

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Evoluzione del background e delle
perturbazioni lineari in modelli cosmologici di
Bouncing Coupled Dark Energy

Relatore:
Prof. Marco Baldi

Presentata da:
Matteo Mirabelli

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

Il modello Λ CDM, nonostante i buoni risultati ottenuti nella descrizione dell'universo, presenta alcune problematiche aperte. Tra queste rivestono notevole importanza la tensione di Hubble e la tensione σ_8 , oltre che la mancata spiegazione riguardo la natura della materia oscura e dell'energia oscura che, secondo il modello, costituiscono da sole più del 90% della densità di energia dell'universo. Per questo motivo, numerosi modelli alternativi sono stati proposti. Nel seguente elaborato viene studiato un modello di quintessenza noto come *Bouncing Coupled Dark Energy (BCDE)* nel caso di due specie di materia oscura distinte di cui solo una accoppiata al campo scalare dinamico. Il modello è studiato per diversi tipi di accoppiamento e diverse proporzioni iniziali tra le due specie di materia oscura, con l'obiettivo di individuare similitudini e differenze nell'evoluzione di background cosmologico e nelle perturbazioni lineari con il modello standard della cosmologia.

*Quando non c'è qualcuno che mi aiuta
Vado a correre fino a San Luca
Così magari mi trovo
In qualche sentiero nuovo, lì*

*Dove la luce si fa camminare
Come tra i portici in un temporale
Ti fa prendere il volo
E non ti senti più solo, qui*

...

*Capita anche a te
Di camminare giorni interi interminabili
E sprofondare nei pensieri
Abbandonata a desideri inconfessabili?*

*Sì, capita anche a te
Di non volere più aspettare la felicità
Proprio come me, sì*

— *San Luca*, Cesare Cremonini

Indice

Introduzione	1
1 Il modello ΛCDM	3
1.1 Il principio cosmologico e la CMB	3
1.2 Materia oscura ed energia oscura	4
1.3 La relatività generale: le equazioni fondamentali	6
1.4 I limiti del modello Λ CDM	8
2 Quintessenza e Bouncing Coupled Dark Energy	11
2.1 I modelli di quintessenza: le equazioni fondamentali	11
2.2 Le perturbazioni lineari	14
2.3 Il potenziale SUGRA e il modello Bouncing Coupled Dark Energy	17
3 Analisi numerica e risultati	19
3.1 Analisi numerica	19
3.2 Accoppiamento nullo: modello Λ CDM-like	21
3.3 Accoppiamento costante	22
3.3.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0	22
3.3.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0	28
3.4 Accoppiamento proporzionale al fattore di scala	29
3.4.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0	29
3.4.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0	34
3.5 Accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare	36
3.5.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0	36
3.5.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0	41
3.6 Confronto tra i modelli	43
4 Riassunto e Conclusioni	49
A Passaggio al sistema adimensionale	53
B Codice C per la risoluzione del sistema di equazioni	59
Bibliografia	65

Introduzione

Il modello maggiormente utilizzato per descrivere l'universo è noto come Λ CDM e prevede un universo piatto, in espansione accelerata, composto da materia barionica, radiazione, materia oscura fredda (ossia non relativistica) e energia oscura. È proprio quest'ultima, rappresentata dalla costante cosmologica Λ , a costituire circa il 70% [1] della densità di energia dell'universo, causandone l'espansione accelerata [2, 3].

Nonostante i dati osservativi siano abbastanza consistenti con le previsioni del modello, rimangono molti interrogativi aperti e incongruenze, come la tensione di Hubble, la tensione σ_8 , la natura della materia oscura e dell'energia oscura. Per questo motivo numerosi modelli alternativi sono stati proposti. Tra questi, i modelli di quintessenza [4] interpretano l'energia oscura come un campo scalare interagente con la materia oscura e, eventualmente, altri fluidi cosmologici.

Nel seguente elaborato si esplora un modello di quintessenza noto come Bouncing Coupled Dark Energy (BCDE), che prevede un campo scalare soggetto a un potenziale autointeragente che combina un andamento *power law* a un andamento esponenziale [5]. Si considerano inoltre due specie distinte di materia oscura, di cui una accoppiata e una non accoppiata, mentre si trascura la materia barionica.

Si studia dunque l'evoluzione delle quantità di background e delle perturbazioni lineari per diverse proporzioni iniziali di materia oscura accoppiata e non accoppiata e per diversi tipi di accoppiamento. Si confrontano infine i risultati ottenuti con un modello di tipo Λ CDM, evidenziandone le differenze e le somiglianze.

Nel primo capitolo si introducono il modello Λ CDM e le sue equazioni principali, focalizzandosi sul problema della materia oscura, dell'energia oscura e sui limiti di questo modello.

Motivati da ciò, nel secondo capitolo si introducono i modelli di quintessenza, con le equazioni fondamentali dell'evoluzione delle quantità di background e delle perturbazioni lineari. Successivamente, si introducono il potenziale SUGRA, il modello BCDE e i tipi di accoppiamento che verranno studiati nell'elaborato. In particolare, si considera un accoppiamento costante nel tempo, un accoppiamento la cui intensità è proporzionale al fattore di scala e un accoppiamento la cui intensità è proporzionale alla densità del campo scalare.

Nel terzo capitolo si presentano il metodo di risoluzione numerica delle equazioni del modello e i risultati ottenuti per ciascun tipo di accoppiamento, analizzando sia l'evoluzione delle quantità di background che delle perturbazioni. Si effettua inoltre un confronto tra alcuni dei modelli studiati e il modello standard.

Infine, nel quarto capitolo si riassumono i risultati principali e si espongono le conclusioni del lavoro.

In appendice si riportano alcuni passaggi algebrici effettuati per ottenere le equazioni del modello e il codice C utilizzato per risolverle.

Capitolo 1

Il modello Λ CDM

La nascita e l'origine dell'universo sono problemi che accompagnano da secoli l'essere umano, suscitando la curiosità di numerosi filosofi e astronomi. Tuttavia, la nascita della cosmologia moderna, intesa come scienza che studia l'origine e l'evoluzione dell'universo e delle sue strutture, cercando di predirne l'evoluzione attraverso modelli e leggi fisiche, risale solamente ai primi anni del novecento, grazie a molteplici contributi, teorici e osservativi. Tra questi, la pubblicazione della relatività generale di Einstein (1915), l'osservazione del redshift degli spettri galattici dovuta a Slipher (1913) [6] e la conseguente formulazione della legge di Hubble (1929) [7] posero le basi per un universo in espansione.

Nel corso del secolo scorso sono stati proposti numerosi modelli, tuttavia quello che si è mostrato più adatto a descrivere i dati osservativi è il modello cosmologico Λ CDM che, nell'ipotesi di un universo piatto, omogeneo e isotropo, è in grado di spiegare diversi fenomeni tra cui la radiazione cosmica di fondo, l'abbondanza di nuclei leggeri e la struttura su larga scala dell'universo. In questo modello, oltre alla materia barionica e alla radiazione (tra cui si considerano anche i neutrini e altre particelle relativistiche), si considera una componente di materia oscura fredda (CDM), ossia un tipo di materia costituita da particelle massive non relativistiche interagente solamente tramite forze di natura gravitazionale, e una componente di energia oscura rappresentata dalla costante cosmologica Λ .

1.1 Il principio cosmologico e la CMB

L'assunzione di base del modello Λ CDM è il principio cosmologico, secondo cui, su larga scala (dell'ordine di circa 100 Mpc), l'universo è *omogeneo e isotropo*. Esso rappresenta nient'altro che l'estensione del principio copernicano a tutto l'universo, e significa che, indipendentemente dal punto in cui ci si trovi nel cosmo o dalla direzione di osservazione, le proprietà medie dell'universo quali temperatura, densità o tipologia di strutture cosmiche, siano su larga scala le stesse. Tale principio è supportato dalle evidenze osservative quali l'isotropia della radiazione cosmica di fondo.

Individuata nel 1965 da Penzias e Wilson, la radiazione cosmica di fondo (CMB) è una radiazione elettromagnetica descritta da uno spettro di corpo nero con temperatura di circa 2.7 K, con un picco dunque nelle microonde, che permea l'intero universo [8]. Essa è considerata la radiazione residua dell'epoca della ricombinazione, avvenuta circa 380.000 anni dopo il Big Bang, quando gli elettroni e i protoni si combinarono per formare atomi neutri di idrogeno smettendo di interagire con la radiazione, e permettendo così ai fotoni di viaggiare liberamente nello spazio. Piccole anisotropie nell'intensità di radiazione sono state misurate con cura da diversi esperimenti e missioni spaziali quali *COBE*, *WMAP* e *PLANCK*, e sono spiegate dalle perturbazioni lineari al modello Λ CDM. È a causa di anisotropie nella distribuzione della materia all'epoca della ricombinazione, originatesi in principio da fluttuazioni di natura quantistica, che si sono formate le strutture cosmiche che osserviamo oggi, come galassie e ammassi di galassie. Su larga scala, tuttavia, l'intensità è omogenea e isotropa, confermando la validità del principio cosmologico.

1.2 Materia oscura ed energia oscura

Nel modello Λ CDM vengono considerate anche una componente di materia oscura e una di energia oscura.

Con materia oscura si intende una forma di materia che non interagisce elettromagneticamente, e che quindi non può essere osservata direttamente se non tramite le interazioni gravitazionali con la materia barionica, influenzandone così il moto e la formazione di strutture cosmiche. Le prove dell'esistenza di questa tipologia di materia risalgono al 1933 quando l'astronomo Zwicky, studiando i moti delle stelle nell'ammasso della Chioma, si accorse che le orbite di quest'ultime fossero troppo veloci per essere spiegate dalla presenza della sola materia visibile, e che quindi dovesse esistere una forma di materia invisibile ma capace di interagire gravitazionalmente con essa [9]. Ulteriori prove arrivarono dalle osservazioni sulle curve di rotazione delle galassie a spirale [10] e dal lensing gravitazionale di galassie e ammassi di galassie [11]. Tutte queste osservazioni hanno portato a concludere che la materia oscura esista e che rappresenti circa il 24% della densità dell'universo [12]. La vera natura di questa componente rimane tutt'ora sconosciuta e rappresenta uno dei problemi aperti della fisica teorica e delle particelle. Varie ipotesi sono state avanzate, tra cui l'esistenza di nuove particelle oltre il modello standard [13].

La scoperta dell'energia oscura è invece relativamente recente, e risale al 1998, quando diverse osservazioni di supernovae Ia hanno mostrato che l'universo non sia solamente in espansione, ma in un'espansione accelerata [2] [3]. Ciò che sostiene questa espansione è chiamata energia oscura e nel modello Λ CDM è rappresentata dalla costante cosmologica Λ . Introdotta per la prima volta "artificialmente" da Einstein nelle sue equazioni di campo per ottenere un universo statico, fu successivamente utilizzata per spiegarne l'espansione accelerata.

Il tentativo di legare l'energia oscura all'energia del vuoto risulta estremamente problematico, in quanto i calcoli effettuati con la teoria dei campi predicono un valore di densità

di energia del vuoto di circa 120 ordini di grandezza superiori al valore sperimentale della densità di energia oscura [14, pp. 109]. Inoltre, le osservazioni restringono questo valore a un range molto piccolo, costituendo così il *fine tuning problem* della costante cosmologica [14, pp. 113]. Anche in questo caso dunque, la natura di questa componente che secondo le osservazioni costituisce circa il 70% della densità di energia dell'universo [12] rimane sconosciuta. Per questo motivo sono stati proposti numerosi modelli alternativi, tra cui i modelli di *quintessenza* che, come approfondito nel capitolo 2 del presente elaborato, interpretano l'energia oscura come un campo scalare dinamico, eventualmente interagente con la materia oscura e/o barionica.

Inoltre, dalle osservazioni e dal modello Λ CDM si evince che la componente di energia oscura diventa dominante a redshift molto bassi ($z \approx 0.3$), facendo cominciare l'espansione accelerata in un'epoca relativamente recente [14, pp. 113]. Questo fatto è chiamato *problema della coincidenza* e rappresenta un ulteriore problema aperto della cosmologia, dal momento che ci porrebbe in un momento speciale dell'evoluzione dell'universo.



Figura 1.1: *Lensing gravitazionale osservato dal telescopio spaziale James Webb.*

1.3 La relatività generale: le equazioni fondamentali

Il modello Λ CDM è costruito a partire dalla teoria della relatività generale. Formulata da Einstein nel 1915, essa descrive la gravità come una manifestazione della curvatura dello spaziotempo causata dalla presenza di massa ed energia. Secondo la relatività generale, la geometria dello spaziotempo è descritta da una metrica $g_{\mu\nu}$, che permette di calcolare la distanza tra due eventi nello spaziotempo.

In cosmologia è utile introdurre le *coordinate comoventi*, ovvero un sistema di coordinate solidali all'espansione dell'universo. Il tempo misurato da un osservatore solidale al sistema di riferimento comovente è detto, invece, *tempo cosmico*.

Assumendo la convenzione di Einstein nelle sommatorie, la distanza infinitesima tra due eventi nello spaziotempo è data dall'elemento di linea ds^2 , e può essere scritta, in funzione delle coordinate comoventi e del tensore metrico, come:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico e dx^μ sono gli spostamenti infinitesimali delle coordinate comoventi.

Assumendo il principio cosmologico e una segnatura $(+,-,-,-)$ si può descrivere l'universo attraverso la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), che assume una geometria isotropa e omogenea. In coordinate polari comoventi e tempo cosmico, questa metrica si scrive come:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.2)$$

dove:

- ds^2 è l'elemento di linea, che descrive la distanza tra due eventi nello spaziotempo.
- c è la velocità della luce;
- $a(t)$ è il fattore di scala, che descrive l'espansione dell'universo;
- k è la curvatura spaziale, che può assumere valori 0 (universo piatto), +1 (universo chiuso) o -1 (universo aperto).
- $(r, \theta \text{ e } \phi)$ sono le coordinate spaziali comoventi, mentre t è il tempo cosmico.

La metrica FLRW è utilizzata per risolvere le equazioni di campo di Einstein, che descrivono la relazione tra la curvatura dello spaziotempo, rappresentata dal tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$, e la distribuzione di massa ed energia nell'universo, rappresentata dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$.

Con il formalismo tensoriale tipico della relatività generale, le equazioni di campo di Einstein possono essere scritte come:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

L'equazione 1.3 considera già la presenza della costante cosmologica Λ .

Nella trattazione di problemi cosmologici è conveniente passare alle unità naturali ponendo $c = 1$. Con queste unità, considerando la metrica FLRW e assumendo che il tensore energia-impulso abbia la forma di quello di un fluido perfetto, le equazioni di campo corrispondenti alle componenti (00) e (ii) possono essere scritte in forma esplicita come:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.5)$$

dove $H = \dot{a}/a$ è il parametro di Hubble, ρ è la densità di energia totale dell'universo e p è la pressione totale.

Le equazioni 1.4 e 1.5 sono note come equazioni di Friedmann e descrivono l'evoluzione dell'universo in funzione del tempo cosmico t . La densità di energia totale ρ è data dalla somma delle densità di energia della materia barionica, della radiazione e della materia oscura. Queste componenti sono considerate come fluidi perfetti, la cui densità di energia e pressione sono legate dalla relazione:

$$p = w\rho \quad (1.6)$$

dove w è il parametro di stato del fluido, che può assumere valori diversi a seconda della tipologia di fluido considerato. Materia barionica e materia oscura sono considerati fluidi perfetti con $w = 0$, la radiazione con $w = \frac{1}{3}$ e l'energia oscura, rappresentata dalla costante cosmologica, con $w = -1$. Il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ di ciascun fluido può essere scritto, in unità naturali ($c=1$), come:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

dove u_μ è il vettore 4-velocità del fluido, ρ è la densità e p è la pressione. Imponendo la conservazione di ciascun tensore ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$), si ottiene la legge di conservazione della densità di energia e pressione, che può essere scritta come:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (1.8)$$

dove $\dot{\rho}$ è la derivata temporale della densità di energia.

Questa equazione descrive come la densità di energia e la pressione cambiano nel tempo in funzione del parametro di Hubble H .

Considerando la costante cosmologica Λ come un fluido di densità di energia $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e pressione $p = -\rho$, e considerando l'universo piatto ($k=0$), si può riscrivere la 1.4 come:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_b + \rho_r + \rho_c + \rho_\Lambda) \quad (1.9)$$

Infine, si può definire la densità critica ρ_c come la densità che dovrebbe avere l'universo per avere una curvatura piatta. Grazie alla 1.4, imponendo $k = 0$, essa può essere scritta come:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.10)$$

Si introducono così i parametri di abbondanza delle varie componenti dell'universo, definiti come il rapporto tra la densità di ciascuna componente e la densità critica:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (1.11)$$

dove l'indice i rappresenta, come nel resto dell'elaborato, una delle seguenti componenti: b per la materia barionica, r per la radiazione, c per la materia oscura e Λ per l'energia oscura. L'assunzione di una geometria piatta è consistente con i dati osservativi ottenuti dall'analisi della radiazione cosmica di fondo [1]. Considerando dunque che la somma di tutte le densità di energia deve essere uguale alla densità critica, si ha che:

$$\Omega_b + \Omega_r + \Omega_c + \Omega_\Lambda = 1 \quad (1.12)$$

1.4 I limiti del modello Λ CDM

Il modello Λ CDM, pur permettendo di spiegare l'evoluzione di background dell'universo e, mediante le perturbazioni lineari, la formazione delle strutture cosmiche come galassie e ammassi di galassie, presenta tuttavia alcuni limiti.

Tra questi riveste particolare importanza la *tensione di Hubble*, ovvero la discrepanza tra il valore del parametro di Hubble H_0 misurato a basso redshift mediante osservazioni dirette di supernovae di tipo Ia, e quello ottenuto tramite il modello a partire dalle condizioni iniziali osservate ad alto redshift tramite l'analisi della radiazione cosmica di fondo (CMB). I valori a basso redshift, infatti, portano a stimare il valore di $H_0^{\text{Sla}} = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [15], mentre le misure della CMB forniscono un valore pari a $H_0^{\text{CMB}} = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [1]. Sebbene la tensione di Hubble potrebbe essere dovuta a errori sistematici nelle misure, essa apre la strada a modelli alternativi che prevedano, a bassi redshift, un'espansione dell'universo più rapida rispetto a quella prevista dal modello Λ CDM.

Un altro problema aperto è la *tensione* σ_8 . Questo parametro rappresenta la deviazione standard dell'ampiezza delle fluttuazioni di densità di materia in una sfera di raggio

$8h^{-1}Mpc$, dove h è la costante di Hubble espressa in unità di $100\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Anche in questo caso, i valori ottenuti evolvendo il modello partendo dalle condizioni iniziali della CMB sono in disaccordo con quelli ottenuti da misure dirette, come quelle effettuate tramite il lensing gravitazionale. In particolare, il valore teorico previsto sovrastima quello misurato a basso redshift, sebbene quello previsto a redshift più elevati sia in accordo con quanto osservato. [16]

Infine, la natura ignota della materia oscura e dell'energia oscura, così come il problema della coincidenza, rappresentano ulteriori problemi aperti. Le discrepanze tra i dati osservativi e le previsioni del modello Λ CDM a bassi redshift motivano dunque a cercare modelli alternativi che possano emulare il modello standard a redshift elevati, ma che si allontanino da esso a bassi redshift, in modo da risolvere le tensioni osservate.

Capitolo 2

Quintessenza e Bouncing Coupled Dark Energy

Nel corso degli anni sono stati proposti modelli cosmologici alternativi al Λ CDM. Alcuni di questi, detti modelli di gravità modificata, considerano versioni alternative del tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$. Altri, invece, prevedono una modifica del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, modificando così i fluidi che compongono l'universo e come questi interagiscono tra loro. [14, pp. 134]

Nei paragrafi seguenti si considereranno, in maniera generale, una componente di materia oscura accoppiata al campo scalare e una componente di materia barionica. Tuttavia, il modello studiato nell'elaborato trascura la presenza di materia barionica e considera due specie distinte di materia oscura, di cui solamente una accoppiata. Le equazioni saranno pertanto identiche, a patto di considerare quelle riferite ai barioni come riferite alla componente di materia oscura non accoppiata.

2.1 I modelli di quintessenza: le equazioni fondamentali

Tra i modelli che prevedono una modifica del tensore energia-impulso troviamo i **modelli di quintessenza**. In questi modelli l'energia oscura è interpretata come un campo scalare dinamico ϕ che evolve nel tempo secondo un potenziale autointeragente $V(\phi)$. Inoltre, il campo scalare può accoppiarsi con i restanti fluidi cosmologici, come la radiazione e la materia barionica e/o oscura, modificando così l'evoluzione dell'universo sia a livello di background che di perturbazioni lineari.

L'equazione del moto del campo scalare ϕ si può ottenere dalla formulazione lagrangiana della teoria dei campi. Detto $V(\phi)$ il potenziale autointeragente, la densità lagrangiana del campo scalare ϕ , in caso questo non interagisca con altri fluidi, è data da:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (2.1)$$

da cui si ricavano l'azione S_ϕ e il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ del campo scalare ϕ :

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.2)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (2.3)$$

dove $g = \det(g_{\mu\nu})$ e R è lo scalare di Ricci.

Minimizzando il funzionale dell'azione 2.2 rispetto al campo scalare ϕ si ottiene l'equazione del moto del campo scalare in assenza di interazioni con altri fluidi, detta **equazione di Klein-Gordon**:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.4)$$

Considerando ϕ come un fluido perfetto e utilizzando la metrica FLRW 1.2 si ottengono:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.5)$$

dove ρ_ϕ e p_ϕ sono rispettivamente la densità e la pressione del campo scalare ϕ . Si ottiene così il parametro di stato w_ϕ del campo scalare ϕ :

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (2.6)$$

Il tensore energia-impulso totale si ottiene sommando i singoli tensori energia-impulso di ciascun fluido cosmologico. Considerando un universo composto da un campo scalare ϕ , radiazione, materia barionica e materia oscura il tensore energia-impulso totale è:

$$T_{\mu\nu} = \sum_i T_{\mu\nu}^{(i)} \quad i = \phi, r, b, c \quad (2.7)$$

Essendo fluidi perfetti, il tensore totale si conserva, ovvero $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Tuttavia, ciò non implica che si conservino singolarmente. Modelli con più specie di materia oscura interagenti con il campo scalare, noti come *multicoupled dark energy models*, sono stati ampiamente studiati [17][18][19]. Sebbene quindi si possano modellare diverse interazioni tra i vari fluidi, di seguito considereremo radiazione e materia barionica come non interagenti, da cui segue la conservazione dei rispettivi tensori energia-impulso:

$$\nabla_\mu T^{(r)\mu}{}_\nu = 0 \quad \nabla_\mu T^{(b)\mu}{}_\nu = 0 \quad (2.8)$$

Nel modello considerato, invece, il campo scalare ϕ può accoppiarsi con la materia oscura, modificando così l'evoluzione di queste due componenti. In questo caso, come mostrato in [20], si ha:

$$\nabla_\mu T^{(\phi)\mu}_\nu = Q_{(\phi)} T_{(c)} \nabla_\nu \phi \quad \nabla_\mu T^{(c)\mu}_\nu = -Q_{(\phi)} T_{(c)} \nabla_\nu \phi \quad (2.9)$$

dove $T_{(c)}$ è la traccia del tensore energia-impulso della materia oscura, e $Q_{(\phi)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}}$ è la costante di accoppiamento tra il campo scalare ϕ e la materia oscura. Il parametro adimensionale β_c quantifica l'intensità dell'interazione, mentre $m_{pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ è la massa di Planck ridotta.

Considerando l'interazione tra il campo scalare ϕ e la materia oscura, l'equazione di Klein-Gordon 2.4 si modifica come segue:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \rho_c \quad (2.10)$$

Considerando anche l'equazione di Friedmann 1.9 e le equazioni di continuità dei restanti fluidi cosmologici, si ottiene il sistema di equazioni 2.11 che descrive l'evoluzione di background dell'universo nel caso di un campo scalare ϕ accoppiato alla materia oscura.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \rho_c \\ \dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \dot{\phi} \rho_c \\ \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \\ \dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \\ H^2 = \frac{1}{3m_{pl}^2} (\rho_r + \rho_b + \rho_c + \rho_\phi) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Una caratteristica importante di questi modelli è che, a causa dell'accoppiamento tra materia oscura e campo scalare, è possibile un trasferimento di massa-energia dall'uno all'altro [17]. Integrando infatti l'equazione della densità di materia oscura, tra un valore generico del fattore di scala e il valore odierno $a_0 = 1$, si ottiene che:

$$\rho_c(a) = \rho_c(a_0) a^{-3} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\beta_c(\phi)}{m_{pl}} d\phi \right)} \quad (2.12)$$

da cui, passando alla massa delle particelle di materia oscura M_c , si ha:

$$M_c(a) = M_c(a_0) e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\beta_c(\phi)}{m_{pl}} d\phi \right)} \Rightarrow \frac{d \ln (M_c/M_{c,0})}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c(\phi)}{m_{pl}} \dot{\phi} \quad (2.13)$$

dove $M_{c,0}$ è la massa di materia oscura al tempo attuale.

Si nota che, nel caso in cui $\beta_c \dot{\phi} < 0$ la massa della materia oscura aumenta nel tempo a causa di un trasferimento di massa-energia dal campo a quest'ultima. Al contrario, se

$\beta_c \dot{\phi} > 0$ la massa di materia oscura diminuisce nel tempo, trasferendo massa-energia al campo.

2.2 Le perturbazioni lineari

Le perturbazioni lineari sono fluttuazioni di densità rispetto al valore di background. Di origine quantistica, la loro esistenza è dimostrata dalle anisotropie in temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB) e sono ritenute essere la causa della formazione delle strutture cosmologiche che osserviamo oggi. È infatti nelle regioni a densità leggermente maggiore che, per interazione gravitazionale, si addensò nel corso dell'evoluzione dell'universo sempre più materia, formando così le galassie. In particolare, a causa delle interazioni tra radiazione, protoni e neutroni prima della ricombinazione (redshift $z \sim 1100$), sono state le fluttuazioni di densità di materia oscura a crescere indisturbate, mentre quelle di materia barionica sono state smorzate dall'interazione con la radiazione. Per questo motivo si suppone che sia stata proprio la materia barionica a "cadere" nelle buche di potenziale generate dalla materia oscura, formando così le strutture cosmiche.

È proprio a causa dell'interazione tra materia barionica e radiazione prima della ricombinazione che si osserva a redshift $z \sim 1100$ un rapporto tra il contrasto di densità della materia barionica e quello della materia oscura dell'ordine di 10^{-2} . Di conseguenza si considerano generalmente le perturbazioni di materia barionica e di materia oscura a partire da questo momento in poi, considerando questo rapporto come condizioni iniziali delle simulazioni.

Nel ricavare le equazione del moto delle perturbazioni, si procede perturbando linearmente pressione e densità del fluido considerato:

$$\begin{aligned}\rho_i(\vec{x}, t) &= \bar{\rho}_i(\vec{x}, t) + \delta\rho_i(\vec{x}, t) \\ p_i(\vec{x}, t) &= \bar{p}_i(\vec{x}, t) + \delta p_i(\vec{x}, t) \\ \phi(\vec{x}, t) &= \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \delta\phi(\vec{x}, t)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Si definisce così il *contrasto di densità* $\delta_i = \frac{\delta\rho_i}{\bar{\rho}_i} = \frac{\rho_i - \bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_i}$ che rappresenta la fluttuazione di densità di un fluido rispetto al valore medio $\bar{\rho}_i$ della specie i considerata.

Si procede perturbando la metrica FLRW 1.2 nel *gauge newtoniano*, ottenendo così l'elemento di linea infinitesimo:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 - a^2(t)(1 - 2\Phi)\delta_{ab}dx^a dx^b\tag{2.15}$$

dove Φ è il potenziale newtoniano e δ_{ab} è la *delta di Kronecker*. Introducendo il tempo conforme τ la metrica perturbata si può riscrivere come:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ab}dx^a dx^b]\tag{2.16}$$

Il contrasto di densità definito in 2.14 dipende dalla posizione considerata, ed è conveniente considerarne la trasformata di Fourier ottenendo dunque il contrasto di densità in funzione del vettore d'onda $\mathbf{k}$, che definisce la scala delle perturbazioni. Si definisce, infatti, il parametro di scala $\lambda = \mathcal{H}/k$, con $\mathcal{H} = aH$. Segue che piccoli valori di k corrispondono a perturbazioni su grande scala, mentre grandi valori di k corrispondono a perturbazioni su piccola scala. La trasformata di Fourier del contrasto di densità è definita come:

$$\delta_i(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{x} \delta_i(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

Si possono così linearizzare le equazioni di campo di Einstein secondo la metrica 2.16 ottenendo le equazioni per l'evoluzione del contrasto di densità per ciascun fluido cosmologico. In particolare, ponendo $\kappa = \sqrt{8\pi G}$, si ottiene per la materia oscura accoppiata l'equazione:

$$\ddot{\delta}_c - 3\ddot{\Phi} + \kappa\beta_c\delta\ddot{\phi} + a^{-2}(\kappa\beta_c\nabla^2\delta\phi - \nabla^2\Phi) + (\dot{\delta}_c - 3\dot{\Phi} + \kappa\beta_c\delta\dot{\phi})(2H - \kappa\beta_c\dot{\phi}) = 0 \quad (2.18)$$

Passando nello spazio di Fourier operando la sostituzione $\nabla^2 \rightarrow -k^2$ e considerando il limite newtoniano di perturbazioni di scala significativamente inferiore all'orizzonte cosmologico ($\lambda \ll 1$) e passando alla derivata rispetto al tempo $N = \ln(a)$, si ottiene l'equazione:

$$\delta_c'' + \delta_c' \left(2 + \frac{H'}{H}\right) - \frac{3}{2} \left(\Omega_c - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2\right) \delta_c - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0 \quad (2.19)$$

Ripetendo lo stesso procedimento per la componente di materia barionica si ottiene:

$$\delta_b'' + \delta_b' \left(2 + \frac{H'}{H}\right) - \frac{3}{2} \left(\Omega_c - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2\right) \delta_c - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b \quad (2.20)$$

Passando nuovamente al tempo comoviente t (si veda in appendice A la relazione tra derivata rispetto a N e derivata rispetto a t) le equazioni 2.19 e 2.20 si riscrivono come:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_c = -2H \left[1 - \beta_c \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}m_{pl}H}\right] \dot{\delta}_c + 4\pi G [\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c\Gamma_c] & \text{con } \Gamma_c = 1 + \frac{4}{3}\beta_c^2 \\ \ddot{\delta}_b = -2H\dot{\delta}_b + 4\pi G [\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c] \end{cases} \quad (2.21)$$

La scala delle perturbazioni può essere tenuta in conto modificando il termine Γ_c come:

$$\Gamma_c = 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\beta_c^2}{1 + \lambda^2 \hat{m}^2} \quad (2.22)$$

dove $\hat{m}^2 = \hat{m}_\phi^2 - \hat{m}_{\beta_c}^2$, con $\hat{m}_\phi^2 = \frac{1}{H} \frac{d^2V}{d\phi^2}$ e $\hat{m}_{\beta_c}^2 = \sqrt{6}\Omega_c \frac{d\beta_c}{d\phi}$. Si noti che nel limite newtoniano, ovvero per $\lambda \ll 1$, queste correzioni possono essere trascurate.

Come si può notare, nell'equazione delle perturbazioni della materia oscura compaiono due termini dovuti all'interazione della materia oscura con il campo scalare.

Il termine $\beta_c \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}m_{pl}H}$ è detto *termine di frizione*, mentre il termine Γ_c prende il nome di *quinta forza*, da cui il nome di questi modelli di quintessenza. È presente dunque un'interazione aggiuntiva, rispetto a quella gravitazionale, nella formazione delle strutture cosmiche.

Altri parametri utili nella descrizione della crescita delle perturbazioni sono il *fattore di crescita* $D_{+,i}(t)$, definito come il rapporto tra il contrasto di densità a un certo tempo t e il contrasto di densità al valore odierno. Poiché durante la *matter domination era*, come si osserva risolvendo le equazioni 2.21, le perturbazioni crescono linearmente con il fattore di scala, si considera generalmente il *fattore di crescita normalizzato*:

$$D_{+,i}(z)/a = \frac{\delta_i(z)}{\delta_i(z=0)a} \quad (2.23)$$

Un'altra normalizzazione spesso adottata nel definire il fattore di crescita è la normalizzazione del contrasto di densità alla CMB, ovvero a $z = 1100$, piuttosto che al valore odierno.

Il *fattore di crescita totale* si ottiene dunque come media dei fattori di crescita delle singole specie pesata per la rispettiva abbondanza:

$$D_{+,tot} = \frac{\Omega_c D_{+,c} + \Omega_b D_{+,b}}{\Omega_c + \Omega_b} \quad (2.24)$$

Infine, il *contrasto di densità totale* è definito come media dei contrasti di densità delle singole specie pesata per la rispettiva abbondanza:

$$\delta_{tot} = \frac{\Omega_c \delta_c + \Omega_b \delta_b}{\Omega_c + \Omega_b} \quad (2.25)$$

2.3 Il potenziale SUGRA e il modello Bouncing Coupled Dark Energy

La dinamica del campo scalare e la conseguente evoluzione dell'universo sono determinati dalla forma del potenziale autointeragente $V(\phi)$. Per questo motivo sono stati proposti diversi potenziali autointeragenti, sia di tipo esponenziale $V(\phi) = Ae^{-\alpha\phi/m_{pl}}$ che di tipo *power law* $V(\phi) = A(\frac{\phi}{m_{pl}})^\alpha$.

Tra questi, il potenziale SUGRA [5] combina un andamento di tipo *power law* e uno di tipo esponenziale nel seguente modo:

$$V(\xi) = A \cdot \xi^{-\alpha} \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} \quad \text{con} \quad \xi = \frac{\phi}{m_{pl}}, \quad \alpha > 0 \quad (2.26)$$

dove A è una costante di normalizzazione e α è un parametro adimensionale che quantifica la pendenza del potenziale. Si riporta in 2.1 l'andamento del potenziale per $\alpha = 2$.

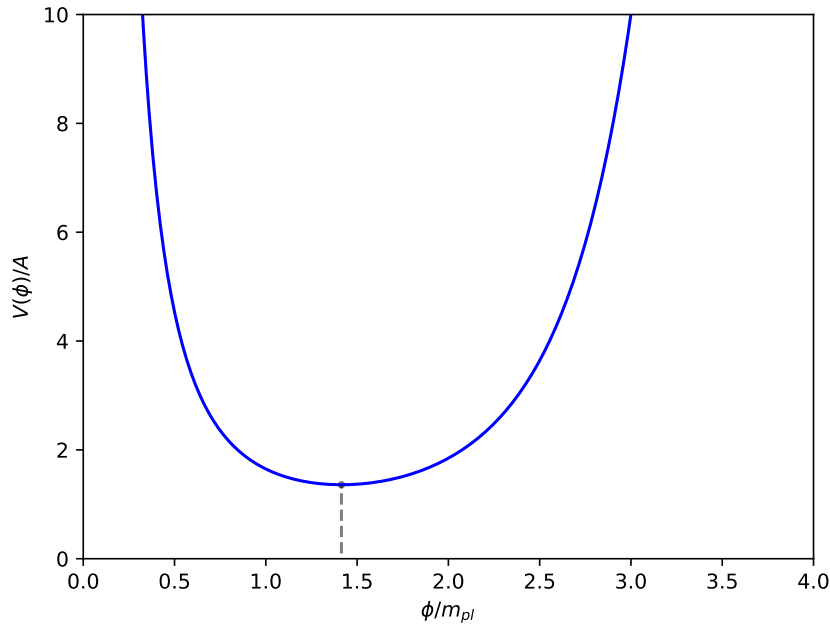


Figura 2.1: Andamento del potenziale SUGRA $V(\phi)/A$ per $\alpha = 2$.

Il potenziale SUGRA è dunque caratterizzato dalla presenza di un minimo per $\xi = \sqrt{\alpha}$, che comporta che il campo scalare ϕ possa oscillare attorno a questo punto di equilibrio invertendo così la propria direzione di moto nel corso della storia dell'universo.

Come studiato in [21], considerando come condizioni iniziali un campo scalare che si trovi nel minimo del potenziale con velocità nulla e un coefficiente di accoppiamento $\beta_c < 0$, a causa del termine di accoppiamento questo evolve inizialmente muovendosi verso il lato dato dall'andamento *power law*. Tuttavia, a causa dei termini $\frac{dV}{d\phi} < 0$ e $3H\dot{\phi} < 0$, il

campo scalare rallenta il suo moto, fino ad arrestarsi e invertire la propria direzione di moto. Modelli di questo tipo, a causa di questo andamento caratteristico del campo scalare, sono stati definiti **Bouncing Coupled Dark Energy** (BCDE) [21].

Nel caso di un accoppiamento costante, valori di β_c dell'ordine dell'unità sono da escludere in quanto avrebbero un impatto significativo sull'evoluzione dell'universo e la formazione di strutture cosmiche [17]. Per eludere questa limitazione si possono considerare accoppiamenti variabili nel tempo, in modo da avere accoppiamento iniziale estremamente debole, e mimare in questo modo un modello Λ CDM, per poi deviarne solamente in tempi recenti. Così facendo è possibile esplorare accoppiamenti con $\beta_0 > 1$, ottenendo cosmologie indistinguibili da quella standard a redshift elevati ma diverse in epoche recenti, permettendo eventualmente di alleviare le tensioni sul parametro di Hubble il parametro σ_8 .

Il modello proposto nel seguente elaborato è un modello di tipo *bouncing coupled dark energy* in cui si considerano due specie distinte di materia oscura, di cui solamente una interagente con il campo scalare. Si trascura, invece, la presenza di materia barionica, la quale può essere considerata come parte della componente di materia oscura non accoppiata.

Usando le equazioni 2.11 e 2.21 si studiano dunque l'evoluzione del background e delle perturbazioni lineari del modello BCDE per diversi valori del coefficiente di accoppiamento β_c e per diverse proporzioni iniziali tra le due specie di materia oscura. Si pone, per tutti i modelli studiati, $\alpha = 1$. Si considerano inoltre possibili dipendenze del coefficiente di accoppiamento β_c dal tempo, in particolare si considerano i seguenti casi:

- $\beta_c = \beta_0$ Accoppiamento costante
- $\beta_c = \beta_0 a$ Accoppiamento proporzionale al fattore di scala
- $\beta_c = \beta_0 \Omega_\phi / \Omega_{\phi,0}$ Accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare,
dove $\Omega_{\phi,0}$ indica la densità del campo scalare al tempo odierno
secondo il modello Λ CDM

L'ultimo tipo di accoppiamento, in particolare, a causa dell'andamento della densità del campo scalare mostrato nel paragrafo 3.6, è interessante perché permette di emulare per gran parte dell'universo un modello di tipo Λ CDM, per poi deviare in epoche recenti durante la *ϕ -dominated era*.

Capitolo 3

Analisi numerica e risultati

Per risolvere il sistema di equazioni definito in 2.11 e 2.21 è stato utilizzato un codice scritto in linguaggio C (riportato in appendice) che, partendo da un tempo iniziale $t_i = \ln(a) = -16$ e da delle condizioni iniziali fissate, evolve il sistema fino a $t_f = \ln(a) = 0$ con un metodo di integrazione numerica Runge-Kutta di quarto ordine definito nella libreria *GSL (Gnu Scientific Library)*.

Al fine di mantenere corretto il rapporto tra i contrasti di densità δ_c e δ_b all'epoca della ricombinazione, il codice evolve δ_c a partire dalle condizioni iniziali e fissa il valore di $\delta_b = 0.03 \cdot \delta_c$ fino al raggiungimento di $z = 1100$.

3.1 Analisi numerica

Il codice utilizzato per studiare numericamente il sistema non integra direttamente le equazioni 2.11 e 2.21, bensì un sistema equivalente ottenuto introducendo le seguenti variabili adimensionali [22], dove l'apice rappresenta la derivata rispetto al tempo di *e-folding* $N = \ln(a)$:

$$x = \frac{\phi'}{\sqrt{6}m_{pl}} \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)/3}}{m_{pl}H} \quad r = \frac{\sqrt{\rho_r/3}}{m_{pl}H} \quad v = \frac{\sqrt{\rho_u/3}}{m_{pl}H} \quad \xi = \frac{\phi}{m_{pl}} \quad (3.1)$$

Si indica con il pedice c la componente di materia oscura accoppiata, mentre si indica con il pedice u la componente di materia oscura non accoppiata. Con queste nuove variabili si ricava che:

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 \quad \Omega_c = 1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2 \quad \Omega_r = r^2 \quad \Omega_u = v^2 \quad (3.2)$$

Al fine di studiare l'evoluzione dell'universo con diverse proporzioni iniziali tra le due specie di materia oscura si è introdotto, inoltre, il parametro:

$$\zeta = \frac{\Omega_c}{\Omega_u} = \frac{1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{\frac{1 - x_i^2 - y_i^2 - r_i^2}{1 + \zeta}} \quad (3.3)$$

Le condizioni iniziali sono fissate evolvendo all'indietro nel tempo un modello di tipo Λ CDM, modificando dunque v_i secondo la 3.3.

Con queste variabili, le equazioni di background 2.11, nel caso di un potenziale SUGRA definito come 2.26, si scrivono come:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 - 3) x - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) y^2 + \beta_c (1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2) \\ y' = \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) y + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) xy \\ r' = \frac{1}{2} (3x^3 - 3y^2 + r^2 - 1) r \\ v' = \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2) v \\ \xi' = \sqrt{6} x \\ H' = -\frac{1}{2} (3 + 3x^2 - 3y^2 + r^2) H \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Le equazioni delle perturbazioni 2.21, invece, diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_c = \theta_c \\ \theta'_c = - \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) - 2\beta_c x \right] \theta_c + \\ \quad + \frac{3}{2} \left[v^2 \delta_b + (1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\beta_c^2}{1 + \lambda^2 m_\phi^2 m_\beta^2} \right) \delta_c \right] \\ \delta'_b = \theta_b \\ \theta'_b = -2 \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) \right] \theta_b + \frac{3}{2} [v^2 \delta_b + (1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2) \delta_c] \end{array} \right. \quad (3.5)$$

In tutti i casi studiati si pone $\alpha = 1$. Per una completa derivazione delle equazioni adimensionali si veda in appendice A.

3.2 Accoppiamento nullo: modello Λ CDM-like

In caso di accoppiamento $\beta_c = 0$, come si evince dall'equazione di Klein-Gordon 2.10, il campo scalare rimane fisso al suo valore iniziale per tutta l'evoluzione dell'universo, comportandosi di fatto come una costante cosmologica con densità di energia $\rho_\phi = A\alpha^{-\alpha/2}e^{-\alpha/2}$. Il parametro di stato w_ϕ rimane dunque costante e pari a -1.

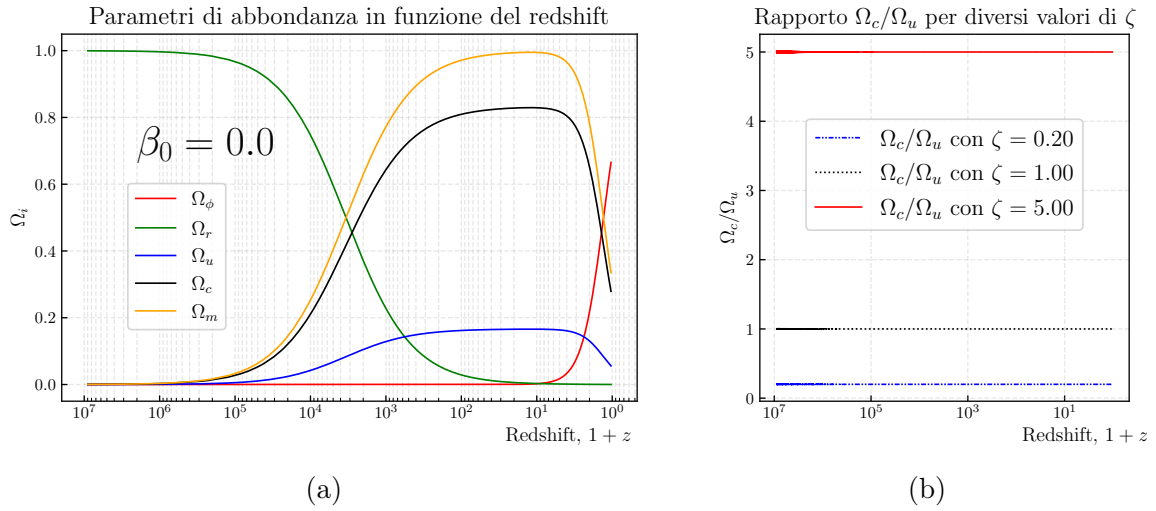


Figura 3.1: A sinistra (a) si riporta l'andamento dei parametri di abbondanza dei fluidi cosmologici per un modello di tipo Λ CDM con $\zeta = 5$. In rosso si riporta il campo scalare, in verde la radiazione, in blu la componente non accoppiata di materia oscura, in nero la componente accoppiata di materia oscura e in arancione la materia totale. A destra (b), invece, è graficato il rapporto Ω_c/Ω_u per diversi ζ iniziali.

In figura 3.1 si osserva l'andamento dei parametri di abbondanza per un modello di tipo Λ CDM con $\zeta = 5$ (a sinistra). Si riconoscono la *radiation dominated era*, la *matter dominated era* e la ϕ *dominated era*, corrispondente all'odierna fase accelerata dell'espansione cosmica. Si osserva anche che il rapporto tra le densità delle due componenti di materia oscura rimane costante per tutta l'evoluzione dell'universo. Cosmologie con $\zeta \neq 5$ avranno dunque andamenti simili, con la differenza che per $\zeta < 1$ sarà la componente non accoppiata a dominare durante la *matter dominated era*.

3.3 Accoppiamento costante

In questa sezione si riportano i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate nel caso di un accoppiamento costante del tipo $\beta_c = \beta_0$. In particolare, si considerano per tre diverse proporzioni iniziali tra le due componenti di materia oscura ($\zeta = 0.2, 1, 5$) sia accoppiamenti positivi che negativi ($\beta_0 = \pm 0.10, \pm 0.20$). Si riportano dunque l'evoluzione delle quantità di background quali i parametri di abbondanza Ω_i , il parametro di Hubble H , l'andamento del campo scalare ϕ e il *growth factor totale* D_+ .

3.3.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0

Evoluzione dei parametri di abbondanza

Come si osserva in figura 3.2, nel caso di accoppiamento positivo, durante la *matter dominated era*, per valori di $\zeta \leq 1$ prevale la materia oscura non accoppiata, mentre per $\zeta > 1$ domina la materia oscura accoppiata. L'inizio della *matter dominated era* avviene allo stesso momento per tutti i valori di ζ considerati. Tuttavia, l'inizio della *ϕ dominated era* si verifica anticipatamente al crescere di ζ .

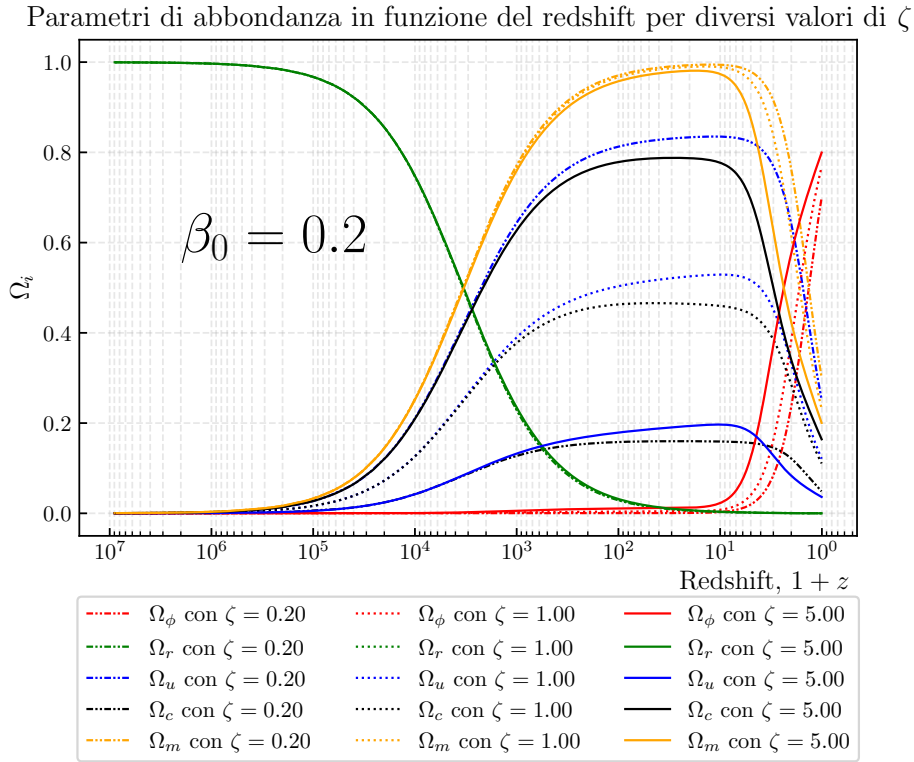


Figura 3.2: *Parametri di abbondanza nel caso di accoppiamento costante positivo ($\beta_0 = 0.2$) per diversi valori iniziali del rapporto ζ . Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione, in blu la componente non accoppiata di materia oscura, in nero la componente accoppiata di materia oscura e in arancione la materia totale.*

Nel caso di accoppiamento negativo (figura 3.3) si osserva un comportamento simile: anche in questo scenario, durante la *matter dominated era*, la specie non accoppiata prevale per $\zeta \leq 1$, mentre la componente interagente con il campo scalare domina per $\zeta > 1$. Anche in questo caso, la *matter dominated era* inizia nello stesso momento per tutti i valori di ζ e termina in modo simile, con piccole variazioni temporali. Si osserva, tuttavia, che la densità di energia oscura comincia a crescere prima all'aumentare di ζ , il che è giustificato considerando che una maggiore quantità di materia oscura iniziale porta ad una maggiore dinamica del campo scalare ϕ , dunque ad una maggiore densità di energia oscura.

Inoltre, per $\zeta = 5$, si osservano tra redshift $z = 100$ e $z = 10$ delle oscillazioni nella densità di materia oscura e del campo scalare, compatibili con l'andamento di ϕ osservabile in figura 3.6. Quando $\beta_0 \dot{\phi} < 0$, infatti, c'è trasferimento di massa energia dal campo alla materia oscura, comportando un aumento del suo parametro di densità. Quando $\beta_0 \dot{\phi} > 0$ accade il viceversa, facendo diminuire Ω_c e aumentare Ω_ϕ .

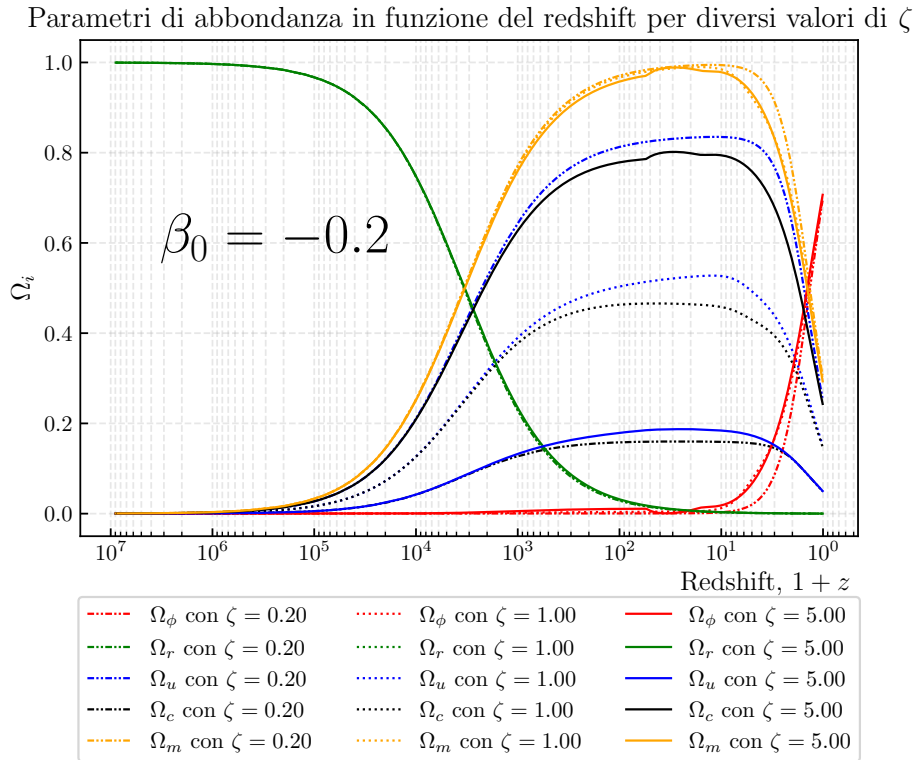


Figura 3.3: Parametri di abbondanza nel caso di accoppiamento costante negativo ($\beta_0 = -0.2$) per diversi valori iniziali del rapporto ζ . Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione, in blu la componente non accoppiata di materia oscura, in nero la componente accoppiata di materia oscura e in arancione la materia totale.

Evoluzione dei parametri di Hubble

Per quanto riguarda il parametro di Hubble si osserva un andamento di forma simile, indipendentemente dalla frazione iniziale di materia oscura e dall'intensità dell'accoppiamento.

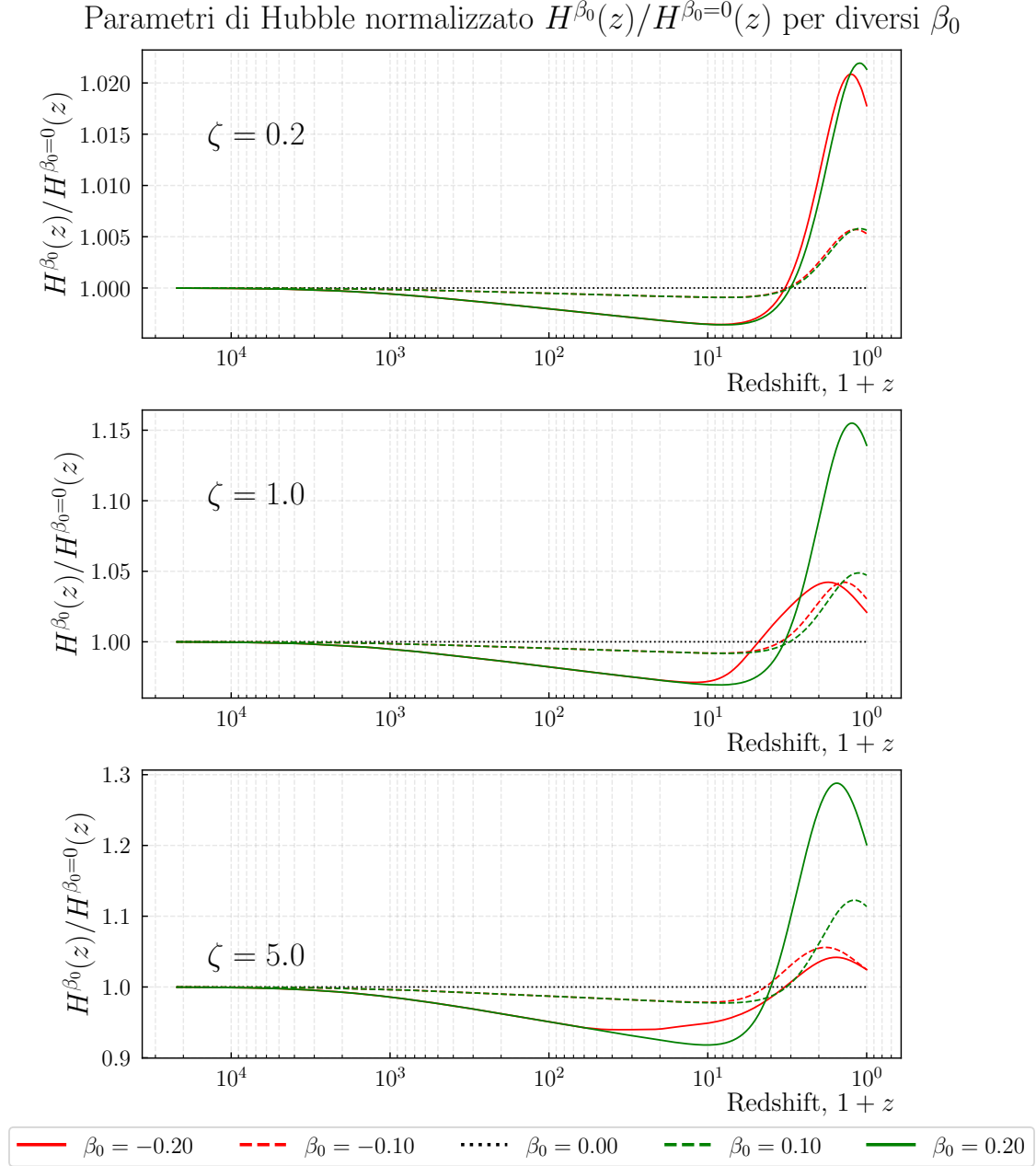


Figura 3.4: *Parametro di Hubble normalizzato nel caso di accoppiamento costante per diversi valori di β_0 . In verde si riportano gli accoppiamenti positivi, in rosso quelli negativi. Le linee tratteggiate rappresentano accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 0.10$, mentre quelle continue accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 0.20$.*

In figura 3.4 si osserva infatti che, per tutti i valori di ζ e di β_0 , in un primo momento la crescita dell'universo è più lenta rispetto al caso non accoppiato, per poi diventare più rapida a partire da redshift $z \simeq 2 - 3$. Tale crescita è maggiore (fino al 30% in più per $\zeta = 5$ e $\beta_0 = 0.2$) quando la componente iniziale di materia oscura accoppiata supera quella non accoppiata ($\zeta > 1$).

Inoltre, per tutti i valori di ζ , l'accoppiamento positivo e quello negativo sono praticamente indistinguibili a redshift elevati, cominciando a differenziarsi solamente a bassi redshift. La differenziazione è tanto più marcata e anticipata quanto maggiore è il rapporto ζ . A redshift bassi, infine, l'accoppiamento negativo porta ad una crescita più rapida del parametro di Hubble rispetto al caso positivo. Questo andamento differente si può spiegare osservando l'andamento del campo scalare ϕ in figura 3.5.

Evoluzione del campo scalare

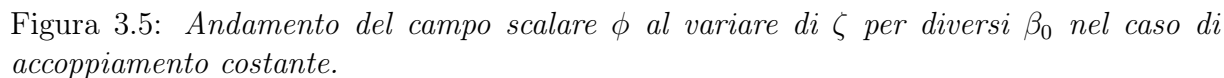
In figura 3.5 e 3.6 si osserva chiaramente come l'andamento del campo scalare ϕ dipenda strettamente dal valore di ζ . Una maggior quantità iniziale di materia oscura accoppiata comporta una maggior dinamica del campo scalare a causa dell'accoppiamento con essa, portando a grandi escursioni del valore di ϕ e molte oscillazioni del parametro di stato w_ϕ . Nel caso di $\zeta = 0.2$, infatti, si osserva una variazione del campo scalare di circa 30%, mentre per $\zeta = 5$ la variazione è notevolmente superiore.

A bassi valori di ζ la distinzione tra accoppiamento positivo e negativo è dunque meno marcata, mentre si differenzia notevolmente per alti valori di ζ . Si osserva, per esempio, che l'evoluzione del campo scalare con $\zeta = 0.2$ è pressoché simmetrica rispetto al valore iniziale $\phi = \sqrt{\alpha} = 1$, mentre per $\zeta = 5$ diventa asimmetrica. Questo accade a causa della bassa quantità di materia oscura interagente con il campo scalare. Come si evince dall'equazione 2.10, infatti, il moto del campo scalare è influenzato dal fattore $\beta_c \rho_c$. In caso di bassa abbondanza di materia oscura accoppiata, il campo si allontana poco dal minimo del potenziale SUGRA, che localmente può essere approssimato con un andamento parabolico simmetrico rispetto al minimo. In caso di alta abbondanza di materia oscura accoppiata, invece, il campo scalare si allontana molto dal minimo del potenziale SUGRA, che presenta invece un andamento asimmetrico rispetto al minimo, con il ramo *power law* più pendente rispetto al ramo esponenziale. Questo influisce direttamente sulla dinamica del campo con il termine $\frac{dV}{d\phi}$, portando a più "rimbalzi" in caso di moto lungo il ramo *power law*.

Questo si riflette anche nell'andamento del parametro di stato w_ϕ . Per $\zeta = 0.2$, a parità di intensità β_0 , l'andamento è pressoché indipendente dal segno. Tuttavia, per $\zeta = 5$ si osserva che l'accoppiamento negativo porta ad un andamento del parametro di stato w_ϕ più marcato rispetto al caso positivo.

Il diverso andamento del campo scalare spiega il diverso andamento della funzione di Hubble osservato per accoppiamenti di segno opposto. Infatti, fintanto che w_ϕ è identico per i due accoppiamenti, la funzione di Hubble riportata in figura 3.4 evolve in modo pres-

Campo scalare $\frac{\phi}{m_{\text{pl}}}$ per diversi β_0



Infine, si osserva che la condizione iniziale di costante cosmologica è velocemente abbandonata, con il campo scalare che assume un parametro di stato $w_\phi = +1$ fino a bassi redshift, quando si riavvicina alla condizione di costante cosmologica.

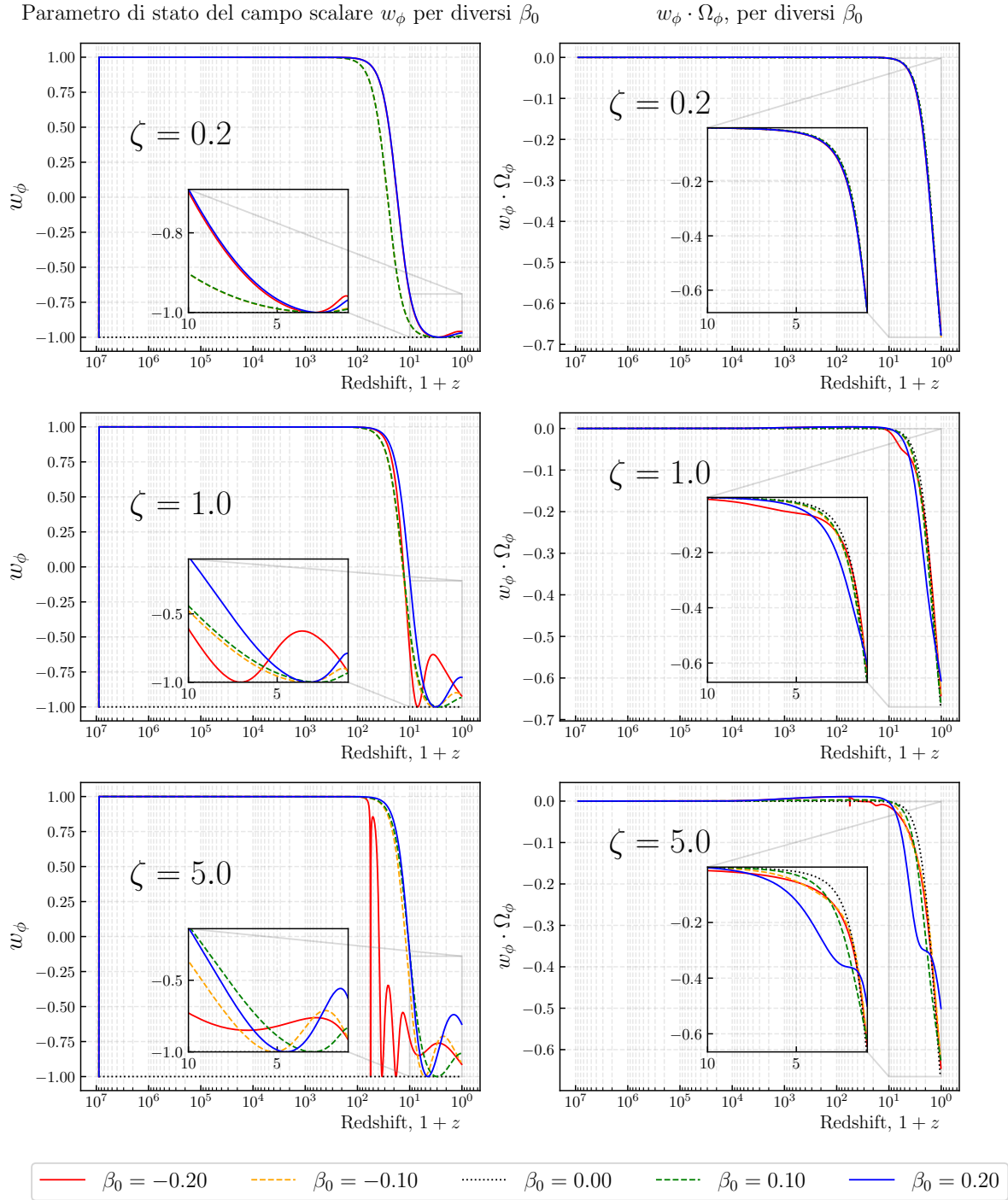


Figura 3.6: A sinistra, parametro di stato del campo scalare ϕ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento costante. A destra, evoluzione di $w_\phi \cdot \Omega_\phi$ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento costante. Nei riquadri si riportano gli andamenti ristretti all'intervallo $z \in [0, 10]$.

3.3.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0

Si osserva che la crescita delle perturbazioni (figura 3.7) è sempre superiore al caso non accoppiato ad alti redshift, per poi riavvicinarsi allo stesso *growth factor*, e in alcuni casi assumere un valore inferiore, a bassi redshift. In caso la componente accoppiata della materia oscura sia abbondante la crescita è maggiore, come si osserva per $\zeta = 5$ in cui il fattore di crescita, sia per accoppiamento positivo che negativo, supera del 10% il caso non accoppiato attorno a redshift $z \simeq 10$.

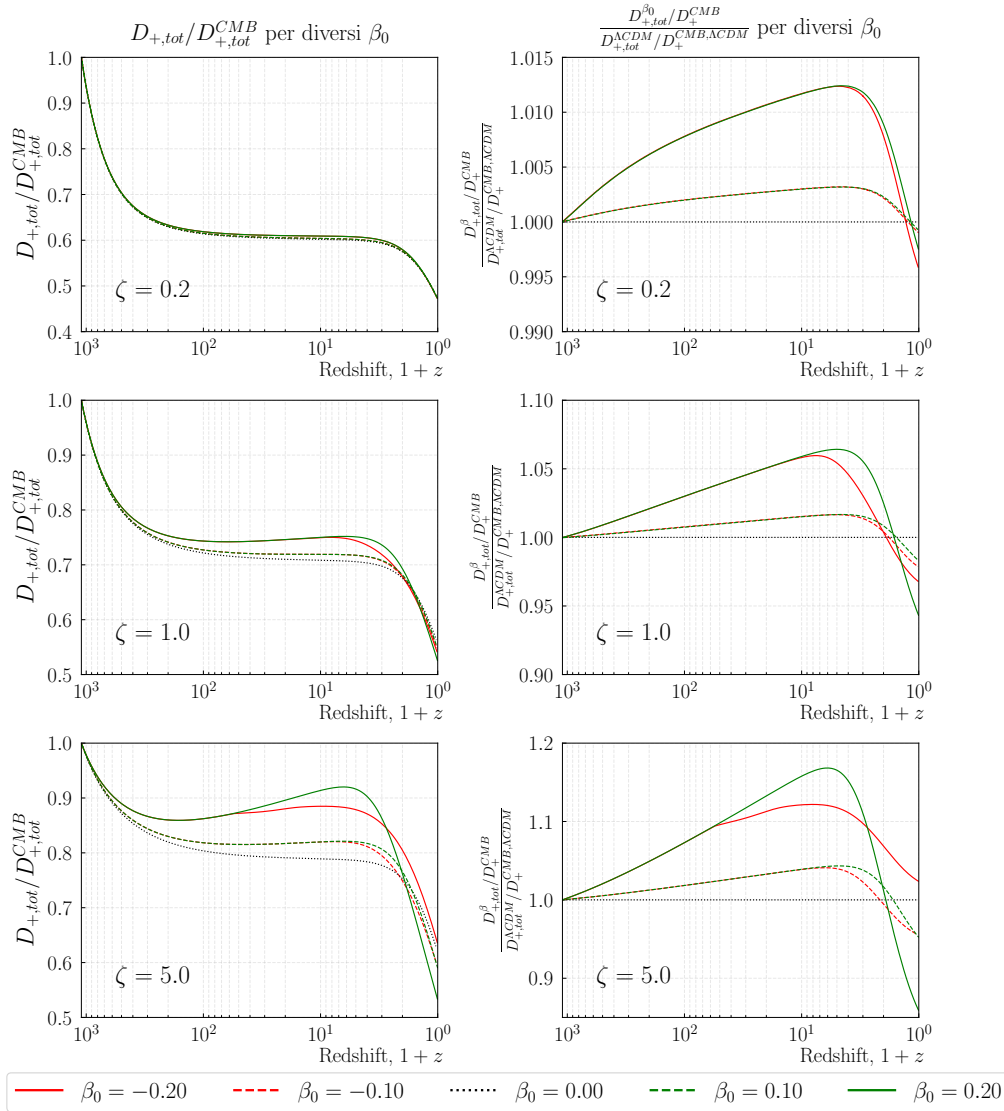


Figura 3.7: A sinistra, il fattore di crescita totale normalizzato alla CMB al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento costante. A destra, il rapporto tra il fattore di crescita totale e il fattore di crescita per il caso non accoppiato, entrambi normalizzati alla CMB.

3.4 Accoppiamento proporzionale al fattore di scala

In questa sezione si riportano i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate nel caso di un accoppiamento proporzionale al fattore di scala, del tipo $\beta_c = \beta_0 \cdot a(z)$. In particolare, si considerano per tre diversi valori iniziali del rapporto tra le due componenti di materia oscura ($\zeta = 0.2, 1, 5$) sia accoppiamenti positivi che negativi ($\beta_0 = \pm 2.00, \pm 5.00$). Poiché, in questo tipo di accoppiamento, il valore di β_c si mantiene prossimo a zero per gran parte dell'evoluzione dell'universo, si possono considerare valori di β_0 superiori all'unità, senza che l'accoppiamento diventi eccessivamente forte. Si riportano dunque l'evoluzione delle quantità di background quali i parametri di abbondanza Ω_i , il parametro di Hubble H , l'andamento del campo scalare ϕ e il *growth factor totale*.

3.4.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0

Evoluzione dei parametri di abbondanza

Per valori di $\beta_0 = \pm 2.00$ non si osservano differenze significative degli andamenti dei parametri di abbondanza con il caso costante.

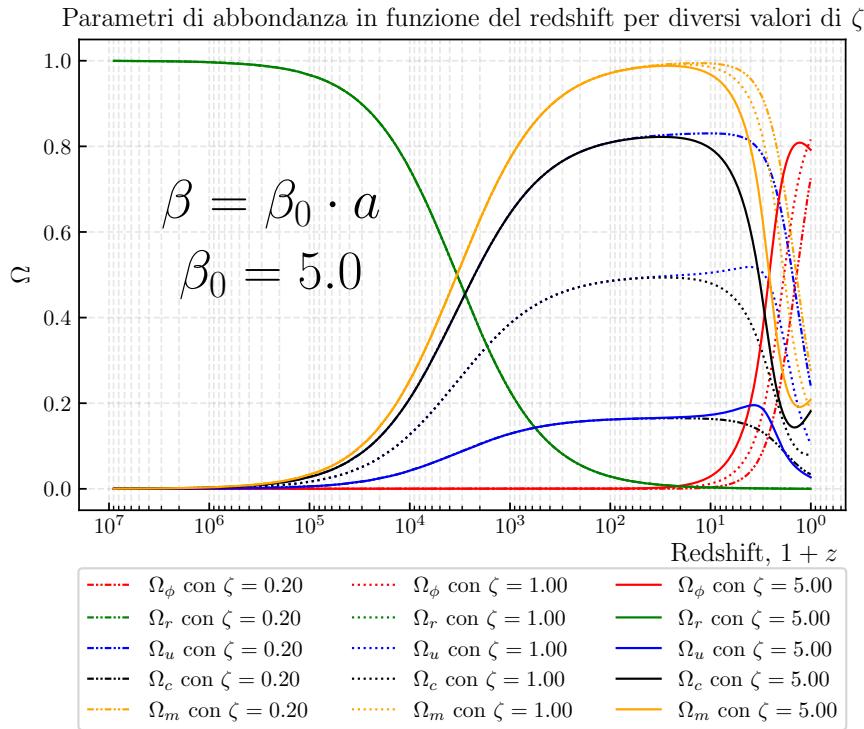


Figura 3.8: Parametri di abbondanza nel caso di un accoppiamento positivo ($\beta_0 = +5.00$) proporzionale al fattore di scala per diversi valori iniziali del rapporto ζ . Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione, in blu la componente non accoppiata di materia oscura, in nero la componente accoppiata di materia oscura e in arancione la materia totale.

Per $\beta_0 = +5.00$, tuttavia, si osserva (figura 3.8) un andamento particolare dell'abbondanza di materia, con un comportamento iniziale simile a quello atteso in un modello disaccoppiato, salvo poi subire un incremento a bassi redshift a seguito dell'incremento dell'abbondanza di materia oscura nel caso $\zeta = 5$. Per $\beta_0 = -5.00$ si osserva un andamento analogo (figura 3.9), sebbene più marcato.

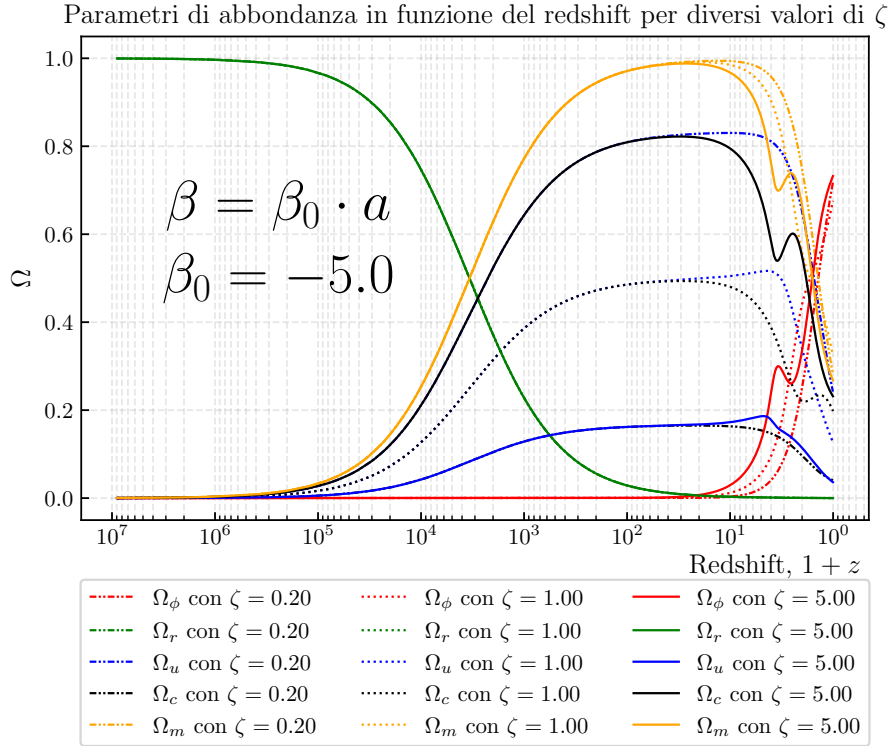


Figura 3.9: *Parametri di abbondanza nel caso di un accoppiamento proporzionale al fattore di scala negativo ($\beta_0 = -5.00$) per diversi valori iniziali del rapporto ζ . Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione, in blu la componente non accoppiata di materia oscura, in nero la componente accoppiata di materia oscura e in arancione la materia totale.*

Evoluzione dei parametri di Hubble

Per quanto riguarda il parametro di Hubble (figura 3.10), si osserva un comportamento analogo al caso di accoppiamento costante. Inizialmente, indipendentemente dal valore di ζ e del segno di β_0 , il parametro di Hubble assume valori inferiori rispetto al caso non accoppiato, per poi diventare maggiore a partire da redshift $z \simeq 1 - 2$. Anche in questo caso, la crescita a bassi redshift è tanto più grande quanto maggiore è il rapporto ζ iniziale, con un incremento massimo del 40% per $\zeta = 5$ e $\beta_0 = +5.00$. Valori uguali in modulo ma di segno opposto del coefficiente di accoppiamento β_0 portano ad un andamento identico ad alti redshift, con una differenza che si manifesta solamente a partire da $z \simeq 3$.

Parametri di Hubble normalizzato $H^{\beta_0}(z)/H^{\beta_0=0}(z)$ per diversi β_0

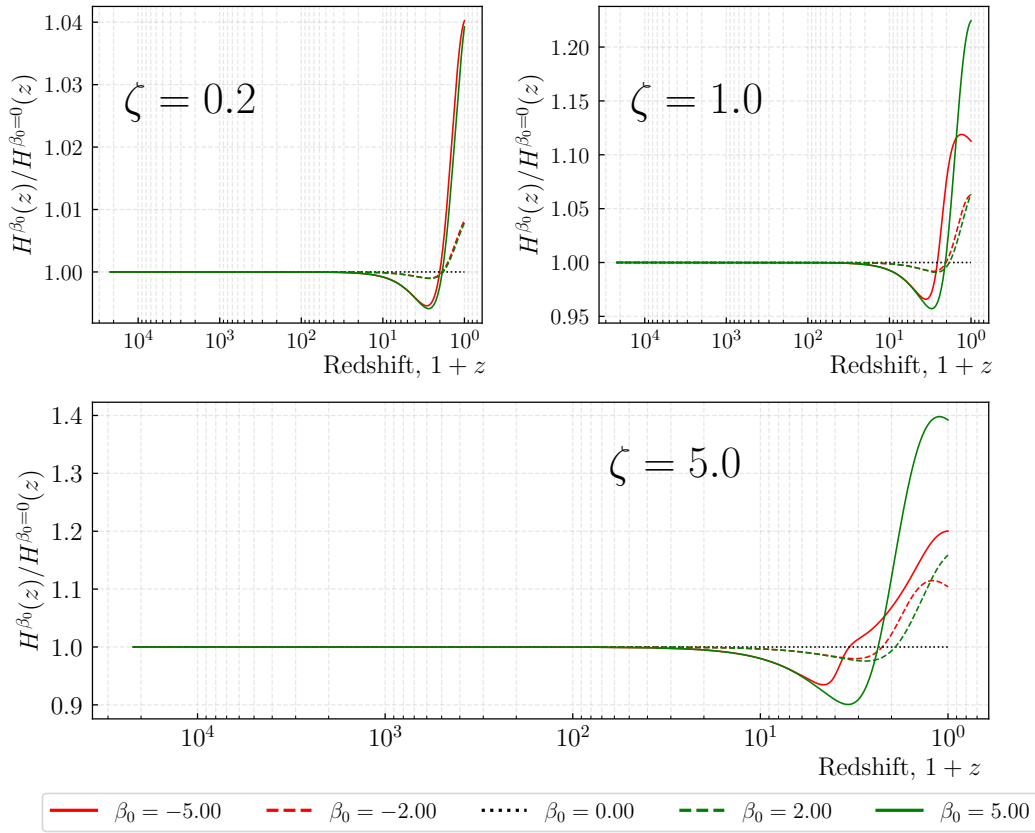


Figura 3.10: *Parametro di Hubble normalizzato nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala per diversi valori di β_0 . In verde si riportano gli accoppiamenti positivi, in rosso quelli negativi. Le linee tratteggiate rappresentano accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 2.00$, mentre quelle continue accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 5.00$.*

Evoluzione del campo scalare

Le somiglianze con il caso con accoppiamento costante seguono dall'andamento simile del valore del campo scalare ϕ e dal suo parametro di stato w_ϕ , riportati in figura 3.12. Anche in questo caso si osserva che il campo scalare si allontana rapidamente dalla condizione di costante cosmologica, assumendo il valore $w_\phi = +1$ fino a tempi recenti. Solamente per $\zeta = 2$ e $|\beta_0| = 2.00$ il campo scalare non raggiunge un parametro di stato pari a $+1$, ma circa $w_\phi \simeq 0.88$, a causa del debole accoppiamento con la materia oscura. Questo suggerisce che per simulare un campo scalare simile a una costante cosmologica è interessante modellare un accoppiamento pressoché nullo fino a tempi recenti.

In questo caso, tuttavia, l'andamento per β_0 positivo e negativo è praticamente identico, differenziandosi a bassi redshift solamente per $\zeta = 5$. Per $\zeta = 0.2$ e $\zeta = 1$, infatti, l'andamento del campo scalare è simmetrico rispetto al valore iniziale $\phi = \sqrt{\alpha} = 1$, salvo che per $\zeta = 1.00$ e $\beta_0 = -5.00$, dove il "rimbalzo" sul valore di costante cosmologica avviene prima che del caso positivo. Questo si riflette nella funzione di Hubble, che nel caso di accoppiamento negativo comincia ad assumere valori superiori a quella del caso non accoppiato prima di quella corrispondente al caso con coefficiente $\beta_0 = +5.00$. Come atteso, a $\zeta = 5.00$ e $|\beta_0| = 5.00$ si osserva un andamento del campo scalare molto più marcato, caratterizzato da molteplici oscillazioni sul valore di costante cosmologica.

Campo scalare $\frac{\phi}{m_{\text{pl}}}$ per diversi β_0

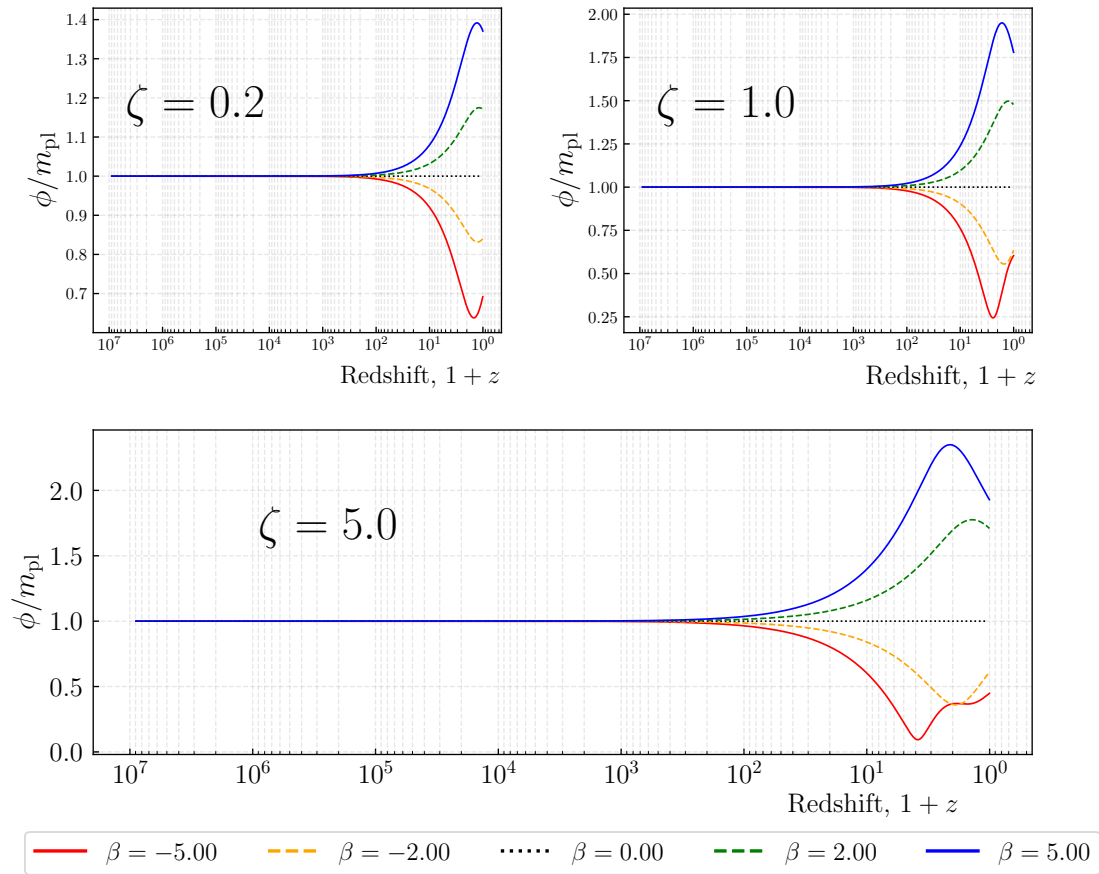


Figura 3.11: Andamento del campo scalare ϕ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala.

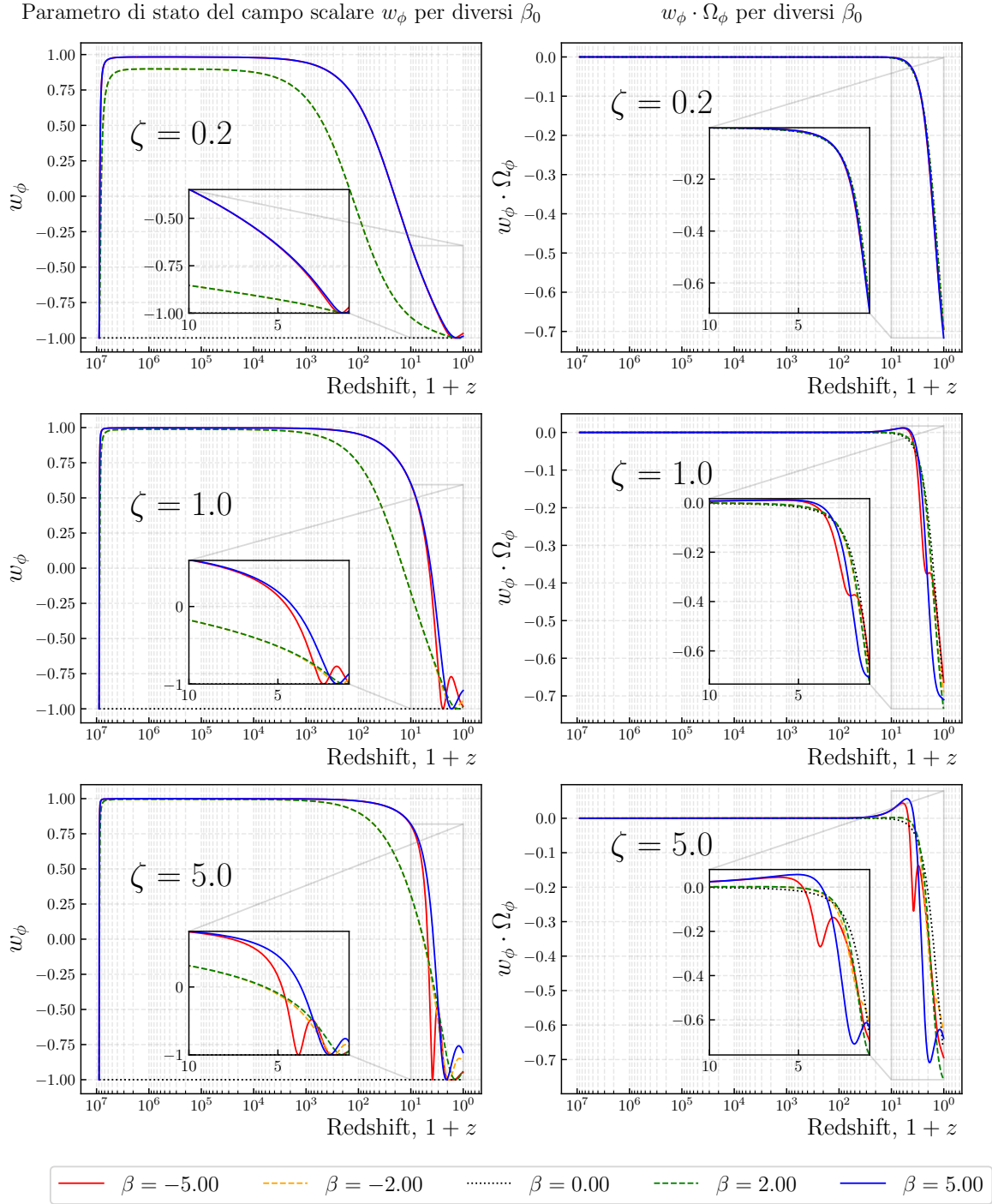


Figura 3.12: A sinistra, parametro di stato del campo scalare ϕ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala. A destra, evoluzione di $w_\phi \cdot \Omega_\phi$ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala. Nei riquadri si riportano gli andamenti ristretti all'intervallo $z \in [0, 10]$.

3.4.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0

Come si osserva in figura 3.13, l'intensità dell'accoppiamento è nulla per tutti i modelli fino a $z \simeq 10^2$. Per questo motivo le perturbazioni evolvono inizialmente come nel caso non accoppiato, salvo poi discostarsi solamente quando l'accoppiamento comincia a diventare significativo, ovvero a partire da $z \simeq 10$. Dalla figura 3.14 si osserva inoltre che, anche per accoppiamenti proporzionali al fattore di scala, il fattore di crescita totale D_+ è sempre superiore al caso non accoppiato, con una crescita tanto più marcata quanto maggiore è il rapporto ζ iniziale e l'intensità dell'accoppiamento β_0 .

Accoppiamenti di intensità $|\beta_0| = 2.00$ portano infatti, per tutti i valori di ζ , a un fattore di crescita totale notevolmente inferiore al caso in cui $|\beta_0| = 5.00$. Per $\zeta = 0.2$ si osserva un fattore di crescita dell'8% superiore rispetto al caso non accoppiato a tempi odierni per accoppiamenti di intensità $\beta_0 = 5.00$, che si riduce a meno del 2% per accoppiamenti di intensità $\beta_0 = 2.00$. Per $\zeta = 5.00$, invece, si nota un fattore di crescita notevolmente superiore, con l'accoppiamento negativo che porta a una crescita delle perturbazioni a tempi recenti pari a 2 volte quella corrispondente al caso positivo, pari a circa il 400% superiore rispetto al modello non accoppiato.

Dall'analisi delle perturbazioni lineari si osserva chiaramente come, nonostante l'effetto sul parametro di Hubble sia simile al caso con accoppiamento costante, l'effetto sull'evoluzione delle perturbazioni, invece, sia enorme. Questo fa sì che questi modelli con queste intensità di accoppiamento siano incompatibili con le osservazioni cosmologiche.

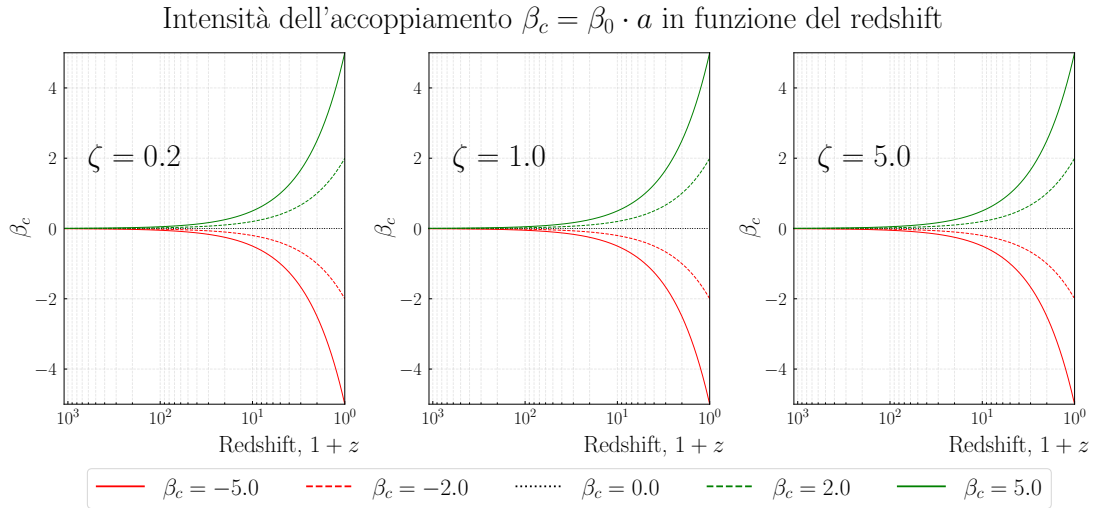


Figura 3.13: Andamento dell'intensità dell'accoppiamento β_c al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala. In verde si riportano gli accoppiamenti positivi, in rosso quelli negativi. Le linee tratteggiate rappresentano accoppiamenti con $|\beta_0| = 2.00$, mentre quelle continue accoppiamenti $|\beta_0| = 5.00$.

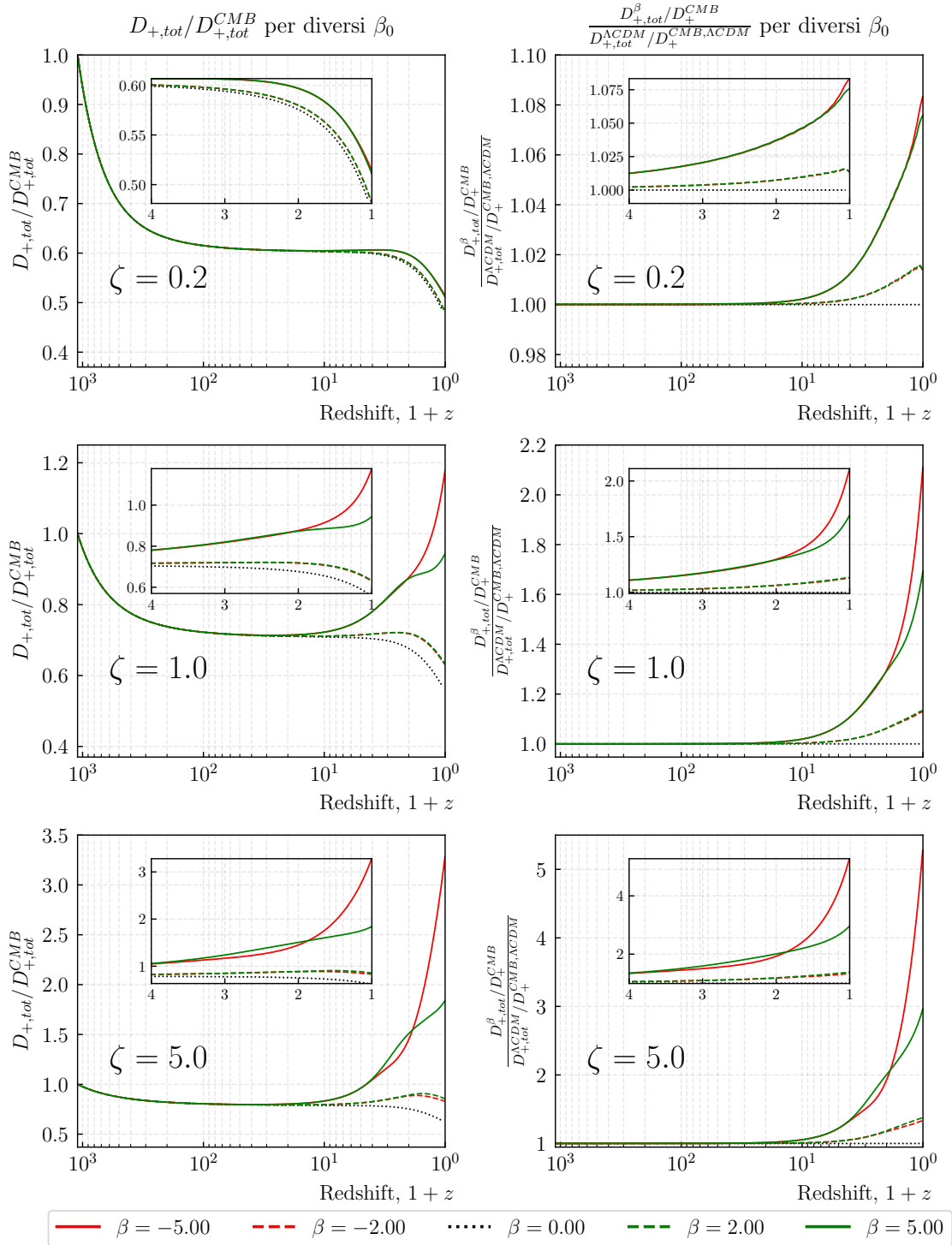


Figura 3.14: A sinistra, il fattore di crescita totale normalizzato alla CMB al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale al fattore di scala. A destra, il rapporto tra il fattore di crescita totale e il fattore di crescita per il caso non accoppiato, entrambi normalizzati alla CMB. Nei riquadri si riportano gli andamenti ristretti all'intervallo $z \in [0, 3]$

3.5 Accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare

Al fine di modellare un campo scalare che si comporti come una costante cosmologica per gran parte dell'evoluzione dell'Universo risulta naturale introdurre un accoppiamento che sia proporzionale a una qualche potenza del parametro di abbondanza del campo scalare. Come risulta dal caso non accoppiato, infatti, $\Omega_\phi \ll 1$ fino a tempi recenti, facendo sì che un accoppiamento proporzionale a Ω_ϕ o a una sua potenza risulti essere nullo e il campo si comporti come una costante cosmologica. L'accoppiamento comincia a diventare rilevante solamente a bassi redshift, quando Ω_ϕ comincia a crescere.

In questa sezione si riportano i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate nel caso di un accoppiamento proporzionale al parametro di abbondanza del campo scalare, del tipo $\beta = \beta_0 \cdot \Omega_\phi / \Omega_{\phi,0}$, dove $\Omega_{\phi,0}$ rappresenta la densità di materia oscura odierna secondo il modello standard. In particolare, si considerano per tre diversi valori iniziali del rapporto tra le due specie di materia oscura ($\zeta = 0.2, 1, 5$) sia accoppiamenti positivi che negativi ($\beta = \pm 2.00, \pm 5.00$). Anche in questo caso il valore di β_c si mantiene prossimo al valore nullo per gran parte dell'evoluzione dell'universo, permettendo di considerare valori di β_0 superiori all'unità, sebbene l'analisi delle perturbazioni, come nel caso dell'accoppiamento proporzionale al fattore di scala, ne riveli una crescita eccessiva.

3.5.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di ζ e β_0

Evoluzione dei parametri di abbondanza

In questo caso non si osservano differenze significative degli andamenti dei parametri di abbondanza con il caso non accoppiato. L'accoppiamento pressoché nullo fino a tempi recenti, infatti, porta a un andamento molto simile per i parametri di abbondanza per diversi ζ , che cominciano a differenziarsi solamente a tempi recenti, come si può osservare in figura 3.15. Come atteso, si osserva che la *ϕ -dominated era* comincia prima per $\zeta = 5$ a causa della maggior accoppiamento con la materia oscura, mentre ritarda leggermente per ζ inferiori.

Si riporta solamente la figura relativa all'accoppiamento positivo in quanto negli altri casi l'andamento è analogo.

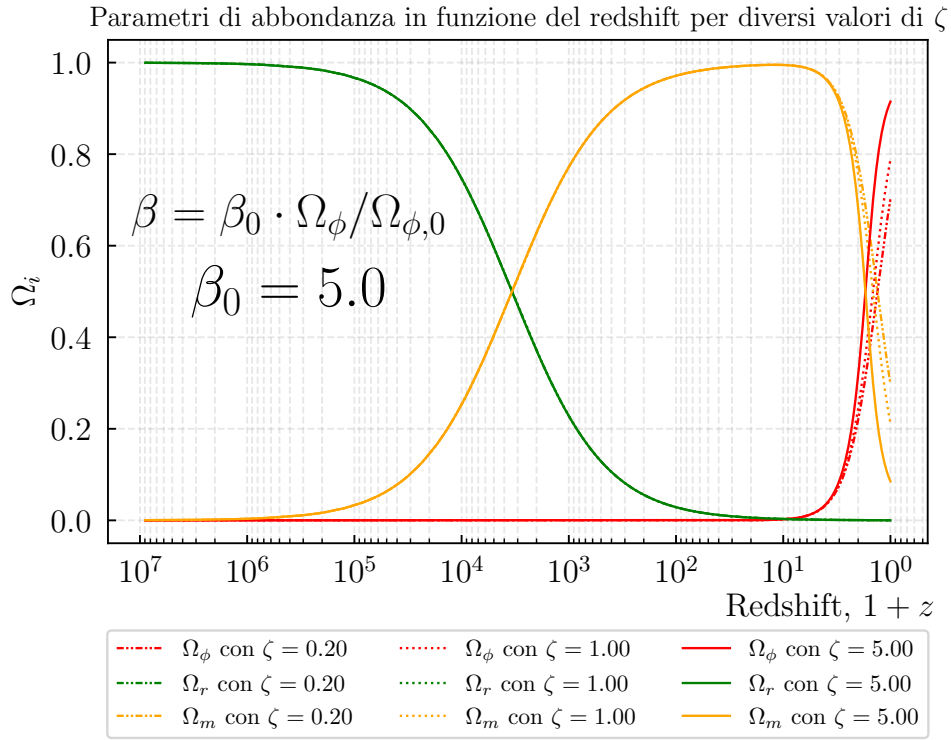


Figura 3.15: Si riporta in figura l'andamento dei parametri di abbondanza per $\beta_0 = 5.00$ e diversi ζ nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare. Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione e in arancione la materia totale.

Evoluzione del parametro di Hubble

Per quanto riguarda il parametro di Hubble (figura 3.16) si osserva un comportamento del tutto identico a un modello di tipo Λ CDM fino a redshift $z \simeq 4$, indipendentemente dal valore ζ . L'andamento è analogo a tutti i modelli studiati, con un primo momento in cui la crescita dell'universo è più lenta, salvo poi diventare più rapida.

A differenza degli altri modelli, tuttavia, questo accade a redshift $z \simeq 0.5$, notevolmente in ritardo rispetto agli altri modelli studiati. Questo è dovuto al fatto che l'accoppiamento comincia a essere rilevante solamente a bassi redshift, quando la densità di energia oscura comincia a crescere, cosa che avviene a partire da redshift $z \simeq 3 - 4$. Questo "ritardo" nell'aumento del parametro di Hubble rispetto alla crescita della densità di materia oscura è spiegabile grazie all'equazione di H' del sistema 3.4. Ricordando che la quantità $x^2 - y^2 = w_\phi \cdot \Omega_\phi$ e che $r^2 = \Omega_r \ll 1$, a bassi redshift l'equazione può essere riscritta come $H' \simeq -\frac{3H}{2} (1 + w_\phi \cdot \Omega_\phi)$. Ricordando che l'apice si riferisce alla derivata rispetto al tempo cosmico, segue che quando $w_\phi \cdot \Omega_\phi > w_\phi \cdot \Omega_\phi^{\beta_0=0}$ la funzione di Hubble decresce nel tempo più velocemente rispetto al caso non accoppiato ($w_\phi = -1$), mentre quando $w_\phi \cdot \Omega_\phi < w_\phi \cdot \Omega_\phi^{\beta_0=0}$ la funzione di Hubble decresce più lentamente rispetto al caso non accoppiato, risultando dunque superiore in modulo.

Come si osserva in figura 3.18, la quantità $w_\phi \cdot \Omega_\phi$ assume valori superiori al caso non accoppiato solamente a partire da $z \simeq 0.5$, nonostante la densità di materia oscura accoppiata cominci a crescere prima. Negli altri modelli, invece, questo accade a redshift $z \in [2, 10]$.

Parametri di Hubble normalizzato $H^{\beta_0}(z)/H^{\beta_0=0}(z)$ per diversi β_0

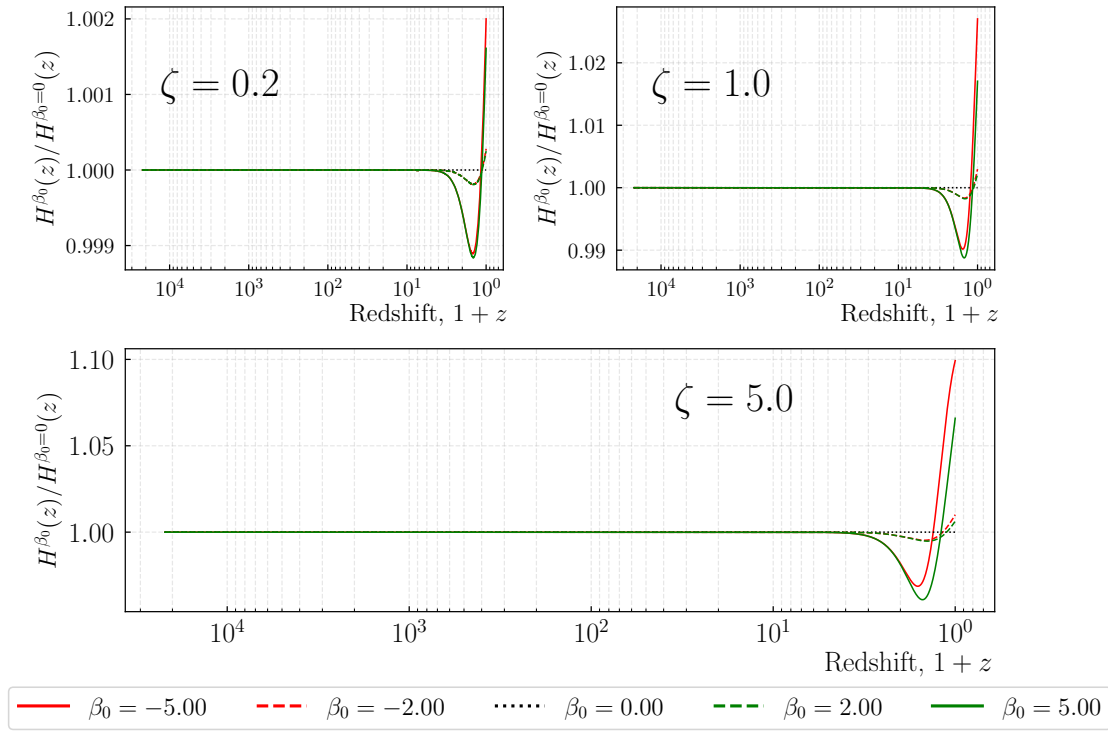


Figura 3.16: *Parametro di Hubble normalizzato nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare per diversi valori di β_0 . In verde si riportano gli accoppiamenti positivi, in rosso quelli negativi. Le linee tratteggiate rappresentano accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 2.00$, mentre quelle continue accoppiamenti in modulo $|\beta_0| = 5.00$.*

Si osserva inoltre che, per bassi rapporti del rapporto ζ e/o accoppiamento con $|\beta_0| = 2.00$, lo scostamento da un modello di tipo Λ CDM è minimo. Per $\zeta = 0.2$, infatti, a tempi odierni il parametro di Hubble per $|\beta_0| = 5$ è solamente dello 0.2% circa superiore, di fatto indistinguibile da un modello non accoppiato. Solamente per $\zeta \geq 1$ si osserva un incremento di qualche punto percentuale. In particolare, nel caso $\zeta = 5$ e $|\beta_0| = 5.00$, si osserva che a tempi recenti $\Delta H/H_{\Lambda\text{CDM}} \simeq 10\%$.

Infine, per tutti e tre i valori di ζ considerati, l'accoppiamento negativo porta ad un incremento del parametro di Hubble a bassi redshift maggiore rispetto al caso positivo.

Evoluzione del campo scalare

L'andamento del parametro di stato del campo scalare w_ϕ , riportato in figura 3.18 è notevolmente diverso rispetto agli altri modelli studiati. In questo caso, infatti, il campo scalare si comporta come una costante cosmologica fino a redshift $z \simeq 10$, quando comincia a crescere rapidamente. Dopo aver raggiunto un picco attorno a $z \simeq 2$ indipendentemente dal valore di ζ , il parametro di stato comincia a decrescere nuovamente.

Sebbene il picco sia raggiunto a redshift simili per tutti i valori di ζ , il valore del picco è tanto più alto quanto maggiore è il rapporto ζ iniziale e il valore di $|\beta_0|$. Per $\zeta = 0.2$ e $|\beta_0| = 5.00$, infatti, il picco è pari a $w_\phi \simeq -0.98$, di conseguenza il campo scalare si allontana molto lievemente dalla condizione di costante cosmologica. Per $|\beta_0| = 2.00$, invece, il picco è inferiore a $w_\phi \simeq -0.995$, con una variazione solamente dello 0.5% rispetto al modello Λ CDM. Solamente per $\zeta = 5$ si osserva un picco pari a $w_\phi \simeq -0.5$, raggiunto per $|\beta_0| = 5.00$. Nel caso con accoppiamento negativo, infine, si riscontra un "rimbalzo", osservabile anche nell'andamento del campo scalare ϕ , che comincia a crescere nuovamente dopo aver raggiunto un minimo pari a $\phi/m_{pl} = 0.4$.

Campo scalare $\frac{\phi}{m_{pl}}$ per diversi β_0

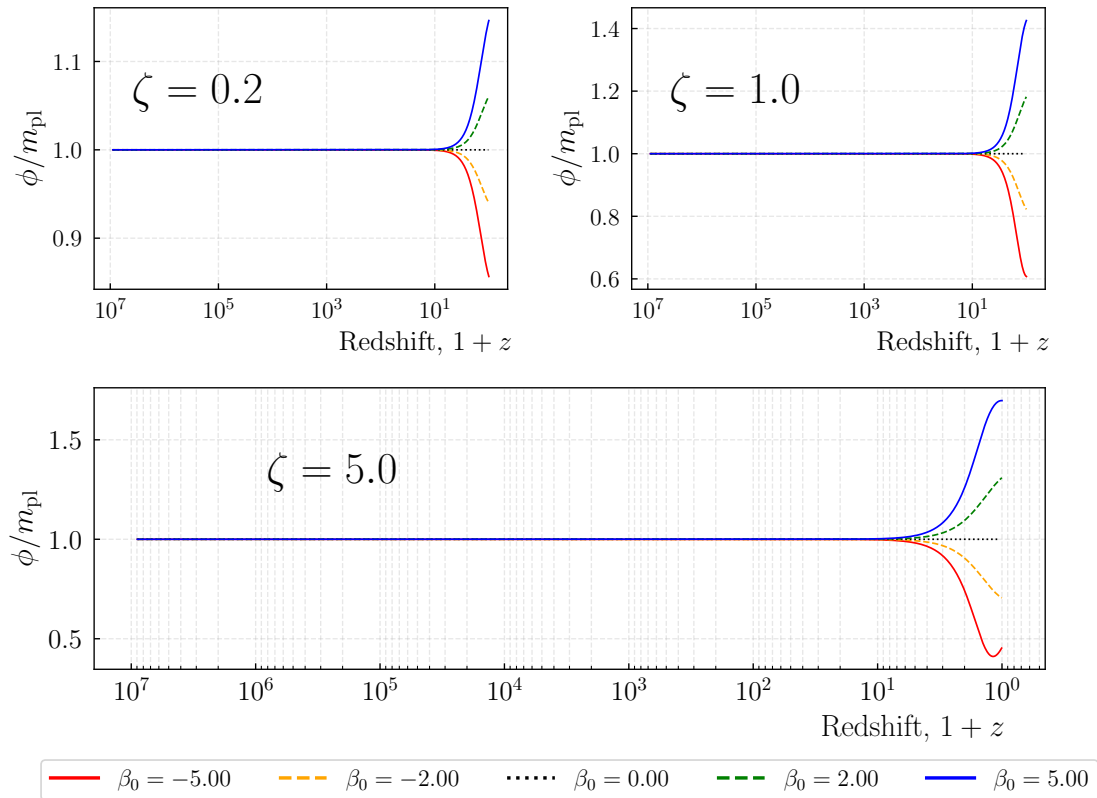


Figura 3.17: Andamento del campo scalare ϕ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare.

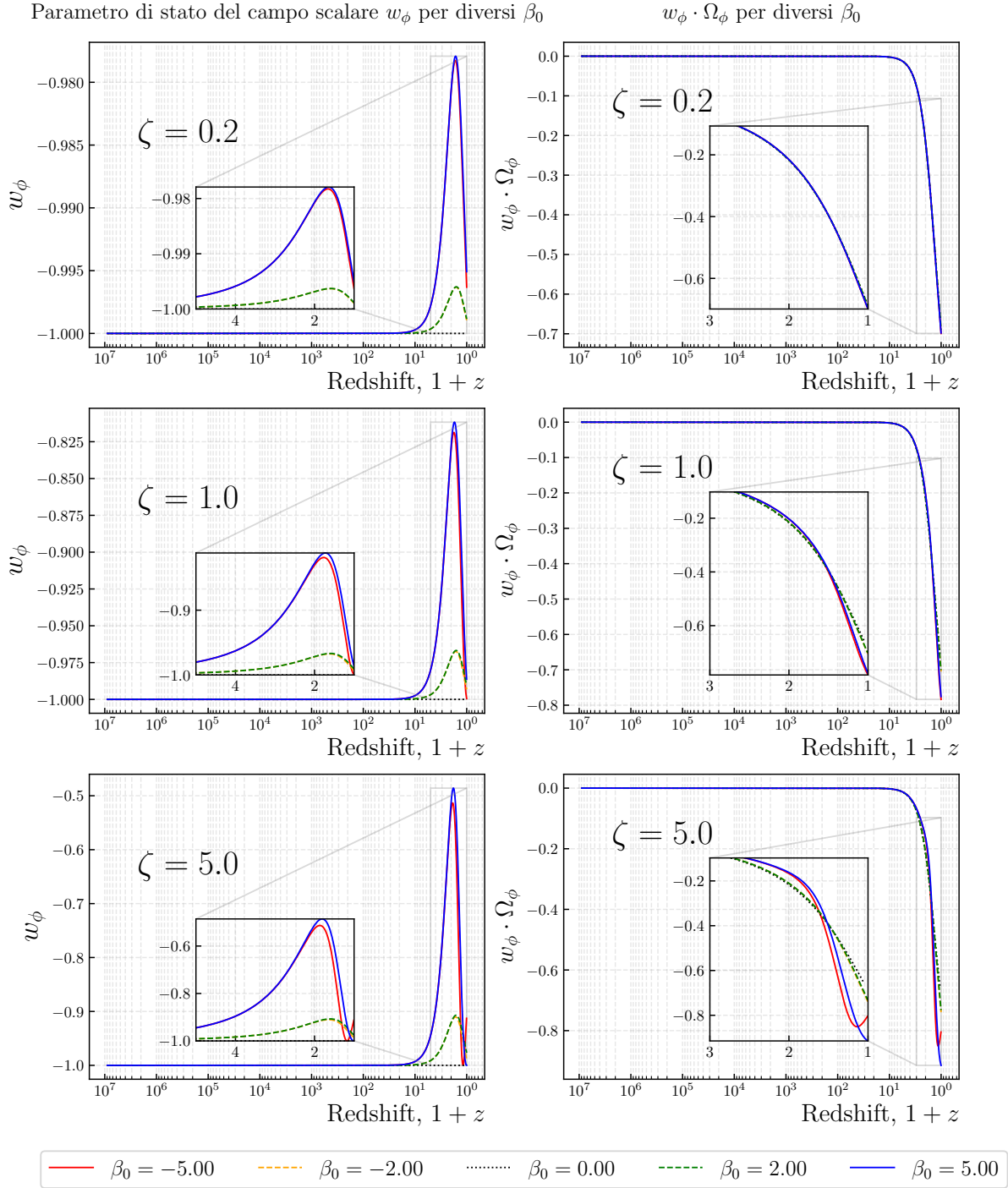


Figura 3.18: A sinistra, parametro di stato del campo scalare ϕ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare. A destra, evoluzione di $w_\phi \cdot \Omega_\phi$ al variare di ζ per diversi β_0 nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare. Nei riquadri si riportano gli andamenti ristretti a bassi redshift.

3.5.2 Evoluzione delle perturbazioni al variare di ζ e β_0

Sebbene a livello di background non si osservino differenze significative rispetto al caso non accoppiato, per quanto riguarda la crescita delle perturbazioni si osservano notevoli differenze nell'entità delle perturbazioni a tempi recenti, in particolare per $\beta_0 = \pm 5.00$.

Dalla figura 3.20 si osserva come l'andamento del fattore di crescita totale D_+ sia in linea con l'andamento dell'intensità dell'accoppiamento riportato in figura 3.19. Si osserva infatti che il *growth factor* è indistinguibile da quello del caso non accoppiato fino a $z \simeq 2$, quando l'accoppiamento comincia a diventare significativo.

Come negli altri modelli studiati, l'aumento del fattore di crescita totale rispetto al caso non accoppiato è tanto più rapido quanto maggiore è il valore di ζ e l'intensità dell'accoppiamento. In particolare, per $\zeta = 0.20$ e $|\beta_0| = 2.00$ l'aumento a tempi odierni è inferiore all'1%, che sale al 4% per $|\beta_0| = 5.00$. L'aumento è notevolmente superiore per $\zeta = 5.00$, con un incremento del 20% superiore per $|\beta_0| = 2.00$ e del 200% superiore per $|\beta_0| = 5.00$.

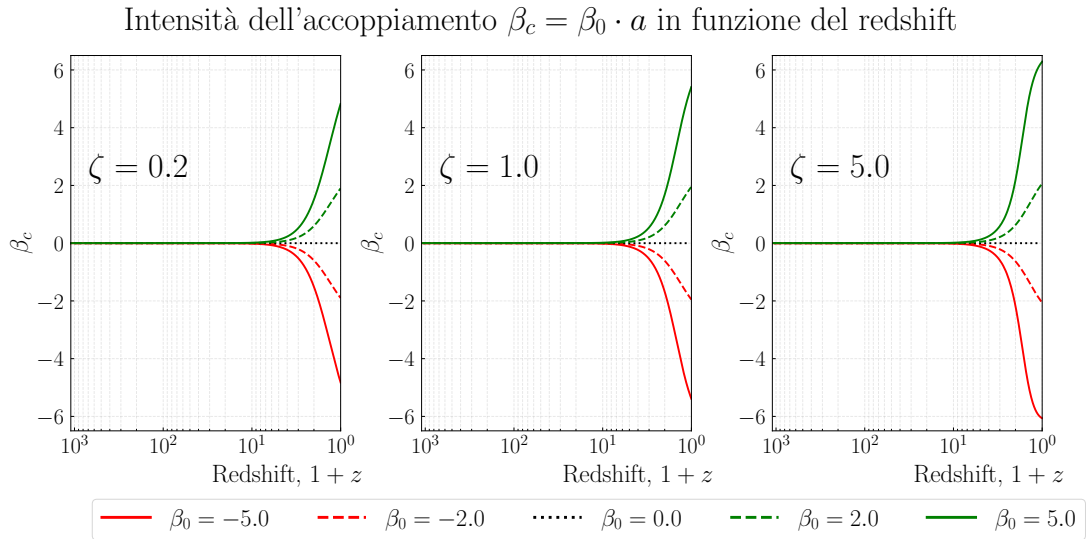


Figura 3.19: Andamento dell'intensità dell'accoppiamento β_c al variare di ζ per diversi β nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare. In verde si riportano gli accoppiamenti positivi, in rosso quelli negativi. Le linee tratteggiate rappresentano accoppiamenti con $|\beta_0| = 2.00$, mentre quelle continue accoppiamenti $|\beta_0| = 5.00$.

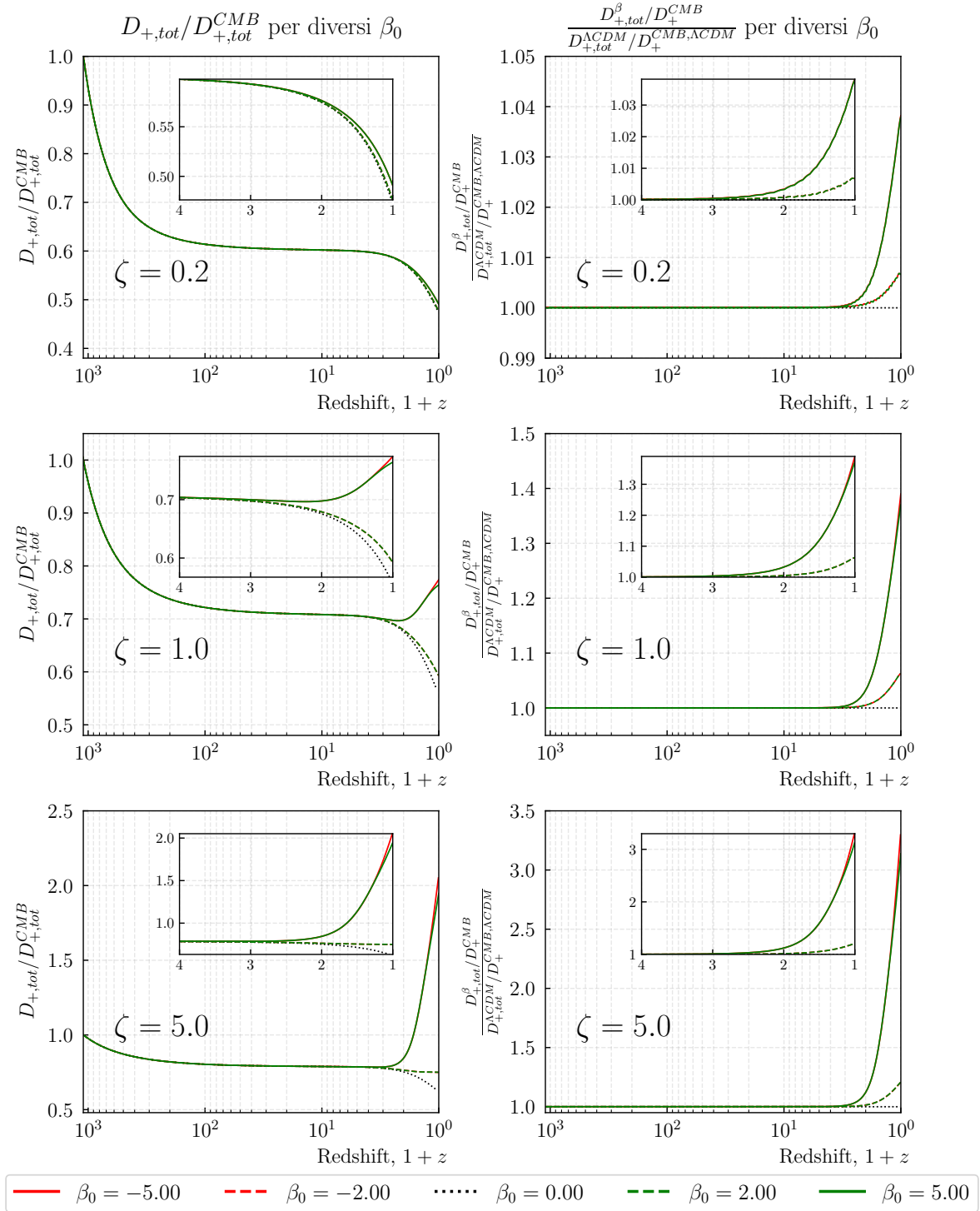


Figura 3.20: A sinistra, il fattore di crescita totale normalizzato alla CMB al variare di ζ per diversi β nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare. A destra, il rapporto tra il fattore di crescita totale e il fattore di crescita per il caso non accoppiato, entrambi normalizzati alla CMB.

3.6 Confronto tra i modelli

In quest'ultima sezione si riporta un confronto tra i modelli studiati, al fine di evidenziare le differenze e le similitudini tra i diversi accoppiamenti considerati in tabella 3.1 e rappresentati in figura 3.21.

In particolare, nel confronto tra modelli si considera solamente il caso in cui il rapporto iniziale tra le due specie di materia oscura valga $\zeta = 5.00$. Infine, considerato che sia per l'accoppiamento proporzionale al fattore di scala che per quello proporzionale alla densità del campo scalare non si osservano differenze significative tra accoppiamenti positivi e negativi, si considerano solamente i casi con accoppiamento negativo di intensità $\beta_0 = -5.00$.

Tipo di accoppiamento	β_0	ζ	Nome
<i>Costante</i>	0.00	5.00	Λ CDM
<i>Costante</i>	-0.20	5.00	CONST_COUPLING
<i>Proporzionale al fattore di scala</i>	-5.00	5.00	PROP_TO_A
<i>Proporzionale alla densità del campo scalare</i>	-5.00	5.00	PROP_TO_PHI

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva dei modelli considerati per il confronto. Si riportano il tipo di accoppiamento, il valore del coefficiente di accoppiamento β_0 e il rapporto iniziale di materia oscura e materia barionica ζ , nonché il nome utilizzato per indicare il modello.

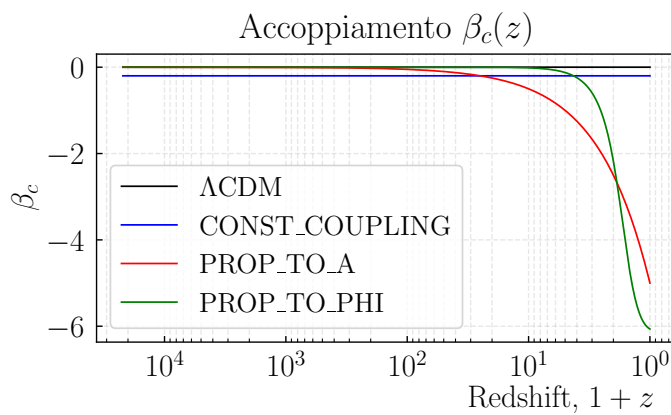


Figura 3.21: Si riporta in figura l'andamento del coefficiente di accoppiamento β_c per i modelli considerati

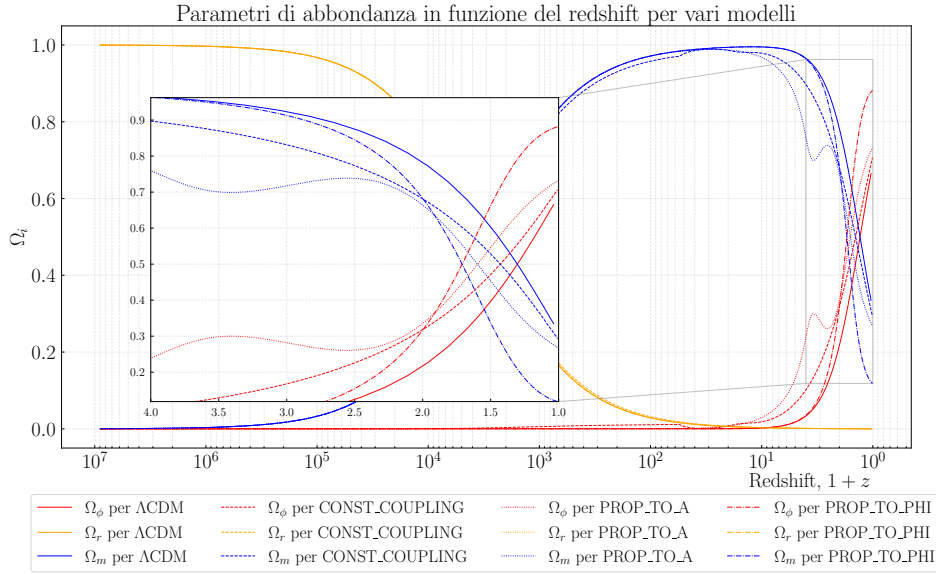


Figura 3.22: Si riporta in figura l'andamento dei parametri di abbondanza per i modelli considerati. Sono riportati in rosso il campo scalare, in verde la radiazione e in blu la materia totale.

Riguardo l'andamento dei parametri di abbondanza si osserva un comportamento simile per i modelli Λ CDM, CONST_COUPLING e PROP_TO_PHI. Come si osserva in figura 3.22 il modello CONST_COUPLING si discosta molto prima dagli altri due, attorno a $z \simeq 10^3 - 10^4$, con un aumento dell'abbondanza del campo scalare. Tuttavia, esso si mantiene molto vicino al modello Λ CDM fino a redshift $z \simeq 10$, quando l'abbondanza comincia a crescere rapidamente, cosa che accade per gli altri due modelli solamente a partire da redshift $z \simeq 3$. Sebbene nel modello PROP_TO_PHI l'aumento di Ω_ϕ cominci dopo, questo è più rapido, superando sia il modello CONST_COUPLING che il modello PROP_TO_A a partire da redshift $z \simeq 2$. Segue un comportamento analogo, ma invertito, per la densità di materia, che comincia a diminuire prima per il modello CONST_COUPLING, per poi diminuire più lentamente del modello PROP_TO_PHI a partire da redshift $z \simeq 2$.

Nel modello PROP_TO_A, invece, si osserva un andamento simile, ma diverso nel range $z \in [3, 4]$. In questo intervallo, infatti, si osserva un'oscillazione dell'abbondanza di materia oscura e del campo scalare, che interrompono temporaneamente rispettivamente la loro decrescita e crescita.

Dal momento che le equazioni 2.11 non contengono accoppiamenti del campo scalare con la radiazione, questa evolve in modo identico per tutti i modelli indistintamente.

Rispetto al modello Λ CDM, il parametro di Hubble (figura 3.23) evolve con lo stesso andamento per tutti i modelli, sebbene in tempi diversi. Tutti i modelli analizzati, infatti, presentano un parametro di Hubble inizialmente uguale a quello del modello Λ CDM, che

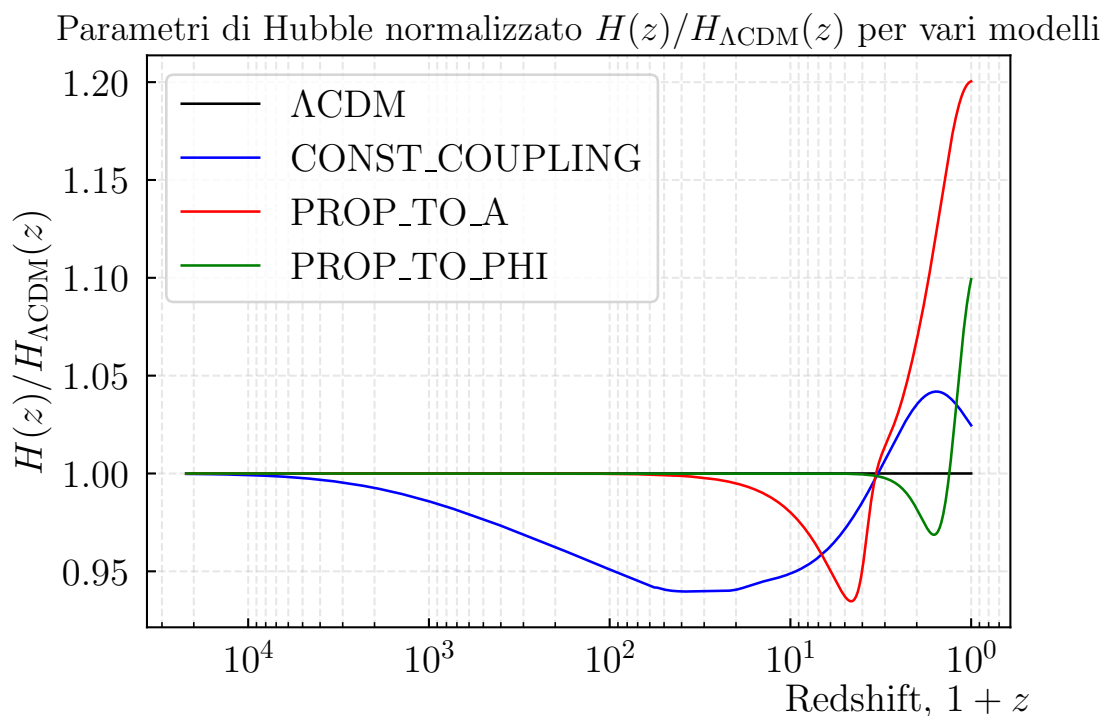


Figura 3.23: Si riporta in figura l'andamento del rapporto tra il parametro di Hubble per i diversi modelli considerati e il parametro di Hubble del modello non accoppiato.

poi decresce e, successivamente, cresce fino a diventare maggiore di quello del modello ΛCDM a tempi recenti. Si osserva in tutti e tre i casi che, a tempi odierni, la crescita del parametro di Hubble rispetto al modello ΛCDM è in diminuzione.

Il primo a distinguersi è il modello CONST_COUPLING, il quale diverge dal ΛCDM a redshift $z = 10^4$, raggiungendo un valore di circa il 5% inferiore attorno a redshift $z \simeq 12 - 13$. Successivamente, H torna a crescere, raggiungendo un valore superiore al 4% a redshift $z \simeq 1.5$, per poi cominciare a decrescere nuovamente.

I modelli PROP_TO_A e PROP_TO_PHI, invece, presentano un andamento simile, sebbene il primo più marcato e anticipato rispetto al secondo. In particolare, il modello PROP_TO_A comincia a discostarsi a redshift $z \simeq 15$, raggiungendo un valore inferiore del 5% rispetto al modello ΛCDM a redshift $z \simeq 5$ e un valore del 20% superiore a tempi odierni. Il modello PROP_TO_PHI, invece, si discosta dal ΛCDM più recentemente, a redshift $z \simeq 4$, raggiungendo un valore solamente del 2 – 3% inferiore a quello del modello ΛCDM a redshift $z \simeq 1.5$, per poi ricominciare a crescere fino a un valore del 10% superiore a $z = 0$.

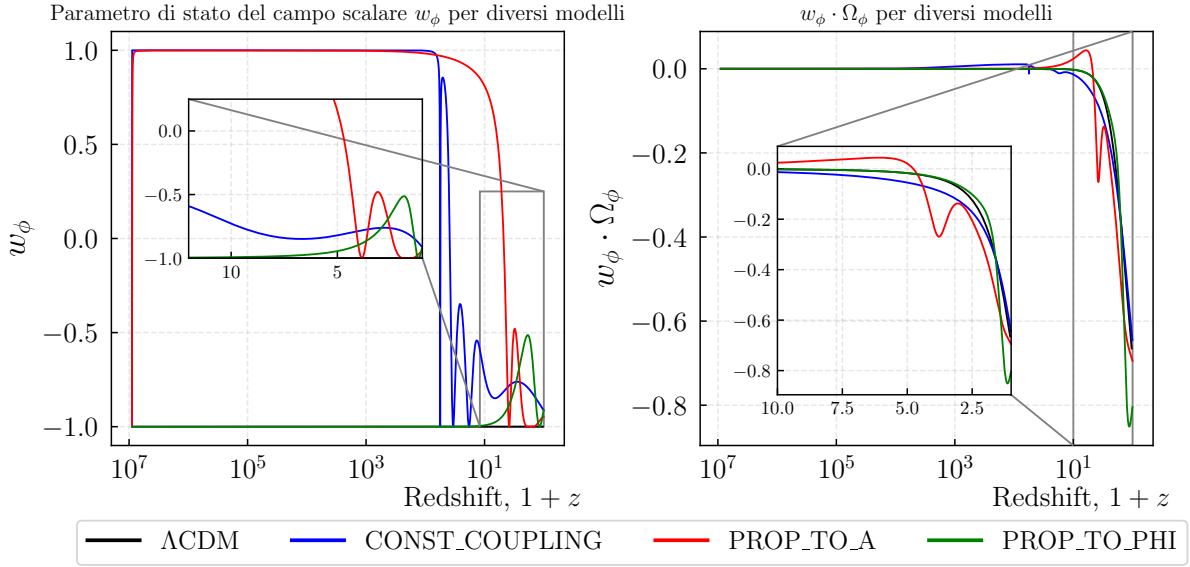


Figura 3.24: Si riporta in figura l'andamento del rapporto tra il parametro di stato w_ϕ e del prodotto $w_\phi \cdot \Omega_\phi$ per i diversi modelli considerati.

Ad eccezione del modello Λ CDM che, in quanto non accoppiato, presenta un campo scalare fisso al valore iniziale con $w_\phi = -1$ per tutta l'evoluzione dell'universo (figura 3.24), tutti gli altri modelli, eccetto il modello PROP_TO_PHI, presentano un campo scalare che abbandona rapidamente la condizione di costante cosmologica per poi riavvicinarsi, attraverso diversi "rimbalzi", solamente a tempi recenti. Il modello che compie più rimbalzi sul ramo *power law* del potenziale SUGRA è il modello CONST_COUPLING, seguito da quello PROP_TO_A. Il modello PROP_TO_PHI, invece, presenta un andamento del campo scalare molto più simile a quello di una costante cosmologica, con un parametro di stato w_ϕ che si mantiene molto vicino a -1 fino a redshift $z \simeq 10$, per poi crescere rapidamente e raggiungere un picco attorno a $w_\phi \simeq -0.5$ per $z \simeq 1$.

L'andamento del campo scalare ϕ riflette questo comportamento oscillante (figura 3.25) del parametro di stato, con il campo che inverte la propria direzione ad ogni rimbalzo sul valore di costante cosmologica.

Infine, come si osserva in figura 3.26, per quanto riguarda la crescita delle perturbazioni si osserva per tutti i modelli considerati un fattore di crescita totale D_+ superiore al caso non accoppiato. Il modello CONST_COUPLING presenta un andamento del fattore di crescita sempre superiore a quello del modello Λ CDM, salvo poi riavvicinarsi a tempi recenti. I modelli PROP_TO_A e PROP_TO_PHI, a causa dell'accoppiamento nullo per gran parte dell'evoluzione dell'universo, presentano una crescita delle perturbazioni molto simile a quella del modello Λ CDM, fin quando non subiscono un aumento notevole a partire da redshift $z \simeq 10$ per il modello PROP_TO_A e da $z \simeq 1$ per il modello PROP_TO_PHI. Questo fatto rende questi modelli incompatibili con le osservazioni cosmologiche.

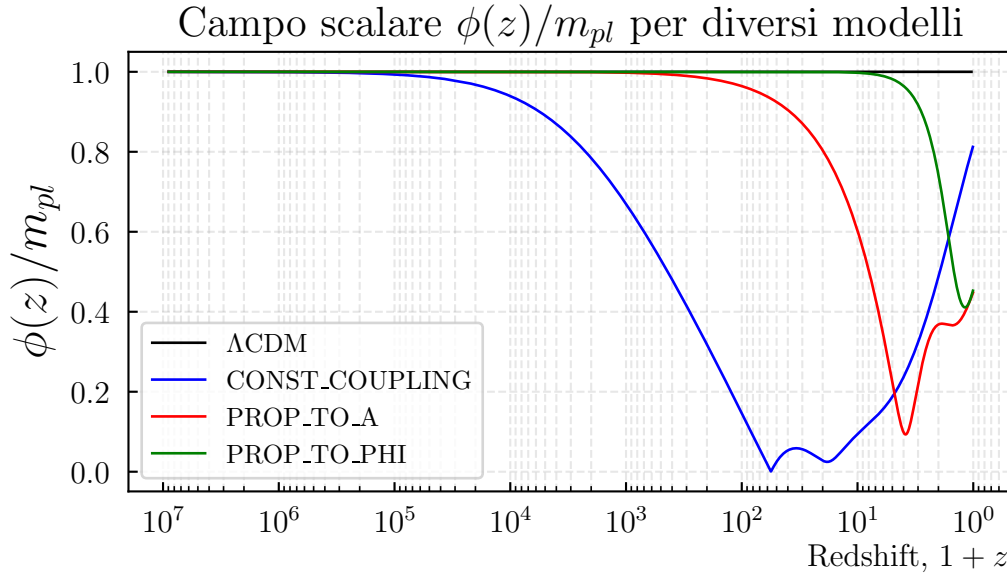


Figura 3.25: Si riporta in figura l'andamento del campo scalare ϕ per i diversi modelli considerati.

L'andamento del fattore di crescita totale D_+ è spiegabile osservando gli andamenti dei termini di frizione e di *quinta forza* riportati in figura 3.27. Ad alti redshift, infatti, il termine di frizione per il caso `CONST_COUPLING` è positivo, facendo sì che, sommandosi al termine di quinta forza $\Gamma = 1 + \frac{4}{3}\beta_c^2$ positivo, porta a una crescita delle perturbazioni superiore al caso non accoppiato, in cui questi due termini sono nulli. Solamente a partire da redshift $\simeq 60$ il termine di frizione, salvo un breve intervallo attorno a $z \simeq 30$, diventa negativo, in accordo con l'andamento del campo scalare osservato in 3.25, rallentando così la crescita delle perturbazioni che si riavvicina a quella del modello Λ CDM. Nei modelli `PROP_TO_A` e `PROP_TO_PHI`, invece, il termine di frizione è nullo fino a redshift $z \simeq 10$, nel caso `PROP_TO_A`, e $z \simeq 3$, nel caso `PROP_TO_PHI`. A questi redshift, tuttavia, comincia a diventare dominante il termine di *quinta forza* che causa una rapida crescita del *growth factor*, notevolmente superiore a quella del modello Λ CDM.

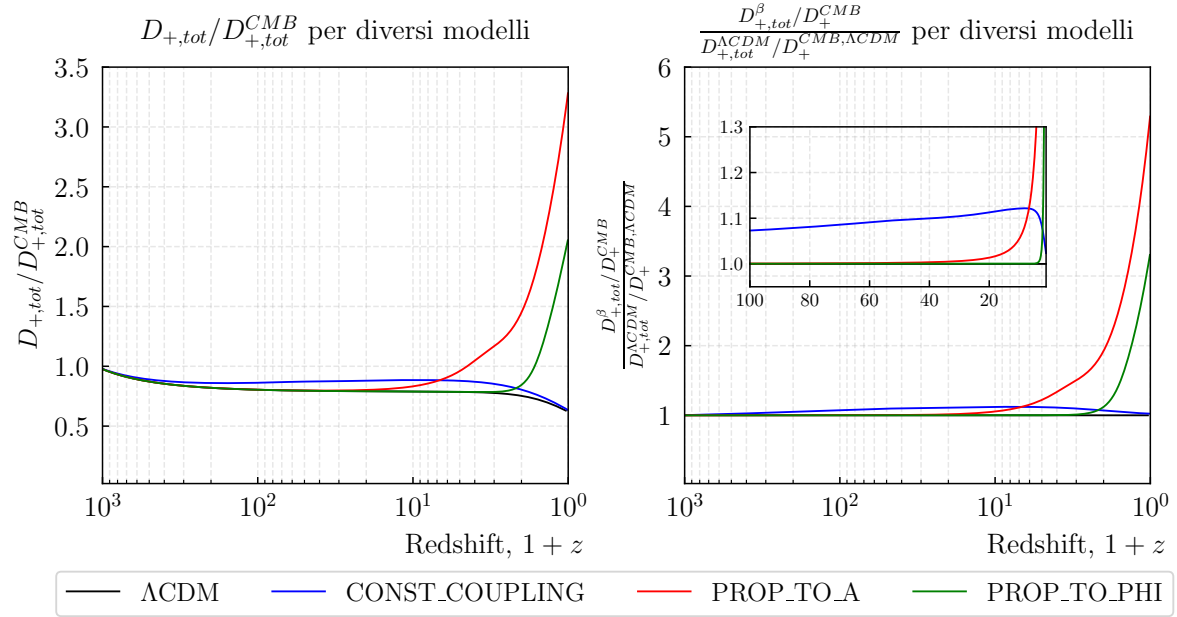


Figura 3.26: Si riporta in figura l'andamento del fattore di crescita normalizzato alla CMB e il rapporto tra questo e quello del modello ΛCDM per i diversi modelli considerati.

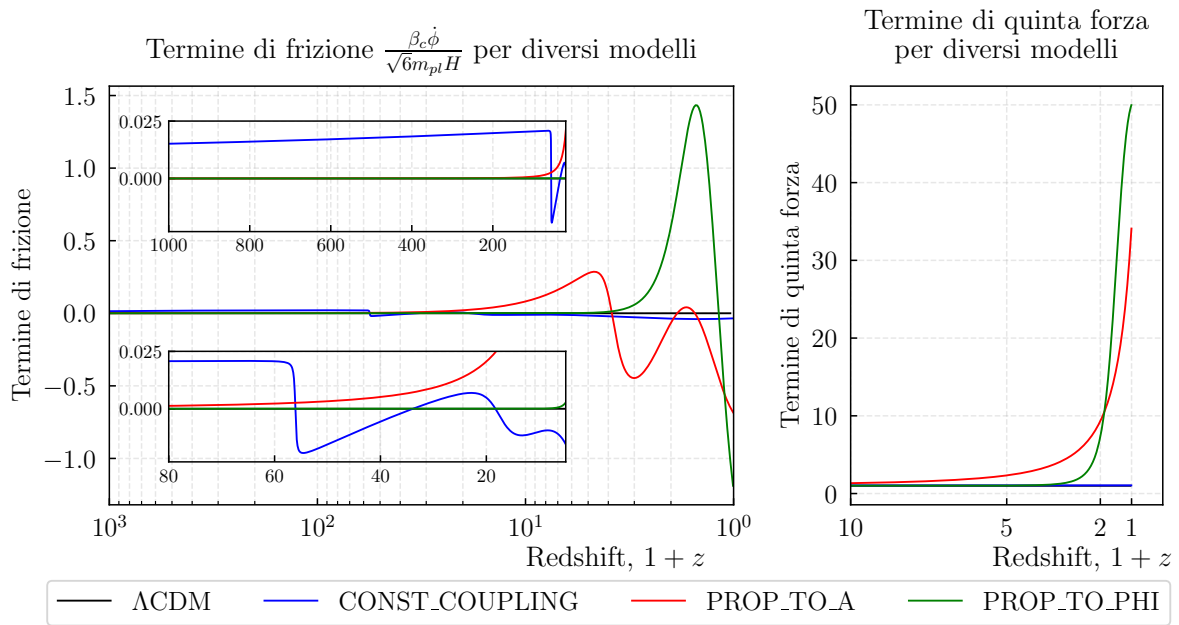


Figura 3.27: Si riporta in figura l'andamento dei termini di frizione e di quinta forza per i diversi modelli considerati.

Capitolo 4

Riassunto e Conclusioni

Nel seguente elaborato sono stati studiati modelli cosmologici di tipo Bouncing Coupled Dark Energy, trascurando la presenza di materia barionica e considerando due specie distinte di materia oscura, di cui solo una accoppiata al campo scalare dinamico.

La caratteristica principale di questi modelli è la presenza di un potenziale autointeragente che combina un andamento di tipo *power law* a un andamento esponenziale, presentando dunque un minimo locale che permette al campo scalare di invertire la propria direzione di moto durante l'evoluzione dell'universo.

I modelli sono stati studiati nel caso di diversi tipi di accoppiamento. Si è considerato, infatti, un accoppiamento costante, un accoppiamento la cui intensità è proporzionale al fattore di scala e uno la cui intensità è proporzionale alla densità del campo scalare. Per ciascuno di questi è stata studiata sia l'evoluzione delle quantità di background che quella delle perturbazioni lineari al variare sia dell'intensità dell'accoppiamento che della proporzione iniziale tra le abbondanze delle due specie di materia oscura.

Quello che si evince dallo studio di questi modelli è che l'evoluzione delle quantità di background dipende strettamente dall'abbondanza iniziale della specie di materia oscura accoppiata. Nei casi in questa è presente in quantità molto minore rispetto alla componente non accoppiata ($\zeta = 0.2$) l'evoluzione non si discosta in modo apprezzabile da quella di un modello di tipo Λ CDM, cosa che accade, invece, quando l'abbondanza della componente accoppiata supera quella non accoppiata.

In tutti i casi studiati, ad eccezione di quello con accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare, il campo scalare abbandona rapidamente la condizione iniziale di costante cosmologica, assumendo un parametro di stato $w_\phi = +1$ fino a bassi redshift. Solamente a bassi redshift si osserva l'andamento tipico dei modelli BCDE, con il parametro di stato che compie dei "rimbalzi" sul valore di costante cosmologica $w_\phi = -1$. In particolare, il numero di questi rimbalzi aumenta al crescere della frazione iniziale di materia oscura accoppiata e al crescere dell'intensità dell'accoppiamento, specialmente per accoppiamenti negativi. Nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare, invece, si osserva una situazione "opposta", con il parametro di stato w_ϕ che si

mantiene fisso al valore di costante cosmologica fino a bassi redshift, quando comincia ad allontanarsi compiendo i rimbalzi. L'escursione osservata è tanto maggiore quanto più grande è l'intensità dell'accoppiamento e quanto più grande è la frazione iniziale di materia oscura accoppiata.

Si osserva inoltre che, se per il caso di accoppiamento costante e proporzionale al fattore di scala il "riavvicinamento" al valore di costante cosmologica cominci prima all'aumentare della frazione di materia oscura accoppiata, nel caso di accoppiamento proporzionale alla densità del campo scalare ciò non accade, risultando indipendente sia dalla frazione di materia oscura accoppiata che dall'intensità dell'accoppiamento.

Per quanto riguarda l'andamento dei parametri di abbondanza, si osserva in tutti casi un comportamento simile al modello Λ CDM, con una fase di *matter domination* seguita da una di ϕ *domination*. Si osserva, però, che quest'ultima fase comincia prima all'aumentare della frazione di materia oscura accoppiata.

Anche la funzione di Hubble presenta un andamento simile per tutti i modelli. Essa risulta uguale a quella di un modello Λ CDM per gran parte dell'evoluzione dell'universo, salvo poi risultare a bassi redshift in un primo momento più piccola e, successivamente, più grande. Questo andamento è spiegabile osservando l'andamento del prodotto $\Omega_\phi w_\phi$, ed è dunque tipico di un potenziale SUGRA. Il modello che si discosta a tempi più lontani da quello non accoppiato è quello con accoppiamento costante, seguito da quello proporzionale al fattore di scala e da quello proporzionale alla densità del campo scalare. In particolare, a parità di modello, questo scostamento avviene all'incirca allo stesso redshift indipendentemente dalla frazione iniziale di materia oscura accoppiata e intensità dell'accoppiamento, sebbene la sua intensità cresca al crescere di questi parametri.

Infine, per tutti i modelli considerati, il valore maggiore della funzione di Hubble a tempi recenti rispetto a un modello di tipo Λ CDM potrebbe permettere di alleviare la tensione di Hubble osservata.

Per quanto riguarda le perturbazioni lineari, i modelli con accoppiamento proporzionale al fattore di scala e alla densità del campo scalare, a causa dell'accoppiamento nullo per gran parte della storia dell'universo, prevedono una crescita delle perturbazioni identica a quella del Λ CDM, discostandosi solamente a bassi redshift quando l'intensità dell'accoppiamento comincia a crescere. Si osserva che lo scostamento dal caso non accoppiato comincia pressochè nello stesso momento indipendentemente dall'intensità dell'accoppiamento e dalla frazione iniziale di materia oscura accoppiata, ma la sua entità è tanto maggiore quando sono maggiori questi due parametri. Per le intensità studiate in questo lavoro, tuttavia, il fattore di crescita previsto da questi modelli risulta nettamente superiore al modello Λ CDM, rendendo perciò questi modelli inadatti ad alleviare la tensione σ_8 osservata.

Il modello con accoppiamento costante, invece, sebbene si discosti dal modello standard già a partire da $z \simeq 1000$ e preveda un fattore di crescita superiore ad alti redshift, a tempi recenti questo si avvicina nuovamente al Λ CDM, assumendo in alcuni casi

($\beta_0 = \pm 0.10, +0.20$) valori inferiori. Per questo motivo quest'ultimo modello potrebbe alleviare la tensione σ_8 .

In conclusione, questi tipi di modelli cosmologici presentano diverse caratteristiche interessanti, come l'andamento del campo scalare dinamico e della funzione di Hubble. Tuttavia, le perturbazioni lineari risultano spesso superiori al modello Λ CDM.

Ulteriori studi potrebbero riguardare l'esplorazione di ulteriori tipi di accoppiamento e della loro intensità, eventualmente studiando l'andamento delle perturbazioni, lineari e non lineari, a bassi redshift nel caso di accoppiamenti deboli.

Inoltre, si potrebbero esplorare modelli in cui il coefficiente α del potenziale SUGRA, che nei modelli studiati è stato posto pari a 1, assuma valori diversi.

Appendice A

Passaggio al sistema adimensionale

Nel seguente paragrafo si mostra come passare dal sistema di equazioni 2.11 a un sistema adimensionale, seguendo il procedimento descritto in [22]. Grazie alla regola di derivazione a catena è possibile mettere in relazione la derivata rispetto al tempo con la derivata rispetto al *tempo di e-folding* $N = \ln(a)$. Si ricava infatti che:

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{dN}{da} \frac{d}{dN} = \dot{a} \frac{1}{a} \frac{d}{dN} = H \frac{d}{dN} \quad (\text{A.1})$$

Derivando ulteriormente rispetto al tempo e utilizzando la relazione appena ricavata si ottiene:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \dot{H} \frac{d}{dN} + H \frac{d}{dt} \frac{d}{dN} = \dot{H} \frac{d}{dN} + H^2 \frac{d^2}{dN^2} \quad (\text{A.2})$$

Queste relazioni permettono di riscrivere le equazioni del sistema 2.11 in un sistema adimensionale utilizzando le variabili introdotte nel capitolo 3, ovvero:

$$x = \frac{\phi'}{\sqrt{6}m_{pl}} \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)/3}}{m_{pl}H} \quad r = \frac{\sqrt{\rho_r/3}}{m_{pl}H} \quad v = \frac{\sqrt{\rho_b/3}}{m_{pl}H} \quad \xi = \frac{\phi}{m_{pl}} \quad (\text{A.3})$$

Si ricava infatti:

$$\begin{aligned} \Omega_b &= \frac{\rho_b}{3m_{pl}^2 H^2} = v^2 & \Omega_r &= \frac{\rho_r}{3m_{pl}^2 H^2} = r^2 \\ \Omega_\phi &= \frac{\rho_\phi}{3m_{pl}^2 H^2} = \frac{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{3m_{pl}^2 H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{6m_{pl}^2 H^2} + \frac{V(\phi)}{3m_{pl}^2 H^2} = \frac{\phi'^2}{6m_{pl}^2} + \frac{V(\phi)}{3m_{pl}^2 H^2} = x^2 + y^2 \\ \Omega_c &= 1 - \Omega_b - \Omega_r - \Omega_\phi = 1 - x^2 - y^2 - v^2 - r^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

È così possibile riscrivere l'equazione di Friedmann in forma adimensionale. Derivando l'equazione di Friedmann rispetto al tempo si ottiene:

$$6H\dot{H} = \frac{1}{m_{pl}^2} (\dot{\rho}_b + \dot{\rho}_c + \dot{\rho}_r + \dot{\rho}_\phi) \quad (\text{A.5})$$

A questo punto si possono utilizzare le equazioni di continuità dei fluidi cosmologici, definite in 1.8:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b &= -3H\rho_b & \dot{\rho}_c &= -3H\rho_c - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \dot{\phi} \rho_c & \dot{\rho}_r &= -4H\rho_r \\ \dot{\rho}_\phi &= -3H(1+w_\phi)\rho_\phi + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m} \rho_\phi \dot{\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

riscrivendo A.5 come:

$$6H\dot{H} = \frac{1}{m_{pl}^2} \left[-3H\rho_b - 3H\rho_c - \cancel{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \rho_c \dot{\phi}} - 4H\rho_r - 3H(1+w_\phi)\rho_\phi + \cancel{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_c}{m_{pl}} \rho_c \dot{\phi}} \right] \quad (\text{A.7})$$

Usando la definizione di parametro di abbondanza $\Omega_i = \rho_i/3m_{pl}^2 H^2$ e semplificando si può scrivere:

$$\frac{2\dot{H}}{H^2} = -3\Omega_b - 3\Omega_c - 4\Omega_r - 3(1+w_\phi)\Omega_\phi \quad (\text{A.8})$$

Passando alla derivata rispetto al tempo N utilizzando la relazione A.1 e utilizzando le variabili adimensionali definite in A.3 si ottiene:

$$\frac{2H'}{H} = -3v^2 - 3(1-x^2-y^2-v^2-r^2) - 4r^2 - 3(1+w_\phi)(x^2+y^2) \quad (\text{A.9})$$

Si può infine esprimere in termini delle variabili adimensionali il parametro di stato del campo scalare w_ϕ . Si ha infatti:

$$w_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi} - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi} + V(\phi)} = \frac{\frac{1}{2}H^2\phi' - V(\phi)}{\frac{1}{2}H^2\phi' + V(\phi)} = \frac{3H^2m_{pl}^2x^2 - 3H^2m_{pl}^2y^2}{3H^2m_{pl}^2x^2 + 3H^2m_{pl}^2y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (\text{A.10})$$

Inserendo quest'ultima relazione in A.9 si ottiene l'equazione adimensionale di Friedmann:

$$\boxed{\frac{H'}{H} = -\frac{1}{2} (3 + 3x^2 - 3y^2 + r^2)} \quad (\text{A.11})$$

Quest'ultima equazione è fondamentale per poter riscrivere tutte le altre. Per procedere nella derivazione, è inoltre utile riscrivere il potenziale $V(\phi)$.

Un generico potenziale può essere scritto come:

$$V(\phi) = Ae^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu}{m_{pl}}f(\phi)\phi} \quad (\text{A.12})$$

dove A è una costante di normalizzazione, μ è un parametro adimensionale e $f(\phi)$ è una funzione che può essere definita in modo da ottenere il potenziale desiderato. Derivando rispetto al campo scalare ϕ si ottiene:

$$\frac{dV}{d\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu}{m_{pl}} \left[\frac{df}{d\phi}\phi + f(\phi) \right] V(\phi) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu}{m_{pl}} f_1(\phi) V(\phi) \quad (\text{A.13})$$

Derivando il potenziale SUGRA $V(\phi) = A(\frac{\phi}{m_{pl}})^{-\alpha} e^{\phi^2/2m_{pl}^2}$ rispetto a ϕ , e ricordando che $\phi/m_{pl} = \xi$, si ottiene:

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{m_{pl}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) V(\phi) \quad (\text{A.14})$$

da cui si ricava che, nel caso di nostro interesse:

$$\mu f_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) \quad (\text{A.15})$$

Usando le relazioni A.1 e A.2 si riscrivono le derivate del campo scalare rispetto al tempo in funzione delle variabili adimensionali:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \dot{H}\phi' + H^2\phi'' = \sqrt{6}m_{pl} \left(\dot{H}x + H^2x' \right) \\ \dot{\phi} &= H\phi' = \sqrt{6}m_{pl}Hx \\ \frac{dV}{d\phi} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu f_1}{m_{pl}} (3m_{pl}^2 H^2 y^2) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Si sostituiscono dunque nell'equazione del moto del campo scalare. Effettuando le opportune semplificazioni e riarrangiando i termini, si giunge a:

$$x' = - \left(3 + \frac{H'}{H} \right) x + \mu f_1 y^2 + \beta_c (1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2) \quad (\text{A.17})$$

Utilizzando il fattore μf_1 del potenziale SUGRA e l'equazione di Friedmann A.11 si elimina $\frac{H'}{H}$, ottenendo l'equazione di Klein-Gordon adimensionale:

$$\boxed{x' = -\frac{x}{2} (3 - 3x^2 + 3y^2 - r^2) - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) y^2 + \beta_c (1 - x^2 - y^2 - r^2 - v^2)} \quad (\text{A.18})$$

Le restanti equazioni si derivano in modo analogo. Dalla definizione di v , si ricava che $\rho_b = 3m_{pl}^2 H^2 v^2$, e quindi, derivando rispetto al tempo N e utilizzando la relazione A.1, si ottiene:

$$\rho'_b = \frac{\dot{\rho}_b}{H} = 3m_{pl}^2 (2HH'v^2 + 2vv'H^2) = 6m_{pl}^2 Hv (H'v + v'H) \quad (\text{A.19})$$

Inserendo l'equazione di continuità $\dot{\rho}_b = -3H\rho_b$ e semplificando si giunge all'equazione:

$$v' = -\left(\frac{3}{2} + \frac{H'}{H}\right)v \quad (\text{A.20})$$

da cui, sostituendo l'equazione di Friedmann A.11 si ottiene l'equazione adimensionale corrispondente alla variabile adimensionale y :

$$\boxed{v' = \frac{v}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2)} \quad (\text{A.21})$$

Dalla definizione di r , invece, si ricava che $\rho_r = 3m_{pl}^2 H^2 r^2$, e quindi, derivando rispetto al tempo N e utilizzando la relazione A.1, si ottiene:

$$\rho'_r = \frac{\dot{\rho}_r}{H} = 3m_{pl}^2 (2HH'r^2 + 2rr'H^2) = 6m_{pl}^2 Hr (H'r + r'H) \quad (\text{A.22})$$

Inserendo l'equazione di continuità $\dot{\rho}_r = -4H\rho_r$ e semplificando si giunge all'equazione:

$$r' = -\left(2 + \frac{H'}{H}\right)r \quad (\text{A.23})$$

da cui, sostituendo l'equazione di Friedmann A.11 si ottiene l'equazione adimensionale corrispondente alla variabile adimensionale r :

$$\boxed{r' = -\frac{r}{2} (1 - 3x^2 + 3y^2 - r^2)} \quad (\text{A.24})$$

Infine, dalla definizione di y si ricava che $V = 3m_{pl}^2 H^2 y^2$, e quindi, derivando rispetto al tempo N e utilizzando la relazione A.1, si ottiene:

$$V' = 3m_{pl}^2 (2HH'y^2 + 2yy'H^2) = 6m_{pl}^2 Hy (H'y + y'H) \quad (\text{A.25})$$

La derivata di V rispetto al tempo N può essere riscritta utilizzando la regola della derivazione a catena, per cui:

$$\frac{dV}{dN} = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dN} = \frac{dV}{d\phi} \phi' = \frac{dV}{d\phi} \phi' \quad (\text{A.26})$$

Sostituendo l'equazione A.13, e esprimendo V e ϕ' in termini delle variabili adimensionali, si ottiene:

$$\frac{dV}{dN} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mu}{m_{pl}} f_1(\phi) V(\phi) \phi' = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mu}{m_{pl}} f_1(\phi) (3m_{pl}^2 H^2 y^2) (\sqrt{6} m_{pl} x) \quad (\text{A.27})$$

Uguagliando le due espressioni A.25 e A.27, e semplificando e riordinando i termini, si ottiene:

$$y' = -\mu f_1 y^2 - \frac{H'}{H} y \quad (\text{A.28})$$

Sostituendo l'espressione A.15 per il prodotto μf_1 nel caso di un potenziale SUGRA e utilizzando l'equazione di Friedmann A.11 si ottiene l'equazione adimensionale corrispondente alla variabile adimensionale y :

$$y' = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi} \right) xy + \frac{y}{2} (3 + 3x^2 - 3y^2 + r^2) \quad (\text{A.29})$$

Derivando rispetto al tempo N la variabile ξ , e utilizzando la definizione di x , si ottiene:

$$\xi' = \sqrt{6}x \quad (\text{A.30})$$

Per quanto riguarda le equazioni delle perturbazioni, si può procedere utilizzando le relazioni A.1 e A.2 per riscrivere le equazioni del sistema 2.21 in forma adimensionale. La prima, infatti, si riscrive come:

$$\dot{H}\delta'_c + H^2\delta''_c = -2H \left[1 - \frac{\beta_c \phi'}{\sqrt{6}m_{pl}} \right] H\delta'_c + 4\pi G [\rho_b \delta_b + \rho_c \delta_c \Gamma_c] \quad (\text{A.31})$$

che, dividendo per H^2 e raccogliendo i termini, diventa:

$$\delta''_c = - \left[2 + \frac{H'}{H} - 2\beta_c x \right] \delta'_c + \frac{4\pi G}{H^2} [\rho_b \delta_b + \rho_c \delta_c \Gamma_c] \quad (\text{A.32})$$

Moltiplicando e dividendo il secondo termine al secondo membro per $\frac{2}{3}$ si ricostruiscono le espressioni dei parametri di abbondanza $\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i$, e utilizzando l'equazione di Friedmann A.11 si ottiene:

$$\delta''_c = - \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) - 2\beta_c x \right] \delta'_c + \frac{3}{2} [\Omega_b \delta_b + \Omega_c \delta_c \Gamma_c] \quad (\text{A.33})$$

che può essere ridotta, utilizzando le espressioni di Ω_b e Ω_c definite in A.3 e introducendo $\theta_c = \delta'_c$, alla coppia di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{aligned} \theta_c &= \delta'_c \\ \theta'_c &= - \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) - 2\beta_c x \right] \theta_c \\ &\quad + \frac{3}{2} [v^2 \delta_b + (1 - x^2 - y^2 - v^2 - r^2) \delta_c \Gamma_c] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Un procedimento analogo si applica alla seconda equazione delle perturbazioni. Usando le relazioni A.1 e A.2 si riscrive infatti come:

$$\dot{H}\delta'_b + H^2\delta''_b = -2H^2\delta'_b + 4\pi G [\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c] \quad (\text{A.35})$$

che, dividendo per H^2 e raccogliendo i termini, diventa:

$$\delta''_b = \left[-2 - \frac{H'}{H} \right] \delta'_b + \frac{4\pi G}{H^2} [\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c] \quad (\text{A.36})$$

Usando l'equazione di Friedmann A.11 e moltiplicando e dividendo il secondo termine del secondo membro per $\frac{2}{3}$ si ricava:

$$\delta''_b = - \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) \right] \delta'_b + \frac{3}{2} [\Omega_b\delta_b + \Omega_c\delta_c] \quad (\text{A.37})$$

che può essere ridotta, utilizzando le espressioni di Ω_b e Ω_c definite in A.3 e introducendo $\theta_b = \delta'_b$, alla coppia di equazioni differenziali del primo ordine

Infine, utilizzando le variabili adimensionali A.3 e introducendo $\theta_b = \delta'_b$ si ottiene la coppia di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{aligned} \theta_b &= \delta'_b \\ \theta'_b &= - \left[2 - \frac{1}{2} (3x^2 - 3y^2 + r^2 + 3) \right] \theta_b \\ &\quad + \frac{3}{2} [v^2\delta_b + (1 - x^2 - y^2 - v^2 - r^2) \delta_c] \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Si sono ottenute in questo modo tutte le equazioni differenziali adimensionali dei sistemi 3.4 e 3.5

Appendice B

Codice C per la risoluzione del sistema di equazioni

Si riporta il codice C, scritto da Marco Baldi, utilizzato per risolvere il sistema di equazioni adimensionali definite in [3.4](#) e [3.5](#).

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <gsl/gsl_errno.h>
3  #include <gsl/gsl_matrix.h>
4  #include <gsl/gsl_odeiv.h>
5  #include <math.h>
6
7  #include "model.txt"
8  #define NORMALIZE_AT_Z_0 // or NORMALIZE_AT_HIGH_Z
9
10 extern double x_i, y_i, z_i, v_i, H_i, phi_i;
11
12 int func(double t, const double y[], double f[], void *params)
13 {
14     // double y0 = *(double *)params;
15     // double x_0, y_0, z_0, v_0, H_0, phi_0;
16
17     f[0] = 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] - 3.0) * y[0] -
18     sqrt(1.5) * (y[5] - alpha / y[5]) * y[1] * y[1] + beta_c * (1.0 - y[0] * y[0] -
19     y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) + beta_b * y[3] * y[3];
20     f[1] = 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] + 3.0) * y[1] +
21     sqrt(1.5) * (y[5] - alpha / y[5]) * y[0] * y[1];
22     f[2] = 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] - 1.0) * y[2];
23     f[3] = 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] - 2.0 * y[0] *
24     beta_b) * y[3];
25     f[4] = -0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] + 3.0) * y[4];
26     f[5] = sqrt(6.0) * y[0]; /* This is the equation for \phi/M */
27
28     f[6] = +y[7] - 2.0 * bc_prime * lambda * lambda * (beta_c * (1.0 - y[0] * y[0] -
29     y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) / (1.0 + lambda * lambda * (m2_phi +
30     m2_beta))) * y[6];

```

```

26     f[7] = -(2.0 - 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] + 3.0)
27           - 2.0 * beta_c * y[0]) * y[7] + 1.5 * (y[3] * y[3] * y[8] + (1.0 - y[0] * y[0] -
28           y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) * (1.0 + 4.0 * beta_c * beta_c / (3.0 *
29           (1.0 + lambda * lambda * (m2_phi + m2_beta)))) * y[6]);
30
31     f[8] = +y[9]; /* Theta_b */
32
33     f[9] = -(2.0 - 0.5 * (3.0 * y[0] * y[0] - 3.0 * y[1] * y[1] + y[2] * y[2] + 3.0))
34           * y[9] + 1.5 * (y[3] * y[3] * y[8] + (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] *
35           y[2] - y[3] * y[3]) * (1.0 + 4.0 * beta_b * beta_c / 3.0) * (1.0 / (1.0 + lambda
36           * lambda * (m2_phi + m2_beta))) * y[6]);
37
38     return GSL_SUCCESS;
39 }
40
41 int main(void)
42 {
43     double abserr = 0.0;
44     double relerr = 1.0e-18;
45     // int flag = 0;
46     // int doesitwork;
47     FILE *FoutDM;
48     FILE *Foutbar;
49     FILE *Foutall;
50     FILE *Fcheck;
51     FILE *Fdelta;
52     FILE *Ftheta;
53     FILE *Finput;
54     FILE *Fbckgd;
55
56     double x_i, y_i, z_i, v_i, H_i, phi_i;
57     double delta_c_i, delta_b_i, Theta_c_i, Theta_b_i;
58     double dmc, dmb;
59     double c_to_b_ratio;
60
61     double t, t1, h, t_start;
62
63     /* Set up the initial conditions for the integration */
64
65     #include "initial_conditions.c"
66
67     t = t_start;
68     t1 = 0.0;
69     h = 1.0e-15;
70
71     /* Allocating GSL variables... */
72
73     const gsl_odeiv_step_type *T = gsl_odeiv_step_rk8pd;
74
75     gsl_odeiv_step *s = gsl_odeiv_step_alloc(T, 10);
76     gsl_odeiv_control *c = gsl_odeiv_control_y_new(abserr, relerr);

```

```

72     gsl_odeiv_evolve *e = gsl_odeiv_evolve_alloc(10);
73
74     double yi = y_i;
75
76     int *p;
77     p = 0;
78
79     gsl_odeiv_system sys = {func, p, 10, &yi};
80
81     double y[10] = {x_i, y_i, z_i, v_i, H_i, phi_i, delta_c_i, Theta_c_i, delta_b_i,
82                     Theta_b_i};
83
84     Fcheck = fopen(bufcheck, "w");
85
86     int count = 0;
87     while (t < t1) /* Integrate the system */
88     {
89         int status = gsl_odeiv_evolve_apply(e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y);
90
91         if (status != GSL_SUCCESS)
92             break;
93         count += 1;
94         if (1. / exp(t) > 1100) /* The initial conditions for perturbations are at
95                                Last Scattering, z=1100 */
96         {
97             // y[6] = delta_c_i;
98             // y[7] = Theta_c_i;
99             y[8] = y[6] * 0.003; /* CHECK */
100             y[9] = y[7] * 0.003;
101         }
102
103         if ((count % 100) == 0) /* to reduce the number of lines in check file
104                                fprintf(Fcheck, "%.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.15e
105                                %.15e %.15e %.5e \n", t, y[0], y[1], y[2], y[3], y[4], beta_b, beta_c, y[5],
106                                y[6], y[8], y[7]);
107
108             // printf("t= %g\n", t);
109         }
110
111         fclose(Fcheck);
112
113         printf("Done first integration \n");
114
115         double x_0 = y[0];
116         double y_0 = y[1];
117         double z_0 = y[2];
118         double v_0 = y[3];
119         double H_0 = y[4];
120         double phi_0 = y[5];
121         double dc_0 = y[6];
122         double db_0 = y[8];

```

```

120     double dtot_0 = y[6] * (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] *
121     y[3]) / (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2]) + y[8] * (y[3] * y[3]) /
122     (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2]);
123
124     double tc_0 = y[7];
125     double tb_0 = y[9];
126
127     FoutDM = fopen(bufDM, "w");
128     Foutbar = fopen(bufbar, "w");
129     Foutall = fopen(bufall, "w");
130     Fdelta = fopen(bufdelta, "w");
131     Ftheta = fopen(buftheta, "w");
132     Finput = fopen(bufinput, "w");
133     Fbckgd = fopen(bufbckgd, "w");
134
135     int iout;
136     double deltat = 0.005;
137     double fbar, fDM;
138
139     /* Reset the initial conditions for the final integrations */
140     y[0] = x_i;
141     y[1] = y_i;
142     y[2] = z_i;
143     y[3] = v_i;
144     y[4] = H_i;
145     y[5] = phi_i;
146     y[6] = delta_c_i;
147     y[7] = Theta_c_i;
148     y[8] = delta_b_i;
149     y[9] = Theta_b_i;
150     t = t_start;
151     h = 1.0e-15;
152
153     for (iout = 2000; iout >= 0; iout--) /* We choose the frequency of the output */
154     {
155         t1 = -iout * deltat;
156
157         printf("Running until t1 = %g \n", t1);
158
159         if (iout == 0)
160             t1 = 0.0;
161
162         while (t < t1) /* Integrate the system */
163         {
164             int status = gsl_odeiv_evolve_apply(e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y);
165
166             if (status != GSL_SUCCESS)
167                 break;
168
169             if (1. / exp(t) > 1100) /* The initial conditions for perturbations are
170             at Last Scattering, z=1100 */

```

```

169         {
170             // y[6] = delta_c_i;
171             // y[7] = Theta_c_i;
172             y[8] = y[6] * 0.003;
173             y[9] = y[7] * 0.003; /* CHECK */
174         }
175     }
176
177     fbar = y[3] * y[3] / (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2]);
178     fDM = (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) / (1.0 -
179 y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2]);
180 #ifndef NORMALIZE_AT_HIGH_Z
181     dmb = y[3] * y[3] * y[4] * y[4] * exp(3.0 * t) / (v_i * v_i * H_i * H_i *
182 exp(3.0 * t_start));
183     dmc = (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) * y[4] *
184 y[4] * exp(3.0 * t) / ((1.0 - x_i * x_i - y_i * y_i - z_i * z_i - v_i * v_i) *
185 H_i * H_i * exp(3.0 * t_start));
186 #endif
187 #ifndef NORMALIZE_AT_Z_0
188     dmb = y[3] * y[3] * y[4] * y[4] * exp(3.0 * t) / (v_0 * v_0 * H_0 * H_0);
189     dmc = (1.0 - y[0] * y[0] - y[1] * y[1] - y[2] * y[2] - y[3] * y[3]) * y[4] *
190 y[4] * exp(3.0 * t) / ((1.0 - x_0 * x_0 - y_0 * y_0 - z_0 * z_0 - v_0 * v_0) *
191 H_0 * H_0);
192 #endif
193
194     if (1. / exp(t) <= 1000000)
195     {
196         fprintf(Fbckgd, "%.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e %.10e
197 %.10e \n", 1. / exp(t), y[0] * y[0] + y[1] * y[1], y[2] * y[2], y[3] *
198 y[3], 1.0 - (y[0] * y[0] + y[1] * y[1] + y[2] * y[2] + y[3] * y[3]), y[4], y[0],
199 y[5], (y[0] * y[0] - y[1] * y[1]) / (y[0] * y[0] + y[1] * y[1]), dmb, dmc);
200
201         if (1. / exp(t) <= 1200)
202         {
203             fprintf(FoutDM, "%.10e %.10e %.10e %.10e\n", 1.0 / (exp(t)), y[6] /
204 dc_0 / exp(t), y[4], fDM);
205             fprintf(Foutbar, "%.10e %.10e %.10e %.10e\n", 1.0 / (exp(t)), y[8] /
206 db_0 / exp(t), y[4], fbar);
207             fprintf(Foutall, "%.10e %.10e %.10e \n", 1.0 / (exp(t)), (1. /
208 exp(t)) * (y[6] * fDM + y[8] * fbar) / dtot_0, y[4]);
209             fprintf(Fdelta, "%.10e %.10e \n", 1.0 / exp(t), (y[6] * fDM + y[8] *
210 fbar) / dtot_0);
211             fprintf(Ftheta, "%.10e %.10e \n", 1.0 / exp(t), (y[7] / tc_0) * fDM +
212 (y[9] / tb_0) * fbar);
213             if (1. / exp(t) <= 200)
214             {
215                 fprintf(Finput, "%.5e %.5e %.5e %.5e %.5e %.5e %.5e %.5e
216 %.5e \n", 1.0 / exp(t), -1.0, 1.0, 1.0, 0.1 * y[4] / H_0, beta_b, beta_c, dmc,
217 dmb, y[0]);
218             }
219         }
220     }

```

```
205     }
206     t = t1;
207 }
208
209 fclose(FoutDM);
210 fclose(Foutbar);
211 fclose(Foutall);
212 fclose(Fdelta);
213 fclose(Finput);
214 fclose(Fbckgd);
215
216 gsl_odeiv_evolve_free(e); /* Free the GSL functions */
217 gsl_odeiv_control_free(c);
218 gsl_odeiv_step_free(s);
219
220 printf("All Done. \n");
221
222 return 0;
223 }
```

Bibliografia

- [1] Planck Collaboration et al. Planck 2018 results. xiii. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 2021.
- [2] Adam G. Riess and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronomical Journal*, 116:1009–1038, 1998.
- [3] Saul Perlmutter and et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astrophysical Journal*, 517:565–586, 1999.
- [4] B. Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field, 1998.
- [5] Ph. Brax and J. Martin. Quintessence and supergravity, 1999.
- [6] Vesto Slipher. The radial velocity of the andromeda nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, pages 56–57, 1913.
- [7] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 168–173, 1929.
- [8] Robert W. Wilson and Arno Penzias. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [9] Fritz Zwicky. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.
- [10] Vera Rubin and Jr. W. Kent Ford. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophysical Journal*, 159:379, 1970.
- [11] D. Clowe et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophysical Journal*, 2006.
- [12] Planck Collaboration et al. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 2016.
- [13] Annika H. G. Peter. Dark matter: A brief review, 2011.
- [14] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, first edition edition, 2010.

-
- [15] Riess et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λ CDM. *Astrophysical Journal*, 876:85, 2019.
 - [16] V. Poulin et al. The sigma-8 tension is a drag, 2022.
 - [17] Marco Baldi. Cold dark matter halos in multi-coupled dark energy cosmologies: structural and statistical properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014.
 - [18] Marco Baldi. Multiple dark matter as a self-regulating mechanism for dark sector interactions. *Annalen der Physik*, 2012.
 - [19] Marco Baldi. Structure formation in multiple dark matter cosmologies with long-range scalar interactions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012.
 - [20] Marco Baldi. Time dependent couplings in the dark sector: from background evolution to nonlinear structure formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2010.
 - [21] Marco Baldi. Early massive clusters and the bouncing coupled dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011.
 - [22] Luca Amendola. Linear and non-linear perturbations in dark energy models, 2003.