

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia

**RIGHE SPETTRALI:
FORMAZIONE, SHIFT,
ALLARGAMENTO**

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARCELLA BRUSA

Presentata da:
ARIANNA ZIROTTI

Sessione I
Anno Accademico 2024/2025

Indice

Introduzione	II
1 Formazione delle righe spettrali	1
1.1 Descrizione della struttura atomica	1
1.2 Interazione dell'atomo con la radiazione elettromagnetica	1
Teoria perturbativa dipendente dal tempo	2
Coefficienti di Einstein	4
1.3 Approssimazione di dipolo elettrico	5
1.4 Regole di selezione	5
Transizioni di dipolo elettrico	5
Transizioni di quadrupolo elettrico e di dipolo magnetico	6
1.5 Formazione delle righe spettrali nelle atmosfere stellari	7
Spettri in emissione e in assorbimento	7
Equazione del trasporto radiativo	7
2 Shift delle righe spettrali	9
2.1 Effetto Doppler	9
2.2 Altre tipologie di redshift	10
3 Allargamento delle righe spettrali	11
3.1 Allargamento intrinseco	11
3.2 Allargamento Doppler termico	11
3.3 Allargamento collisionale	12
3.4 Profilo di Voigt	13
3.5 Curva di crescita	14
4 Applicazioni astrofisiche	14
4.1 Classificazione spettrale delle stelle	14
5 Conclusioni	15
Bibliografia	16

Introduzione

Prima del *XIX* secolo molti scienziati pensavano che non sarebbe mai stato possibile conoscere le caratteristiche e la composizione chimica delle stelle. Oggi, invece, queste informazioni sono conosciute e comprese in dettaglio. Il cambiamento avvenne nel 1814, quando Fraunhofer osservò il Sole per mezzo del suo spettroscopio, strumento dotato di un prisma per disperdere la luce. Ciò che vide fu un insieme di linee scure su un fondo composto dai colori dell'arcobaleno. Fraunhofer catalogò meticolosamente queste linee e successivamente osservò un'altra stella, Sirio, accorgendosi così che aveva uno spettro molto diverso da quello del Sole. Seppur non conoscendo la spiegazione della presenza di queste righe, intuì che fossero connesse alla composizione dell'oggetto studiato.

A metà del *XIX* secolo, i fisici Kirchhoff e Bunsen compresero la natura delle righe spettrali mentre studiavano i colori assunti da alcuni metalli quando venivano bruciati. Notarono, infatti, che la lunghezza d'onda della radiazione emessa corrispondeva esattamente con alcune righe precedentemente catalogate da Fraunhofer. La completa spiegazione del fenomeno arrivò solo nel *XX* secolo, quando iniziò ad affermarsi la teoria della meccanica quantistica.

Oggi lo studio dello spettro elettromagnetico di un oggetto è un elemento essenziale per conoscerne le caratteristiche, tra cui:

- La **composizione chimica**, deducibile sapendo quale atomo ha prodotto una certa transizione;
- La **temperatura** della regione in cui si è formata la riga, che si ricava sapendo quali livelli energetici sono coinvolti in una certa transizione;
- Il **moto** dell'oggetto, dato dallo spostamento delle righe rispetto alla loro posizione a riposo osservata in laboratorio;
- La **pressione** e la densità dell'ambiente di origine della transizione, che si ottiene studiando l'allargamento della riga;
- E, infine, il **campo magnetico** presente nell'oggetto, quantificabile dallo splitting delle righe in più componenti.

Formazione delle righe spettrali

1.1 Descrizione della struttura atomica

La spettroscopia e la fisica quantistica sono due discipline strettamente connesse fra loro: è proprio grazie alla prima che si è arrivati a una descrizione completa delle strutture atomiche. In particolare, sono risultati fondamentali gli esperimenti compiuti da Balmer nel 1885 per studiare le transizioni dell'atomo di idrogeno nella parte visibile dello spettro elettromagnetico. Essi portarono a definire la formula empirica:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.1)$$

dove R_H è la costante di Rydberg, mentre m e n sono numeri interi. Partendo da questi esperimenti, il fisico Niels Bohr propose, nel 1913, un nuovo modello di atomo, basato su quattro ipotesi:

- l'atomo è composto da un numero discreto di stati stazionari di energia E_1, E_2, \dots
- gli elettroni in questi stati si muovono su delle orbite circolari attorno al nucleo, senza emettere energia;
- le orbite sono definite dalla condizione che il momento angolare $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r}$ sia quantizzato, ovvero sia un multiplo intero di \hbar : $|L| = n\hbar$;
- per passare da un'orbita a un'altra, l'elettrone emette o assorbe un fotone di energia pari alla differenza di energia fra le due orbite.

Questo modello atomico riesce a spiegare il fenomeno delle righe spettrali, in quanto predice che ciascuna transizione sia caratterizzata da una lunghezza d'onda specifica. Tuttavia, una visione più completa del processo richiede di rappresentare l'elettrone come una funzione d'onda identificata da un set di numeri quantici.

1.2 Interazione dell'atomo con la radiazione elettromagnetica

Dopo aver posto le basi per la descrizione quantistica dell'atomo, l'elemento principale che bisogna considerare è l'interazione di quest'ultimo con la radiazione elettromagnetica. La trattazione che segue si avvale di un approccio semi-classico, ovvero considera l'atomo

da un punto di vista quanto-meccanico e la radiazione secondo la fisica classica. Inoltre, prende in esame il caso semplificato di atomo idrogenoide, ma può essere opportunamente adattata anche per atomi a molti elettroni.

Particelle cariche in presenza di un campo magnetico sono descritte tramite l'Hamiltoniana: $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2$, dove q indica la carica elettrica e \vec{A} il potenziale vettore. Questa relazione può essere riscritta in modo da separare la parte imperturbata, H_0 , dalla perturbazione di interazione, H' .

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{i\hbar e}{m}\vec{A} \cdot \nabla + \frac{e^2 A^2}{2m} = H_0 + H' \quad (1.2)$$

In approssimazione di campi deboli, il termine che comprende A^2 viene trascurato. Si può quindi applicare la teoria perturbativa al primo ordine dipendente dal tempo per trovare la probabilità di transizione per unità di tempo da uno stato iniziale a uno stato finale. Questo permette di definire i coefficienti di Einstein, che regolano le interazioni radiative riguardanti transizioni elettroniche bound-bound.

Teoria perturbativa dipendente dal tempo

Si consideri una particella generica a un tempo t , descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi(t) = \sum_m C_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \quad (1.3)$$

Se inserita nell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + H')\psi$, si ottiene la seguente relazione:

$$i\hbar \sum_m \dot{C}_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle = \sum_m C_m H' e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \quad (1.4)$$

Poichè si vuole trovare la probabilità di transire da uno stato ad un altro, si moltiplica scalarmente l'eq. 1.4 per la configurazione $\langle n|$.

$$\begin{aligned} \langle n| i\hbar \sum_m \dot{C}_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle &= \langle n| \sum_m C_m H' e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \\ i\hbar \dot{C}_n &= \sum_m C_m \langle n| H' |m\rangle e^{i\omega_{nm} t} \quad \text{con} \quad \omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Espandendo i coefficienti C_n e C_m in ampiezze di ordini 0 e 1 nella perturbazione H' e sostituendoli nell'eq. 1.5, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{C}_n^{(0)} = 0 & \text{Dunque } C_n^{(0)} = \text{cost} \\ i\hbar \dot{C}_n^{(1)} = \sum_m C_m^{(0)} \langle n| H' |m\rangle e^{i\omega_{nm} t} \end{cases} \quad (1.6)$$

La probabilità che avvenga la transizione si ottiene dunque come $\left|C_n^{(1)}\right|^2$. Per calcolare questo valore, si consideri un caso specifico in cui lo stato iniziale non sia una sovrapposizione di più stati come nell'analisi precedente, ma solamente $\psi(0) = |i\rangle$. L'eq. 1.6 in queste condizioni diventa:

$$i\hbar\dot{C}_n^{(1)} = \langle n|H'|i\rangle e^{i\omega_{nm}t} = H'_{ni}e^{i\omega_{nm}t} \quad (1.7)$$

Quindi:

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H'_{ni} e^{i\omega_{nm}t'} dt' \quad (1.8)$$

Considerando la perturbazione H' descritta dall'eq. 1.2, e conoscendo l'equazione che descrive il potenziale vettore, $\vec{A} = \frac{A_0}{2} \left[\hat{e}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{e}^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right]$, è possibile ricavare il valore dell'elemento di matrice H'_{ni} , e di conseguenza di $C_n^{(1)}(t)$.

$$H'_{ni} = -\frac{i\hbar e A_0}{2m} \left[\langle n|\hat{e}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla|i\rangle e^{-i\omega t} + \langle n|\hat{e}^*e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla|i\rangle e^{i\omega t} \right] \quad (1.9)$$

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{eA_0}{2m} \left[M_{ni} \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{i(\omega_{ni}-\omega)} + \tilde{M}_{ni} \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{i(\omega_{ni}+\omega)} \right] \quad (1.10)$$

Dove $M_{ni} = \langle n|\hat{e}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla|i\rangle$ e $\tilde{M}_{ni} = \langle n|\hat{e}^*e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla|i\rangle$. I due termini che compongono $C_n^{(1)}(t)$ descrivono l'assorbimento e l'emissione stimolata di radiazione elettromagnetica da parte dell'atomo. In entrambi, il fattore dipendente dal tempo è della forma: $\frac{1-e^{iat}}{a}$, dove $a = \omega_{ni} \pm \omega$. Usando le proprietà trigonometriche ed elevando al quadrato, diventa:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad (1.11)$$

L'andamento di questa funzione è mostrato in fig. 1.1. Essa rappresenta la **line profile function** (LPF), ovvero la probabilità che un fotone di frequenza ω faccia avvenire la transizione fra due stati la cui differenza di energia è $\hbar\omega_{ni}$. Siccome si tratta di una probabilità, è normalizzata $\int_0^\infty \phi(\nu)d\nu = 1$; inoltre è tipica di ciascuna transizione. Si nota chiaramente che, aumentando t, il picco centrale diventa sempre più alto e stretto, mentre i massimi relativi laterali vanno a zero. Nel limite per $t \rightarrow \infty$ si trasforma in una delta di Dirac. Ciò significa che l'assorbimento è possibile solo se $\omega = \omega_{ni} > 0$, mentre per l'emissione stimolata è necessario avere $\omega = -\omega_{ni} < 0$. Dunque la transizione può avvenire solamente se il fotone trasporta un'energia pari alla differenza fra i livelli energetici.

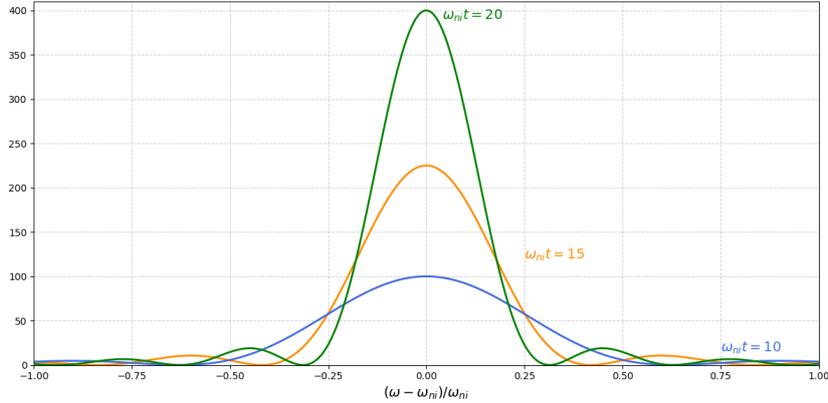


Figura 1.1: Andamento della funzione normalizzata $\frac{\sin^2(\frac{a}{2}t)}{(\frac{a}{2})^2}$

Coefficienti di Einstein

Partendo dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente, è possibile definire i coefficienti di Einstein, che indicano la probabilità di assorbimento o emissione per unità di tempo. Si consideri un modello atomico semplificato composto da due livelli U e L (upper e lower) di energia E_U ed E_L , ciascuno avente peso statistico g_U e g_L . Sono possibili tre processi:

- **Emissione spontanea:** l'elettrone si trova nello stato eccitato U e dopo un certo tempo decade nello stato L emettendo un fotone di energia pari a $E_U - E_L$. La probabilità di transizione è definita dal coefficiente A_{UL} [s^{-1}].
- **Emissione stimolata:** un fotone con energia $E_U - E_L$ induce un elettrone nello stato U a decadere ed emettere un altro fotone con la stessa energia, generando quindi radiazione coerente. Questo fenomeno è descritto dal coefficiente $B_{UL} \bar{J}(\nu_{UL})$ [s^{-1}], dove $\bar{J}(\nu_{UL})$ indica la densità di fotoni con frequenza ν_{UL} .
- **Assorbimento:** l'energia guadagnata dall'assorbimento di un fotone da parte dell'atomo porta un elettrone nello stato L a transire nel livello U. Analogamente al caso dell'emissione stimolata, il coefficiente di Einstein è dato da $B_{LU} \bar{J}(\nu_{UL})$ [s^{-1}].

La densità di fotoni $\bar{J}(\nu_{UL})$ è legata alla LPF tramite la seguente relazione: $\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$, dove J_ν indica la distribuzione spettrale di fotoni.

In caso di equilibrio termico, è possibile trovare una relazione fra i coefficienti di Einstein, considerando che il rate di transizioni in emissione sia equivalente a quello delle transizioni in assorbimento. Siano N_U e N_L il numero di atomi nello stato U o L per unità di volume.

$$A_{UL}N_U + \bar{J}B_{UL}N_U = \bar{J}B_{LU}N_L \quad (1.12)$$

Facendo alcune considerazioni riguardanti la connessione fra \bar{J} e la funzione di Planck, e usando l'equazione di Boltzmann, si ottiene:

$$\frac{8\pi h\nu_{UL}^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{UL}}{kT}} - 1} = \frac{\frac{A_{UL}}{B_{UL}}}{\left(\frac{g_L}{g_U} e^{\frac{h\nu_{UL}}{kT}}\right) \frac{B_{LU}}{B_{UL}} - 1} \quad (1.13)$$

Quindi è possibile ricavare una relazione fra i coefficienti di Einstein A_{UL} , B_{UL} e B_{LU} .

$$B_{UL} = A_{UL} \frac{c^3}{8\pi h\nu_{UL}^3} \quad B_{LU} = \frac{g_U}{g_L B_{UL}} \quad (1.14)$$

1.3 Approssimazione di dipolo elettrico

Le scale di dimensioni tipiche della radiazione elettromagnetica e dell'atomo sono molto diverse fra loro. Per esempio, nella banda ottica la radiazione ha lunghezze d'onda di circa 4000/7000 Å, mentre il raggio atomico di Borh è di 0.53 Å. Dunque l'elemento di matrice M_{ni} descritto nell'eq. 1.10, che è l'elemento fondamentale nel determinare i processi di transizione, può essere semplificato, in quanto $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$. Dunque $M_{ni} = \langle n | \hat{\epsilon} \cdot \nabla | i \rangle$. Inoltre, sapendo che $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ e che $\vec{p} = \frac{m}{i\hbar} [\vec{r}, H_0]$ si ricava che:

$$M_{ni} = -\frac{m\omega_{ni}}{\hbar} \hat{\epsilon} \langle n | \vec{r} | i \rangle = \frac{m\omega_{ni}}{\hbar e} \hat{\epsilon} \langle n | \vec{D} | i \rangle \quad \text{dove} \quad \vec{D} = -e\vec{r} \quad (1.15)$$

Se l'elemento di matrice $\langle n | \vec{D} | i \rangle$ è diverso da 0, allora la transizione è considerata permessa in approssimazione di dipolo elettrico (E_1). Se, invece, è proibita in approssimazione di dipolo, bisogna considerare altri termini nello sviluppo in serie di $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Questo può dare origine alle transizioni di dipolo magnetico (M_1), o quadrupolo elettrico (E_2), che hanno intensità minore rispetto alle E_1 , in quanto meno probabili. Infine, nel caso in cui l'elemento M_{ni} in forma non approssimata sia nullo, la transizione è strettamente proibita al 1° ordine perturbativo.

1.4 Regole di selezione

Come già accennato nel paragrafo precedente, per capire se una transizione può avvenire o no è fondamentale studiare il comportamento dell'elemento di matrice M_{ni} . In base a questo, è possibile stabilire una serie di regole che dettano il verificarsi di una riga spettrale.

Transizioni di dipolo elettrico

In questo caso $M_{ni} \propto \langle n | \vec{r} | i \rangle$. Dal momento che $|n\rangle$ e $|i\rangle$ rappresentano gli stati finale e iniziale che descrivono l'atomo, possono essere scritti come prodotto di una funzione

radiale e una angolare: $|i\rangle = R_{nl} Y_l^m$ e $|n\rangle = R_{n'l'} Y_{l'}^{m'}$. Inoltre, anche il vettore \vec{r} è rappresentabile in modo analogo usando le armoniche sferiche e la componente radiale:

$$\vec{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-Y_1^1 + Y_1^{-1})r\hat{x} + i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 + Y_1^{-1})r\hat{y} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0r\hat{z} \quad (1.16)$$

Questa scrittura permette di valutare l'elemento di matrice e stabilire quali sono i criteri da rispettare in modo che non si annulli. Essi sono mostrati nella tabella 1.1. Se si considera anche la struttura iperfine dell'atomo, va ulteriormente aggiunta la regola $\Delta F = 0, \pm 1$, con la condizione che è proibito il passaggio da $F = 0$ a $F = 0$, come anche per $J = 0 \rightarrow J = 0$ e $L = 0 \rightarrow L = 0$, per ragioni di conservazione del momento angolare totale.

Un classico esempio di righe spettrali permesse in approssimazione di dipolo è rappresentato dalla serie di Balmer, che include tutte le transizioni fra i livelli $E_n \rightarrow E_2$. Queste righe si trovano nella parte visibile dello spettro elettromagnetico e vengono chiamate $H\alpha, H\beta \dots$ in base al Δn compiuto. Per esempio, $H\alpha$ identifica una transizione da $E_3 \rightarrow E_2$, ed ha un tempo di vita media pari a $6.3 \cdot 10^{-6}$ s.

Transizioni	Δn	Δl	Δm	ΔJ	ΔL	ΔS
Dipolo elettrico	arbitrario	± 1		$0, \pm 1$	$0, \pm 1$	0
Quadrupolo elettrico	arbitrario	$0, \pm 2$	$0, \pm 1, \pm 2$	$0, \pm 1, \pm 2$	$0, \pm 1, \pm 2$	0
Dipolo magnetico	0	0	$0, \pm 1$	$0, \pm 1$	0	0

Tabella 1.1: Confronto tra le regole di selezione per diverse tipologie di transizioni.

Transizioni di quadrupolo elettrico e di dipolo magnetico

Se una delle regole sopra elencate viene violata, allora il termine in approssimazione di dipolo si annulla, dunque è necessario espandere ulteriormente l'esponenziale $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, che precedentemente era stato approssimato a 1. Le regole di selezione per transizioni di quadrupolo elettrico sono mostrate in tab. 1.1. Esse vengono anche chiamate righe semiproibite poichè caratterizzate da un coefficiente di Einstein A_{UL} molto piccolo, che si traduce nell'avere un tempo di vita media più elevato rispetto alle righe permesse in approssimazione di dipolo.

Inoltre, si possono avere anche le transizioni di dipolo magnetico, definite righe proibite, in quanto la probabilità che avvengano è ancora minore rispetto alle E_2 . Sono di questo tipo le righe spettrali formatesi quando un elettrone si sposta da un livello di struttura iperfine ad un altro. Un esempio molto importante in ambito astronomico è la cosiddetta riga a 21cm dell'idrogeno, dovuta alla transizione dallo stato $F = 1$ ad $F = 0$ dell'idrogeno nello stato fondamentale $1s_{\frac{1}{2}}$. Le regole di selezione per transizioni di dipolo magnetico sono anch'esse mostrate in tab. 1.1.

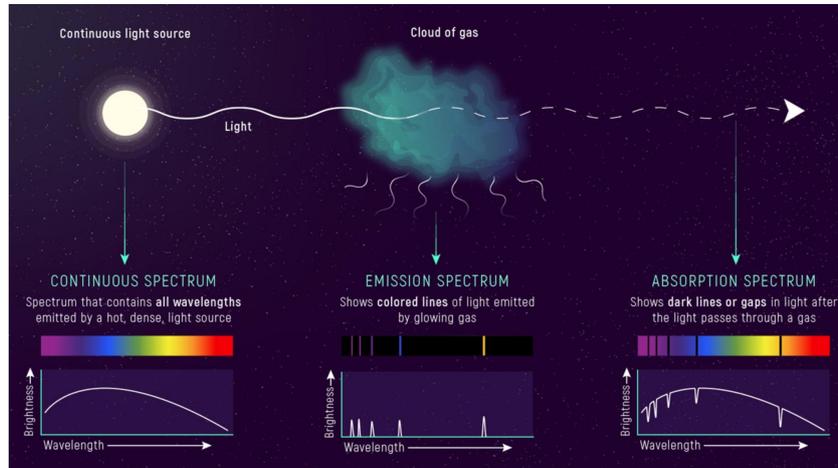


Figura 1.2: Rappresentazione dei tre tipi principali di spettro elettromagnetico, [7].

1.5 Formazione delle righe spettrali nelle atmosfere stellari

Spettri in emissione e in assorbimento

Dopo aver analizzato i processi che descrivono la formazione delle righe spettrali secondo la meccanica quantistica, è necessario illustrare ciò che porta, a livello macroscopico, all'osservazione degli spettri elettromagnetici. Innanzitutto, essi possono essere di due tipologie, in emissione o in assorbimento, a seconda della posizione dell'osservatore rispetto all'oggetto. In fig. 1.2 si nota che, guardando direttamente la sorgente, lo spettro è di tipo continuo e coincide con la distribuzione di corpo nero. Nel caso in cui venga frapposta una nube di gas, a temperatura minore, questa assorbe parte della radiazione incidente e la riemette in modo isotropo: se l'osservatore si trova allineato con la nube e la sorgente, vedrà uno spettro in assorbimento; in caso contrario lo spettro sarà in emissione.

Equazione del trasporto radiativo

Siccome le stelle possono essere approssimate a corpi neri ideali, esse presentano uno spettro continuo. In aggiunta, sono visibili anche delle righe spettrali, originatesi nell'atmosfera stellare, grazie alle quali è possibile classificare le differenti tipologie di stelle osservate, come spiegato nel capitolo 4.

L'equazione del trasporto radiativo regola come varia l'intensità in funzione della lunghezza d'onda, tenendo in considerazione il flusso di fotoni che attraversa l'atmosfera e

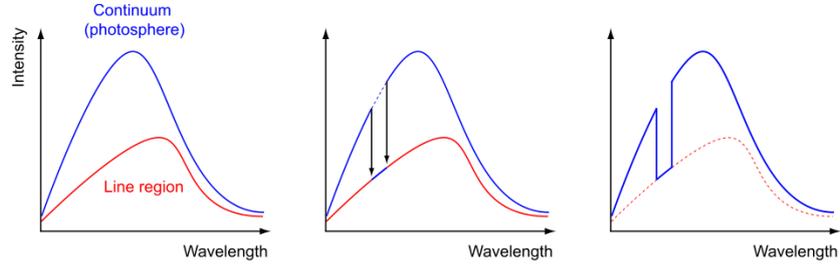


Figura 1.3: Formazione delle righe spettrali nei profili di intensità in funzione della lunghezza d'onda, [5].

i contributi di assorbimento ed emissione.

$$dI_\lambda = -I_\lambda k_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (1.17)$$

Dove j_λ indica il coefficiente di emissione, k_λ l'opacità e ds la distanza percorsa dal fotone. Dopo aver definito $S_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda}$ funzione sorgente e $d\tau = -k_\lambda \rho ds$ profondità ottica, è possibile integrare l'equazione.

$$I_\lambda = S_\lambda(1 - e^{-\tau_\lambda}) + I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda} \quad (1.18)$$

Si distinguono quindi due regimi:

- $\tau_\lambda \ll 1 \rightarrow$ Regime otticamente sottile $I_\lambda = \tau_\lambda(S_\lambda - I_{\lambda,0}) + I_{\lambda,0}$
- $\tau_\lambda \gg 1 \rightarrow$ Regime otticamente spesso $I_\lambda = S_\lambda$

In corrispondenza di una riga di lunghezza d'onda $\tilde{\lambda}$ l'opacità passa da essere ~ 0 , $I_\lambda = I_{\lambda,0}$, ad essere molto elevata: in caso di riga in emissione $I(\tilde{\lambda}) > I_0(\tilde{\lambda})$, mentre in caso di assorbimento $I(\tilde{\lambda}) < I_0(\tilde{\lambda})$. Siccome l'intensità è strettamente legata alla temperatura, questo significa che in assorbimento la zona in cui si è formata la riga è più fredda rispetto alla sorgente in background, come mostrato in fig. 1.3.

Shift delle righe spettrali

Si sono analizzati fino ad ora i processi legati alla formazione delle righe spettrali; in questo e nel prossimo capitolo si vogliono descrivere i fenomeni che ne alterano la forma (cap. 3) o la posizione.

2.1 Effetto Doppler

Per effetto Doppler si intende il cambio di frequenza di un'onda dovuto alla velocità radiale della sorgente di radiazione rispetto a un osservatore.

Sia T il periodo di una certa onda di frequenza ν , e sia la sorgente di tale onda in moto rispetto a un osservatore a velocità v_r , di tipo radiale. Nel tempo T , la radiazione copre una distanza pari a $s = cT$, mentre la sorgente si muove rispetto all'osservatore di $s' = v_r T$. La lunghezza d'onda percepita dall'osservatore, come rappresentato visivamente in figura 2.1, è $\lambda = s + s' = cT + v_r T$. Chiaramente, nel caso in cui la sorgente sia ferma: $\lambda = \lambda_0 = cT$. Dunque: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = v_r T$. La definizione di effetto Doppler è:

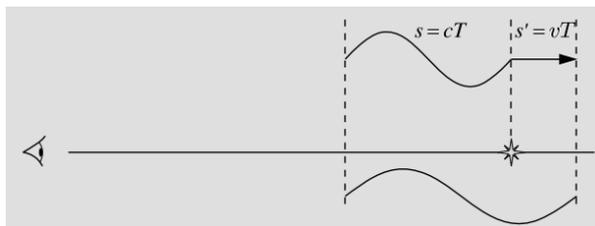


Figura 2.1: Se la sorgente si sta allontanando, la lunghezza d'onda aumenta [6]

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (2.1)$$

In condizioni relativistiche, la relazione 2.1 non è più valida, per cui è necessario ricavare una nuova formula che sia in accordo con i postulati della relatività speciale. Innanzitutto, sia $\cos(\frac{x}{\lambda} - \nu t)$ un'onda piana che si propaga lungo l'asse x nel sistema di riferimento S . Nel sistema S' , in moto rispetto ad S , si deve continuare ad avere un'onda piana, della forma $\cos(\frac{x'}{\lambda'} - \nu' t')$. Per fare ciò, è necessario che venga soddisfatta la relazione:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (2.2)$$

Dunque:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \quad (2.3)$$

In entrambi i regimi, si distinguono due casi:

- **Sorgente in avvicinamento:** $\lambda < \lambda_0$, la riga spettrale è spostata verso il blu;
- **Sorgente in allontanamento:** $\lambda > \lambda_0$, si osserva spostamento verso il rosso.

In campo astronomico, lo spettro elettromagnetico di un oggetto viene confrontato con spettri di riferimento prodotti da sorgenti a riposo nel sistema del laboratorio. In questo modo è possibile misurare la differenza fra λ e λ_0 e quindi ricavare la velocità radiale dell'oggetto.

2.2 Altre tipologie di redshift

Oltre all'effetto Doppler sopra descritto, ci sono altri contributi che spostano le righe spettrali. Questi sono il redshift cosmologico e il redshift gravitazionale. Il primo è stato scoperto da Hubble studiando gli spettri di galassie molto distanti: notò che le righe erano spostate verso il rosso in modo proporzionale alla loro distanza, secondo la legge empirica $v = H_0 d$, dove H_0 indica la costante di Hubble, il cui valore è $H_0 = (67.7 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, secondo le misure effettuate dal satellite Planck [6]. Questo fenomeno è dovuto all'espansione dell'Universo e permette, in base all'entità dello shift, di conoscere l'età dell'oggetto. Il secondo, spesso trascurabile, è un effetto previsto dalla relatività generale ed è dovuto al fatto che la frequenza di un fotone sia influenzata dalla curvatura dello spaziotempo.

Allargamento delle righe spettrali

Nonostante le righe spettrali vengano associate ad una lunghezza d'onda caratteristica λ_0 , non si presentano mai con una forma simile a una delta di Dirac, ma hanno un certo allargamento, dovuto a diversi fattori che verranno illustrati in questo capitolo. L'entità dell'allargamento viene spesso quantificata in riferimento alla larghezza a metà altezza (full width at half maximum, FMHM): $(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = \frac{E_c - E_\lambda}{E_c - E_{\lambda_0}}$.

3.1 Allargamento intrinseco

L'allargamento intrinseco, noto anche come allargamento naturale o di Lorentz, è dovuto al principio di indeterminazione di Heisenberg: $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$. Il valore di Δt è legato alla probabilità di transizione da uno stato a un altro, mentre ΔE è l'energia trasportata dal fotone, pari a: $E_{\text{fotone}} = \frac{hc}{\lambda}$.

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda \quad (3.1)$$

Quindi si ottiene:

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^2}{\pi c \Delta t} \quad (3.2)$$

Si nota chiaramente che, più il tempo di permanenza in uno stato è elevato, ovvero più è improbabile che avvenga la transizione, e più il profilo della riga sarà sottile. Per esempio, le transizioni corrispondenti alle righe della serie di Balmer hanno $\Delta t \approx 10^{-6}, 10^{-7}$ s, per cui l'allargamento sarà maggiore rispetto alla transizione dell'idrogeno a 21cm, la quale ha $\Delta t \approx 10^{15}$ s.

In generale, questo allargamento è molto piccolo e si può apprezzare solo quando gli altri fattori che determinano la forma della riga sono ridotti al minimo. Per stimare l'ordine di grandezza di $(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}}$ si consideri una transizione nella banda del visibile, con lunghezza d'onda pari a $\lambda \approx 6000 \text{ \AA}$ e $\Delta t \approx 10^{-8}$ s. Il risultato che si ottiene è un allargamento di $3.6 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$.

3.2 Allargamento Doppler termico

La causa di questo fenomeno è l'agitazione termica degli atomi. Si consideri, per esempio, una nube di gas ferma rispetto all'osservatore: gli atomi all'interno di essa si muovono di moto termico, per cui alcune particelle si avvicineranno all'osservatore e altre si allontaneranno, dando origine rispettivamente a uno spostamento verso il blu (blueshift) e verso il rosso (redshift). Dunque, la riga viene allargata in base alla distribuzione delle

velocità delle particelle, che, nel caso di nube all'equilibrio termico, è rappresentata dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

La velocità media delle particelle è :

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.3)$$

Inoltre, come visto nel capitolo 2.1, per effetto Doppler si ha:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{|V_r|}{c} \quad (3.4)$$

Quindi:

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = 2\frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.5)$$

Dove m è la massa dell'atomo responsabile della creazione della riga. Si può notare innanzitutto che questo caso non è collegato agli spostamenti delle righe di cui si è parlato nel capitolo precedente, in quanto il centroide della riga rimane inalterato nella posizione a riposo; ciò che si verifica è un allargamento della riga dovuto alla velocità delle singole particelle che compongono l'oggetto, non alla velocità dell'oggetto stesso. Inoltre, dall'equazione 3.5 si nota che, osservando la forma di una riga, è possibile dedurre informazioni sulla temperatura dell'oggetto: se $(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}}$ è molto allargato significa che l'agitazione termica delle particelle è elevata, dunque la temperatura è alta. Questo allargamento è 1000 volte maggiore rispetto all'allargamento intrinseco; tuttavia, a causa dell'andamento tipico della distribuzione di Maxwell-Boltzmann, il suo contributo decresce in modo esponenziale allontanandosi dal centroide.

3.3 Allargamento collisionale

Se un atomo subisce una collisione da parte di un'altra particella mentre sta emettendo radiazione, si ha un improvviso cambiamento della fase della radiazione emessa. Il profilo spettrale collegato a questo fenomeno ha un andamento analogo al profilo di Lorentz, e, inoltre, dipende dal tempo medio di collisione fra atomi, Δt_0 .

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{1}{\Delta t_0} \quad (3.6)$$

Dove Δt_0 è dato dal rapporto fra il libero cammino medio, che dipende dal numero di atomi per unità di volume e dalla sezione d'urto, e la velocità media degli atomi, indicata dalla distribuzione di Boltzmann.

$$l = \frac{vt}{n\sigma vt} = \frac{1}{n\sigma} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = \frac{1}{n\sigma\sqrt{\frac{2kT}{m}}} \quad (3.7)$$

L'equazione 3.6 diventa:

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^2}{\pi c} n\sigma \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.8)$$

Si può stimare che l'allargamento collisionale è confrontabile come ordine di grandezza con quello intrinseco.

3.4 Profilo di Voigt

Il profilo complessivo di una riga spettrale è dato dalla combinazione degli allargamenti sopra descritti, ed è chiamato profilo di Voigt. In particolare, il contributo Doppler, con la tipica forma di una gaussiana, è riconoscibile nel core della riga, mentre sulle ali è dominante il cosiddetto profilo di smorzamento, dato dalla distribuzione lorenziana dovuta all'allargamento naturale e collisionale. La figura 3.1a mostra questi tre profili a confronto.

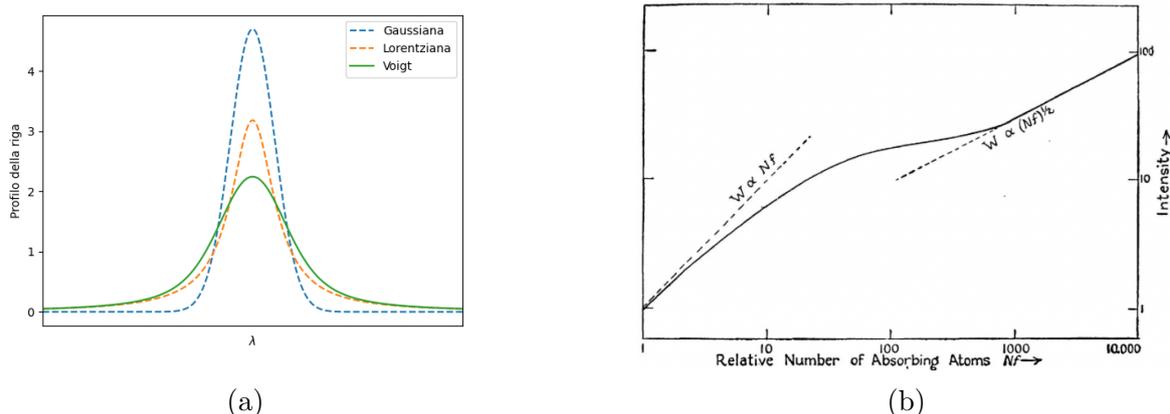


Figura 3.1: A sinistra, (a), confronto fra il profilo gaussiano, lorentziano e di Voigt, a destra, (b), l'andamento della curva di crescita in funzione del numero di atomi assorbenti, [1].

Per determinare l'intensità della riga si usa la larghezza equivalente W , che indica la larghezza di un rettangolo di altezza unitaria con area uguale a quella sottesa dalla riga spettrale rispetto al continuo. W viene calcolato come segue:

$$W = \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda \quad (3.9)$$

Dove F_c e F_λ sono rispettivamente i flussi relativi al continuo e alla riga. In corrispondenza del centroide λ_0 l'opacità è massima e quindi il core della riga si forma in zone più esterne rispetto al continuo, dove la temperatura è inferiore.

3.5 Curva di crescita

Una delle informazioni che è possibile trarre studiando le righe spettrali è l'abbondanza delle diverse specie atomiche presenti nell'atmosfera stellare in osservazione. La forma della riga dipende dalla densità e temperatura dello strato in cui si origina; mediante l'uso congiunto delle equazioni di Boltzmann e Saha si ricava il numero di atomi N_A per unità di volume che sono nella condizione di generare una transizione elettronica. La curva di crescita è uno strumento importante che lega una caratteristica intrinseca del corpo, N_A , con un dato misurabile, la larghezza equivalente W . Come osservabile in fig. 3.1b, si possono distinguere 3 regimi:

- **Regime lineare:** l'aumento di N_A provoca un aumento lineare dell'intensità; in questo caso il profilo è dominato dal contributo Doppler e rappresenta il regime più efficace per effettuare la misura della riga.
- **Regime piatto:** il core della riga è saturo, il numero di atomi attivi aumenta di diversi ordini di grandezza ma l'intensità varia di poco, per cui piccoli errori nel determinare W portano a grandi incertezze nella stima di N_A . L'andamento di W è proporzionale a $\sqrt{\log(N_A)}$.
- **Regime di smorzamento:** l'intensità riprende ad aumentare più velocemente rispetto al regime precedente, con una proporzionalità di $\sqrt{N_A}$, in quanto diventa rilevante il contributo delle ali.

Applicazioni astrofisiche

4.1 Classificazione spettrale delle stelle

Lo spettro di una stella fornisce tutte le principali informazioni riguardo alle proprietà fisiche dell'oggetto. Inoltre, rappresenta un'importante strumento per classificare le diverse tipologie di stelle. Il sistema attualmente in uso venne definito per la prima volta nel 1924 da Annie Jump Cannon e prende il nome di Classificazione di Harvard. Partendo da lavori precedenti condotti con il telescopio Henry Draper, dotato di un prisma per visualizzare gli spettri e di lastre fotografiche, vennero classificate più di 390000 stelle in base alla presenza di alcune righe spettrali principali, come la serie di Balmer dell'idrogeno, le righe dell'elio neutro, del ferro e il doppietto H e K del calcio. Le diverse classi di stelle sono identificate con lettere maiuscole e sono ordinate in base alla temperatura in senso decrescente: O, B, A, F, G, K, M. Successivamente sono state aggiunte le notazioni Q per le novae, P per le nebulose planetarie, W per le stelle Wolf-Rayet e L e

T a rappresentare le nane brune. Ciascuna classe è ulteriormente divisa in sotto-classesi definite da un numero che va da 0 a 9.

Come accennato sopra, le differenze negli spettri sono dovute alle diverse temperature delle stelle, mentre le condizioni di pressione o composizione chimica non sono fattori determinanti in questa classificazione. Le prime classi, che presentano temperature maggiori, sono caratterizzate da righe date da atomi ionizzati, mentre nelle ultime sono visibili righe originate da atomi neutri o molecole. In fig. 4.1 si osserva come varia la larghezza equivalente di alcune delle principali righe spettrali nelle diverse classi.

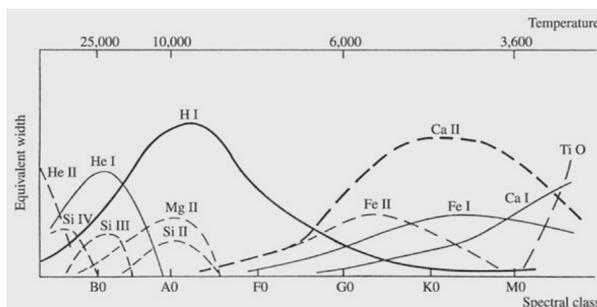


Figura 4.1: Larghezza equivalente delle principali righe spettrali, [12]

La classificazione di Harvard è oggi usata insieme ad un'altra classificazione, chiamata di Yerkes, o MKK, che considera anche la luminosità della stella. Essa è divisa in 6 classi, indicate da numeri romani: Ia supergiganti più luminose, Ib supergiganti meno luminose, II giganti luminose, III giganti, IV subgiganti, V stelle della sequenza principale. Secondo queste considerazioni, il Sole è classificato come una stella G2 V.

Conclusioni

Mediante lo studio degli spettri elettromagnetici è diventato possibile ciò che generazioni e generazioni di astronomi e astronome avevano sempre ritenuto un obiettivo irrealizzabile: conoscere di che materia sono composte le stelle. Come questo lavoro ha illustrato, grazie ad un immenso sviluppo delle tecniche e delle conoscenze avvenuto negli ultimi due secoli, oggi siamo in grado di conoscere non solo le abbondanze chimiche presenti nelle stelle e nell'Universo, ma anche una serie di informazioni, come la temperatura, la pressione e la velocità dell'oggetto considerato, essenziali per avere una più chiara comprensione dei fenomeni che avvengono attorno a noi. Il primo capitolo ha analizzato la spiegazione fisica della presenza di righe negli spettri elettromagnetici, che affonda le sue radici nella meccanica quantistica; mentre i successivi sono serviti a comprendere la connessione fra la forma o la posizione di una certa riga e le caratteristiche dell'oggetto.

Bibliografia

- [1] Lawrence H. Aller. *Atoms, Stars, and Nebulae*. Harvard University Press, revised edition edition, 1971.
- [2] Daniele Dallacasa. *Dispense per il corso di Processi di Radiazione e MHD*. Università di Bologna, 2024.
- [3] Michael A. Dopita and Ralph S. Sutherland. *Astrophysics of the Diffuse Universe*. Springer, 2003.
- [4] Francesco R. Ferraro. *Dispense per il corso di Astrofisica Stellare*. Università di Bologna, 2024.
- [5] Magnus Gålfalk. *Stellar and Emission Line Spectra*. Technical report, Stockholm Observatory, 2007.
- [6] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, and K. Johan Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer, 6th edition, 2016.
- [7] ESA NASA and CSA. *Types of Spectra: Continuous, Emission, and Absorption*, 2021. <https://webbtelescope.org/contents/media/images/01F8GF8DK2PRY4FP9DA2XPQC8S>.
- [8] Thanu Padmanabhan. *Theoretical Astrophysics: Volume I, Astrophysical Processes*. Cambridge University Press, 2000.
- [9] Anton Pannekoek. *A History of Astronomy*. George Allen & Unwin, 1961.
- [10] Luca Pasquini. *Dispense per il corso di Struttura della materia*. Università di Bologna, 2025.
- [11] George B. Rybicki and Alan P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. WILEY-VCH, 2004.
- [12] Otto Struve. *Elementary Astronomy*. Oxford University Press, 1959.
- [13] Jonathan Tennyson. *Astronomical Spectroscopy: An Introduction to the Atomic and Molecular Physics of Astronomical Spectra*. Imperial College Press, 2005.