicurando che la soluzione rimanga monotona e stabile. Tra i limiter più utilizzati ci sono il Van Leer limiter, il Minmod limiter e il Superbee limiter, ognuno dei quali bilancia in modo diverso la precisione e la stabilità.

Un altro schema ad alta risoluzione ampiamente utilizzato in combinazione con lo schema TVD è il metodo MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws). Il metodo MUSCL estende i metodi upwind tradizionali utilizzando interpolazioni lineari invece di costanti all'interno delle celle, consentendo di ottenere una precisione di secondo ordine. Questo migliora significativamente la risoluzione delle onde d'urto e delle rarefazioni rispetto ai metodi di primo ordine, come Godunov, riducendo la diffusione numerica. Quando combinato con limiter monotoni all'interno del quadro TVD, il metodo MUSCL garantisce una risoluzione accurata delle discontinuità senza introdurre instabilità. Rispetto ai metodi di primo ordine, come il metodo di Godunov, che tendono a diffondere le onde d'urto e smussare le discontinuità, gli schemi TVD e MUSCL riducono notevolmente la diffusione numerica. Sebbene i metodi ad alta risoluzione, come TVD e MUSCL, offrano un notevole miglioramento in termini di precisione, questo comporta un aumento del costo computazionale rispetto ai metodi più semplici come Godunov di primo ordine. L'interpolazione lineare di MUSCL e l'applicazione dei limiterà monotoni richiedono un'elaborazione aggiuntiva per mantenere la stabilità della soluzione.

## ***4.4 Software CFD***

Nel campo della fluidodinamica computazionale (CFD), esistono diversi software commerciali che offrono strumenti avanzati per simulare e analizzare il comportamento dei fluidi in una vasta gamma di applicazioni industriali. Questi software variano per complessità, capacità e settori di utilizzo, offrendo soluzioni personalizzate per esigenze specifiche come flussi compressibili, incomprimibili, multifase e transitori. I principali strumenti CFD attualmente disponibili sul mercato includono nomi noti come ANSYS Fluent, Simcenter STAR-CCM+, COMSOL Multiphysics e Autodesk CFD ecc. ognuno dei quali offre caratteristiche uniche per gestire con precisione i problemi legati alla dinamica dei fluidi. Nei prossimi paragrafi esamineremo le peculiarità di ciascun software, esplorando i vantaggi che offrono e le applicazioni in cui eccellono.

### ***4.4.1 ANSYS***

ANSYS Fluent e ANSYS CFX sono tra i software CFD più diffusi e utilizzati nel settore dell'ingegneria per simulare una vasta gamma di fenomeni fluidodinamici, termici e multi-fisici. Entrambi i software sono apprezzati per la loro capacità di gestire con precisione i flussi compressibili e le onde d'urto, rendendoli strumenti fondamentali in campi come l'aerodinamica, l'automotive e il settore dell'energia. ANSYS Fluent è noto per la sua flessibilità e versatilità, permettendo agli ingegneri di simulare flussi complessi in ambienti incomprimibili e compressibili, sia stazionari che transitori. Grazie all'ampia gamma di modelli di turbolenza disponibili e alla capacità di gestire schemi numerici avanzati come gli schemi ad alta risoluzione (TVD e MUSCL), Fluent è particolarmente efficace nella risoluzione delle discontinuità, come le onde d'urto. Fluent offre anche la possibilità di simulare fenomeni multi-fisici integrati, permettendo di modellare contemporaneamente effetti termici e meccanici all'interno della stessa simulazione. Uno degli aspetti chiave di Fluent è la sua capacità di catturare le onde d'urto senza introdurre oscillazioni numeriche spurie, il che lo rende ideale per

simulazioni in ambiti aerodinamici o nella progettazione di compressori transonici. Fluent supporta anche solutori avanzati come il Roe flux splitting e il metodo di Godunov, strumenti essenziali per trattare flussi compressibili ad alta velocità. ANSYS CFX è particolarmente indicato per simulazioni che coinvolgono flussi rotanti, rendendolo uno dei principali strumenti per la simulazione di turbomacchine. Questo software è ottimizzato per gestire flussi turbolenti e compressibili in sistemi come compressori e turbine, offrendo una gestione accurata delle onde d'urto, delle separazioni di flusso e delle transizioni rapide che sono comuni in queste applicazioni. CFX si distingue anche per l'efficienza con cui risolve questi fenomeni, rendendolo una scelta affidabile per chi lavora con compressori ad alta velocità o turbine, dove la precisione nella gestione delle onde d'urto è cruciale per il design ottimale. Uno dei vantaggi più rilevanti dei software ANSYS è la loro perfetta integrazione con altri strumenti di simulazione, come quelli per la progettazione assistita (CAD) e l'analisi strutturale (CAE), creando un ambiente completamente integrato per la progettazione e la simulazione. Sia Fluent che CFX supportano un'eccellente meshing automatica, che consente agli ingegneri di gestire con facilità geometrie complesse e adattare la griglia per una maggiore precisione nei punti critici, come le regioni vicino alle onde d'urto. Inoltre, grazie ai modelli di turbolenza avanzati e alla capacità di gestire flussi compressibili e incomprimibili, ANSYS è una delle soluzioni più utilizzate nel settore per simulazioni aerodinamiche e nel campo delle turbomacchine.

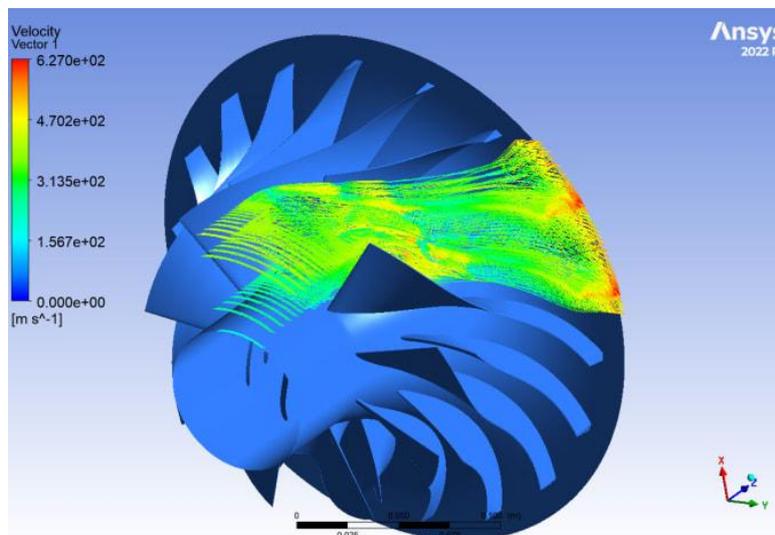


Figura 4.6 Analisi CFD compressore radiale su ANSYS

#### **4.4.2 Simcenter STAR-CCM+**

Simcenter STAR-CCM+ di Siemens è un software CFD versatile e completo, particolarmente adatto per simulazioni complesse nelle turbomacchine. Si distingue per la capacità di integrare diverse discipline fisiche all'interno di un'unica simulazione, rendendolo ideale per progetti che richiedono l'accoppiamento tra dinamica dei fluidi, trasferimento di calore e interazioni fluido-struttura. Questa caratteristica è particolarmente preziosa nelle turbomacchine, dove è essenziale simulare come i flussi d'aria o di gas ad alta velocità interagiscono con le pale rotanti, influenzando le prestazioni complessive della macchina. Il software permette di effettuare simulazioni multi-fisiche, accoppiando flussi compressibili, termodinamica e deformazioni strutturali in maniera simultanea, garantendo un'analisi dettagliata di tutte le interazioni che avvengono all'interno delle turbomacchine. Questo aspetto è cruciale per l'ottimizzazione delle prestazioni di compressori e turbine. Inoltre, la gestione delle onde d'urto è particolarmente efficiente grazie all'uso di modelli numerici come il Roe flux splitting e il metodo di Godunov. Il software supporta una vasta gamma di modelli di turbolenza, tra cui RANS, LES e DES, e offre funzionalità avanzate di automazione e ottimizzazione del design, consentendo di eseguire simulazioni parametriche per migliorare rapidamente le prestazioni di un progetto. Rispetto ad ANSYS Fluent e ANSYS CFX, Simcenter STAR-CCM+ si distingue principalmente per la sua capacità di gestire in modo nativo simulazioni multi-fisiche, rendendolo una scelta ottimale per chi necessita di un software che combini fluidodinamica, analisi strutturale e termica in un unico ambiente. ANSYS, d'altra parte, eccelle nelle simulazioni fluido-dinamiche pure, con ANSYS CFX particolarmente ottimizzato per le turbomacchine. ANSYS ha un'architettura modulare, che permette di integrare strumenti per simulazioni meccaniche o termiche, ma richiede l'uso di moduli separati, come ANSYS Mechanical, per le simulazioni strutturali accoppiate. Al contrario, Simcenter STAR-CCM+ offre tutte queste funzionalità in un'unica piattaforma, semplificando il flusso di lavoro per chi necessita di un ambiente di simulazione completamente integrato. In sintesi, Simcenter STAR-CCM+ è preferibile per chi ha bisogno di una simulazione multi-fisica integrata e un ambiente completamente automatizzato per l'ottimizzazione del design,

mentre ANSYS Fluent/CFX rimane una scelta eccellente per chi cerca soluzioni altamente specializzate per le turbomacchine.

#### ***4.4.3 NUMECA FINE/Open***

NUMECA FINE/Open è un software CFD altamente specializzato, sviluppato principalmente per la simulazione di turbomacchine come compressori e turbine. Si distingue per la sua efficienza nella gestione di flussi compressibili e rotanti, particolarmente adatti a configurazioni complesse e ad alte velocità. Uno dei suoi punti di forza è l'utilizzo di AutoGrid5, un avanzato strumento per la generazione automatica della mesh, ottimizzato per le geometrie intricate delle turbomacchine. Questo permette di creare griglie strutturate di alta qualità anche per configurazioni a più stadi, migliorando così la precisione delle simulazioni. Il software impiega solutori avanzati per catturare con precisione le onde d'urto e le discontinuità nei flussi, e supporta diversi modelli di turbolenza per garantire simulazioni accurate di flussi turbolenti nelle pale delle macchine. Un altro aspetto distintivo è la possibilità di personalizzare e automatizzare i processi attraverso script Python, rendendo il flusso di lavoro più efficiente, specialmente nelle simulazioni parametriche o ripetitive. Rispetto a ANSYS Fluent/CFX e Simcenter STAR-CCM+, il principale punto di forza di questo software è la sua specializzazione nelle turbomacchine. Mentre ANSYS e STAR-CCM+ offrono piattaforme multi-fisiche più versatili, adatte a una vasta gamma di applicazioni ingegneristiche, FINE/Open è stato ottimizzato esclusivamente per la simulazione di flussi rotanti e compressibili. Questa focalizzazione garantisce un'alta precisione nelle simulazioni aerodinamiche e nelle geometrie complesse. In particolare, strumenti come AutoGrid5 e solutori avanzati lo rendono ideale per chi lavora con compressori e turbine. D'altra parte, ANSYS è più flessibile e modulare, offrendo una vasta libreria di solutori e modelli di turbolenza, particolarmente utile per simulazioni fluido-dinamiche generali. Simcenter STAR-CCM+, invece, eccelle nella gestione delle simulazioni multi-fisiche integrate, consentendo di accoppiare dinamica dei fluidi, termodinamica e interazioni fluido-struttura in un unico ambiente. In sintesi, FINE/Open rappresenta la

scelta migliore per chi si occupa principalmente di turbomacchine, mentre ANSYS e Simcenter STAR-CCM+ sono più adatti per simulazioni generali e multi-fisiche, adatte a una più ampia varietà di settori industriali.

#### ***4.4.4 Altair AcuSolve***

Altair AcuSolve utilizza un approccio basato sugli elementi finiti (FEM), che lo rende particolarmente adatto a gestire fenomeni complessi e transitori come le onde d'urto e le discontinuità nei flussi transonici. A differenza dei metodi classici basati sui volumi finiti (FVM), il metodo FEM offre una maggiore flessibilità nella discretizzazione delle geometrie complesse, come quelle delle pale delle turbomacchine. Grazie alla sua flessibilità geometrica, il FEM consente una rappresentazione accurata delle superfici curve, elemento essenziale nelle turbomacchine, e permette una risoluzione locale più precisa in prossimità delle onde d'urto. Tuttavia, va notato che, pur essendo utile per la gestione di geometrie complesse, il metodo FEM non è necessariamente superiore al FVM nella cattura delle onde d'urto, fenomeni caratterizzati da discontinuità molto forti. I metodi a volumi finiti, infatti, tendono a gestire meglio queste discontinuità grazie a solutori specifici come il metodo di Godunov o il Roe flux splitting, comunemente utilizzati per simulare onde d'urto. AcuSolve offre comunque una gamma completa di modelli di turbolenza come RANS, LES, e DES, che consentono di simulare accuratamente flussi turbolenti ad alta velocità. Inoltre, la capacità di AcuSolve di accoppiare simulazioni fluidodinamiche con quelle strutturali è particolarmente utile per prevedere il comportamento delle pale in condizioni transoniche, valutando non solo l'aerodinamica, ma anche gli effetti strutturali derivanti dai flussi d'aria compressibili. Altair AcuSolve è noto anche per la sua efficienza computazionale e la scalabilità, rendendolo adatto a simulazioni su mesh di grandi dimensioni e su molteplici processori. Confrontando AcuSolve con NUMECA FINE/Open, quest'ultimo è più specializzato per le turbomacchine, in particolare per flussi rotanti e compressibili. NUMECA utilizza strumenti come AutoGrid5, progettati per generare mesh di alta qualità nelle geometrie complesse delle pale, e offre solutori ottimizzati per simulare con precisione le onde

d'urto e le discontinuità. Per chi lavora principalmente su simulazioni transoniche nelle turbomacchine, NUMECA è la scelta ideale grazie alla sua specializzazione. D'altro canto, AcuSolve offre una maggiore versatilità multi-fisica e scalabilità, rendendolo più adatto a chi necessita di simulazioni che coinvolgono non solo fluidodinamica, ma anche interazioni strutturali complesse. Sebbene meno specifico rispetto a NUMECA per le turbomacchine, AcuSolve risulta più flessibile per applicazioni ingegneristiche generali che richiedono una gestione efficiente di diverse fisiche accoppiate.

#### **4.4.5 Flow 3D**

Flow-3D è un software CFD noto per la gestione di flussi multifase e transitori, particolarmente utile per simulazioni che includono onde d'urto e fenomeni complessi. Pur non essendo specificamente ottimizzato per le turbomacchine, offre caratteristiche che risultano vantaggiose in applicazioni che coinvolgono flussi compressibili e transonici. La sua efficacia nella simulazione di onde d'urto e discontinuità si deve alla precisione con cui riesce a risolvere flussi transitori. Inoltre, è altamente versatile nella gestione di flussi multifase e può accoppiare fenomeni fisici complessi come trasferimento di calore, interazioni fluido-struttura e cavitazione. Sebbene non sia focalizzato esclusivamente sulle turbomacchine, può comunque gestire fenomeni secondari rilevanti, come l'interazione tra il flusso d'aria e altre fasi fluide (ad esempio, acqua o olio in contesti specifici). Un altro punto di forza è la sua interfaccia user-friendly, che lo rende ideale per chi desidera impostare simulazioni complesse senza affrontare una configurazione troppo complicata. Questo rappresenta un vantaggio rispetto a software più specializzati, come NUMECA, che può richiedere competenze più avanzate per un utilizzo ottimale. Nonostante ciò, Flow-3D non raggiunge la stessa specializzazione di NUMECA FINE/Open per le turbomacchine, in particolare nei flussi rotanti e compressibili delle pale di compressori e turbine. Tuttavia, la sua maggiore versatilità multifisica, con la capacità di simulare flussi multifase e diversi fenomeni fisici accoppiati, lo rende una scelta interessante in applicazioni più ampie e complesse che richiedono una gestione approfondita di questi fenomeni.

#### 4.4.6 *Alternative CFD*

Oltre ai software principali come NUMECA, ANSYS Fluent/CFX, e Simcenter STAR-CCM+, esistono altre soluzioni CFD che possono essere considerate per l'analisi delle turbomacchine transoniche.

- **Autodesk CFD:** Conosciuto per la sua facilità d'uso e un'interfaccia intuitiva, Autodesk CFD è una scelta ideale per simulazioni più semplici e preliminari. I vantaggi includono una rapida configurazione e un approccio accessibile per ingegneri meno esperti. Tuttavia, è meno preciso e versatile rispetto a software più avanzati come ANSYS, limitandosi a simulazioni di flussi compressibili di base, senza offrire solutori specializzati per le turbomacchine.
- **MSC Cradle CFD:** MSC Cradle offre buone prestazioni in simulazioni aerodinamiche e termiche, con strumenti come SC/Tetra per flussi compressibili. È apprezzato per la sua interfaccia intuitiva e la capacità di gestire flussi complessi. Tuttavia, rispetto a NUMECA, manca di una specializzazione mirata alle turbomacchine, rendendolo più adatto a simulazioni generali.
- **COMSOL Multiphysics:** Eccelle per la sua capacità di eseguire simulazioni multifisiche, permettendo l'accoppiamento di diverse discipline, come fluido-struttura o fluido-termica. È ideale per scenari complessi che richiedono un'interazione tra diverse fisiche, ma non è ottimizzato per la gestione di flussi rotanti o per le onde d'urto tipiche delle turbomacchine transoniche, rendendolo meno adatto per applicazioni specifiche in questo settore.
- **Altair HyperWorks Virtual Wind Tunnel:** Questo strumento è ben noto per le simulazioni aerodinamiche, con un'enfasi sull'aerodinamica esterna. È particolarmente utile per flussi compressibili e transonici, come quelli che si verificano in studi di aerodinamica, ma non è ottimizzato per flussi rotanti o turbomacchine, limitando la sua applicabilità in quest'area.

In conclusione, i software CFD per l'analisi di turbomacchine transoniche possono essere classificati in base alla loro specializzazione e capacità multi-fisica. NUMECA FINE/Open si pone al primo posto per la sua ottimizzazione specifica nei flussi rotanti e compressibili, risultando il migliore per le applicazioni in turbomacchine. Al secondo posto, ANSYS Fluent/CFX offre una piattaforma versatile e potente, ideale per una vasta gamma di applicazioni, incluse le turbomacchine. Simcenter STAR-CCM+ di Siemens occupa il terzo posto, apprezzato per la sua capacità multi-fisica, pur essendo leggermente meno focalizzato sulle turbomacchine rispetto ai primi due. Altair AcuSolve, al quarto posto, è una scelta robusta per applicazioni multifisiche, ma meno specializzato per questo settore. Flow-3D si posiziona al quinto posto con ottime capacità per flussi transitori e multifase, ma con una minore attenzione alle turbomacchine. Infine, MSC Cradle CFD, Autodesk CFD, Altair HyperWorks e COSMOL Multiphysics chiudono la classifica, offrendo soluzioni più generali e accessibili, ma meno adatte a simulazioni avanzate e specialistiche.

## **5 CREAZIONE PROFILI ED ANALISI CFD**

A conferma di quanto detto nel capitolo 3 si è scelto di generare attraverso MATLAB le camber line descritte. Si è partiti da i dati input già indicati nel capitolo sopracitato ovvero:

- 1) Lunghezza della corda: 8,6 cm
- 2) Solidità ( $c/s$ ): 2
- 3) Deviazione del flusso ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ): 48,4 gradi
- 4) Angolo di inclinazione: 16 gradi
- 5) Spessore massimo al 20% della corda
- 6) Valore dello spessore massimo: 7,4% della corda (6,8% in esponenziale)
- 7) Raggio del bordo d'attacco ( $y_{le}$ ): 0,04 cm
- 8)  $P = 0,25$
- 9) Raggio del bordo d'uscita ( $y_{te}$ ): 0,02 cm
- 10)  $Q = 0,5$
- 11) Posizione del punto di flesso (se applicabile): 60% della corda
- 12) Inclinazione al punto di flesso (se applicabile): 70 gradi
- 13) Distribuzione dello spessore: Distribuzione dello spessore ad arco circolare
- 14) Numero di Mach in entrata: 0,70

Applicando poi ad essi una distribuzione di spessore ad arco circolare.

## 5.1 Calcolo delle Camber line e dei Relativi Profili

### 5.1.1 Airfoil con Polynomial Camber-line

Come primo passo si è calcolata la camber line distribuita su una corda di 8.6 cm andando ad applicare le condizioni al contorno descritte nel capitolo 3.

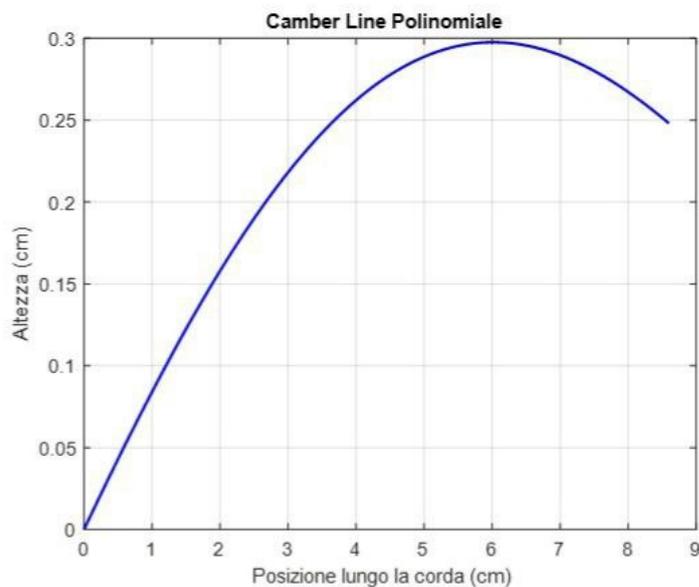


Figura 5.1 Camber line Polinomiale

Una volta calcolata la camber line si è poi passati a calcolare la distribuzione dello spessore mediante le equazioni descritte nel paragrafo 3.4.3. la distribuzione dello spessore viene applicata seguendo le linee guida NACA ovvero sommando quest'ultimo non in modo ortogonale bensì prendendo in considerazione l'angolo che la camber line forma con lo spessore stesso.

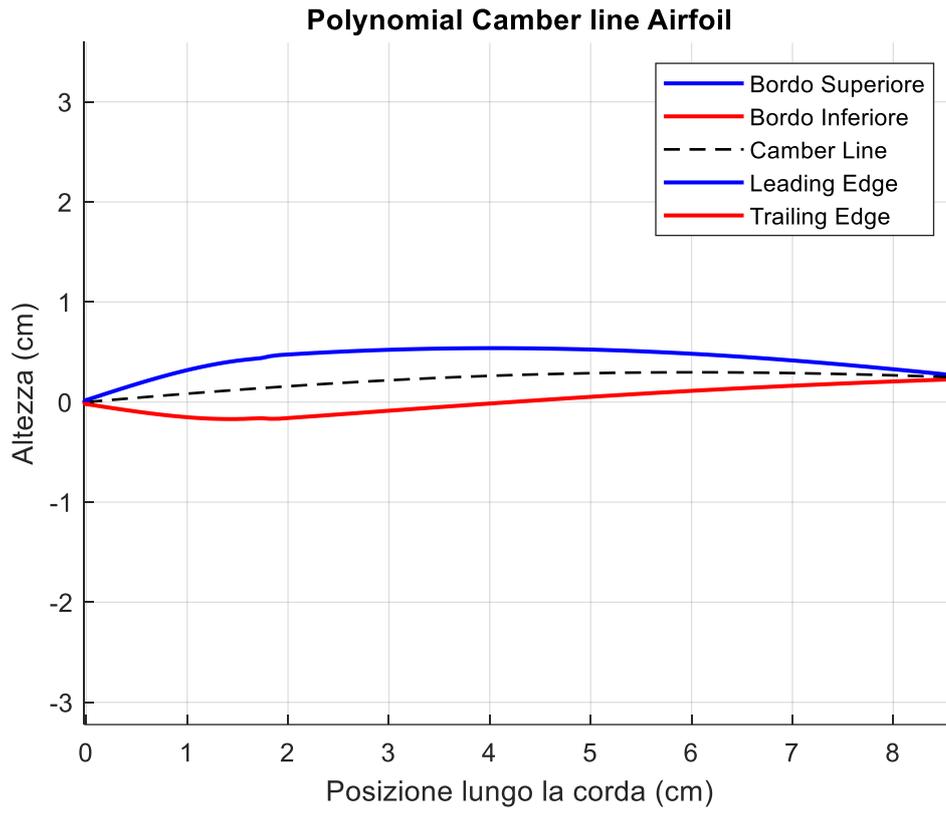


Figura 5.2 Polynomial Camber line Airfoil

### 5.1.2 Airfoil con Exponential Camber-line

Per il calcolo della Exponential Camber Line, il profilo è stato suddiviso in due parti in corrispondenza del punto di flesso, ottenendo così due curve separate. Successivamente, le due curve sono state unite nel punto di flesso desiderato, rispettando le condizioni al contorno definite.

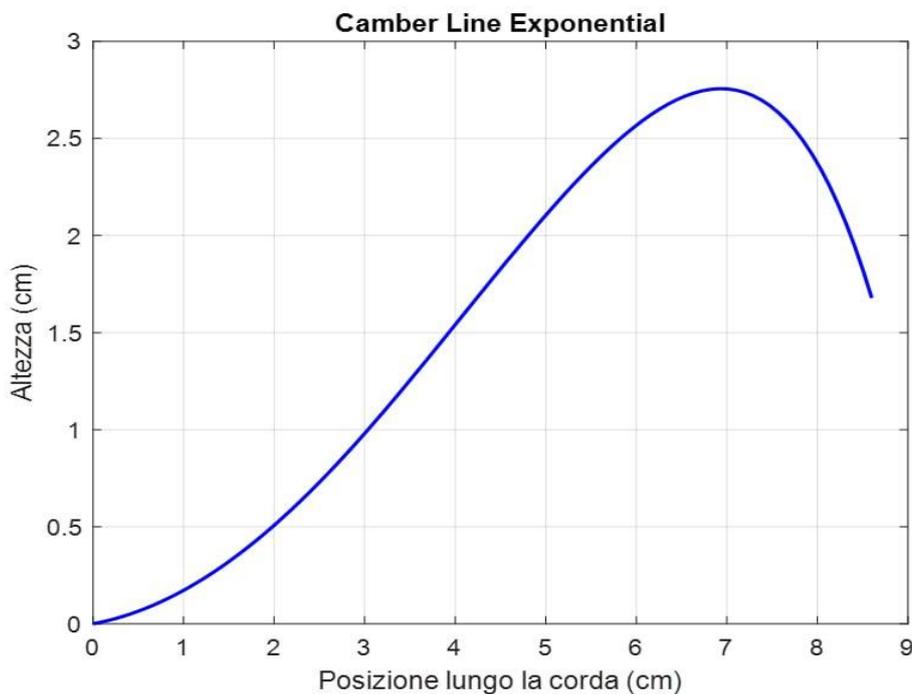


Figura 5.3 Exponential Camber line

Una volta calcolata la linea del camber, si è passati al calcolo della distribuzione dello spessore. Anche in questo caso, il dominio è stato suddiviso in due parti, tagliando il profilo nel punto di flesso. È stata quindi calcolata una prima parte per il leading edge e una seconda parte per il trailing edge. Le due distribuzioni sono state successivamente unite e raccordate, garantendo continuità tra di esse tramite il comando spline di MATLAB.

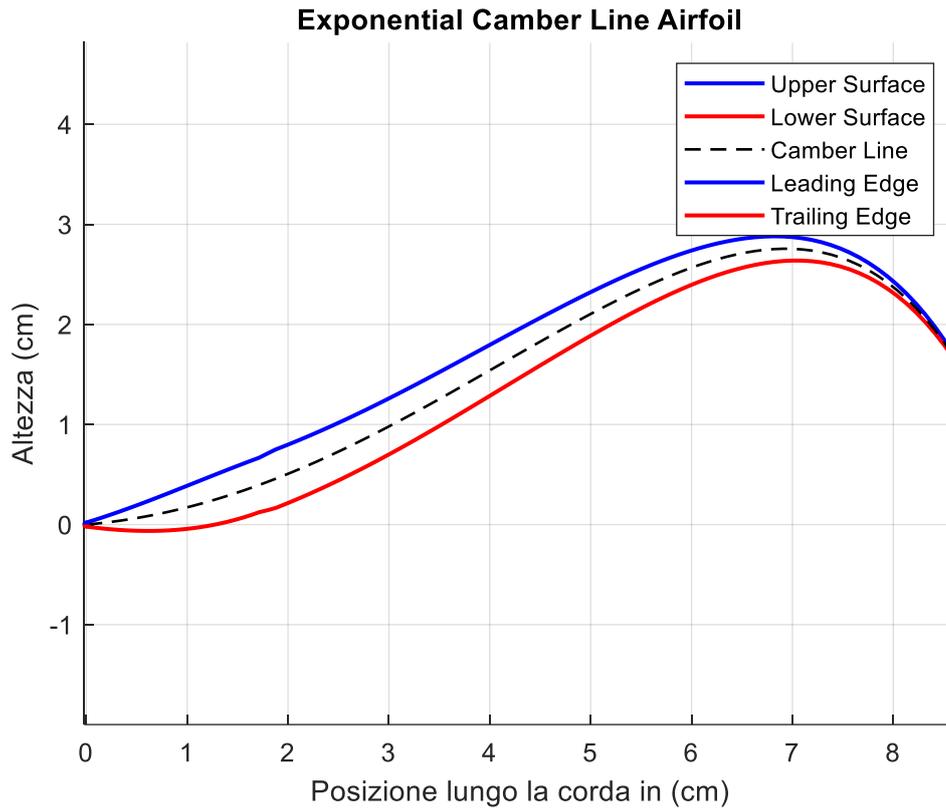


Figura 5.4 Exponential Camber line Airfoil

### 5.1.3 Airfoil con Circular-Arc Camber line

Il calcolo della camber line ad arco circolare non può essere eseguito partendo direttamente dal punto  $x=0$ , ma il dominio di calcolo deve essere esteso per coprire sia le coordinate  $x$  negative che quelle positive. Questo approccio consente di ottenere il 50% della lunghezza della corda quando si arriva a  $x=0$ , rappresentando il punto di simmetria del profilo alare. In altre parole, la camber line viene definita su un intervallo che va dalla parte sinistra (negativa) alla parte destra (positiva) della corda, assicurando che la forma della linea di camber sia continua e simmetrica rispetto al punto centrale del profilo.

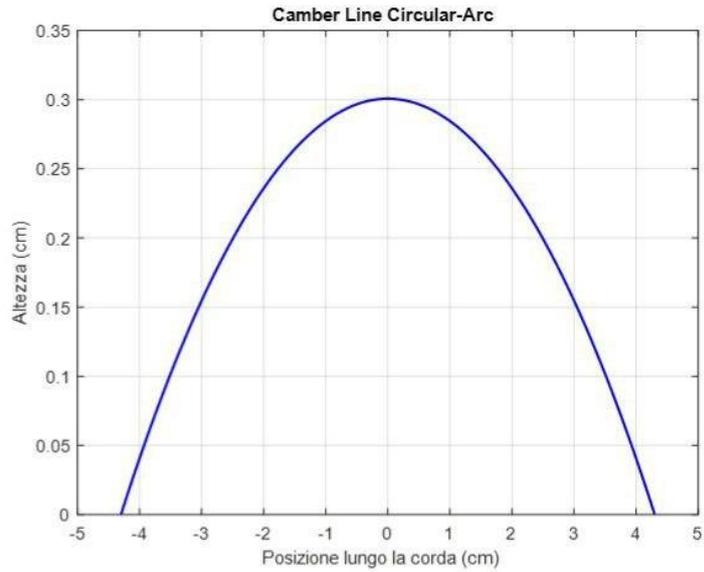


Figura 5.5 Circular-Arc Camber line

Una volta calcolata la *camber line*, è possibile applicare la distribuzione dello spessore ad arco circolare. Utilizzando il modello ad arco circolare, la distribuzione dello spessore è calcolata in modo che il profilo ottenga una forma aerodinamica desiderata, assicurando una distribuzione uniforme e compatibile con la *camber line*.

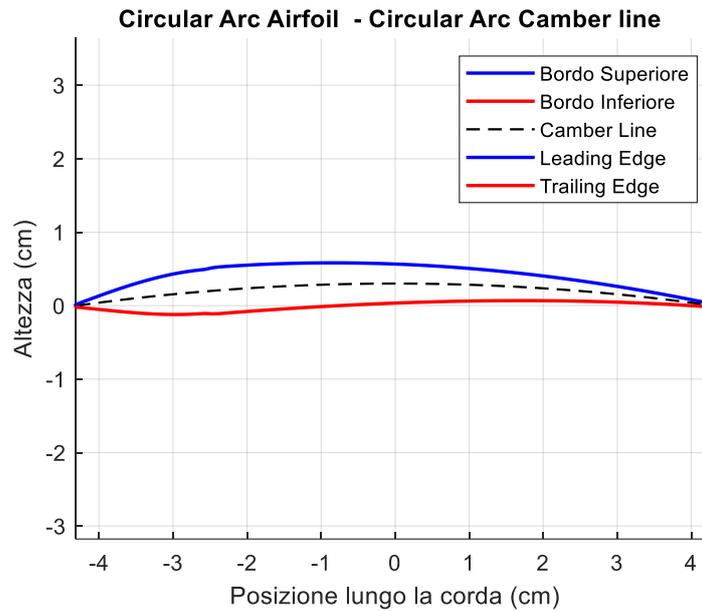


Figura 5.6 Circular-Arc Camber line Airfoil

#### 5.1.4 Airfoil con Double-Circular-Arc Camber line

Per il calcolo della camber line, è necessario risolvere un sistema di equazioni non lineari, in quanto le condizioni al contorno da rispettare: come la pendenza al bordo d'attacco, la pendenza al bordo d'uscita e l'inclusione del punto di transizione lungo la corda — implicano che i raggi dei due archi e le loro coordinate debbano essere determinati attraverso un processo iterativo. Pertanto, è necessario utilizzare un metodo numerico per risolvere il sistema. In MATLAB, è stato impiegato il metodo `fsolve`, fornendo un initial guess come primo tentativo e impostando valori di tolleranza molto stretti (circa  $10^{-12}$ ) per fare in modo che le due curve coincidano nel punto di transizione.

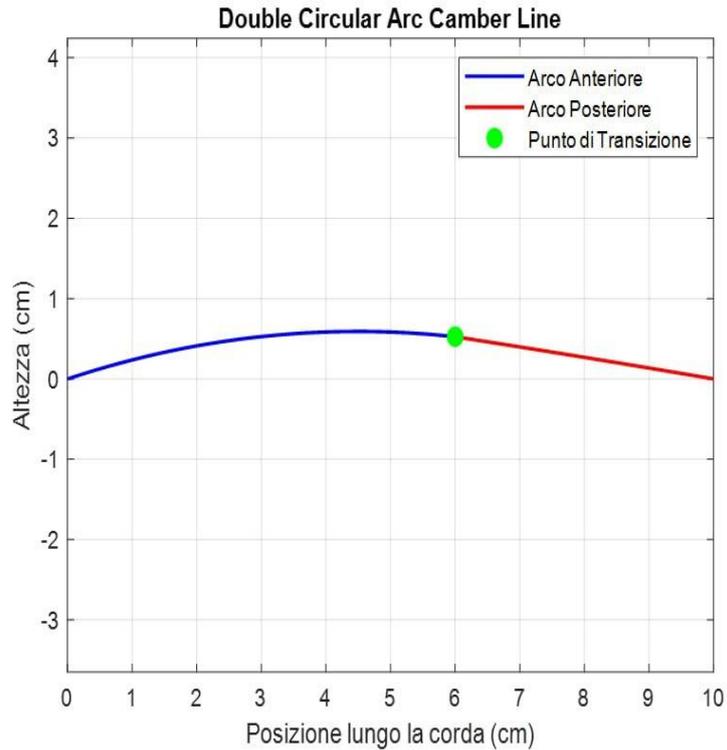


Figura 5.7 Double Circular Arc Camber line

Una volta calcolata la linea del camber, si è proceduto al calcolo della distribuzione dello spessore. Anche questa distribuzione è stata suddivisa in due sezioni: una per la parte anteriore al punto di flesso, definita come leading edge thickness (spessore al bordo d'attacco), e una per la parte posteriore, definita come trailing edge thickness (spessore al bordo d'uscita). Questa suddivisione permette di trattare separatamente le due zone del profilo, considerando le diverse caratteristiche aerodinamiche e geometriche di ciascuna.

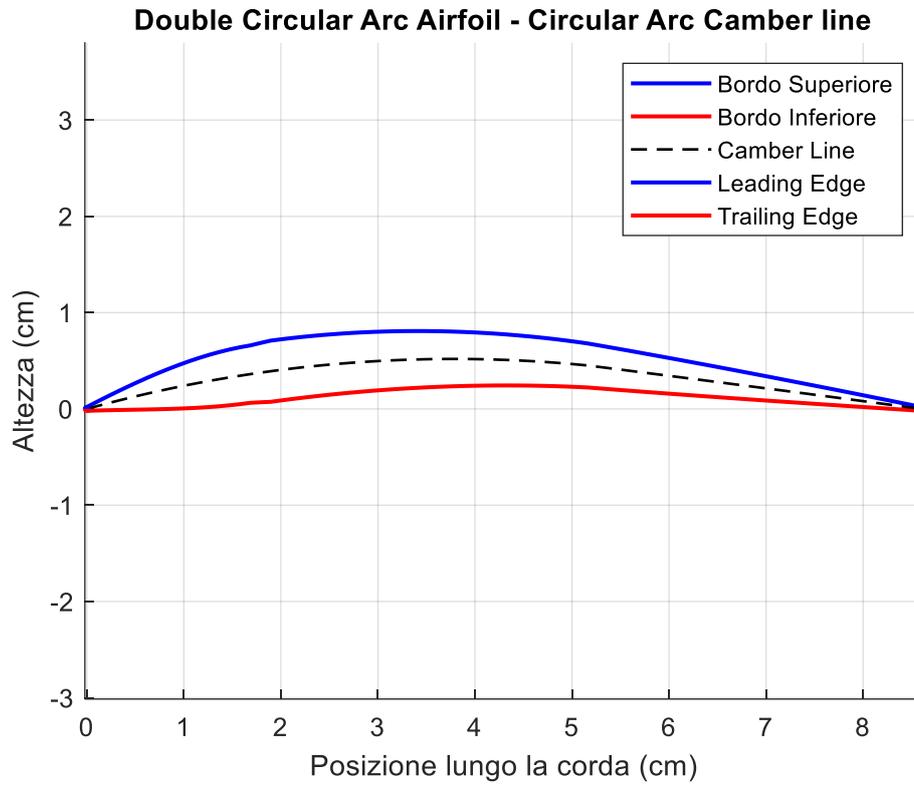


Figura 5.8 Double Circular Arc Camber line Airfoil

### 5.1.5 Airfoil con Double-Circular-Arc Camber line e Multiple-Circular-Arc per il thickness

Per il calcolo della camber line del multiple circular arc, si è seguito lo stesso approccio utilizzato per il double circular arc, poiché la forma della camber line è sostanzialmente identica per entrambi i casi. Sono stata cambiati di pochi gradi le pendenze nel leading edge e nel trailing edge.

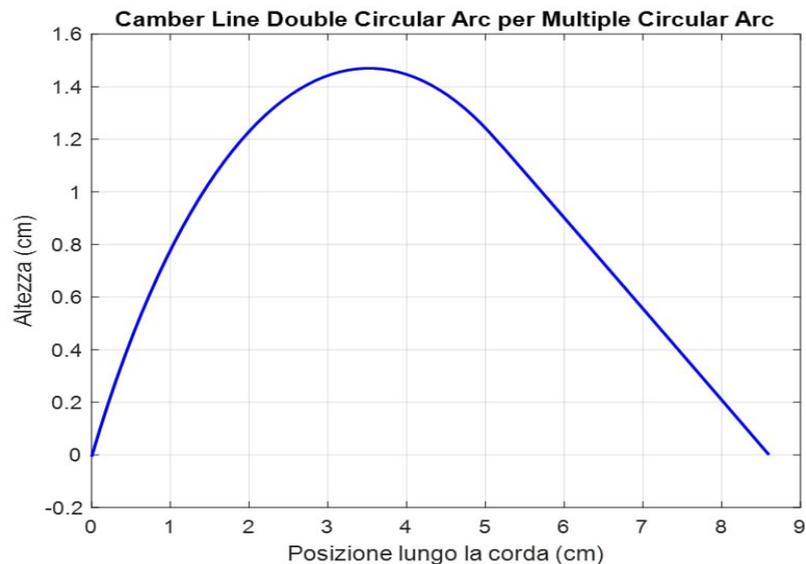


Figura 5.9 Camber line Double Circular Arc per Multiple Circular Arc

Tuttavia, per la distribuzione dello spessore, il dominio è stato suddiviso in quattro parti, rendendo indipendente la distribuzione dello spessore sia tra il leading edge e il trailing edge, sia tra il dorso e il ventre del profilo.

Per evidenziare meglio le differenze rispetto al double circular arc, sono stati variati, come già detto, di pochi gradi le pendenze attese della *camber line* sia al leading edge che al trailing edge. Inoltre, è stata assegnata a ciascun arco una percentuale di spessore massimo, determinata in funzione della lunghezza della corda del profilo. Questa

personalizzazione ha permesso di ottenere una distribuzione dello spessore più dettagliata e ottimizzata in relazione alla geometria del profilo alare desiderato.

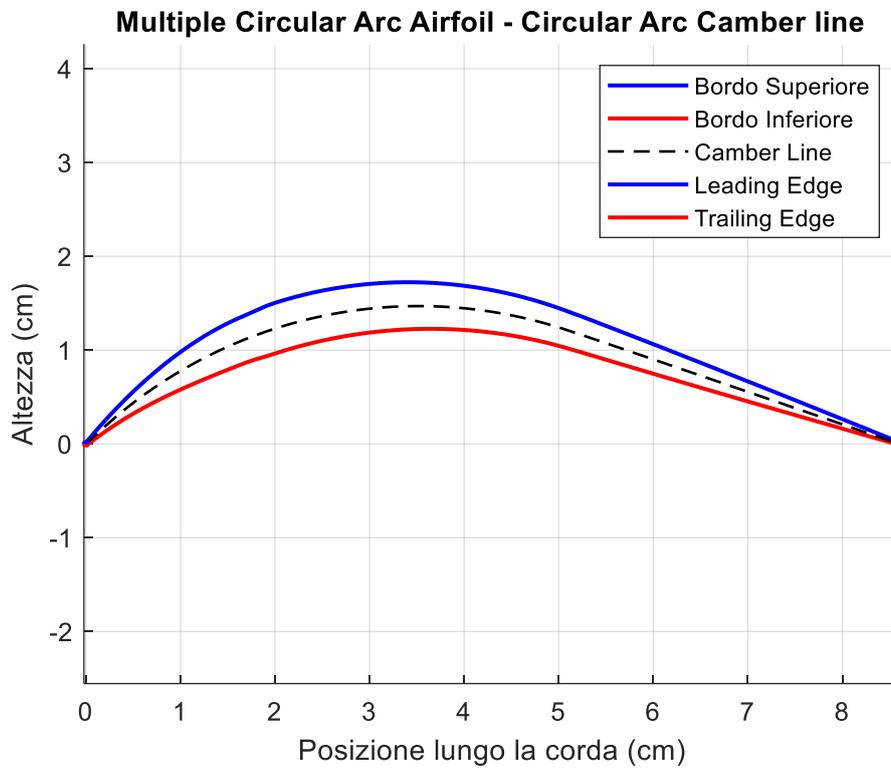


Figura 5.10 Multiple Circular Arc Airfoil

## 5.2 Analisi CFD del Double Circular Arc

Si è voluto infine valutare e vagliare mediante analisi CFD uno dei profili calcolati. Il profilo scelto è stato il Double Circular Arc dato il suo largo impiego nel campo dei compressori transonici. Con l'ausilio di MATLAB si sono convertite le righe contenenti le coordinate dello spessore e della camber line, in colonne in modo da plottare queste su un foglio di calcolo Excel.

### 5.2.1 Coordinate Profilo

Applicando alla camber line la distribuzione dello spessore secondo le specifiche NACA avremo che:

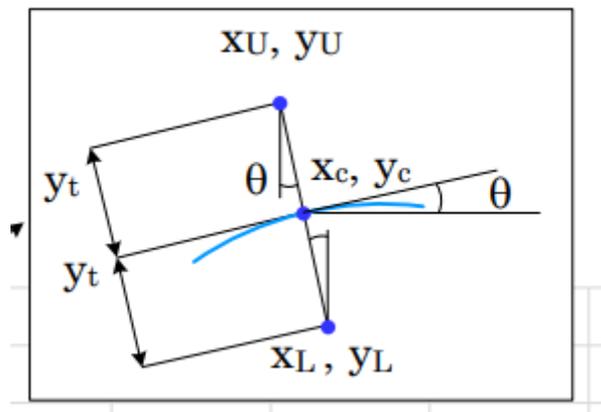


Figura 5.11 Coordinate Specifica NACA

$$x_u = x_c - y_t \sin(\theta) \quad y_u = y_c + y_t \cos(\theta)$$

$$x_l = x_c + y_t \sin(\theta) \quad y_l = y_c - y_t \cos(\theta)$$

Dove  $\theta$  è dato dall' arcotangente della derivata puntuale tra la  $y_c$  e la  $x_c$ .

Seguendo questo processo avremo una  $x$  ed una  $y$  che non saranno più coincidenti con le coordinate della camber line. Per il plot del profilo, quindi, devono essere assunte non

più le  $x$  della camber line ma le  $x$  corrispondenti alla distribuzione dello spessore indicate nelle due equazioni soprascritte con  $x_U$  e  $x_l$  che saranno coincidenti.

Successivamente, si può passare ad ordinare queste in modo ordinato partendo dal valore massimo della corda fino al punto zero per poi ripercorrere le stesse coordinate in senso opposto in modo da riuscire a descrivere sia il dorso che il ventre del profilo in maniera continua.

### 5.2.2 Modello CAD

Una volta ottenute e ordinate attraverso EXCEL le coordinate del profilo alare, queste possono essere plottate in un software CAD o direttamente nell'ambiente CAD offerto da Ansys. Nel caso specifico, è stato utilizzato il tool SpaceClaim.



Figura 5.12 Plot Coordinate Profilo

Dopo aver plottato il profilo, è necessario uscire dallo schizzo e utilizzare il comando Fill per dare spessore al profilo stesso. A questo punto, si può procedere alla definizione del dominio. Aprendo un nuovo Sketch e posizionandosi sul piano X-Y, si

traccia una circonferenza con il centro posto al 10% della lunghezza della corda. La circonferenza deve avere un raggio di 7500 mm. Il dominio viene quindi chiuso utilizzando il comando Linea.

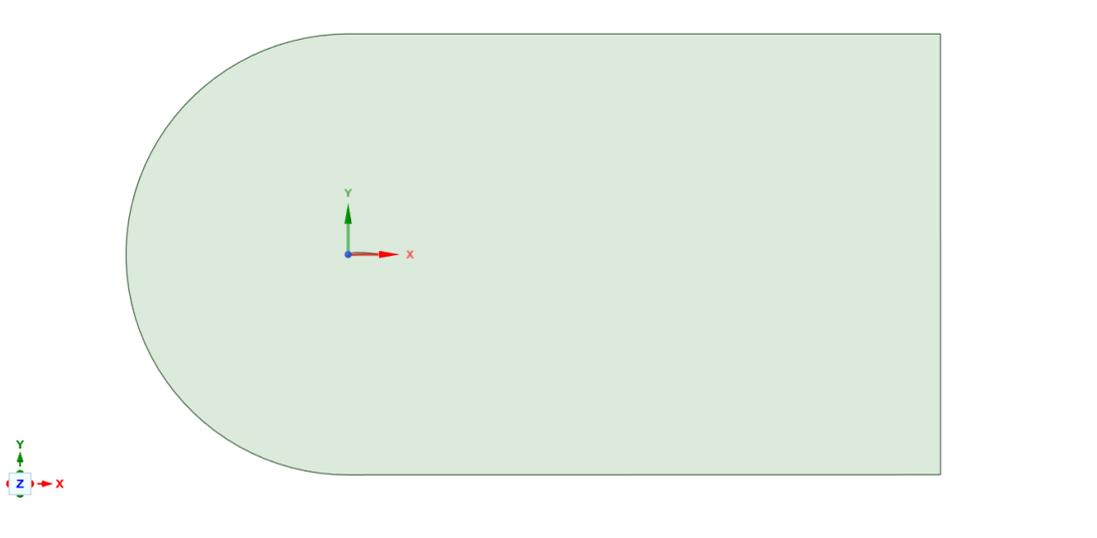


Figura 5.13 Dominio

Una volta creato l'intero dominio, attraverso il comando Combine si può dividere il dominio in due parti: la superficie dove scorrerà il fluido e il profilo alare stesso. Separate le due superfici, è possibile eliminare il profilo alare, lasciando così un'intercapedine con la forma del profilo alare. Allora si possono indicare al software quali sono le superfici solide dette wall e quale è l'Inlet e l'Outlet e L'Airfoil. Da fare attenzione al nome che se di ad i vari elementi in quanto il software è intelligente e attraverso la denominazione imposta il dominio sia per l'analisi ma anche per la Mesh stessa.

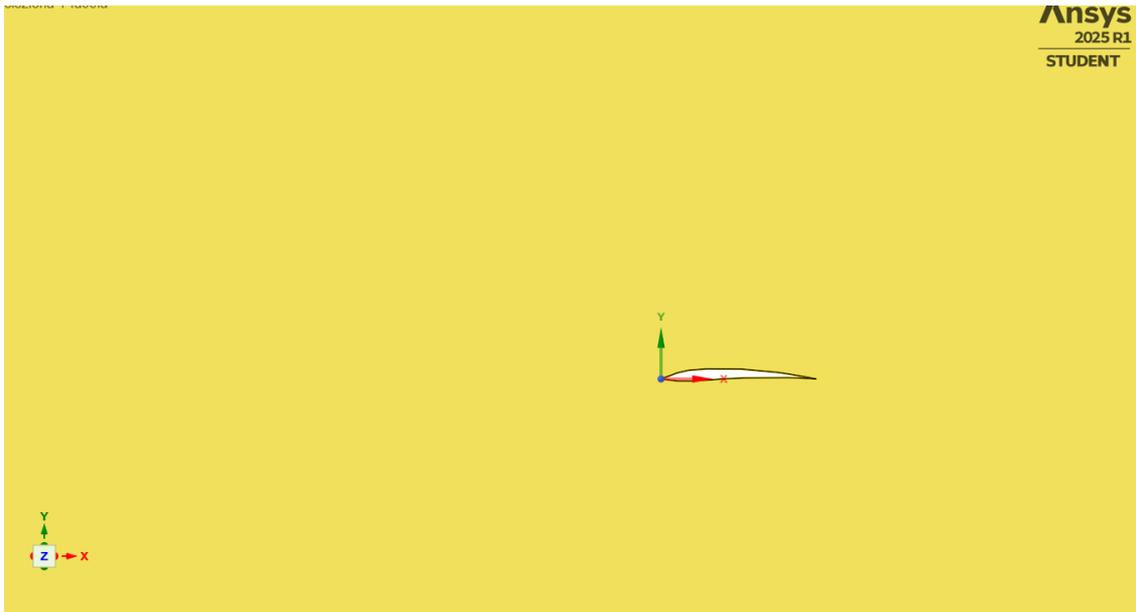


Figura 5.14 Dominio Finale

Per denominare le varie parti del dominio ci si può avvalere del tasto selezione o nel 3D Pull e si seleziona una ad una la parte desiderata. Andando poi nella sezione di sinistra dove troviamo l'albero genealogico troviamo la sezione Gruppi dove selezionando Crea GN possiamo dare il nome desiderato alla nostra parte selezionata.

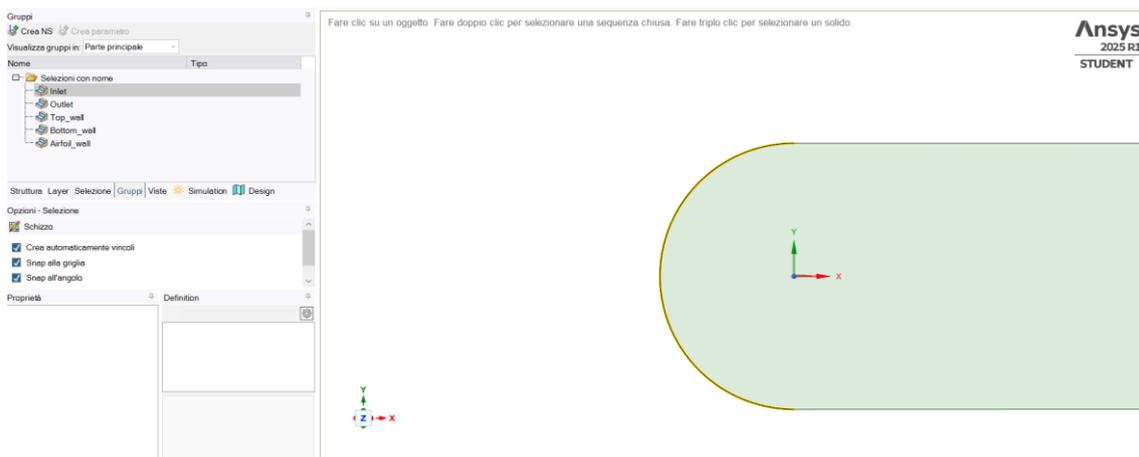


Figura 5.15 Selezione Superfici

Si può allora eliminare lo schizzo e le curve dall'albero genealogico e salvare il 2D con la propria intestazione e con estensione scdocx.

### 5.2.3 Mesh e Boundary conditions

Una volta generata la geometria, si può procedere alla fase di Meshing. Dal 2023 Fluent ha introdotto il suo tool per la mesh anche in 2D in quanto precedentemente si potevano eseguire solo mesh 3D e bisognava ricorrere ad altri software come Gambit. Aprendo l'ambiente Fluent possiamo scegliere il workflow, il quale sarà

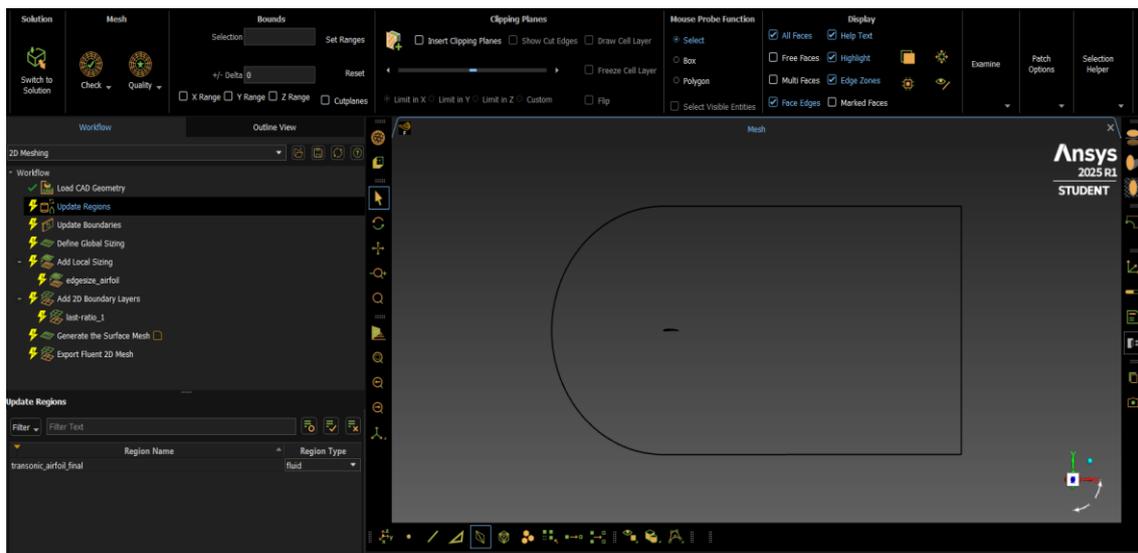


Figura 5.16 Fluent Mesher 2D

In primo luogo, verrà richiesto di stabilire quali sono le regioni ovvero se il dominio che stiamo considerando è solido, Fluidico o morto. Una volta selezionato il tipo di dominio si passa alle Boundary Condition ovvero, si può specificare di che tipo è l'Inlet e l'Outlet e se abbiamo delle pareti ecc... Successivamente, possiamo definire il Global Sizing ovvero si può fornire la grandezza minima e massima della cella, le quali nel caso specifico sono di 5mm e 100 mm. Inoltre, si può fornire la curvatura massima in modo da far adattare la cella al profilo alare curvo. Per migliorare la Mesh nelle prossimità del profilo si può intervenire utilizzando il Local Sizing andando ad indicare con precisione dove si vuole addensare la mesh; Per il seguente caso si esce un local sizing per il profilo di 0.2 mm. Infine, si può aggiungere l'Inflation Layer che nel caso specifico è stato calcolato in funzione di una  $y^+ = 1$  in quanto il metodo K- $\omega$  SST prevede che la  $\omega$  vada calcolata fino

alla parete e quindi ha bisogno di una mesh finissima. Come altezza del primo layer si è trovato  $1.3e-06$  con un Grow rate di 1.2 e un tasso di transizione di 0.272 in modo da non divergere troppo sui volumi dell'ultima cella dell'Inflation layer e della prima cella della Mesh.

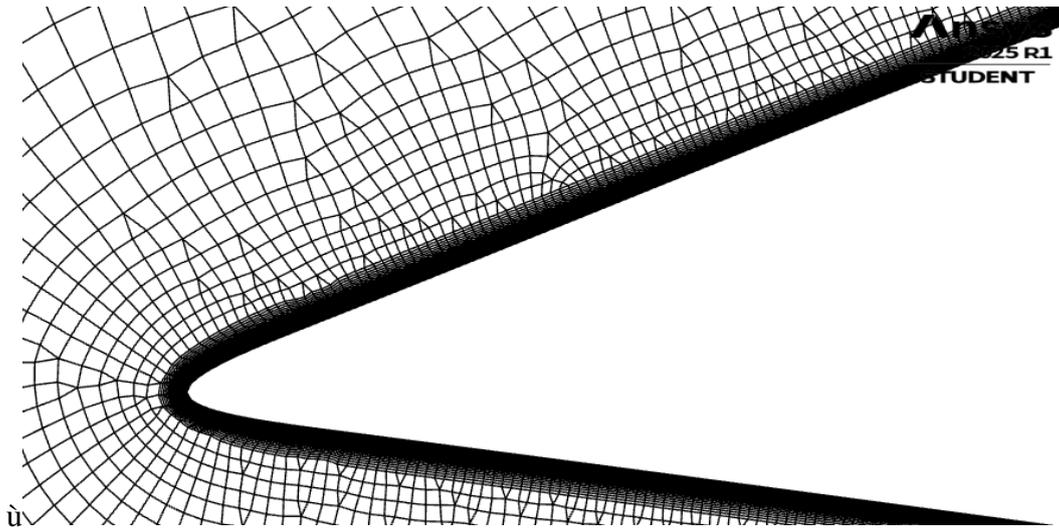


Figura 5.17 Inflation Layer

L'algoritmo impiega ben 13 minuti per la generazione della mesh.

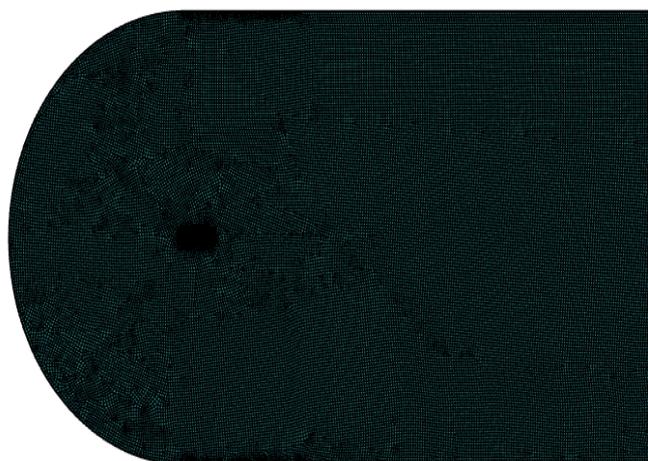


Figura 5.18 Mesh Finale

### ***5.2.4 Set-up e Metodi di Risoluzione***

Per catturare accuratamente le onde d'urto in Fluent, è necessario apportare alcune modifiche alle impostazioni di Set-Up rispetto a quelle standard.

- Metodo di risoluzione: Nelle impostazioni generali, sono disponibili due modalità di risoluzione: Pressure-Based e Density-Based. Per il flusso transonico, in passato era obbligatorio utilizzare la modalità Density-Based ma ad oggi il Pressure-Based è stato aggiornato ed è possibile svolgere simulazioni di flussi Transonici-Supersonici fino ad  $M=6$ . Inoltre, per ottenere una simulazione più realistica, si può attivare la forza di gravità applicata al fluido.
- Equazioni dell'energia: Per fluidi compressibili, è essenziale attivare l'equazione dell'energia.
- Modello turbolento: Come modello di chiusura per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, è stato utilizzato il modello k-omega SST a due equazioni.

#### **Definizione delle Boundary Conditions**

Le condizioni al contorno devono essere definite con precisione. Si può specificare al software il numero di Mach in ingresso impostando l'Inlet come Pressure-far-field e dare l'inclinazione al fluido attraverso la  $x$  e la  $y$ . In questo caso si è ipotizzato un flusso entrante con un angolo di inclinazione di 2 gradi. Importante notare che il fluido deve essere impostato come Gas-Ideale in modo da indicare al codice che stiamo svolgendo l'analisi per un flusso compressibile. Infine, l'Outlet deve essere lasciato con un valore di pressione pari ad 1 in modo da stabilizzare la convergenza dell'algoritmo.

## Metodi Numerici

Nella sezione Methods, è possibile configurare i metodi numerici per la risoluzione. L'algoritmo Selezionato per la risoluzione è il SIMPLE il quale permette una personalizzazione dei fattori di under relaxation in modo da far convergere la soluzione con step più piccoli. Lo schema Second Order Upwind è sicuramente uno schema molto robusto pre garantire una maggiore accuratezza nel passaggio di informazioni tra le celle.

## Esecuzione del Calcolo

Nella sezione Run Calculation, si possono impostare il numero di iterazioni e il tipo di fluido da analizzare. In questa simulazione, sono state impostate 20 mila iterazioni in modo da far raggiungere anche all'equazione di continuità la convergenza con un valore di  $1e-06$  essendo questa, fondamentale per il SIMPLE e per la raffinatezza della soluzione.

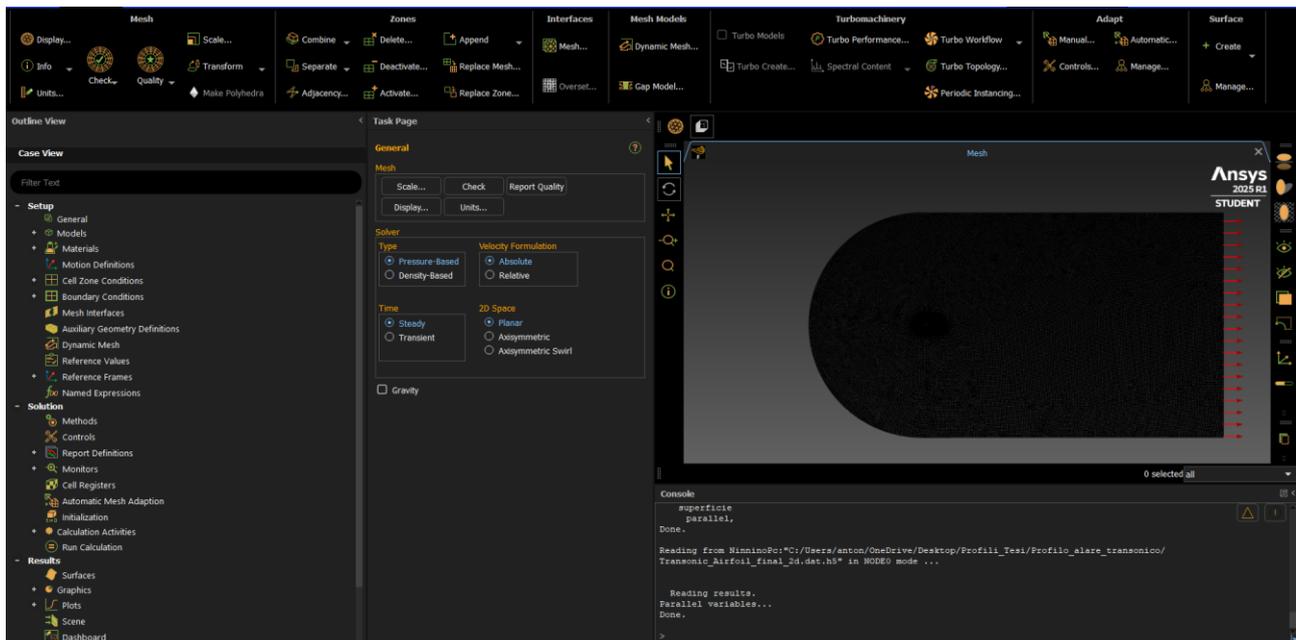


Figura 5.19 Setup

### 5.2.5 Risultati

Sono state analizzate diverse velocità di Mach del fluido:  $M=0.85$ ,  $M=0.95$ ,  $M=1.1$ , e  $M=1.4$ . Le velocità sono state selezionate per permettere un confronto, almeno qualitativo, con il profilo simmetrico della serie NACA, descritto nel capitolo 3, paragrafo 3.1.

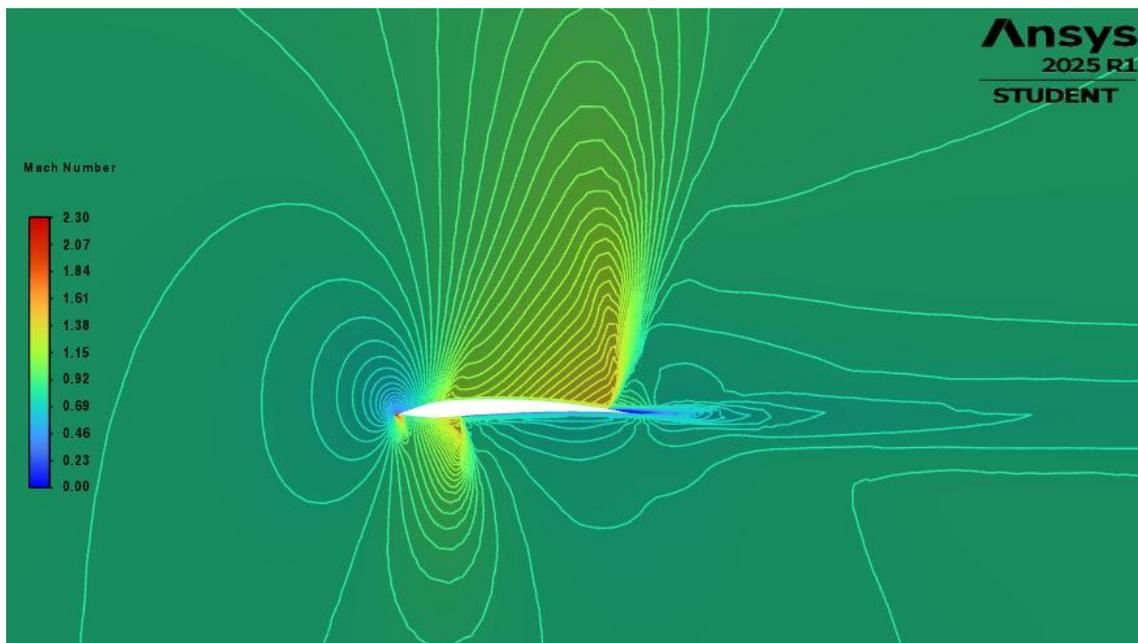


Figura 5.20 Flusso a Mach=0.85

Dai risultati della simulazione emerge che, per un flusso in ingresso a  $M=0.84$ , il fluido accelera fino a valori di  $M=1.59$  a causa della marcata curvatura della superficie di aspirazione. Anche nella zona del ventre si osserva un'accelerazione del fluido che, superando la velocità del suono, genera un'onda d'urto. Osservando le figure 3.2 e 3.3, si nota una significativa differenza tra i due profili: nel caso del profilo in esame, l'onda d'urto si forma nella parte inferiore già a  $M=0.84$ .

A  $M=0.95$ , l'onda d'urto generata dal flusso supersonico sul dorso si sposta verso la zona del trailing edge, mentre quella generata dal flusso sul ventre rimane stazionaria nella regione di massimo spessore. La seconda onda d'urto è fortemente inclinata e tende a toccare il profilo successivo in una potenziale schiera, nella zona del trailing edge,

riducendo il rischio di strozzamento del canale palare o di interazioni con gli strati limite nella zona centrale del dorso della pala successiva.

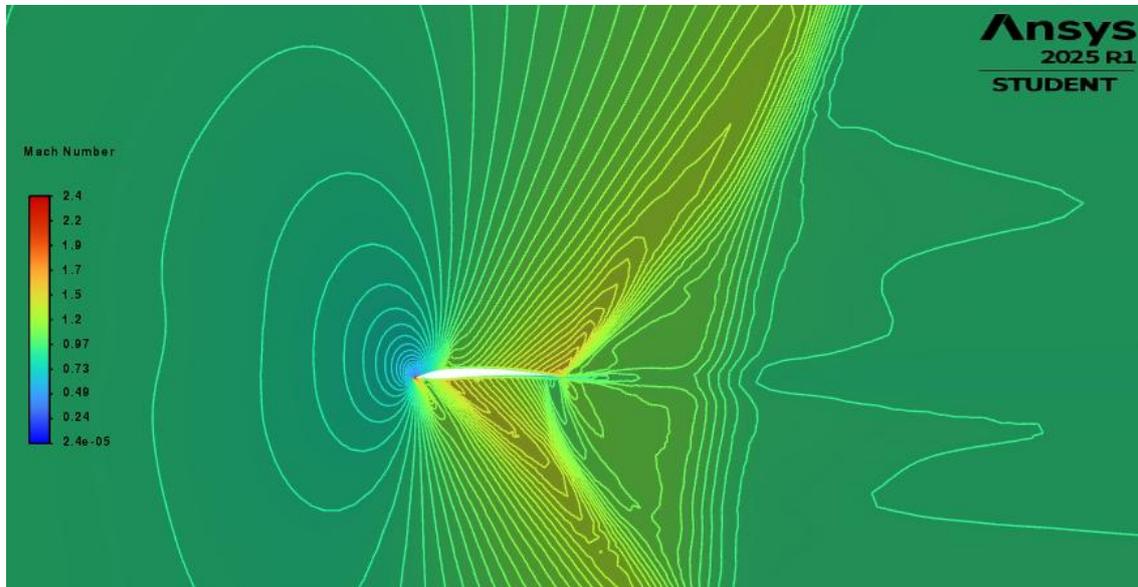


Figura 5.21 Flusso a Mach=0.95

A  $M=1.1$ , si osserva la formazione di una bow wave dovuta alla circolarità del naso del profilo. Come discusso nel capitolo 3, paragrafo 3.2, per un profilo supersonico non si avrebbe una bow wave distaccata, ma piuttosto un'onda obliqua attaccata al leading edge, riducendo le perdite. Tuttavia, il profilo in esame è progettato per operare in regimi transonici, dove il flusso varia tra condizioni subsoniche e supersoniche. Di conseguenza, un naso acuminato, pur riducendo le perdite in regime supersonico, potrebbe causare distacchi del flusso in condizioni subsoniche, compromettendo la stabilità aerodinamica.

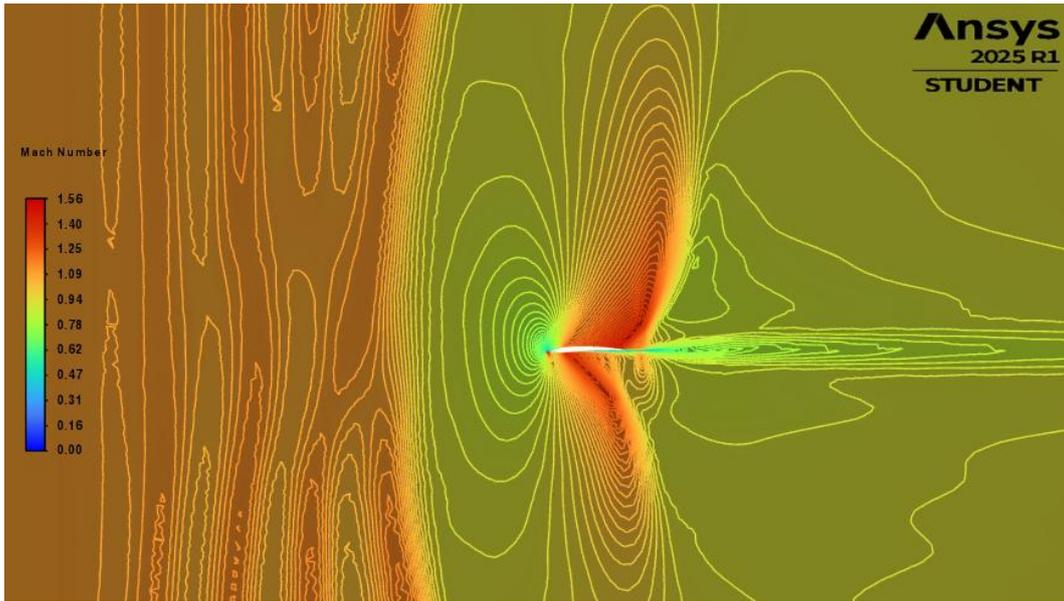


Figura 5.22 Flusso a Mach=1.1

A  $M=1.4$ , si osserva un'evoluzione significativa della Bow Wave. Questa tende a piegarsi ulteriormente, trasformandosi progressivamente in un'onda obliqua.

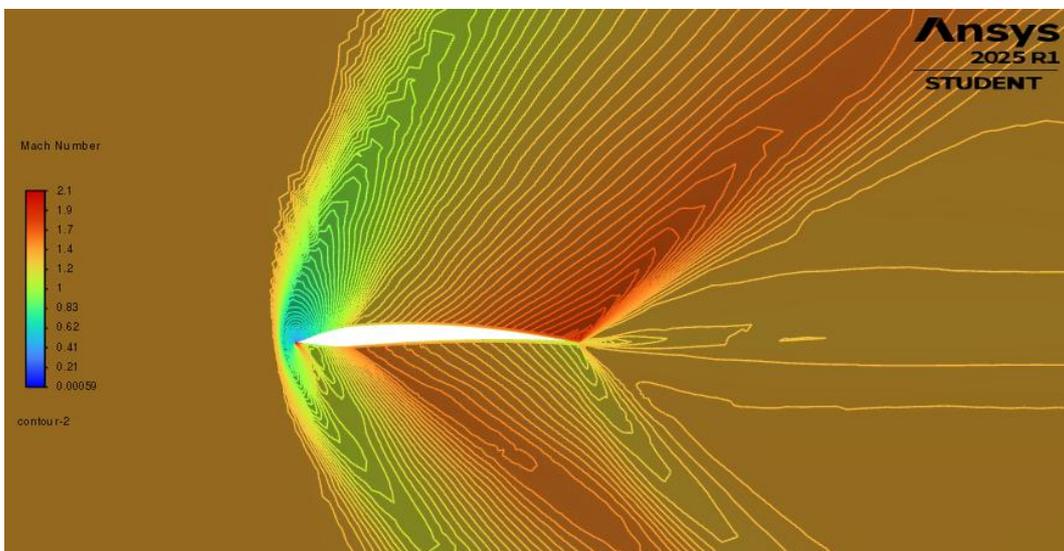


Figura 5.23 Flusso a Mach=1.4

Osservando i valori del numero di Mach nella corrente lontana dal profilo, si nota un comportamento differente tra i due casi analizzati. Per  $M=1.1$ , il flusso immediatamente successivo alla bow wave risulta uniforme e subsonico, come confermato dalla teoria.

Nel caso di  $M=1.4$ , invece, il numero di Mach del flusso varia in base alla posizione rispetto al leading edge. In prossimità di quest'ultimo, il flusso presenta valori subsonici, mentre lungo l'onda si osservano velocità appena supersoniche. Questo fenomeno è dovuto all'inclinazione della bow wave, che riduce la velocità alla sola componente normale del flusso, influenzando così il comportamento locale del numero di Mach.

## ***6 CONCLUSIONI***

Questa tesi ha dedicato particolare attenzione all'analisi della vasta letteratura esistente sui compressori transonici. Nonostante la rilevanza mondiale del tema, si è riscontrato che nessun lavoro affronta l'argomento in modo esaustivo e ben definito. In particolare, la letteratura italiana su questo specifico ambito è quasi del tutto assente, limitandosi a pochi cenni sparsi.

Dallo studio di alcuni manuali americani è emerso che la progettazione di profili transonici potrebbe essere alla portata di ogni progettista, seguendo alcune linee guida ben delineate. In questa tesi, si è deciso di convalidare tale affermazione creando diversi profili utilizzando MATLAB, evidenziando come queste tecniche siano effettivamente accessibili e applicabili nella pratica progettuale.

Inoltre, l'analisi tramite simulazioni CFD ha fornito un quadro dettagliato del funzionamento del solutore Ansys Fluent per flussi in regime transonico. Un aspetto particolarmente degno di nota è stato lo studio della generazione della mesh, che si è rivelata particolarmente complessa e ricca di spunti interessanti per sviluppi futuri.



## BIBLIOGRAFIA

1. Calvert, WJ e Ginder, RB (1999). *Progettazione di ventilatori e compressori Transonic*. Atti dell'Istituto di ingegneria meccanica, parte C: Journal of Mechanical Engineering Science, 213 (C4), 419-436.
2. Biollo R, Benini E (2013). Recent advances in transonic axial compressor aerodynamics Progress in Aerospace Science Volume 56, January 2013, Pages 1-18 “ <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042112000528>”
3. Quori, F. (1998). *Aerodinamica*. Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino
4. John D. Anderson. Fundamentals of Aerodynamics, 6th Edition. McGraw-Hill
5. Education, 6th edition, 2016. ISBN 978-1-259-12991-9. URL <https://www.worldcat.org/title/927104254>.
1. NASA Glenn Research Center. "Wing Design and Flow." NASA, <https://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/wdgflow.html>.
3. Aungier, R.H. *Axial Flow Compressors: A Strategy for Aerodynamic Design and Analysis*. 2003.
4. Francis C. Schwenk, George W. Lewis, and Melvin J. Hartmann. A preliminary analysis of the magnitude of shock losses in transonic compressors, 1957. URL <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930089514>.
5. Dixon, S. Larry, and Cesare Hall. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2010.
6. Aerospace Research Laboratories. *\*A CA Computer Program for the Specification of Axial Compressor Airfoils*. Air Force
7. Shi, H. *A Parametric Design Method for High-Speed Axial Compressor Blades*. Institute of Aeroengine, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Aerospace, 2021, 8(9), 271.
8. Jr. John D. Anderson. Research in supersonic flight and the breaking of the sound barrier, 1947. URL <https://history.nasa.gov/SP-4219/Chapter3.html>.
9. Hill, Philip, and Carl Peterson. *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

10. El-Sayed, G. Ahmed. *Aircraft Propulsion and Gas Turbine Engines*. CRC Press, 2008.
11. Roy, Bhaskar. *Aircraft Propulsion*. Elsevier, 2008.
12. Saravanamuttoo, H.I.H., G.F.C. Rogers, and H. Cohen. *Gas Turbine Theory*. 6th ed., Pearson, 2010.
13. Song, Bo. *Ph.D. Dissertation*. Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, November 2003.
14. Lakshminarayana, B. *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*. Wiley Press.
15. Roy, Bhaskar. *Lecture Notes: Aerodynamics of Compressors and Turbines*. IIT Bombay, 2012.
16. Bloch, G.S., and W.F. O'Brien. *Development of an Off-Design Loss Model for Transonic Compressor Design*. AGARD CP 571, May 1995.
17. Cumpsty, N.A. *Compressor Aerodynamics*. Krieger Publishing Company.
18. Lefas, D., & Miller, R.J. *Transonic Relief in Fans and Compressors*. Proceedings of the ASME Turbo Expo 2020.
19. Frost, G.R., Hearsey, R.M., & Wennerstrom, A.R. *Computer Program for the Specification of Axial Compressor Airfoils*. AD-756879, 1972.
20. Gregory S. Bloch. Flow losses in supersonic compressor cascades. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996. URL <https://vtechworks.lib.vt.edu/handle/10919/37993>.
21. Spalart, P., & Allmaras, S. (1994). *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. *La recherche aerospaciale*, (no. 1).
22. Baldwin, B., & Barth, T. (1991). *A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows*. *29th Aerospace Sciences Meeting*.
23. Launder, B.E., & Spalding, D.B. (1974). *The Numerical Computation of Turbulent Flows*. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3, 269–289.
24. (2006). Elementi finiti e metodi spettrali per equazioni iperboliche. In: *Modellistica numerica per problemi differenziali*. UNITEXT. Springer, Milano. [https://doi.org/10.1007/978-88-470-0494-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-88-470-0494-8_8)
25. A. Kurganov e E. Tadmor. «New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection—Diffusion Equations». In: *Journal of Computational Physics* 160 (2000), pp. 241–282 (cit. alle pp. 60, 61).

26. Peter D. Lax. «Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation». In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (feb. 1954) (cit. a p. 60).
27. H. Nessyahu e E. Tadmor. «Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws». In: *Journal of Computational Physics* 87.2 (1990), pp. 408–463 (cit. a p. 60).
28. C. J. Greenshields, H. G. Weller, L. Gasparini e J. Reese. «Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows». In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63 (2009), pp. 1–21 (cit. a p. 61).
29. A. Kurganov, S. Noelle e G. Petrova. «Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations». In: *SIAM J. Sci. Comput.* 23 (2001), pp. 707–740 (cit. a p. 64).
30. P. Roe. «CHARACTERISTIC-BASED SCHEMES FOR THE EULER EQUATIONS». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 18 (1986), pp. 337–365 (cit. a p. 65).
31. Quarteroni, A. (Anno di pubblicazione). *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali* (5<sup>a</sup> edizione). Springer.
32. Sito ufficiale ANSYS: <https://www.ansys.com/it-it/products/fluids/ansys-cfx>
33. Jeong, W., & Seong, J. (2014). Comparison of effects on technical variances of computational fluid dynamics (CFD) software based on finite element and finite volume methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 19-26.
34. Pinto, R. N., Afzal, A., D'Souza, L. V., & Ansari, Z. (2017). Computational fluid dynamics in turbomachinery: A review of state of the art. *Volume 24*, 467-479
35. Syka, T., Matas, R., & Luňáček, O. (2016). Numerical and experimental modelling of the radial compressor stage. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 174(1), 1-10.

