SCUOLA DI SCIENZE Corso di Laurea in Astronomia

DINAMICA DEI DUE E/O POCHI CORPI : SISTEMI BINARI, SISTEMA SOLARE

Relatore: Chiar.mo Prof. Brusa Marcella Presentata da: Rassu Vittorio Marcello

Sessione I Anno Accademico 2024-2025

Indice

1	Il problema dei due corpi	1
	1.1 Introduzione	1
	1.2 Formalismo Hamiltoniano e variabili azione-angolo per il problema di	
	Keplero	1
2	Il problema degli <i>n</i> -corpi	5
	2.1 Formalismo e complessità dinamiche	5
	2.2 Il problema dei tre corpi circolare ristretto	6
3	Teoria delle perturbazioni	9
	3.1 Perturbazioni nel formalismo Hamiltoniano	9
	3.2 Precessione del perielio di Mercurio	10
\mathbf{A}	Generalizzazione tensoriale del problema degli n -corpi	17
	A.1 Forme simplettiche, tensori e derivata di Lie	17
	A.2 Simmetrie e integrali primi nello spazio delle fasi	
	A.3 Perturbazioni, stabilità e varietà invarianti nei sistemi Hamiltoniani	



Abstract

Il presente lavoro analizza la dinamica gravitazionale nei sistemi a pochi corpi, con particolare attenzione al passaggio dalla completa integrabilità del problema dei due corpi alla complessità intrinseca dei sistemi a tre o più corpi. Attraverso il formalismo Hamiltoniano e l'utilizzo delle variabili azione-angolo, viene sviluppata una trattazione rigorosa del problema di Keplero e delle sue estensioni perturbative. Il lavoro esamina il problema dei tre corpi circolare ristretto (CR3BP) come caso paradigmatico di sistema non completamente integrabile, introducendo l'integrale di Jacobi e le superfici di Hill come strumenti per la comprensione qualitativa della dinamica. Viene inoltre sviluppata la teoria delle perturbazioni Hamiltoniane, con applicazione specifica al calcolo della precessione del perielio di Mercurio dovuta all'influenza gravitazionale di Giove. I risultati analitici sono validati attraverso integrazione numerica, evidenziando un avanzamento del perielio di circa 154.88 arcsec/secolo. L'appendice introduce una formalizzazione geometrica avanzata del problema degli n-corpi mediante forme simplettiche e teoria KAM, fornendo una prospettiva moderna sui fenomeni di stabilità e caos nei sistemi dinamici Hamiltoniani.

Capitolo 1

Il problema dei due corpi

1.1 Introduzione

Il problema dei due corpi rappresenta lo studio del moto di due corpi, dotati di massa, sotto l'azione del campo gravitazionale. La prima descrizione del moto è dovuta a Sir Isaac Newton, che sviluppò il problema nel formalismo della meccanica classica Newtoniana; successivamente, con l'avvento della Meccanica Analitica, il problema è stato riproposto e affrontato in due nuovi formalismi, permettendo di ampliare le conoscenze a riguardo.

1.2 Formalismo Hamiltoniano e variabili azione-angolo per il problema di Keplero

Dal momento che, nell'ambito della meccanica Newtoniana o Lagrangiana, la scelta delle coordinate è solitamente limitata a variabili di posizione e velocità, che non sono, in generale, integrali primo del moto (IPM), di seguito lavoreremo nel **formalismo Hamiltoniano**, concentrandoci su uno specifico set di coordinate dette **azione-angolo**; nel caso più generale, in uno spazio n-dimensionale (e quindi con spazio delle fasi definito in \mathbb{R}^{2n}), gli $I_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ momenti sono integrali primi del moto ¹ e sono denominati azioni e indicati in letteratura come $\mathbf{J} = (J_1, J_2, ..., J_n)$; mentre le coordinate coniugate sono note come angoli e denotate con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$.

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i} p_i \, \mathrm{d}q_i$$

rimane costante nel tempo, garantendo la preservazione delle aree (e più in generale dei volumi) nel sottospazio delle fasi.

 $^{^{1}}$ Le azioni **J** sono proporzionali ad un invariante integrale di Poincarè, ovvero una quantità costante lungo il flusso Hamiltoniano e invariate sotto trasformazioni canoniche; in particolare, l'integrale chiuso

Le equazioni di Hamilton per il moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{J}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0\\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{J}} \end{cases}$$
(1.1)

Dalla prima equazione di 1.1 si deduce immediatamente che l'Hamiltoniana deve essere indipendente dalle coordinate coniugate θ , e perciò $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{J})$.

La seconda equazione ci permette invece di risolvere le equazioni di Hamilton per θ_i come funzione del tempo :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{J}} = \Omega_i(\mathbf{J}) , \quad una \ costante \quad \Rightarrow \quad \theta_i(t) = \theta_i(0) + \Omega_i t$$
 (1.2)

Il problema risulta completamente descrivibile, con una dinamica semplificata, se siamo in grado di esprimere i momenti di un sistema di coordinate canoniche 2 come integrali primi del moto. In seguito affrontiamo la trattazione nel caso di orbite legate (E < 0), per le quali le coordinate sono funzioni periodiche degli angoli con periodo di 2π , definite come :

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p_i dq_i \tag{1.3}$$

Dove le γ_i sono curve chiuse nello spazio delle fasi che corrispondono a un periodo completo di oscillazione o rotazione del sistema rispetto a ogni grado di libertà, denotato dal pedice i.

Limitiamoci inoltre al problema di Keplero in 2D, e lavoriamo per unità di massa ³. Nel caso di moto in un potenziale centrale, possiamo scrivere la Lagrangiana e gli impulsi coniugati in coordinate polari ⁴ come :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\mu}{r} \tag{1.4}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \quad ; \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}$$
 (1.5)

Inserendo ciò nella definizione di Hamiltoniana si ottiene $\mathcal{H}(r,\theta,p_r,p_\theta)$:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = E$$
 (1.6)

²Per poter usare le J_i come insieme di momenti, essi devono soddisfare la relazione di commutazione $[J_i, J_j] = 0$ (o analogamente con la notazione delle parentesi di Poisson). Funzioni che soddisfano tale condizione sono dette in involuzione (L_i non è una funzione in involuzione).

³per fare ciò si fa ausilio di una trasformazione canonica che preserva la struttura delle equazioni di Hamilton

⁴nel caso 3D si sarebbe parlato di coordinate sferiche

Notando che l'Hamiltoniana \mathcal{H} non è una funzione del tempo, per il formalismo di Hamilton-Jacobi possiamo introdurre la nota funzione generatrice \mathcal{S} . Per sistemi conservativi sappiamo che essa risulta separabile tra variabili spaziali e temporali; difatti per essi:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H} = -E \tag{1.7}$$

Siamo interessati a trovare una soluzione per la quale anche le variabili spaziali siano separabili additivamente, ciò implica poter scrivere l'azione Hamiltoniana come :

$$S(r, \theta, t) = S_r(r) + S_{\theta}(\theta) + S_t(t)$$
(1.8)

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r} = p_r \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_{\theta}}{\partial \theta} = p_{\theta}$$
 (1.9)

L'equazione di Hamilton può dunque essere riscritta come :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{S}_{\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} + \frac{\partial \mathcal{S}_t}{\partial t} = 0$$
 (1.10)

Il tempo è la prima variabile a risultare immediatamente separabile, difatti da 1.7 segue direttamente che :

$$S_t(t) = -\alpha_1 t \tag{1.11}$$

dove α_1 ha ruolo di energia E. L'equazione 1.10 diventa :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{S}_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = E$$
 (1.12)

Per separare le variabili spaziali, poniamo $\partial S_{\theta}/\partial \theta = L$ e otteniamo rispettivamente l'impulso angolare e il momento radiale :

$$p_{\theta} = L \tag{1.13}$$

$$p_r = \pm \sqrt{2(E - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{\mu}{r})} \tag{1.14}$$

Inserendo tale risultato nella definizione 1.3 si ottengono le variabili azione del sistema:

$$J_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_{\theta}} p_{\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} L d\theta = L \tag{1.15}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2\left(E - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{\mu}{r}\right)} dr$$
 (1.16)

Dove nell'ultimo passaggio si è considerata la metà della curva γ , pari alla semicurva compresa tra r_{min} e r_{max} . Riscrivendo la funzione integranda di 1.16 come $p_r = p_r^2/p_r$ e separando l'integrale in diverse parti, risolvibili in termini dell'anomalia vera ed eccentrica 5 , si ottiene infine che :

$$J_r = \sqrt{\mu a} - \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \sqrt{\mu a} - J_\theta$$
 (1.17)

da ciò si ricava la nuova Hamiltoniana:

$$\mu a = -\frac{\mu^2}{2E} = (J_r + J_\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2(J_r + J_\theta)^2}$$
 (1.18)

Da tale espressione si nota immediatamente che la nuova Hamiltoniana non dipende dalle variabili angolo ed è anche completamente degenere rispetto alle azioni, difatti :

$$\omega_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_r} = \frac{\mu^2}{(J_r + J_\theta)^3} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\theta} = \omega_\theta \tag{1.19}$$

dove le due frequenze coincidono a quella di moto medio.

Quest'ultimo risultato ci permette di definire un nuovo insieme di coordinate note come variabili canoniche di Delaunay, che preserva la struttura del sistema dinamico, costituito da $J_a = J_r + J_\theta = \sqrt{\mu a}$ e da $J_b = J_\theta = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$. Si nota come J_a sia legato all'energia dell'orbita, e dunque alla sua forma, mentre J_b ha ruolo di momento angolare.

In funzione di tali coordinate l'Hamiltoniana può essere riscritta nella forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2J_a^2} \tag{1.20}$$

Le variabili angolo associate evolveranno temporalmente come :

$$\dot{\theta}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_a} = \frac{\mu^2}{J_a^3} \quad \Rightarrow \quad \theta_a(t) = \theta_a(0) + \frac{\mu^2}{J_a^3} t \tag{1.21}$$

$$\dot{\theta}_b = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_b(t) = \theta_b(0)$$
 (1.22)

Ricordando che tali angoli sono associati alla funzione caratteristica di Hamilton, come visto per la vecchia Hamiltoniana, è possibile esplicitarli in termini dell'anomalia eccentrica e vera associate all'orbita. Svolgendo i calcoli si ottiene che gli $\theta_a = \mathcal{M}$ con \mathcal{M} anomalia media e $\theta_b = \omega$ pari invece all'argomento del pericentro. Perciò dalla forma dell'Hamiltoniana si nota che solo la variabile angolo corrispondente all'anomalia media incrementa linearmente con il tempo, mentre l'argomento del pericentro è una costante del moto.

⁵L'anomalia vera è l'angolo tra il pericentro e la posizione istantanea del corpo lungo l'orbita, misurato nel piano orbitale. L'anomalia eccentrica è un parametro ausiliario legato al tempo tramite l'equazione di Keplero e semplifica la descrizione del moto in orbite ellittiche.

Capitolo 2

Il problema degli n-corpi

2.1 Formalismo e complessità dinamiche

Il problema degli n-corpi descrive il moto di n masse puntiformi soggette all'interazione gravitazionale Newtoniana. A differenza del caso a due corpi completamente integrabile, per $n \geq 3$ le interazioni non sono separabili: ogni corpo risente simultaneamente dell'azione gravitazionale di tutti gli altri, rendendo la dinamica intrinsecamente accoppiata e complessa. Nel formalismo Hamiltoniano, un sistema gravitazionale con n corpi si evolve in uno spazio delle fasi di dimensione 6n, composto da 3n coordinate spaziali e dai corrispondenti impulsi coniugati. In generale, l'esistenza di simmetrie globali - traslazioni spaziali, rotazioni e invarianza temporale - consente l'identificazione di integrali primi del moto associati al momento angolare (3), all'impulso (3) e all'energia totale del sistema¹. Per un sistema con n gradi di libertà, l'integrabilità in senso classico richiede la presenza di n IPM indipendenti e in involuzione. Tuttavia, anche dopo opportune riduzioni dei gradi di libertà, gli integrali associati all'energia, al momento lineare e al momento angolare non forniscono sufficienti quantità in involuzione, il che rende il problema non completamente integrabile. Un caso particolare è rappresentato dal problema dei tre corpi ristretto e circolare (CR3BP), in cui si vuole studiare il moto del corpo di massa trascurabile. Sebbene tale modello semplificato ammetta un integrale addizionale, noto come integrale di Jacobi, in questo caso le simmetrie del sistema vanno perse quando si decide di studiare il moto della particella di test. In generale, dunque, l'evoluzione di sistemi a più corpi richiede l'uso di metodi alternativi, quali lo sviluppo perturbativo a partire dal problema dei due corpi (Capitolo 3), o l'integrazione numerica diretta delle equazioni del moto (Sezione 3.2).

¹In accordo con il teorema di Emmy Noether, a ogni simmetria continua del sistema fisico corrisponde una quantità conservata. Tuttavia, nel problema gravitazionale a molti corpi, le uniche simmetrie globali - traslazioni, rotazioni e invarianza temporale - generano un numero limitato di integrali primi del moto, insufficiente a garantire l'integrabilità del sistema. Per maggiori dettagli si veda l'appendice A.2

2.2 Il problema dei tre corpi circolare ristretto

Una delle più importanti semplificazioni del problema generale a tre corpi è rappresentata dal problema dei tre corpi circolare ristretto (CR3BP, Circular Restricted Three-Body Problem), la cui schematizzazione è mostrata in figura 2.1. In esso si considerano due corpi di massa finita m_1 e m_2 , detti primari, che si muovono sotto l'effetto della reciproca attrazione gravitazionale lungo orbite circolari prestabilite attorno al loro centro di massa. Un terzo corpo m_3 , di massa trascurabile rispetto ai primi due (cioè $m_3 \ll m_1, m_2$), si muove sotto l'influenza del campo gravitazionale generato da m_1 e m_2 , senza però perturbare il loro moto.

Questa assunzione consente di disaccoppiare le equazioni del moto dei due primari da quelle del corpo di massa trascurabile, riducendo sensibilmente la complessità del problema. La configurazione risultante è a tutti gli effetti un modello a due gradi di libertà, ampiamente utilizzato in dinamica celeste, ad esempio nello studio del moto di satelliti artificiali, asteroidi troiani o sonde spaziali.

Per descrivere il moto del corpo di massa trascurabile, è utile introdurre due diversi sistemi di riferimento:

- Sistema di riferimento siderale, sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa dei due primari. In tale sistema, m_1 e m_2 si muovono lungo orbite circolari, e le forze gravitazionali che agiscono su m_3 derivano dalle loro posizioni variabili nel tempo.
- Sistema di riferimento sinodico, sistema di riferimento rotante solidale con la congiungente dei due primari, in cui essi appaiono fermi. Questo sistema non è inerziale, ma consente una descrizione semplificata del problema: le posizioni dei primari diventano fisse, e le equazioni del moto per il corpo m_3 assumono una forma autonoma, comprendente le forze centrifuga e di Coriolis.

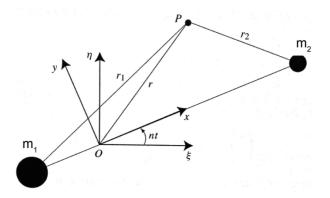


Figura 2.1: Schema del problema dei tre corpi circolare ristretto. I sistemi di riferimento sono centrati nel punto O, corrispondente al centro di massa dei due corpi primari; il terzo corpo è invece posizionato nel punto P. Il sistema rotante ha la stessa velocità angolare dei primari ed è rappresentato con le coordinate (x,y,z) mentre il sistema siderale ha per coordinate la terna (ξ,η,ζ) . L'immagine è tratta dal testo [5].

Nel sistema di riferimento sinodico, solidale con la congiungente tra i corpi primari, questi ultimi risultano fermi nelle posizioni $\mathbf{x}_1 = (-a\mu, 0, 0)$ e $\mathbf{x}_2 = (a(1 - \mu), 0, 0)$, dove $\mu = m_2/m_0$ rappresenta il rapporto tra la massa del secondario e la massa totale $m_0 = m_1 + m_2$, mentre a indica la distanza tra i due primari ed è costante posta l'ipotesi di orbite circolari. Il corpo di massa trascurabile, soggetto all'azione gravitazionale dei due primari, è descritto nel sistema di riferimento siderale (inerziale) dalle coordinate $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ e, nel sistema sinodico (rotante con velocità angolare costante $n = 2\pi/T$), dalle coordinate corrispondenti (x, y, z).

Le due terne sono legate dalla trasformazione:

$$\begin{cases} \xi = x \cos(nt) - y \sin(nt) \\ \eta = x \sin(nt) + y \cos(nt) \\ \zeta = z \end{cases}$$
 (2.1)

L'Hamiltoniana del sistema nel sistema inerziale, in unità adimensionali e con il terzo corpo di massa nulla, è data da:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$
 (2.2)

dove r_1 e r_2 rappresentano le distanze del corpo leggero dai due primari:

$$r_1 = \sqrt{(x+a\mu)^2 + y^2 + z^2} \tag{2.3}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - a(1 - \mu))^2 + y^2 + z^2}$$
(2.4)

Passando al sistema rotante tramite una trasformazione canonica generata da una funzione tipo $F_2 = \boldsymbol{\xi} R(t) \cdot \mathbf{P}$ (con R(t) matrice di rotazione e P vettore degli impulsi), si ottiene una nuova Hamiltoniana autonoma nel sistema sinodico, comprendente i termini apparenti:

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + n(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2)$$
 (2.5)

Questa espressione può essere riorganizzata evidenziando un **potenziale efficace** U(x, y, z) e conduce alle equazioni del moto tramite le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$
(2.6)

dove n è la velocità angolare di rotazione (che, per orbite circolari, può essere posta pari a 1 in unità opportune), e U(x, y, z) assume la forma seguente :

$$U(x,y,z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$
(2.7)

Poiché il potenziale efficace non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia totale nel sistema rotante risulta costante lungo le traiettorie.

Questa conservazione permette di definire una quantità costante per il moto, nota come **integrale di Jacobi**, che si esprime nella forma:

$$C_J = 2U(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$
(2.8)

L'integrale di Jacobi gioca un ruolo fondamentale nello studio qualitativo della dinamica del sistema: vincola infatti la velocità del corpo leggero in funzione della sua posizione. La regione dello spazio accessibile al moto è determinata dalla disuguaglianza:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) - C_J > 0 \tag{2.9}$$

Le superfici definite dall'equazione $2U = C_J$ prendono il nome di **superfici di Hill**, o superfici di velocità nulla, poiché delimitano i confini oltre i quali il corpo non può accedere se l'integrale di Jacobi è costante.

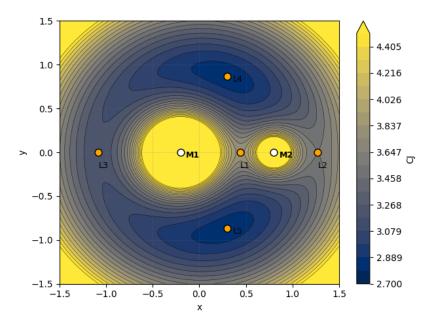


Figura 2.2: Curve di livello del potenziale effettivo nel problema ristretto dei tre corpi con massa secondaria $m_2 = 0.2$. Sono indicati i punti di Lagrange L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 (in arancione), e le posizioni delle due masse principali M_1 e M_2 (in bianco). La scala cromatica rappresenta i valori dell'integrale di Jacobi C_J . Il grafico è stato ottenuto da uno script discusso nel corso di Meccanica Celeste [1].

Capitolo 3

Teoria delle perturbazioni

3.1 Perturbazioni nel formalismo Hamiltoniano

Il problema dei due corpi, in cui entrambi i corpi sono trattati come masse puntiformi, ammette una soluzione analitica esatta. Tuttavia, questa possibilità svanisce nel caso in cui il numero di corpi superi due, oppure quando le masse non possono essere idealizzate come punti materiali, come accade ad esempio per corpi con distribuzioni di massa non sferiche. In generale, il moto del sistema è governato da un'energia potenziale della forma

$$U = U_0 + \mathcal{R},$$

dove U_0 rappresenta l'energia potenziale del problema dei due corpi (per il quale esiste una soluzione analitica) e \mathcal{R} è una funzione di disturbo, cioè una **perturbazione** che tiene conto sia degli effetti dovuti alla presenza di corpi aggiuntivi, sia delle deviazioni dalla simmetria sferica.

La **teoria delle perturbazioni**¹ comprende una serie di metodi matematici che consentono di analizzare l'influenza di \mathcal{R} sul moto del sistema. Tali metodi si suddividono principalmente in due categorie: perturbazioni speciali e perturbazioni generali.

Le **perturbazioni generali** sfruttano il fatto che l'orbita dovuta a U_0 varia lentamente sotto l'effetto di \mathcal{R} . A un dato istante, l'orbita è caratterizzata dagli elementi osculatori, che definiscono l'ellisse osculatrice (ossia l'orbita "istantanea" dovuta a U_0 , che si assume essere un'ellisse). Successivamente, si ottengono e studiano con metodi analitici le equazioni che descrivono la variazione temporale di questi elementi.

Le **perturbazioni speciali** consistono invece nell'integrazione numerica delle orbite: date le masse dei corpi e le condizioni iniziali (posizioni e velocità) a un tempo iniziale, si ricavano le posizioni e le velocità a tempi successivi integrando numericamente le equazioni complete del moto oppure le equazioni di variazione degli elementi (cioè le equazioni delle perturbazioni). In molte applicazioni, l'effetto della perturbazione \mathcal{R} è almeno un ordine di grandezza inferiore a U_0 , il che consente di trattare il problema sia

¹Per una breve generalizzazione sulle orbite quasi-periodiche si veda l'appendice A.3

con le perturbazioni speciali sia con quelle generali. Tuttavia, le perturbazioni generali non sono utilizzabili quando i due termini U_0 e \mathcal{R} sono dello stesso ordine.

Riprendendo il formalismo Hamiltoniano delle variabili azione-angolo, introdotto nel primo capitolo, abbiamo che il sistema è descritto da:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\mathbf{J}) + \mathcal{H}_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) \tag{3.1}$$

Ricordando la definizione di variabili canoniche di Delaunay, le equazioni del moto perturbate sono:

$$\dot{J}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{M}} \quad ; \quad \dot{J}_b = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial w}$$
 (3.2)

$$\dot{J}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{M}} \quad ; \quad \dot{J}_b = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial w}$$

$$\dot{\mathcal{M}} = n + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J_a} \quad ; \quad \dot{w} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J_b}$$
(3.2)

In seguito focalizzeremo la nostra attenzione sull'ultima equazione che fornisce il tasso di variazione dell'argomento del pericentro.

Precessione del perielio di Mercurio 3.2

Formulazione del problema

Consideriamo un sistema composto da due corpi, ad esempio Sole-Mercurio, perturbato dalla presenza di un terzo corpo, come ad esempio Giove per i due primari citati in precedenza.

Vorremmo studiare la variazione dell'argomento del pericentro di Mercurio, che non è più una costante del moto se il problema è perturbato. Indicando con il pedice 0 le coordinate del Sole e con p quelle del corpo perturbatore, si hanno le seguenti equazioni del moto che includono la perturbazione:

$$\begin{cases}
\frac{d^{2}\boldsymbol{\xi}_{0}}{dt^{2}} = Gm\frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{0}}{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{0}\|^{3}} - Gm_{p}\frac{\boldsymbol{\xi}_{0} - \boldsymbol{\xi}_{p}}{\|\boldsymbol{\xi}_{0} - \boldsymbol{\xi}_{p}\|^{3}} \\
\frac{d^{2}\boldsymbol{\xi}}{dt^{2}} = -Gm_{0}\frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{0}}{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{0}\|^{3}} - Gm_{p}\frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{p}}{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{p}\|^{3}}
\end{cases} (3.4)$$

Ci poniamo ora in un sistema di riferimento eliocentrico in cui poniamo $\mu = G(m_0 + m)$ e definiamo $x = \xi - \xi_0$ e $x_p = \xi_p - \xi_0$; dopo alcuni calcoli algebrici si ottiene la seguente equazione del moto, in cui si distinguono il termine imperturbato e quello di perturbazione:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} - Gm_p \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\|^3} + \frac{\mathbf{x}_p}{\|\mathbf{x}_p\|^3} \right) = -\nabla \Phi$$
 (3.5)

da ciò si ricava tramite integrazione il potenziale Φ :

$$\Phi = -\frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|} - Gm_p \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{p}}\|} - \frac{\mathbf{x}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}_{\mathbf{p}}\|^3} \right)$$
(3.6)

Soluzione analitica

L'Hamiltoniana del sistema perturbato è :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\|x\|^2} \right) - \frac{\mu}{\|x\|} - Gm_p \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x_p}\|} - \frac{\mathbf{x_p} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x_p}\|^3} \right)$$
(3.7)

Per quanto visto in precedenza, siamo in grado di esprimere \mathcal{H}_0 in termini delle variabili canoniche di Delaunay e ci piacerebbe esprimere analogamente la funzione di disturbo. Per fare ciò sfruttiamo il fatto che $\|\mathbf{x}\| << \|\mathbf{x}_{\mathbf{p}}\|$ e sviluppiamo \mathcal{H}_1 in serie di Taylor fino ai termini di quadrupolo.

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\|} \simeq \frac{1}{\|\mathbf{x}_p\|^3} \left(\|\mathbf{x}_p\|^2 - \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_p + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_p)^2}{\|\mathbf{x}_p\|^2} \right)$$
(3.8)

Pertanto, si ottiene lo sviluppo di quadrupolo della perturbazione:

$$\mathcal{H}_{1} \simeq -\frac{Gm_{p}}{\|\mathbf{x}_{p}\|^{3}} \left(\|\mathbf{x}_{p}\|^{2} - \frac{\|\mathbf{x}\|^{2}}{2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_{p})^{2}}{\|\mathbf{x}_{p}\|^{2}} \right)$$
(3.9)

Vogliamo ora calcolare i termini secolari mediando H_1 sul periodo orbitale del corpo perturbatore e su quello del corpo perturbato, ovvero :

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle = \frac{1}{TT_p} \int_0^{T_p} \int_0^T \mathcal{H}_1 dt dt_p \tag{3.10}$$

Trasformando gli integrali temporali in termini delle anomalie medie, quindi effettuando le sostituzioni $M = n(t - \tau)$ e $M_p = n_p(t_p - \tau_p)$, si ottiene :

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1 dM dM_p \tag{3.11}$$

Per semplificare il calcolo supponiamo orbite complanari e circolari per il corpo perturbatore, per cui:

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= (r(f)\cos f, r(f)\sin f) \\ \mathbf{x}_p &= (a_p\cos f_p, a_p\sin f_p) \end{cases}$$
(3.12)

dove f e f_p sono le anomalie vere dell'orbita.

La perturbazione diventa:

$$\mathcal{H}_1 \simeq -\frac{Gm_p}{a_p^3} \left(a_p^2 - \frac{r(f)^2}{2} + \frac{3}{2}r(f)^2 \left(\cos f \cos f_p + \sin f \sin f_p\right)^2 \right)$$
 (3.13)

$$= -\frac{Gm_p}{a_p^3} \left(a_p^2 - \frac{r(f)^2}{2} + \frac{3}{2}r(f)^2 \left(\cos^2 f \cos^2 f_p + \sin^2 f \sin^2 f_p \right) \right)$$
(3.14)

$$+2\cos f\sin f\cos f_p\sin f_p)$$
(3.15)

Ricordando che abbiamo supposto l'orbita circolare, svolgendo il primo integrale su M_p si ottiene :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 f_p \, df_p = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 f_p \, df_p = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos f_p \, df_p = 0 \quad (3.16)$$

ciò permette di riscrivere la perturbazione come :

$$\mathcal{H}_1 \simeq -\frac{Gm_p}{a_p^3} \left(a_p^2 + \frac{r(f)^2}{4} \right) \tag{3.17}$$

Ora possiamo notare che per l'integrale in M dobbiamo soltanto valutare $r(f)^2$; in termini dell'anomalia eccentrica si ha :

$$\frac{1}{2\pi} \langle r(f)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - e \cos \xi)^3 d\xi = a^2 \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right)$$
 (3.18)

dove per l'ultima uguaglianza si è svolto il cubo di binomio e si è tenuto conto della simmetria dei singoli termini. Quindi si ricava il risultato finale nella seguente forma:

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle = -\frac{Gm_p}{a_p^3} \left(a_p^2 + \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) \right) \tag{3.19}$$

Ricordando l'espressione delle azioni, possiamo esplicitare i parametri orbitali:

$$a = \frac{J_a^2}{\mu}$$
 ; $e^2 = 1 - \frac{J_b^2}{J_a^2}$ (3.20)

Ricaviamo la precessione:

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle}{\partial J_b} = \frac{3Gm_p J_a^2}{8\mu^2 a_n^3} \frac{\partial J_b^2}{\partial J_b} = \frac{3}{4} \frac{Gm_p}{a_n^3 \mu^2} J_a^2 J_b$$
 (3.21)

$$= \frac{3}{4} \frac{Gm_p}{a_p^3 \mu^2} \mu a \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{3}{4} \frac{Gm_p}{a_p^3} \sqrt{\frac{a^3}{\mu} (1 - e^2)}$$
(3.22)

Possiamo esprimere tale risultato in funzione dei periodi orbitali:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{8\pi} \frac{Gm_p T}{a_p^3} \sqrt{1 - e^2} = \frac{3\pi}{2} \frac{m_p}{m_p + m_{sun}} \frac{T}{T_p^2} \sqrt{1 - e^2}$$
(3.23)

e infine calcolare la variazione dell'argomento del pericentro in un periodo di rivoluzione:

$$\Delta\omega \approx \frac{3\pi}{2}\sqrt{1 - 0.2056^2} \cdot \frac{1.898 \times 10^{-3}}{1.989} \left(\frac{0.24}{11.86}\right)^2 \approx 0.37''$$
 (3.24)

Moltiplicando il risultato per le orbite di Mercurio in un secolo si ottiene un avanzamento del perielio di circa 154.88 arcsec/secolo.

Integrazione numerica

Consideriamo le equazioni 3.5 e 3.6, da esse si ricavano una coppia di equazioni differenziali del primo ordine per ciascuna direzione sul piano orbitale. Imponendo le seguenti condizioni iniziali e adimensionalizzando adeguatamente si ottiene un sistema pronto ad essere integrato numericamente.

$$\begin{cases} x(0) = a_m (1 - e_m) \\ v_x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ v_y(0) = \sqrt{G \frac{M_s + m_m}{a_m}} \sqrt{\frac{1 + e_m}{1 - e_m}} \end{cases}$$
(3.25)

Si è scelto come algoritmo numerico il metodo di **Runge-Kutta al quart'ordine**. Tale metodo prevede quattro valutazioni ed è dunque un algoritmo a quattro stadi.

Sia h il passo di integrazione, ovvero tale che $h=x_{n+1}-x_n$, e $\Phi=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3+b_4k_4$ dove :

$$\begin{cases}
k_1 = f(y_n, x_n) \\
k_2 = f(y_n + a_{1,1}hk_1, x_n + c_1h) \\
k_3 = f(y_n + a_{2,1}hk_1 + a_{2,2}hk_2, x_n + c_2h) \\
k_4 = f(y_n + a_{3,1}hk_1 + a_{3,2}hk_2 + a_{3,3}hk_3, x_n + c_3h)
\end{cases}$$
(3.26)

Il metodo si presenta in forma generale come:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, x_n; h) (3.27)$$

espandendo in serie di Taylor all'ordine relativo al numero di stadi, è possibile fissare i valori di $a_{i,j}, b_i, c_i$ dato che il numero di parametri supera quello di vincoli. Si ricava dunque la versione scelta per l'integrazione :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
 (3.28)

dove:

$$\begin{cases}
k_1 = f(y_n, x_n) \\
k_2 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_1, x_n + \frac{1}{2}h) \\
k_3 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_2, x_n + \frac{1}{2}h) \\
k_4 = f(y_n + hk_3, x_n + h)
\end{cases}$$
(3.29)

L'accuratezza del metodo sarà caratterizzata da un errore globale di $O(h^4)$, che risulta proporzionale al numero di stadi fino all'ordine quattro incluso, ed un errore locale di $O(h^5)$.

Una volta nota la posizione di Mercurio in ogni (x_i, y_i) , si definisce il vettore di modulo $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Chiaramente il perielio sarà localizzato dove la distanza dall'origine risulterà minima. In questo modo otteniamo una prima stima del valore minimo di r_i ; per essere migliorata si implementa un algoritmo ricorsivo in grado di reintegrare il sistema nell'intervallo $[r_{i-1}, r_{i+1}]$, con riadeguato passo. Il processo si ripete finché la differenza tra due misure successive non scende al di sotto della soglia di tolleranza prestabilita.

Determinate le coordinate (x_i, y_i) di distanza minima ad ogni orbita, possiamo ricavare l'argomento del pericentro applicando la formula :

$$\omega_i = \arctan(\frac{y_i}{x_i}) \tag{3.30}$$

Il risultato è illustrato in figura 3.1, dove viene confrontato con la soluzione analitica precedentemente ottenuta. Dal grafico si osserva che l'argomento del pericentro di Mercurio cresce linearmente, come previsto dal modello, ma presenta anche una modulazione di tipo sinusoidale. L'incremento per orbita dell'argomento del pericentro è dell'ordine di un arcosecondo, il che giustifica il fatto che, in unità astronomiche, le orbite perturbata e non perturbata risultino pressoché indistinguibili.

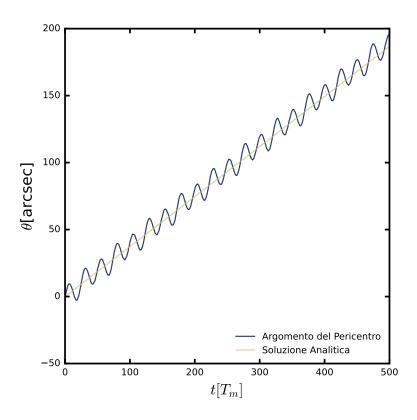


Figura 3.1: Confronto tra integrazione numerica e soluzione analitica della precessione dell'argomento del pericentro di Mercurio. La curva blu mostra l'evoluzione ottenuta mediante integrazione numerica delle equazioni del moto (metodo Runge–Kutta 4 stadi), mentre la linea gialla riporta la soluzione analitica perturbativa calcolata con la teoria delle perturbazioni (3.23). Si osserva che l'argomento del pericentro cresce quasi linearmente nel tempo, con una lieve modulazione sinusoidale; il tasso medio calcolato (≈ 0.37 " per orbita, ovvero ≈ 154.88 "/secolo) è in accordo con le osservazioni.

Conclusioni

Questo lavoro si propone di offrire una trattazione il più possibile completa e rigorosa della dinamica gravitazionale nei sistemi a pochi corpi, mettendo in luce la transizione dalla completa integrabilità del problema dei due corpi alla complessità fenomenologica che emerge nei sistemi con $n \geq 3$ corpi. L'impiego sistematico del formalismo Hamiltoniano e delle variabili azione-angolo ha consentito lo sviluppo di strumenti analitici potenti per l'analisi di sistemi dinamici complessi. Il problema dei tre corpi circolare ristretto si è rivelato un paradigma efficace per comprendere i meccanismi fondamentali della dinamica non integrabile, mentre l'applicazione della teoria delle perturbazioni al calcolo della precessione del perielio di Mercurio ha dimostrato la validità e l'accuratezza dei metodi sviluppati. Il valore ottenuto (154.88 arcsec/secolo) è in ragionevole accordo con le osservazioni, considerando anche i contributi della relatività generale, e con i risultati delle simulazioni numeriche, confermando il ruolo significativo degli effetti gravitazionali planetari nella dinamica del Sistema Solare. L'introduzione, in appendice, di concetti avanzati di geometria simplettica e teoria KAM apre prospettive interessanti per futuri sviluppi, suggerendo direzioni di ricerca orientate allo studio della stabilità a lungo termine e dei fenomeni caotici nei sistemi dinamici Hamiltoniani. Nonostante alcune inevitabili semplificazioni e la necessità di approfondimenti su specifici aspetti teorici, il lavoro costituisce una base solida per la comprensione dei principi fondamentali della meccanica celeste e delle sue applicazioni moderne.

Appendice A

Generalizzazione tensoriale del problema degli n-corpi

A.1 Forme simplettiche, tensori e derivata di Lie

In generale, un tensore è un oggetto multilineare definito sullo spazio tangente di una varietà, che generalizza scalari e vettori. Una forma simplettica ω è un tensore antisimmetrico di tipo $(0,2)^1$ che è chiuso e non degenere; in fisica classica essa rappresenta l'elemento di area orientata infinitesima nel piano (q,p) di fase. Il tensore di Poisson II è un bivettore contravariante (tensore di tipo (2,0)) definito come l'inverso di ω , ovvero tale che $\Pi(df,dg)=\{f,g\}$. Infine, la derivata di Lie \mathcal{L}_XT di un campo tensoriale T rispetto a un campo vettoriale X misura la variazione infinitesima di T trasportato lungo il flusso generato da X. In altre parole, la derivata di Lie rappresenta il tasso di cambiamento di T quando ogni punto della varietà viene spostato istantaneamente nella direzione di X.

A.2 Simmetrie e integrali primi nello spazio delle fasi

Nel contesto geometrico-Hamiltoniano ora introdotto, una simmetria del sistema dinamico è rappresentata da un campo vettoriale Y il cui flusso conserva la forma simplettica:

$$\mathcal{L}_{Y}\omega=0.$$

¹In meccanica celeste i tensori sono oggetti multilineari che descrivono strutture geometriche (metriche, operatori d'inerzia, ecc.) su varietà differenziabili. Un tensore di tipo (0,2) non ha indici contravarianti e possiede due indici covarianti, e si indica come T_{ij} dove gli indici in basso i,jsono relativi a componenti rispetto a una base duale. Gli indici in alto (se presenti) rappresenterebbero invece componenti in una base vettoriale.

Ciò equivale a dire che la trasformazione generata da Y è canonica, ovvero non altera la struttura del sistema nello spazio delle fasi. Se inoltre esiste una funzione liscia F tale che

$$Y = X_F = \omega^{-1} \cdot \mathrm{d}F,$$

allora F è un $integrale\ del\ moto$, cio
è una quantità conservata lungo le traiettorie Hamiltoniane :

$$\dot{F} = \{F, H\} = 0.$$

Quando il sistema ammette k integrali primi F_1, \ldots, F_k in involuzione (cioè $\{F_i, F_j\} = 0$), il moto è vincolato su una sottovarietà Lagrangiana di dimensione 3n-k. Nel caso ideale di *integrazione completa*, in cui esistono n integrali primi indipendenti in involuzione, il sistema è detto *integrabile* nel senso di Liouville-Arnold: lo spazio delle fasi si folia in tori invarianti su cui il moto è quasi-periodico. Questa prospettiva consente di comprendere il ruolo delle simmetrie come generatori geometrici di costanti del moto, e prepara il terreno per trattare il caso più realistico di sistemi debolmente non integrabili, come i sistemi di n corpi perturbati.

A.3 Perturbazioni, stabilità e varietà invarianti nei sistemi Hamiltoniani

Un sistema quasi-integrabile sottoposto a piccole perturbazioni conserva molte delle sue proprietà regolari. Il teorema di Kolmogorov-Arnol'd-Moser (KAM) garantisce che, per perturbazioni sufficientemente deboli e condizioni di non risonanza tra le frequenze angolari, un insieme di misura positiva di tori invarianti quasi-periodici persiste. In termini di orbite nello spazio delle fasi, ciò significa che molte orbite quasi-periodiche rimangono confinate su tori invarianti leggermente deformati. Tuttavia, i tori corrispondenti a frequenze commensurabili vengono distrutti dal disturbo, dando origine a fenomeni dinamici complessi. Intorno a punti di equilibrio iperbolici emergono varietà invarianti stabili e instabili (di dimensione ridotta), che se si intersecano (omocline) possono generare moti caotici e irregolari. In pratica, la rottura di tori risonanti crea regioni di moto caotico delimitate da varietà invarianti di dimensione minore.

- La teoria KAM predice la sopravvivenza di molti moti quasi-periodici confinati su tori deformati (stabilità quasi-periodica).
- Alcuni tori risonanti si rompono, generando intersezioni tra varietà stabili e instabili e percorsi caotici (fenomeni spiegati, ad esempio, dal criterio di Melnikov).
- La presenza di integrali residui o di simmetrie residue può rendere il moto confinato a sottovarietà invarianti, facilitando una parziale riduzione del moto.

Bibliografia

- [1] F. Marinacci. Appunti personali e dispense del corso di Meccanica Celeste (2024/2025). Università degli Studi di Bologna, 2025.
- [2] S. Tremaine. *Dynamics of Planetary Systems*. Princeton University Press, 2nd edition, 2008.
- [3] A. E. Roy. Orbital Motion. Taylor & Francis, 4th edition, 2005.
- [4] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] M. Valtonen and H. Karttunen. *The Three-Body Problem*. Cambridge University Press, 2006.
- [6] L. Ciotti. Stellar Dynamics: A Modern Introduction. Princeton University Press, 2021.
- [7] L. Ciotti. Appunti personali del corso di Astrofisica Extragalattica (2024/2025). Università degli Studi di Bologna, 2025.