

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

I REGISTRI SEMIOTICI IN AULA:
UNO STUDIO SULL'INSEGNAMENTO
DELLA CIRCONFERENZA
IN GEOMETRIA ANALITICA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Maffia

Presentata da:
Anna Manaresi

Anno Accademico 2024-2025

Introduzione

L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado rappresenta un ambito particolarmente complesso, in cui la trasmissione dei contenuti non può essere disgiunta dalla riflessione sugli strumenti comunicativi e rappresentativi utilizzati. In particolare, la comprensione dei concetti matematici non si realizza mai in modo diretto, ma sempre attraverso rappresentazioni semiotiche, che ne rendono accessibili le caratteristiche e le relazioni interne. La centralità di questi sistemi semiotici nella didattica della matematica è stata evidenziata in modo sistematico a partire dagli studi di Raymond Duval, secondo cui la matematica, più di qualsiasi altra disciplina, si fonda sull'uso e la trasformazione di rappresentazioni simboliche, grafiche, verbali e algebriche. Tuttavia, se da un lato esiste un quadro teorico solido che sottolinea l'importanza dell'uso coordinato dei registri di rappresentazione, dall'altro vi è ancora scarsa conoscenza empirica di come questi siano effettivamente gestiti dagli insegnanti nelle pratiche didattiche quotidiane.

Nel concreto delle aule scolastiche, l'impiego dei sistemi semiotici non avviene mai in modo neutro o uniforme: esso è influenzato da molteplici fattori, tra cui lo stile di insegnamento del docente, le sue convinzioni epistemologiche sulla natura della matematica e le sue finalità educative, nonché l'accesso e l'uso consapevole delle tecnologie digitali. Ogni insegnante, infatti, costruisce nel tempo un proprio approccio all'insegnamento, più o meno strutturato, che guida le sue scelte metodologiche e didattiche. Alcuni privilegiano un'impostazione formale e simbolica, altri fanno ampio uso di rappresentazioni gra-

fiche e visuali, altri ancora cercano di integrare diversi linguaggi attraverso strumenti come la Lavagna Interattiva Multimediale e software di geometria dinamica. Quali criteri guidano queste scelte? E soprattutto: in che modo le convinzioni dei docenti sulla matematica e sull'insegnamento influiscono sull'uso dei registri semiotici?

A queste domande la letteratura fornisce solo risposte parziali. Gli studi sull'uso dei sistemi semiotici da parte degli studenti sono numerosi, così come quelli che analizzano la comprensione matematica alla luce delle operazioni di trattamento e conversione tra registri. Tuttavia, vi è ancora poca ricerca sull'azione degli insegnanti in merito a questi aspetti, e ancor meno sugli eventuali legami tra il loro operato e le loro convinzioni. Esiste pertanto uno spazio rilevante per una ricerca che si proponga di analizzare le pratiche concrete di insegnamento con l'obiettivo di comprendere come si differenzia l'uso dei sistemi semiotici tra docenti e quali fattori soggettivi e didattici contribuiscono a determinare tali differenze.

La rilevanza di questa indagine è duplice: da un lato, contribuisce alla ricerca in didattica della matematica, arricchendo la riflessione teorica con dati qualitativi sulle pratiche reali degli insegnanti; dall'altro, ha una valenza concreta per la formazione iniziale e in servizio dei docenti, offrendo spunti per sviluppare una maggiore consapevolezza rispetto all'uso dei registri semiotici e alla loro integrazione con le tecnologie. Comprendere come e perché gli insegnanti scelgano certi linguaggi rappresentativi rispetto ad altri può infatti aiutare a costruire percorsi formativi più mirati che sostengano l'apprendimento significativo degli studenti.

In questa prospettiva si colloca la presente ricerca, che ha scelto di focalizzarsi su un argomento didattico ben preciso – la circonferenza in geometria analitica – per osservare e confrontare le strategie rappresentative di quattro docenti con esperienze e visioni dell'insegnamento differenti. Attraverso l'analisi integrata delle interviste e delle videoregistrazioni delle loro lezioni, si intende esplorare in che modo l'uso dei registri semiotici varia da un docente all'altro e quali connessioni possono essere individuate con i loro stili di

insegnamento e le loro convinzioni didattiche ed epistemologiche.

Indice

Introduzione	i
1 Rassegna della letteratura	1
1.1 L'importanza dell'uso di molteplici sistemi semiotici di rappresentazione in classe	3
1.2 Stili di insegnamento, convinzioni didattiche e convinzioni epistemologiche come chiave di lettura delle scelte semiotiche . .	4
1.3 Tecnologie digitali e matematica: la LIM come risorsa semiotica per la classe	7
1.3.1 Che cos'è la LIM e come funziona	7
1.3.2 Funzioni e potenzialità didattiche della LIM	8
1.3.3 Tra teoria e pratica: benefici e criticità dell'uso della LIM in classe	12
1.3.4 La LIM nella didattica della matematica	15
2 Quadro teorico	21
2.1 Il linguaggio della matematica: un approccio semiotico	21
2.1.1 L'importanza delle rappresentazioni semiotiche in matematica	23
2.1.2 Il paradosso cognitivo dell'accesso agli oggetti matematici	24
2.1.3 La grande varietà di rappresentazioni semiotiche utilizzate in matematica	25
2.1.4 I tipi di trasformazione delle rappresentazioni semiotiche	26
2.1.5 Semiotica e insegnamento della matematica	28

2.1.6	I principali registri di rappresentazione utilizzati in matematica	29
2.2	Gli stili di insegnamento degli insegnanti	32
2.2.1	Caratterizzazione operativa degli stili di insegnamento nella didattica della matematica	34
3	Metodologia di ricerca	37
3.1	Design generale della ricerca	37
3.2	Strumenti usati per la raccolta dati	38
3.2.1	Strumenti per la realizzazione e la registrazione delle interviste	39
3.2.2	Strumenti per la documentazione delle lezioni	41
3.3	Metodi di elaborazione e analisi dei dati	41
3.3.1	Analisi delle interviste	41
3.3.2	Analisi delle videoregistrazioni	44
4	Risultati	45
4.1	I docenti dalle interviste	45
4.1.1	Profilo Docente 1	45
4.1.2	Profilo Docente 2	46
4.1.3	Profilo Docente 3	48
4.1.4	Profilo Docente 4	49
4.2	I docenti dall'osservazione in aula	51
4.2.1	Osservazione Docente 1	51
4.2.2	Osservazione Docente 2	53
4.2.3	Osservazione Docente 3	54
4.2.4	Osservazione Docente 4	56
5	Discussione dei risultati	59
5.1	Tra dichiarato e agito: analisi docente per docente	59
5.1.1	Docente 1	59
5.1.2	Docente 2	61

5.1.3	Docente 3	63
5.1.4	Docente 4	65
5.2	Insegnanti a confronto	67
6	Conclusioni	77
A	Domande guida per le interviste conoscitive ai docenti	83
B	Trascrizione dell'intervista a Docente 1	87
C	Trascrizione dell'intervista a Docente 2	101
D	Trascrizione dell'intervista a Docente 3	115
E	Trascrizione dell'intervista a Docente 4	133
F	Tabelle di analisi delle interviste ai docenti	151
G	Tabelle di analisi dei video delle lezioni	169
H	Materiale utilizzato e condiviso con la classe dal Docente 1	289
	Bibliografia	295

Capitolo 1

Rassegna della letteratura

L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado rappresenta un ambito di ricerca complesso, in cui numerose variabili concorrono a determinare l'efficacia del processo didattico. Tra gli elementi di maggiore rilevanza vi è l'uso dei sistemi semiotici di rappresentazione, ossia l'insieme dei mezzi espressivi e simbolici attraverso i quali i concetti matematici vengono trasmessi, elaborati e interiorizzati dagli studenti. In particolare, il modo in cui gli insegnanti utilizzano tali sistemi nel contesto delle lezioni frontali rappresenta un aspetto cruciale della didattica della matematica, con implicazioni dirette sulle strategie di insegnamento e sulle modalità di apprendimento degli studenti.

Nell'ambito della pratica didattica quotidiana, gli insegnanti si avvalgono di diversi strumenti per veicolare i concetti astratti della matematica, tra cui la tradizionale lavagna di ardesia (blackboard) e la Lavagna Interattiva Multimediale (LIM). Tali strumenti, pur differenti nelle loro potenzialità espressive e nelle modalità di interazione che consentono, costituiscono supporti fondamentali per la costruzione delle rappresentazioni semiotiche in classe. La scelta e la combinazione dei diversi sistemi semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti influenzano non solo la trasmissione del sapere matematico, ma anche il coinvolgimento degli studenti e la loro capacità di operare sui diversi sistemi, una competenza essenziale per il successo

nella comprensione e nell'apprendimento della disciplina (Duval, 1993).

Nonostante la centralità di questa tematica nella didattica della matematica, la letteratura specificamente dedicata all'uso dei sistemi semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti durante le lezioni frontali è scarsa. Questo studio si propone, dunque, di colmare tale lacuna.

Al fine di approfondire il contesto e il ruolo dei sistemi semiotici all'interno della didattica della matematica, la presente rassegna della letteratura prenderà in esame tre principali filoni di ricerca condotti in ambito scolastico:

- **l'importanza dell'uso di molteplici sistemi semiotici di rappresentazione in classe:** numerosi studi hanno evidenziato il ruolo fondamentale che la varietà dei sistemi semiotici di rappresentazione gioca nel facilitare la comprensione e l'elaborazione dei concetti matematici. L'impiego coordinato di rappresentazioni simboliche, visive, grafiche e verbali consente di costruire significati più ricchi e profondi e di supportare gli studenti nella transizione tra diversi mezzi espressivi.
- **insegnanti, stili di insegnamento, convinzioni didattiche ed epistemologiche:** la letteratura in ambito educativo ha posto particolare attenzione ai processi decisionali degli insegnanti e alle strategie didattiche adottate per favorire l'apprendimento della matematica. In particolare, la scelta e la gestione dei sistemi semiotici di rappresentazione costituiscono un aspetto essenziale dell'intervento didattico del docente e possono variare significativamente in base alla formazione, all'esperienza e alle convinzioni epistemologiche e didattiche degli insegnanti. Tuttavia, nonostante l'interesse crescente verso questi aspetti, la letteratura sull'argomento risulta ancora piuttosto limitata, rendendo necessario un ulteriore approfondimento sia teorico che empirico.
- **le tecnologie digitali come nuove risorse semiotiche per la classe:** l'introduzione delle tecnologie digitali ha ampliato le possibilità di rappresentazione e interazione in aula, offrendo strumenti innova-

tivi anche per la didattica della matematica. In particolare, la LIM permette di integrare in modo dinamico differenti registri semiotici, favorendo processi di visualizzazione, manipolazione e interazione che arricchiscono l'esperienza di apprendimento.

Questa rassegna della letteratura si propone di analizzare contributi rilevanti relativi ai tre temi sopra delineati, con l'obiettivo di offrire un quadro solido a sostegno della ricerca. Tale analisi consentirà di comprendere meglio il contesto didattico in cui si colloca lo studio, nonché di individuare le principali sfide e opportunità legate all'uso dei sistemi semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria di secondo grado.

1.1 L'importanza dell'uso di molteplici sistemi semiotici di rappresentazione in classe

La matematica si caratterizza per il fatto che i suoi oggetti non sono accessibili direttamente ma lo sono solo attraverso rappresentazioni (Duval, 1993, 2006). In quest'ottica, diversi studi in letteratura hanno messo in luce l'importanza di utilizzare molteplici raffigurazioni dello stesso oggetto matematico durante le lezioni. Ad esempio, Sbaragli (2005) evidenzia come l'adozione esclusiva di un numero ristretto di rappresentazioni ricorrenti possa indurre gli studenti a confondere l'oggetto matematico con la sua raffigurazione. Nel suo articolo viene illustrato, in particolare, come la scelta della rappresentazione convenzionale “tondeggiante” per il punto rischi di consolidare idee errate legate a questo oggetto matematico e limitare lo sviluppo di un apprendimento concettuale autentico: *“le distorte idee intuitive sopra evidenziate, concernenti la forma e la dimensione del punto matematico, vincolano l'apprendimento matematico successivo, continuando a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi”* [p. 3]. Capita quindi spesso che a complicare l'apprendimento della matematica

siano proprio le scelte dell'insegnante di fornire all'allievo sempre e solo le stesse rappresentazioni (Sbaragli, 2005). L'impiego di molteplici modalità di raffigurazione favorisce, invece, il passaggio da un'interpretazione "personale" a quella "istituzionale" degli oggetti matematici, contribuendo a una comprensione più profonda e articolata dei concetti: *"La varietà di rappresentazioni permetterà agli allievi di "purificare" l'oggetto dalle proprietà che non gli sono proprie come: la forma, la pesantezza, il colore, la dimensione per poi indirizzarli verso i saperi "istituzionali" (Sbaragli, 2005, p. 7).* Secondo Duval (1993, 2006), tale comprensione non può, inoltre, prescindere dall'abilità di passare da una raffigurazione all'altra dello stesso oggetto. Anche contributi più recenti, tra cui quello di Mainali (2021), ribadiscono l'importanza di questo aspetto per il successo nell'apprendimento matematico. Indagini come quella condotta da Albano et al. (2012) hanno però messo in evidenza come molti studenti incontrino difficoltà significative nella gestione dei passaggi tra diverse rappresentazioni, in particolare quando è coinvolto il linguaggio verbale. Tali studi sottolineano la necessità e l'importanza di progettare percorsi educativi che presentino sistematicamente agli studenti i diversi modi di rappresentare un oggetto matematico non solo per evitare la confusione a cui fa riferimento Sbaragli (2005), ma anche per favorire lo sviluppo di una buona padronanza nel passaggio tra le diverse raffigurazioni. In definitiva, l'uso di molteplici rappresentazioni per lo stesso oggetto matematico in classe risulta un elemento essenziale per un insegnamento efficace di questa disciplina.

1.2 Stili di insegnamento, convinzioni didattiche e convinzioni epistemologiche come chiave di lettura delle scelte semiotiche

La teoria dei registri di rappresentazione sviluppata da Duval offre una prospettiva fondamentale per comprendere la complessità dell'attività mate-

matica, mettendo in luce, in particolare, il ruolo cruciale della coordinazione tra diversi sistemi semiotici. Numerosi studi evidenziano come le pratiche d'aula degli insegnanti, tra cui l'impiego di diversi registri durante le lezioni, non sono determinate esclusivamente da conoscenze teoriche o prescrizioni curriculari, ma sono profondamente influenzate anche dalle convinzioni personali dei docenti (D'Amore et al., 2004; D'Amore and Fandiño Pinilla, 2009). Per questo motivo, risulta essenziale affiancare all'osservazione delle pratiche d'aula un'indagine sulle idee che ciascun docente ha della matematica e del suo insegnamento, al fine di comprendere più a fondo le dinamiche che orientano l'uso dei registri semiotici nella pratica educativa. Tali convinzioni comprendono sia aspetti epistemologici, cioè idee su cosa sia la matematica e su come si costruisca la conoscenza matematica, sia aspetti didattici, cioè idee su come gli studenti apprendono e sul ruolo dell'insegnante (D'Amore et al., 2004; D'Amore and Fandiño Pinilla, 2009). Entrambe queste convinzioni si maturano nel tempo a partire dall'esperienza vissuta come studenti, dalla formazione ricevuta, dall'attività svolta sul campo come insegnanti e dalle interazioni con i colleghi (Bolondi and Pinilla, 2013). Come sottolineato da Dreher and Kuntze (2015), le convinzioni epistemologiche non sono qualcosa di esterno o aggiuntivo rispetto alla conoscenza professionale dell'insegnante, ma ne costituiscono una parte integrante e strutturante. Esse, infatti, influenzano il modo in cui l'insegnante interpreta le situazioni didattiche, prende decisioni in aula e attribuisce significato ai concetti matematici (D'Amore et al., 2004). Tuttavia, è importante sottolineare che anche le convinzioni didattiche svolgono un ruolo attivo e autonomo nel guidare le scelte dell'insegnante: esse influenzano la progettazione delle attività e la costruzione dell'ambiente di apprendimento. Le due dimensioni, epistemologica e didattica, non operano in modo gerarchico, ma in un dialogo continuo che modella profondamente le modalità con cui il docente presenta i concetti matematici e ne promuove la comprensione (Ariza et al., 1997). Un esempio significativo dell'intreccio tra queste convinzioni riguarda proprio l'uso delle rappresentazioni in aula: l'insegnante è chiamato a scegliere come presentare

e rappresentare gli oggetti matematici e queste scelte riflettono tanto la sua visione della disciplina quanto le sue idee su come gli studenti apprendono (D'Amore et al., 2004). In questa cornice, lo stile di insegnamento, cioè l'insieme di pratiche, atteggiamenti e modalità relazionali che caratterizzano il comportamento didattico di un insegnante, rappresenta una sintesi operativa di tali convinzioni. Ad esempio, un insegnante che considera la matematica come un insieme statico di regole da memorizzare e che crede che gli studenti apprendano principalmente attraverso l'ascolto e la ripetizione tenderà a privilegiare uno stile trasmissivo basato sulla spiegazione frontale e sull'esercizio meccanico e a non esplicitare le relazioni tra le diverse modalità di rappresentazione degli oggetti matematici. Viceversa, un insegnante che concepisce la matematica come un processo dinamico di costruzione del significato e che ritiene che l'apprendimento avvenga attraverso il dialogo, l'esplorazione e il confronto sarà più incline a promuovere situazioni didattiche che stimolino l'esplorazione, la messa in relazione tra rappresentazioni differenti e la riflessione condivisa (Ariza et al., 1997). Nel documento redatto dal Laboratorio di didattica della matematica (2006) emergono diversi esempi di come le convinzioni dei docenti si traducono concretamente nella pratica didattica. In particolare, emerge come l'introduzione delle tecnologie digitali non dipenda solamente dalla disponibilità di strumenti, ma sia fortemente mediata dalle convinzioni epistemologiche e didattiche degli insegnanti rispetto alla natura della matematica e all'efficacia degli strumenti digitali nell'apprendimento. Alla luce di queste considerazioni, l'insegnante non può essere inteso come un semplice trasmettitore di contenuti, ma come un mediatore culturale, che struttura intenzionalmente l'ambiente di apprendimento in funzione delle proprie idee (Bagni et al., 2004; Bolondi and Pinilla, 2013). In sintesi, stili di insegnamento, convinzioni didattiche e convinzioni epistemologiche costituiscono tre dimensioni essenziali e profondamente interconnesse della professionalità docente. Esse orientano le pratiche d'aula e, di conseguenza, il modo in cui gli studenti accedono alla conoscenza matematica. Per questo motivo, il nostro lavoro si propone di indagare il legame tra l'uso delle rap-

presentazioni da parte degli insegnanti e il complesso sistema di convinzioni che ne orienta le scelte.

1.3 Tecnologie digitali e matematica: la LIM come risorsa semiotica per la classe

Il fine e l'oggetto della mediazione didattica è l'apprendimento, inteso come formazione di competenze elevate per tutti gli studenti, attraverso un percorso inclusivo e dinamico che valorizza le diversità e promuove l'autonomia (Ellerani et al., 2011). In questo quadro, la LIM (Lavagna Interattiva Multimediale) si configura come uno strumento fondamentale per modernizzare l'esperienza educativa: l'integrazione di questa tecnologia in aula favorisce una didattica partecipativa e multimediale, capace di integrare contenuti visivi, testuali e audio in un'unica soluzione interattiva.

Diversi studi hanno evidenziato l'importanza di utilizzare strumenti tecnologici a scuola, confermando la necessità di integrare metodologie tradizionali e digitali nella didattica contemporanea. Ad esempio, ricerche accademiche e documenti ministeriali evidenziano come la lavagna interattiva non solo migliori l'efficacia dell'insegnamento, ma contribuisca anche a trasformare l'ambiente di apprendimento in uno spazio dinamico e collaborativo, in grado di preparare gli studenti alle sfide del futuro.

Prima di entrare nel merito degli studi riguardo l'impiego delle lavagne digitali in classe e, in particolare, nell'ora di matematica, è utile fare una panoramica generale per comprendere cos'è questo strumento e quali potenzialità offre.

1.3.1 Che cos'è la LIM e come funziona

La Lavagna Interattiva Multimediale è uno strumento elettronico che, pur richiamando nella forma e nelle dimensioni la tradizionale lavagna di ardesia,

si caratterizza per l'integrazione di funzionalità digitali avanzate, in grado di ampliare significativamente le opportunità didattiche (Ellerani et al., 2011).

Per funzionare, la LIM deve essere collegata a un computer, che proietta la schermata del monitor sulla superficie della lavagna stessa, rendendo immediatamente visibili contenuti digitali e operazioni in corso (Bonaiuti, 2009; Ellerani et al., 2011). Il suo utilizzo si basa su un'interazione "a due vie": non solo consente di visualizzare ciò che avviene sul computer, ma permette anche di controllarlo direttamente, senza l'uso di mouse o tastiera, semplicemente interagendo con lo schermo della lavagna attraverso il tocco delle dita o l'uso di speciali penne digitali. In questo modo, è possibile scrivere o disegnare come su una lavagna tradizionale, con il valore aggiunto di poter salvare, stampare o inviare direttamente agli studenti i materiali prodotti (Ellerani et al., 2011).

La LIM rappresenta quindi una sintesi efficace tra le potenzialità del computer, che consente l'utilizzo di software, ipertesti, animazioni e la navigazione in rete, e le funzionalità della lavagna classica di ardesia, come la possibilità di scrivere direttamente a mano in modo naturale (Ellerani et al., 2011).

1.3.2 Funzioni e potenzialità didattiche della LIM

Dopo questa breve descrizione delle lavagne digitali e dei loro aspetti più tecnici, possiamo ora ad analizzare più nel dettaglio le principali funzionalità che contraddistinguono tutte le LIM, indipendentemente da tipologia, modello o casa produttrice. In questa sezione si riprende principalmente il contributo di Zambotti (2009), che offre una sintesi chiara ed efficace delle funzioni didattiche della LIM, e a cui si rimanda per eventuali approfondimenti.

La LIM come lavagna virtuale

La LIM, nella sua funzione più semplice e immediata, può essere utilizzata come una lavagna bianca virtuale su cui scrivere la lezione, in modo analogo a quanto avviene con la tradizionale lavagna di ardesia. Tuttavia,

rispetto a quest'ultima, la LIM offre una serie di funzionalità aggiuntive che hanno il potenziale per migliorare l'efficacia didattica. In particolare, consente di modificare colore, dimensione e stile del testo e del tratto, cancellare selettivamente, spostare e duplicare contenuti, e utilizzare strumenti come evidenziatori per sottolineare concetti chiave. Inoltre, molte LIM sono dotate di software che riconoscono automaticamente la scrittura convertendola in testo digitale, migliorando così la leggibilità e la possibilità di modifica.

La LIM come “memoria digitale”

Un'altra caratteristica importante della LIM è la funzione di “memoria digitale”, che consente di salvare, esportare in PDF, condividere, riorganizzare e riutilizzare nelle lezioni successive tutto ciò che è stato scritto durante la lezione. Questa funzione può essere particolarmente utile per gli studenti con difficoltà di apprendimento o per chi è stato assente alla lezione, in quanto permette di recuperare facilmente quanto svolto in aula.

La LIM come supporto per il disegno

Oltre che per la scrittura, la LIM si rivela particolarmente utile anche per il disegno, inteso sia come rappresentazione grafica libera, sia come costruzione precisa di figure geometriche, schemi o diagrammi. Grazie agli strumenti digitali integrati, come righelli, compassi virtuali, griglie e colori, l'utilizzo del disegno digitale consente di lavorare in modo più efficace rispetto alla lavagna tradizionale. Inoltre, i software di gestione della LIM offrono una vasta gamma di strumenti pensati appositamente per facilitare il disegno geometrico, tra cui figure preimpostate e facilmente modificabili e opzioni per il riconoscimento automatico delle forme: una figura tracciata a mano libera può, ad esempio, essere trasformata in un disegno preciso e leggibile, correggendo eventuali imprecisioni. Inoltre, il disegno geometrico è supportato da un'ampia selezione di elementi grafici, come linee, segmenti, semirette e frecce, tutti completamente personalizzabili nei loro aspetti formali. In ambito matematico e scientifico, queste funzionalità possono essere

particolarmente vantaggiose per visualizzare relazioni geometriche, rappresentazioni spaziali o modelli. A tutto ciò si aggiunge il fatto che i disegni realizzati possono essere salvati, esportati e riutilizzati all'interno di materiali di studio o presentazioni, aumentando così l'efficienza e la continuità del lavoro didattico.

La LIM come supporto audio-video

La LIM può essere utilizzata per integrare contenuti audio e video all'interno della lezione, proiettando filmati, documentari, animazioni o registrazioni sonore. In questo modo, l'insegnante può arricchire la spiegazione teorica e favorire una comprensione più profonda, grazie alla possibilità di variare i linguaggi comunicativi e coinvolgere anche chi apprende meglio attraverso canali visivi o uditivi. I materiali multimediali possono servire a introdurre un argomento, approfondirne alcuni aspetti o proporre spunti di riflessione e discussione. Inoltre, la possibilità di mettere in pausa, rivedere o rallentare la riproduzione permette di adattare il ritmo della lezione alle esigenze della classe. I contenuti audiovisivi possono contribuire a creare un contesto didattico più ricco e stimolante, favorendo la partecipazione attiva degli studenti e promuovendo un approccio più interattivo. In questo senso, la LIM non si limita a essere uno strumento di proiezione, ma può diventare parte integrante della progettazione educativa.

La LIM come supporto per testi e documenti

Una delle funzioni più pratiche della LIM è la possibilità di proiettare il libro di testo in formato digitale, file PDF o PowerPoint precedentemente preparati dal docente, permettendo a tutta la classe di lavorare contemporaneamente sullo stesso materiale. Questa funzione può favorire l'inclusione, la chiarezza e l'organizzazione del lavoro in aula.

**La LIM come supporto per la visualizzazione dinamica di grafici e
oggetti matematici**

Una delle funzioni più significative della LIM nella didattica della matematica è la possibilità che offre di visualizzare in modo dinamico grafici e oggetti matematici. Grazie alla proiezione dello schermo del computer, l'insegnante può condividere con l'intera classe contenuti digitali in tempo reale, integrando nella lezione software di geometria dinamica come GeoGebra o Desmos, particolarmente efficaci per la rappresentazione e la manipolazione di figure piane e funzioni. La possibilità di mostrare direttamente come varia il grafico di una funzione al modificarsi di un parametro, o di confrontare diverse rappresentazioni dello stesso oggetto matematico, può rendere l'apprendimento più interattivo e partecipato. Inoltre, la LIM consente di accedere a risorse online come simulazioni, animazioni e applicazioni web specifiche, ampliando ulteriormente le opportunità di esplorazione concettuale.

Alla luce di quanto detto fin'ora, emerge con chiarezza come la Lavagna Interattiva Multimediale rappresenti un potente strumento didattico che offre l'opportunità di arricchire e trasformare in profondità le pratiche educative (Bonaiuti, 2009). Le sue potenzialità risiedono nella capacità di creare un punto di incontro virtuoso tra le opportunità offerte dalle tecnologie digitali e le esigenze di una didattica attiva, inclusiva e di qualità. In questa prospettiva, la LIM non si configura semplicemente come un supporto alla lezione tradizionale, ma come un vero e proprio ambiente interattivo per l'apprendimento partecipato. Le sue funzionalità permettono di stimolare processi cognitivi complessi, favorendo la formulazione di ipotesi, la costruzione collettiva del sapere, la visualizzazione grafico-simbolica dei concetti e l'elaborazione condivisa delle conoscenze. In tal senso, può diventare un catalizzatore di apprendimento significativo, sostenendo modalità didattiche orientate al coinvolgimento attivo degli studenti (Bonaiuti, 2009). Tuttavia, affinché queste potenzialità si traducano in effettive opportunità formative, è necessario che la LIM venga utilizzata in modo consapevole, intenzionale

e pedagogicamente fondato. Come sottolinea Bonaiuti (2009), uno dei rischi più concreti è quello di un uso strumentale e superficiale della tecnologia, cioè di impiegare la LIM come semplice sostituto della lavagna tradizionale o come elemento scenografico per la proiezione di contenuti multimediali, senza un reale ripensamento delle pratiche didattiche. Un utilizzo autenticamente innovativo della LIM dovrebbe, invece, inserirsi in una cornice metodologica flessibile, capace di integrare momenti di problematizzazione, riflessione individuale e confronto collettivo (Bonaiuti, 2009; Zambotti, 2009). In questo senso, la LIM si rivela uno strumento versatile e polifunzionale: può introdurre situazioni-problema stimolanti, aiutare nella sintesi dei concetti chiave, facilitare il confronto di prospettive differenti tra gli studenti, e integrare saperi formali e informali provenienti dall'esperienza quotidiana, contribuendo così a rendere l'apprendimento più autentico, coinvolgente e connesso alla realtà.

1.3.3 Tra teoria e pratica: benefici e criticità dell'uso della LIM in classe

Le Lavagne Interattive Multimediali, introdotte nel contesto educativo da diversi decenni e oggi stabilmente presenti in quasi tutti gli ordini scolastici, dalla primaria all'università, rappresentano un'importante innovazione didattica, potenzialmente capace di coniugare l'efficacia della tradizione con le potenzialità delle nuove tecnologie (Beeland, 2002). Dopo aver delineato un quadro generale sul funzionamento di questo strumento e sulle sue principali potenzialità didattiche, possiamo ora entrare più nel merito dei risultati osservati, passando in rassegna gli effetti concretamente riscontrati in classe in termini di partecipazione, attenzione e apprendimento degli studenti. In questa sezione verranno analizzati i principali benefici emersi durante le lezioni, insieme alle criticità riscontrate nell'utilizzo quotidiano di questo strumento, così da offrire una visione più articolata e aderente alla pratica didattica reale. L'obiettivo è quello di restituire un quadro che tenga conto non solo delle potenzialità intrinseche dello strumento, ma anche delle

condizioni necessarie affinché tali potenzialità possano tradursi in pratiche didattiche efficaci e sostenibili.

Tra i principali benefici riscontrati nell'impiego della LIM in ambito scolastico, spicca in particolare il suo impatto trasformativo sulle pratiche didattiche degli insegnanti. Diversi studi e testimonianze documentano come l'introduzione della lavagna interattiva abbia incentivato molti docenti a rivedere strumenti, metodi e strategie, stimolando un ripensamento dell'intero impianto pedagogico a favore di un approccio più dinamico e partecipativo (Magnaterra, 2010). L'utilizzo della LIM rappresenta, in questo senso, un'opportunità per l'insegnante di rinnovamento professionale, sperimentando modalità didattiche più flessibili e interattive, in grado di valorizzare il proprio ruolo di facilitatore e regista dell'apprendimento (Samsonova, 2021). In quest'ottica, l'utilizzo della LIM si colloca perfettamente anche nel quadro del recente ripensamento della didattica orientato verso un approccio centrato sul discente (Samsonova, 2021). Analizzando più nello specifico l'impatto sugli studenti, diversi studi documentano come l'uso della lavagna interattiva sia associato a un aumento dell'attenzione, della partecipazione e della motivazione, con risultati particolarmente rilevanti nelle discipline scientifiche e tra gli studenti con difficoltà di apprendimento o di concentrazione (Beeland, 2002; Lewin et al., 2008; Magnaterra, 2010; Tacconi et al., 2009). Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, tali risultati positivi non sembrano dipendere dalla possibilità per gli studenti di interagire fisicamente con la LIM. Anche in assenza di un accesso diretto allo strumento, infatti, si evidenziano comunque benefici in termini di attenzione, motivazione e apprendimento (Beeland, 2002). L'apprendimento in classe risulta potenziato in particolar modo dall'impiego di immagini, grafici, animazioni digitali e video, strumenti che aumentano l'impatto visivo e l'interattività della lezione (Gregorcic et al., 2018). In questo senso, la LIM rappresenta una risorsa particolarmente efficace: la letteratura evidenzia come il suo utilizzo favorisca una comprensione più profonda dei contenuti, proprio grazie alla possibilità di visualizzare concetti in modo dinamico e immediato (Bilý and Mišтина,

2023). Questi strumenti multimediali supportano inoltre gli studenti nell'organizzazione e nell'elaborazione delle informazioni, stimolando processi cognitivi complessi come il pensiero critico e la risoluzione di problemi (Beeland, 2002). La possibilità di integrare media differenti consente infine agli insegnanti di adattare le lezioni ai diversi stili di apprendimento, rendendo l'insegnamento più inclusivo e personalizzato (Beeland, 2002).

Accanto ai molteplici benefici legati all'uso della LIM in classe, sono emerse anche alcune criticità che è importante considerare. Numerosi studi evidenziano come, in assenza di un'adeguata formazione professionale degli insegnanti, l'introduzione della tecnologia non sia di per sé sufficiente a migliorare la partecipazione alle lezioni e i risultati di apprendimento (Beeland, 2002). Senza una preparazione mirata sull'uso didattico della LIM, il rischio è che lo strumento venga impiegato in modo riduttivo, come semplice supporto per la proiezione o la scrittura frontale, finendo per replicare le dinamiche della lavagna tradizionale e vanificando le sue reali potenzialità interattive e collaborative (Bonaiuti, 2009; Hennessy et al., 2007; Tacconi et al., 2009). Quando utilizzata solo come lavagna per mostrare slides o video, senza stimolare l'interazione e la partecipazione attiva degli studenti, la tecnologia non solo perde la sua valenza innovativa, ma può anche contribuire a rinforzare modelli didattici trasmissivi e centrati sull'insegnante (Beeland, 2002). Questo è sicuramente un problema che si presenta frequentemente, poiché molti insegnanti non hanno mai frequentato corsi specifici sull'uso della LIM, e quindi la loro preparazione risulta insufficiente per sfruttare appieno le potenzialità di questo strumento (Türel and Johnson, 2012). In questi casi, si osserva di frequente un "effetto novità" temporaneo: l'introduzione della LIM genera un iniziale entusiasmo tra studenti e insegnanti, ma questo coinvolgimento tende a esaurirsi rapidamente quando lo strumento non viene integrato in modo consapevole e continuativo nella progettazione didattica (Conenna, 2013). Si corre inoltre il rischio di una certa superficialità nell'uso della LIM, dove l'attenzione si concentra più sull'effetto visivo accattivante delle lezioni che non sulla qualità dei processi cognitivi e didattici attiva-

ti. L'esperienza didattica si riduce così alla ricerca di un prodotto "bello" da vedere, piuttosto che alla costruzione di un percorso di apprendimento significativo, condiviso e riflessivo (Magnaterra, 2010). Come sottolineato da Higgins et al. (2007), l'opportunità offerta dalla tecnologia della LIM di integrare pedagogia multi-modello, tecnologie multi-modalità e gesti verbali e visivi potrebbe non avere di per sé un impatto significativo o misurabile sui risultati. A tutto ciò si aggiungono le difficoltà legate all'utilizzo quotidiano di questi dispositivi. Tra le problematiche più ricorrenti si segnalano malfunzionamenti tecnici, incompatibilità software, difficoltà di connessione e limiti hardware, che possono rallentare il flusso della lezione e generare frustrazione tanto per gli insegnanti quanto per gli studenti (Tacconi et al., 2009).

1.3.4 La LIM nella didattica della matematica

Dopo aver esaminato in termini generali i principali benefici e le criticità legati all'utilizzo della LIM nella pratica didattica, ci concentriamo ora sull'ambito specifico dell'insegnamento della matematica. In questa sezione, prenderemo in considerazione alcuni studi presenti in letteratura che analizzano il ruolo e l'efficacia della LIM all'interno delle lezioni di matematica, mettendone in luce le potenzialità, le criticità e le sfide peculiari di questa disciplina.

Secondo lo studio di Wood and Ashfield (2008), la LIM può rappresentare un valido supporto nella didattica della matematica, migliorando sia l'efficacia dell'insegnamento che il coinvolgimento degli studenti. Gli insegnanti intervistati hanno osservato come l'integrazione di elementi visivi e interattivi favorisca la comprensione di concetti astratti e stimoli l'attenzione degli alunni: la possibilità di utilizzare risorse digitali dinamiche come grafici, animazioni e strumenti di manipolazione simbolica consente una rappresentazione immediata e concreta di procedure matematiche, agevolando il passaggio dalla teoria alla pratica. In particolare, l'uso della LIM consente di integrare nella lezione software di geometria dinamica, come GeoGebra e Desmos, nonché CAS. Come sottolinea Ostini (2015): *"il software permette*

di passare dalla forma algebrica a quella grafica di una funzione e viceversa in modo molto rapido” e ciò rende il lavoro “*molto più dinamico rispetto alle lezioni in cui l’uso della tecnologia è assente*” [p. 1]. Questo tipo di visualizzazione interattiva aiuta a superare le difficoltà legate all’astrazione, offrendo agli allievi la possibilità di “vedere” ciò che spesso resta troppo teorico. Inoltre, software come GeoGebra consentono di esplorare i concetti in modo sperimentale: gli studenti possono formulare ipotesi, verificare immediatamente i risultati e correggersi in autonomia, sviluppando un atteggiamento attivo e riflessivo verso l’apprendimento matematico (Ostini, 2015). In questa direzione si inserisce anche il contributo di Faggiano et al. (2012), i quali sottolineano che un uso consapevole e non meccanico della LIM in combinazione con software dinamici consente agli studenti di esplorare concetti, formulare congetture, verbalizzare strategie e riflettere sui processi risolutivi. Inoltre, avvicina gli studenti al linguaggio della dimostrazione. Oltre agli aspetti legati alla rappresentazione visiva e alla sperimentazione attiva dei concetti matematici, diversi studi si sono concentrati anche sulla percezione degli studenti e sull’impatto che l’uso della LIM ha sul loro coinvolgimento e sulla qualità dell’interazione in aula. Comprendere come gli studenti vivano l’esperienza didattica mediata dalla tecnologia è fondamentale per valutare in modo più completo l’efficacia di questi strumenti e per riflettere sulle condizioni che ne favoriscono un uso realmente significativo. In questa direzione si colloca lo studio di Erdener (2021), che analizza l’impatto dell’uso della LIM sull’apprendimento della matematica nelle scuole medie e superiori turche, con un focus particolare sull’atteggiamento degli studenti rispetto a questo strumento. I risultati mostrano una percezione generalmente positiva: la LIM è ritenuta dagli alunni uno strumento utile per facilitare la comprensione dei concetti, aumentare la motivazione e rendere le lezioni più interattive e coinvolgenti. Gli studenti riferiscono infatti di sentirsi più attenti, partecipi e interessati quando la LIM viene impiegata durante le lezioni. A ciò si aggiunge quanto osservato da Wood and Ashfield (2008), secondo cui l’impiego della LIM consente di accedere a una più ampia varietà

di contenuti. Inoltre, la rapidità con cui tali risorse possono essere selezionate, modificate e archiviate agevola il mantenimento di un ritmo didattico fluido e consente all'insegnante di adattare in tempo reale le attività in base alle risposte e ai bisogni emergenti degli studenti. Lo studio di Greiffenhagen (2019) mette invece in evidenza il potenziale della LIM nel promuovere un insegnamento della matematica centrato sulla comunicazione e sull'interazione tra studenti, due caratteristiche fondamentali per un apprendimento significativo di questa materia. Attraverso uno studio condotto in una scuola secondaria, viene sottolineato come la LIM possa favorire la discussione collettiva grazie alla possibilità di visualizzare e confrontare il lavoro degli studenti in tempo reale. Strumenti come tablet collegati al sistema della LIM consentono infatti agli alunni di contribuire attivamente alla lezione, esponendo le proprie soluzioni o idee alla classe. Questa modalità non solo stimola la partecipazione, ma rende visibili i processi di pensiero altrui, facilitando la negoziazione del significato matematico tra pari. Infine, alcuni studi evidenziano che, quando gli studenti utilizzano la tecnologia per tradurre e passare da una rappresentazione all'altra, tendono a esternalizzare in modo sistematico le trasformazioni tra differenti forme di rappresentazione (Pedersen et al., 2021). Questo processo può favorire la costruzione di connessioni tra le varie rappresentazioni di uno stesso oggetto matematico. Tuttavia, altre ricerche mostrano che, se da un lato la tecnologia facilita la creazione e la visualizzazione di oggetti matematici, dall'altro gli studenti incontrano spesso difficoltà nella loro interpretazione (Pedersen et al., 2021). Secondo alcuni ricercatori, infatti, l'uso della tecnologia non sempre si traduce in una reale internalizzazione dei concetti coinvolti, e può avvenire senza un adeguato pensiero critico. In alcuni casi, ciò può portare gli studenti a sviluppare idee distorte o errate degli oggetti matematici in questione (Pedersen et al., 2021). Rispetto a questo aspetto, Duval (2006, 2017) esprime una posizione critica: secondo l'autore, se da un lato la tecnologia apre considerevoli possibilità di esplorazione visiva, dall'altro rischia di sostituirsi agli studenti nell'effettuare i passaggi tra registri matematici. In tal modo, essi potrebbero non

sviluppare consapevolezza e padronanza delle trasformazioni tra i linguaggi matematici, una competenza fondamentale per la comprensione profonda di questa materia. Infine, alcuni studi pongono l'accento sulla necessità di un uso pedagogicamente consapevole della LIM anche nella didattica della matematica (Averna et al., 2012; De Vita et al., 2014; Pedersen et al., 2021; Wood and Ashfield, 2008). I risultati relativi agli apprendimenti, infatti, non sono sempre univoci: mentre alcune ricerche riportano miglioramenti dal punto di vista dell'apprendimento, altre non rilevano differenze significative rispetto all'insegnamento tradizionale (De Vita et al., 2014). Questo suggerisce che l'efficacia della LIM dipende fortemente dalle modalità del suo impiego. L'interattività più significativa non si realizza quando la LIM viene usata per presentare contenuti in modo frontale, ma quando è integrata in un approccio laboratoriale, che valorizzi il pensiero matematico degli studenti, stimoli l'elaborazione attiva dei concetti e favorisca il confronto tra strategie risolutive. Da qui l'importanza della progettazione didattica nel definire il ruolo della LIM come strumento di mediazione cognitiva e non solo come supporto tecnico alla lezione (Pedersen et al., 2021).

In conclusione, la LIM rappresenta uno strumento tecnologico che, grazie alle sue numerose funzionalità, ha introdotto nuove modalità di presentazione e interazione nella didattica. I principali benefici riguardano la possibilità di integrare differenti codici comunicativi favorendo un approccio multimodale all'insegnamento, mentre tra le criticità emergono problemi legati alla formazione insufficiente dei docenti, a difficoltà tecniche e al rischio di un utilizzo passivo, come semplice sostituto della lavagna di ardesia. La LIM può, infatti, rappresentare uno strumento didattico dal grande potenziale, capace di arricchire e stimolare l'apprendimento degli studenti, ma non è di per sé una rivoluzione: la sua reale efficacia è strettamente legata alle competenze pedagogiche e tecnologiche degli insegnanti (Türel and Johnson, 2012). Se da un lato l'introduzione della LIM può inizialmente generare un aumento della motivazione grazie all'“effetto novità”, senza un'integrazione strutturata e supportata da un'adeguata formazione dei docenti questi be-

nefici tendono a svanire nel tempo. Solo attraverso un utilizzo consapevole e mirato della LIM è possibile massimizzarne l'impatto didattico, dando vita a un ambiente di apprendimento realmente capace di rispondere ai bisogni educativi degli studenti (Conenna, 2013). In particolare, il suo utilizzo nella didattica della matematica si inserisce in un contesto più ampio di riflessione sull'uso dei sistemi semiotici e delle tecnologie per facilitare la comprensione concettuale.

Questi sono i principali elementi emersi dalla letteratura. Nel nostro lavoro, andremo ad analizzare i dati raccolti attraverso interviste e riprese video con un gruppo di docenti italiani della scuola secondaria di secondo grado, con l'obiettivo di comprendere, tra le altre cose, qual è il loro rapporto con la LIM: se e come la utilizzano durante le lezioni, in che modo essa si integra con le loro pratiche didattiche, quali benefici riscontrano e quali difficoltà incontrano.

Capitolo 2

Quadro teorico

2.1 Il linguaggio della matematica: un approccio semiotico

La semiotica è la teoria che studia i segni e il modo in cui questi acquisiscono un significato. Il segno è, in generale, un'entità che rimanda a qualcos'altro e che non significa in quanto tale, poiché il suo significato è determinato da chi lo sta interpretando (Presmeg et al., 2016). Il segno, dunque, non ha valore di per sé, ma acquisisce significato attraverso un processo di attribuzione che dipende dall'interprete, dalla cultura di riferimento e dal sistema di convenzioni entro cui è inserito (Saussure, 1915).

All'interno di questo quadro generale, una delle applicazioni più significative della semiotica si trova proprio nell'ambito dell'apprendimento matematico. In particolare, la teoria di Raymond Duval, considerato il padre della semiotica legata alla didattica della matematica, rappresenta uno dei contributi più rilevanti e articolati a disposizione dei ricercatori. Essa permette di analizzare da un punto di vista sia semiotico che cognitivo il modo di pensare e di lavorare in matematica, qualunque siano i concetti matematici coinvolti (Iori, 2023).

Secondo Duval (1995, 2006), una *rappresentazione semiotica* è un insieme di segni utilizzato per dare forma a un concetto o a un oggetto. Quando

parliamo di *sistema semiotico*, ci riferiamo a un sistema formalizzato di questi segni. Un *registro di rappresentazione*, invece, è un tipo particolare di sistema semiotico che consente trasformazioni di rappresentazione. In altre parole, un registro semiotico include non solo il sistema di segni, ma anche le regole per la produzione di rappresentazioni significative.¹

L'uso di molteplici sistemi semiotici di rappresentazione è essenziale per lo sviluppo dell'attività matematica e non potrebbe essere altrimenti. L'attività matematica non può basarsi sulla realtà concreta (D'Amore, 2000): gli oggetti della matematica sono entità ideali che non esistono nel mondo fisico e devono quindi essere resi accessibili mediante segni (Presmeg et al., 2016). Dunque, anche l'apprendimento della matematica richiede l'impiego di diverse forme di rappresentazione, come notazioni simboliche, scrittura algebrica, figure geometriche, grafici cartesiani, diagrammi. Il progresso della conoscenza matematica è sempre accompagnato dalla creazione, dall'apprendimento e dallo sviluppo di nuovi e specifici sistemi semiotici: secondo Duval “*non c'è noetica (cioè comprensione concettuale di un oggetto) senza semiotica (cioè rappresentazione per mezzo di segni all'interno di opportuni registri di rappresentazione)*” (Duval, 1995).

Quando si cerca di analizzare come avviene la comprensione matematica e di spiegare gli ostacoli che gli studenti sperimentano durante il processo di apprendimento, spesso si chiamano in causa i concetti e la loro complessità epistemologica. Tuttavia, un simile approccio non è sufficiente per caratterizzare ciò che è specifico dei processi di pensiero in matematica. Che cos'è così caratteristico dell'attività matematica, in confronto alle altre attività cognitive, da suscitare difficoltà di apprendimento più complesse che negli altri campi? “*La differenza tra l'attività cognitiva richiesta per la matematica e quella richiesta per altri domini della conoscenza non si trova nei concetti, perché non esiste un dominio della conoscenza che non sviluppi un insieme*

¹In questo lavoro, i termini *sistema semiotico* e *registro di rappresentazione* saranno talvolta utilizzati in modo quasi interscambiabile: pur nella consapevolezza della distinzione teorica proposta da Duval, si è scelto di privilegiare, ove opportuno, la scorrevolezza espositiva.

di concetti più o meno complessi” (Duval, 2006, p. 106). Essa si trova invece nel ruolo fondamentale che le rappresentazioni semiotiche e soprattutto le trasformazioni di tali rappresentazioni giocano nelle attività matematiche.

2.1.1 L'importanza delle rappresentazioni semiotiche in matematica

Gli oggetti matematici non possono essere percepiti o osservati direttamente tramite strumenti: l'accesso ai numeri, per esempio, è vincolato all'uso di un sistema semiotico di rappresentazione che consenta di designarli (Duval, 2006). Ma ciò che i segni, o più precisamente i registri semiotici di rappresentazione, ci permettono di fare non è solo designare oggetti matematici o comunicare, ma anche lavorare sugli oggetti stessi e con essi in maniera efficace per ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze (Duval, 1995). In altre parole, l'evoluzione del pensiero matematico è strettamente legata alla capacità di operare sulle rappresentazioni, trasformandole e manipolandole secondo regole precise. Nessun tipo di elaborazione matematica può essere eseguita senza usare un registro semiotico di rappresentazione, poiché l'elaborazione matematica implica sempre la sostituzione di una rappresentazione semiotica con un'altra: la parte che i segni svolgono in matematica non è quella di essere sostituiti agli oggetti, ma quella di essere sostituiti ad altri segni; e ciò che conta di più non sono le rappresentazioni, ma la loro trasformazione (Duval, 2006). *“Basta guardare alla storia dello sviluppo della matematica per vedere che lo sviluppo delle rappresentazioni semiotiche è stata una condizione essenziale per lo sviluppo del pensiero matematico”* (Duval, 2006, p. 106). Un caso emblematico è l'introduzione della notazione algebrica. Nell'antichità, i problemi matematici venivano espressi in forma discorsiva. Ad esempio, i babilonesi e gli egizi risolvevano equazioni lineari e quadratiche descrivendo verbalmente i passaggi risolutivi, il che rendeva i procedimenti estremamente laboriosi e difficilmente generalizzabili. Con l'introduzione della notazione algebrica, si ridusse drasticamente la complessità delle operazioni e il pensiero matematico fece un enorme salto in avanti: non

solo divenne possibile esprimere le relazioni in modo più sintetico, ma si aprì la strada alla formalizzazione. *“A differenza di altre aree della conoscenza scientifica, i segni e le trasformazioni delle rappresentazioni semiotiche sono al centro dell’attività matematica”* (p. 107).

2.1.2 Il paradosso cognitivo dell’accesso agli oggetti matematici

A differenza dei fenomeni in astronomia, fisica, chimica, biologia, gli oggetti matematici non sono mai accessibili direttamente o tramite strumenti come microscopi, telescopi o apparati di misura. Questa peculiarità rende la matematica un campo unico nel panorama delle scienze, poiché l’esplorazione e la comprensione dei suoi oggetti avvengono esclusivamente attraverso rappresentazioni formali e simboliche. In altre parole, negli altri campi della conoscenza scientifica le rappresentazioni semiotiche sono immagini o descrizioni di fenomeni del mondo esterno, ai quali possiamo comunque accedere anche senza tali rappresentazioni. In matematica, invece, le rappresentazioni non sono semplici descrizioni, ma l’unico mezzo attraverso cui possiamo accedere agli oggetti matematici stessi (Duval, 1999). Questo significa che l’apprendimento della matematica dipende dalla capacità di interpretare e manipolare simboli e strutture astratte. Dal punto di vista epistemologico, c’è dunque una differenza fondamentale tra la matematica e gli altri domini della conoscenza scientifica (Duval, 2006). Questa situazione epistemologica specifica della matematica cambia radicalmente l’uso cognitivo dei segni e fa sì che ogni studente si trovi di fronte a due requisiti completamente opposti per sviluppare il pensiero matematico: da un lato, le rappresentazioni semiotiche devono necessariamente essere utilizzate per svolgere qualsiasi tipo di attività matematica; dall’altro, gli oggetti matematici non devono mai essere confusi con le rappresentazioni semiotiche che vengono utilizzate (Duval, 2006). Il problema della comprensione della matematica nasce proprio dal conflitto cognitivo tra queste due esigenze opposte: come è possibile, a partire dalle rappresentazioni, acquisire conoscenza di oggetti ai quali non

si può avere accesso attraverso un'esperienza più o meno diretta? Le rappresentazioni possono funzionare come sostitute dell'oggetto matematico che stanno rappresentando? Spesso la mancanza di un doppio accesso (diretto e indiretto) agli oggetti matematici porta quasi inevitabilmente a confondere il contenuto di una rappresentazione con l'oggetto matematico stesso, generando ostacoli alla comprensione per un gran numero di studenti (Iori, 2023).

2.1.3 La grande varietà di rappresentazioni semiotiche utilizzate in matematica

Gli oggetti matematici mancano di un referente reale, e questa mancanza è colmata dall'esistenza di molti registri semiotici di rappresentazione (Duval, 1999). In particolare, la matematica è il dominio in cui troviamo la più ampia gamma di sistemi di rappresentazione semiotica, sia quelli comuni a ogni tipo di pensiero, come il linguaggio naturale, sia quelli specifici della matematica, come le notazioni algebriche. Essi possono essere utilizzati liberamente in base al compito da svolgere. La possibilità di manipolazione dei segni dipende dal sistema di rappresentazione che si sceglie di utilizzare (Pacelli, 2021). Alcuni processi risultano più semplici in un sistema semiotico che ad un altro, o possono essere eseguiti in un solo sistema (Duval, 2006). Ad esempio, determinare esattamente i punti di massimo e minimo di una funzione è un procedimento che può essere svolto quasi esclusivamente utilizzando il registro algebrico: richiede il calcolo della derivata della funzione e la risoluzione dell'equazione $f'(x) = 0$. Al contrario, individuare le simmetrie di una funzione o la presenza di discontinuità è più immediato nel registro grafico.

In genere, durante le lezioni di matematica, non viene utilizzato un solo registro di rappresentazione, ma almeno due: una delle caratteristiche del linguaggio matematico è quella di essere multimodale, nel senso che per fare e per comunicare la matematica bisogna integrare diverse forme di rappresentazione (Pacelli, 2021). Ad esempio, spesso gli insegnanti parlano in

linguaggio naturale mentre scrivono espressioni simboliche sulla lavagna. Ci si aspetta che gli studenti vadano avanti e indietro tra i diversi tipi di rappresentazione proposti. Ma questa operazione è molto complessa da un punto di vista cognitivo (Duval, 1998).

Un altro problema cruciale della comprensione della matematica per gli studenti è che i tratti distintivi fissati di un oggetto dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto e dunque, adottando un registro diverso, si fissano tratti diversi di quell'oggetto (Duval, 2006). Vale a dire che due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri diversi, hanno quasi sicuramente contenuti differenti (D'Amore, 2001). Si consideri, ad esempio, un numero complesso come $z = 2 + 3i$. Esso può essere rappresentato anche come punto di coordinate $(2, 3)$ nel piano cartesiano complesso. A prima vista, queste due rappresentazioni sembrano essere profondamente diverse. Tuttavia, entrambe descrivono lo stesso oggetto matematico anche se la rappresentazione geometrica rende immediatamente visibile l'interpretazione del modulo di z come distanza dall'origine e dell'argomento come angolo rispetto all'asse reale, concetti meno evidenti nella forma algebrica.

Il passaggio da un registro a un altro cambia le proprietà che possono essere rese esplicite. Se non si ha accesso diretto agli oggetti della matematica, come possono gli studenti riconoscere lo stesso oggetto rappresentato attraverso diverse rappresentazioni semiotiche che non sembrano avere alcuna somiglianza tra loro? La risposta a questo paradosso sta nell'educazione a riconoscere e distinguere nei cambiamenti di rappresentazione quel che cambia e quel che resta "uguale" (Radford, 2010).

2.1.4 I tipi di trasformazione delle rappresentazioni semiotiche

Il ruolo delle rappresentazioni semiotiche non è soltanto quello di designare oggetti o di rappresentare qualcos'altro, ma è determinato dalla possibilità di elaborazione matematica che permettono (Duval, 2006). In matematica, come abbiamo detto, l'apprendimento non può mai avvenire tramite un'espe-

rienza diretta con gli oggetti studiati, ma solo tramite lo sviluppo di consapevolezza che diverse rappresentazioni siano davvero rappresentazioni di uno stesso ente matematico (Pacelli, 2021). Per sviluppare tale consapevolezza diventa fondamentale imparare a trasformare rappresentazioni semiotiche (Baccaglini Frank et al., 2018).

Esistono due tipi di trasformazioni delle rappresentazioni: i *trattamenti* e le *conversioni*.

I trattamenti sono trasformazioni di rappresentazione attraverso cui si ottiene una nuova rappresentazione dello stesso oggetto nello stesso registro semiotico. Ad esempio, l'equazione canonica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

si può trasformare nella forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

attraverso il processo di completamento del quadrato. Questo è un esempio di trattamento in quanto la trasformazione di rappresentazione avviene all'interno del registro algebrico stesso. In generale, il trattamento collega i vari passi di una dimostrazione, di una spiegazione, di un calcolo o della risoluzione di un'equazione (Iori, 2023).

Le conversioni, invece, sono trasformazioni di rappresentazione attraverso cui si ottiene una nuova rappresentazione dello stesso oggetto in un diverso registro semiotico. Ad esempio, l'equazione $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ può essere rappresentata nel piano cartesiano come una circonferenza di centro $(2, -3)$ e raggio $r = 3$. Questo è un esempio di conversione poiché si è passati dal registro algebrico a quello geometrico.

Possiamo notare che se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto che accada il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico (D'Amore, 2001).

“Attraverso trattamenti e conversioni, possiamo toccare la complessità cognitiva della comprensione nell’apprendimento della matematica e i processi di pensiero specifici richiesti dall’attività matematica” (Duval, 2006, p. 114). In particolare, il processo di conversione è essenziale per l’apprendimento della matematica, poiché aiuta gli studenti a sviluppare una comprensione poliedrica dei concetti matematici e a riconoscerli sotto forme diverse. Tuttavia, la conversione rappresenta anche una delle sfide principali per gli studenti stessi, poiché richiede una coordinazione tra registri che presuppone una profonda comprensione del significato sottostante le rappresentazioni: ogni cambiamento di registro richiede prima il riconoscimento dello stesso oggetto rappresentato in due modi anche molto diversi tra loro (Duval, 2006).

In generale, la costruzione della conoscenza matematica è strettamente dipendente dalla capacità di utilizzare più registri di rappresentazione dei concetti stessi per (D’Amore, 2001):

- *rappresentarli* in un dato registro;
- *trattare* tali rappresentazioni all’interno di uno stesso registro;
- *convertire* tali rappresentazioni da un registro ad un altro.

2.1.5 Semiotica e insegnamento della matematica

L’analisi della matematica attraverso la lente della semiotica mette in luce un aspetto cruciale del processo di insegnamento/apprendimento: la conoscenza matematica non può prescindere dalle rappresentazioni semiotiche che la veicolano e che permettono di tradurre concetti astratti in forme che gli studenti possono comprendere e manipolare. Anche nelle Indicazioni Nazionali riguardanti la scuola secondaria di II grado (2010) si fa riferimento all’importanza del linguaggio in matematica. Ad esempio, nel caso del Liceo Scientifico, in corrispondenza del nucleo tematico “Relazioni e funzioni”, uno degli obiettivi da raggiungere è proprio *“passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale)”* (p. 339); nel

nucleo “Dati e previsioni”, inoltre, si pone, come obiettivo il saper “*rappresentare e analizzare in diversi modi [...] un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee*” (p. 339).

Questa prospettiva evidenzia il ruolo chiave dell’insegnante che si trova a gestire una pluralità di registri semiotici per comunicare efficacemente i contenuti, facilitare l’apprendimento, promuovere un apprendimento significativo. Il modo in cui gli insegnanti utilizzano i sistemi di rappresentazione semiotica durante le lezioni risulta infatti determinante per il successo dell’apprendimento: la semiotica applicata alla didattica della matematica non riguarda solo la scelta del registro più adatto in un dato momento, ma anche la capacità dell’insegnante di facilitare il passaggio e l’integrazione tra diversi registri di rappresentazione. Questa transizione tra registri, se gestita adeguatamente, non solo rafforza la comprensione dei concetti, ma permette anche lo sviluppo della capacità degli studenti di passare da una rappresentazione all’altra. Pertanto, l’uso dei sistemi di rappresentazione semiotica da parte degli insegnanti non è un elemento accessorio dell’insegnamento della matematica, ma un ingrediente chiave in grado di rendere la matematica più accessibile, significativa e, soprattutto, comprensibile per tutti gli studenti.

In considerazione di quanto detto fin’ora, sorge spontanea la domanda: in che modo gli insegnanti di matematica utilizzano i diversi registri di rappresentazione durante le loro lezioni? Questo lavoro vuole esplorare la pratica didattica dei docenti, con particolare attenzione all’uso delle rappresentazioni semiotiche e alle convinzioni che ne guidano le scelte. L’obiettivo è analizzare le strategie adottate per favorire una comprensione significativa della matematica da parte dei propri studenti.

2.1.6 I principali registri di rappresentazione utilizzati in matematica

La matematica è l’ambito in cui troviamo la più ampia gamma di registri di rappresentazione semiotica. Ogni registro, con il proprio sistema di segni e regole operative, consente di produrre rappresentazioni significative dei con-

cetti matematici. Il coordinamento tra questi sistemi, attraverso operazioni di trattamento e conversione, è essenziale per una comprensione profonda dei concetti matematici (Duval, 2006).

Come sottolinea D'Amore (2001), il significato e l'appartenenza di un segno a un certo registro non dipendono unicamente dalla forma della rappresentazione, ma anche dal contesto e dall'oggetto che essa intende rappresentare: *“una rappresentazione semiotica in sé non è un messaggio in assoluto, a meno che non ne sia specificato in qualche modo il registro di rappresentazione. [...] In altre parole, una rappresentazione semiotica costituisce un significante diverso a seconda del significato di cui è significante”* [p. 24]. Ad esempio, il simbolo “ $<$ ” si presta a differenti interpretazioni: può rappresentare il simbolo di “minore” nel registro aritmetico, può invece rappresentare un angolo nel registro figurale geometrico.

Nel nostro lavoro assumiamo che il contesto renda chiaro il significato delle rappresentazioni, permettendo di individuare con precisione a quale registro di rappresentazione semiotica appartengono.

Per rendere operative le categorie proposte da Duval, presentiamo di seguito una breve descrizione dei principali registri di rappresentazione utilizzati in matematica. Questo inquadramento fornirà strumenti utili per analizzare e osservare le rappresentazioni effettivamente utilizzate durante le lezioni di matematica.

Il registro della lingua comune

Uno dei registri fondamentali per introdurre oggetti e concetti della matematica è la lingua comune, che gioca un ruolo cruciale nella descrizione e nella comunicazione sia orale che scritta di idee matematiche. In questo registro, i segni sono le parole e le frasi che possono descrivere concetti, operazioni e proprietà matematiche. Un esempio di utilizzo di questo registro è la seguente definizione: *“La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro”*. Essa esprime a parole una proprietà geometrica.

Le regole per la produzione di rappresentazioni significative sono le convenzioni grammaticali del linguaggio quotidiano.

Il registro aritmetico

Il registro aritmetico riguarda le rappresentazioni numeriche: numeri scritti in forma decimale, frazionaria o esponenziale. Ad esempio, il numero 0,75 può essere rappresentato in modi differenti: $\frac{3}{4}$, $7,5 \times 10^{-1}$.

Le regole che governano questo registro e che stabiliscono come costruire e manipolare correttamente le espressioni matematiche comprendono, ad esempio, regole di precedenza delle operazioni e proprietà algebriche fondamentali come la commutatività, l'associatività e la distributività. Questo registro include, inoltre, regole per la gestione di frazioni, numeri decimali e potenze, garantendo coerenza nelle trasformazioni e nei calcoli.

Il registro algebrico

Il registro algebrico si distingue da quello aritmetico in quanto utilizza simboli astratti per rappresentare relazioni e strutture matematiche in modo più generale e formale. Le espressioni algebriche, le equazioni e le funzioni costituiscono gli elementi chiave di questo registro. Ad esempio, l'equazione $7x + b = 0$ esprime una relazione tra variabili, mentre l'identità $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ esprime una relazione fondamentale utile in diversi contesti. Questo registro permette quindi di generalizzare i risultati matematici, rendendoli applicabili ad un'ampia varietà di situazioni.

Le regole di produzione in questo caso sono le proprietà algebriche fondamentali, le operazioni su variabili e numeri, le regole di manipolazione e risoluzione delle equazioni.

Il registro figurale geometrico

Il registro geometrico si caratterizza per l'uso di figure e simboli per rappresentare proprietà matematiche e relazioni spaziali tra oggetti nel piano e nello spazio.

Le sue regole di produzione di rappresentazioni significative spaziano dalle regole per la costruzione di figure geometriche a quelle per la gestione di simmetrie e trasformazioni.

Il registro logico

Il registro logico è costituito da simboli e notazioni formali che vengono utilizzati per rappresentare proposizioni. Questo registro è fondamentale nell'ambito della matematica formale, poiché permette di esprimere relazioni logiche con assoluta precisione. Ad esempio, la scrittura $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ esprime il fatto che il quadrato di ogni numero reale è non negativo.

Le regole di produzione di questo registro sono le leggi della logica proposizionale e predicativa come, ad esempio, il modus ponens o il principio di non contraddizione.

2.2 Gli stili di insegnamento degli insegnanti

Nell'ottica dell'analisi dell'uso dei sistemi semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti, un elemento da considerare è lo stile di insegnamento. Esso rappresenta l'insieme delle modalità preferite da un docente per organizzare l'attività didattica, interagire con gli studenti e veicolare i contenuti disciplinari. Grasha (1994) propone un modello concettuale articolato in cinque stili di insegnamento. Ogni stile implica una particolare visione del ruolo dell'insegnante e delle modalità di interazione con gli studenti:

- **Expert:** l'insegnante si propone come una figura autorevole e competente, mantenendo con costanza il proprio ruolo di esperto agli occhi degli studenti. Dimostra una solida padronanza dei contenuti e si impegna a stimolare negli alunni un continuo miglioramento delle proprie capacità. È particolarmente attento alla trasmissione chiara e accurata delle conoscenze, e si assicura che la preparazione degli studenti sia solida e approfondita. Il suo obiettivo principale è fornire contenuti

disciplinari ben strutturati. Il suo atteggiamento risulta sicuro, preciso e professionale.

- **Formal authority:** il docente adotta un atteggiamento normativo e fortemente organizzato. Si impegna a definire con chiarezza obiettivi di apprendimento, aspettative e regole di comportamento, creando un ambiente strutturato e orientato al rispetto di standard condivisi. Fornisce feedback puntuali, sia positivi che negativi, con l'intento di guidare gli studenti verso un miglioramento continuo. È particolarmente attento affinché le attività vengano svolte in modo corretto, appropriato e coerente con criteri di qualità ben definiti. Il suo principale obiettivo è quello di strutturare il percorso di apprendimento in maniera ordinata ed efficace.
- **Personal model:** l'insegnante crede nell'“insegnare attraverso l'esempio personale” e si propone come modello di riferimento, tanto nel modo di pensare quanto in quello di agire. Guida, orienta e dirige gli studenti mostrando in prima persona come affrontare i compiti e le situazioni, incoraggiandoli a osservare con attenzione e a imitare il suo approccio. In questo modo, l'apprendimento si costruisce attraverso la pratica dell'osservazione e dell'emulazione.
- **Facilitator:** il docente accompagna gli studenti nel percorso di apprendimento ponendo domande, esplorando con loro diverse opzioni, suggerendo alternative e stimolandoli a sviluppare criteri autonomi per compiere scelte consapevoli. Mostra attenzione ai bisogni individuali e offre un supporto calibrato sulle specificità di ciascuno. L'obiettivo finale è promuovere il pensiero critico, la capacità di collaborazione e l'autonomia. Nella realizzazione dei progetti, assume un ruolo consultivo, affiancando gli studenti con sostegno e incoraggiamento costanti.
- **Delegator:** l'insegnante presta particolare attenzione alla crescita dell'autonomia degli studenti. A tal fine, affida loro compiti complessi

e responsabilità, promuovendo modalità di lavoro indipendenti o in gruppi autogestiti. Il docente assume il ruolo di osservatore e interviene su richiesta per offrire supporto mirato. L'obiettivo è favorire lo sviluppo dell'indipendenza, dell'iniziativa personale e delle capacità di leadership.

Tali stili non sono da intendersi come categorie rigide o esclusive. Al contrario, ogni insegnante può adottare, in momenti diversi della stessa lezione o in contesti diversi, combinazioni di stili differenti.

Sebbene il modello di Grasha non sia stato sviluppato specificamente nell'ambito della didattica della matematica, esso rappresenta un utile strumento di lettura trasversale delle pratiche didattiche, poiché fornisce una nomenclatura operativa per classificare e confrontare le diverse modalità di conduzione delle lezioni da parte dei docenti.

Nel nostro lavoro, gli stili di insegnamento saranno un'ulteriore chiave di lettura per analizzare le scelte degli insegnanti rispetto all'uso dei registri semiotici in aula.

2.2.1 Caratterizzazione operativa degli stili di insegnamento nella didattica della matematica

Al fine di utilizzare in modo analitico le categorie teoriche proposte da Grasha, si propone qui di seguito una loro articolazione operativa specifica per la didattica della matematica. Gli indicatori e le pratiche presentati consentono di riconoscere e attribuire i comportamenti dichiarati durante le interviste o osservati in aula a uno o più stili di insegnamento, facilitando così la fase di analisi e interpretazione dei dati.

Expert

- il docente fa uso frequente di termini tecnici della disciplina;
- il docente fa spesso riferimento a teoremi, definizioni e principi generali;

- il docente fa attenzione alla correttezza formale dei procedimenti;
- il docente fa collegamenti tra argomenti diversi e richiami a conoscenze pregresse;
- il docente è attento alla trasmissione di contenuti approfonditi;
- il docente mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti;
- il docente corregge con precisione errori concettuali degli studenti.

Formal Authority

- il docente stabilisce regole chiare di comportamento e di lavoro;
- il docente struttura il percorso di apprendimento in modo ordinato;
- il docente è organizzato;
- il docente fornisce indicazioni precise su come impostare e risolvere gli esercizi.

Personal Model

- il docente si propone come modello da imitare;
- il docente verbalizza le scelte che compie e i passaggi che opera;
- il docente risolve esercizi alla lavagna spiegando il proprio ragionamento passo per passo.

Facilitator

- il docente fa domande aperte;
- il docente stimola la riflessione;
- il docente cerca di rendere la materia accessibile;

- il docente guida lo studente in un processo di scoperta autonoma;
- il docente favorisce l'osservazione attiva e la costruzione di concetti matematici;
- il docente incoraggia diverse strategie di risoluzione;
- il docente promuove il dialogo tra pari.

Delegator

- il docente stimola l'autoregolazione e l'autovalutazione;
- il docente promuove l'uso autonomo di strumenti digitali e risorse online;
- il docente promuove lo sviluppo della responsabilità, dell'autonomia e dell'indipendenza negli studenti;
- il docente fa da sostegno all'iniziativa personale nello studio e nell'esplorazione.

A partire da tutte queste premesse teoriche, il presente studio si concentra sulla seguente domanda di ricerca: **Come si differenzia l'utilizzo dei registri semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti di matematica in relazione ai loro stili di insegnamento e alle loro convinzioni didattiche ed epistemologiche?**

Capitolo 3

Metodologia di ricerca

3.1 Design generale della ricerca

Per la realizzazione di questa ricerca è stata adottata una metodologia qualitativa basata sull'osservazione diretta e sulla raccolta di dati attraverso interviste non strutturate e videoregistrazioni di lezioni. L'analisi è stata condotta presso un liceo statale dell'Emilia-Romagna durante i primi mesi del 2025 e ha coinvolto quattro docenti di matematica e quattro classi terze dell'indirizzo scientifico con potenziamento in ambito scientifico-informatico. Per garantire la privacy degli insegnanti coinvolti, faremo riferimento a loro utilizzando degli pseudonimi: Docente 1, Docente 2, Docente 3 e Docente 4. I quattro insegnanti hanno partecipato su base volontaria e non sono stati selezionati sulla base di criteri specifici. La raccolta dei dati si è articolata in due fasi principali.

Per prima cosa, ciascun docente è stato sottoposto ad un'intervista non strutturata della durata di circa un'ora. Durante il colloquio, sono stati esplorati principalmente i seguenti aspetti:

- formazione accademica e professionale del docente;
- stile di insegnamento, strategie e convinzioni didattiche;
- utilizzo della tecnologia come risorsa nelle lezioni di matematica;

- approccio ai sistemi semiotici con un focus specifico sulla didattica della circonferenza in geometria analitica.

Successivamente, sono state osservate e videoregistrate le lezioni dei quattro docenti sulla circonferenza in geometria analitica. La scelta di concentrarsi su questo tema è stata motivata dalla ricchezza dell'argomento in termini di rappresentazioni semiotiche e conversioni possibili tra i diversi registri di rappresentazione. Le riprese hanno coperto tutte le ore di spiegazione teorica. Il numero di ore di lezione registrate per ciascun docente è variato in base alla struttura del loro intervento didattico.

L'obiettivo dell'osservazione non era valutare l'efficacia didattica delle lezioni dei docenti coinvolti, bensì analizzare in che modo ciascun insegnante facesse uso dei diversi registri semiotici all'interno della lezione frontale, con particolare attenzione alle modalità di selezione, alternanza e integrazione tra le diverse rappresentazioni.

Fin dall'inizio è stato chiarito agli studenti che la ricerca non prendeva in esame il loro comportamento né le loro affermazioni, ma si focalizzava esclusivamente sull'operato del docente. Tale precisazione è stata ritenuta necessaria per evitare che la presenza della videocamera potesse inibire la partecipazione spontanea degli studenti, alterando le dinamiche comunicative della classe.

3.2 Strumenti usati per la raccolta dati

La presente sezione illustra gli strumenti utilizzati per la raccolta dei dati, intesi sia come dispositivi sia come materiali preparati appositamente per guidare l'indagine. Vengono descritte le modalità con cui tali strumenti sono stati pensati, organizzati e impiegati nelle due fasi della raccolta: la conduzione delle interviste e la videoregistrazione delle lezioni.

3.2.1 Strumenti per la realizzazione e la registrazione delle interviste

Le interviste ai docenti sono state registrate con un telefono cellulare, mentre per prendere appunti in tempo reale è stato utilizzato un tablet. Per orientare la raccolta delle informazioni rilevanti ai fini della ricerca, sono stati individuati alcuni nuclei tematici ritenuti particolarmente significativi. A partire da tali nuclei, è stata predisposta una serie di domande di riferimento, consultabili in Appendice A. Queste domande hanno fornito una traccia di base per il colloquio, senza però vincolarlo rigidamente. L'intervista è stata infatti gestita in modo flessibile: se da un lato alcune domande sono state seguite fedelmente, dall'altro ci si è lasciati guidare dalle informazioni che i docenti hanno spontaneamente condiviso. Di conseguenza, le domande effettivamente poste sono variate a seconda della situazione, adattandosi al flusso della conversazione e permettendo di approfondire aspetti emersi in modo spontaneo. Inoltre, si è sempre cercato di formulare le domande in modo da ridurre il più possibile l'effetto di "desiderabilità sociale della risposta", cioè evitando formulazioni che potessero indurre i docenti a rispondere in base a ciò che ritenevano atteso o comunque più accettabile.

Di seguito vengono presentati i nuclei tematici su cui si è articolata la progettazione dell'intervista, unitamente alle finalità conoscitive che ne hanno orientato la formulazione.

Background formativo e professionale

Questa prima sezione è stata progettata per raccogliere informazioni sul percorso di studi e sull'esperienza professionale dei docenti. Le domande mirano a comprendere la loro formazione iniziale, eventuali esperienze lavorative pregresse e il contesto scolastico in cui attualmente insegnano. Questo ha permesso di avere una panoramica sul loro bagaglio culturale e professionale, utile per contestualizzare le loro scelte didattiche e il loro rapporto con la matematica.

L'insegnamento della matematica

In questa sezione, l'obiettivo era esplorare le pratiche didattiche adottate dai docenti, i principi guida del loro insegnamento e i criteri con cui valutano l'apprendimento degli studenti. Le domande sono finalizzate a comprendere come i docenti strutturano le lezioni, quali strategie ritengono più efficaci e come percepiscono il livello di comprensione degli studenti.

Tecnologia e insegnamento della matematica

Questa sezione esplora l'uso degli strumenti digitali nell'insegnamento della matematica. L'obiettivo è capire se e come i docenti integrano la tecnologia nelle loro lezioni, quali difficoltà incontrano e quale impatto percepiscono sull'apprendimento degli studenti. Inoltre, vengono esplorate le competenze acquisite attraverso eventuali corsi di formazione e le esperienze nell'uso della LIM e di altri strumenti tecnologici.

Sistemi semiotici di rappresentazione e circonferenza

Questa parte dell'intervista è stata progettata per esplorare l'utilizzo dei diversi sistemi di rappresentazione semiotica da parte dei docenti. In particolare, si è scelto di concentrare l'attenzione sull'insegnamento della circonferenza in geometria analitica, che sarebbe stato l'argomento delle lezioni oggetto di videoregistrazione nella fase successiva della ricerca. Le domande mirano a indagare le strategie adottate dai docenti per presentare il concetto agli studenti, le eventuali modifiche introdotte nel tempo nelle modalità di insegnamento e le principali difficoltà incontrate dagli studenti nel passaggio da una rappresentazione all'altra. Inoltre, si è chiesto se e come vengano impiegati strumenti digitali a supporto delle rappresentazioni e quale valore i docenti attribuiscono alla tecnologia in termini di comprensione dell'argomento.

3.2.2 Strumenti per la documentazione delle lezioni

Le riprese delle lezioni sono state effettuate con una videocamera montata su un treppiedi posizionato in fondo all'aula, in modo da garantire un'inquadratura stabile e focalizzata su ciò che costituiva l'effettivo oggetto di interesse: il docente e le lavagne utilizzate durante la spiegazione. Per migliorare la qualità dell'audio e cogliere con maggiore chiarezza gli interventi del docente, è stato inoltre impiegato un microfono esterno, collocato sulla cattedra. Anche in questo contesto, si è utilizzato un tablet per prendere appunti e fissare i punti salienti delle spiegazioni e delle interazioni in classe.

3.3 Metodi di elaborazione e analisi dei dati

Questa sezione illustra le modalità con cui i dati raccolti sono stati elaborati e analizzati: si esplicitano i criteri adottati, le fasi del processo analitico e le scelte metodologiche che hanno guidato l'interpretazione dei contenuti.

3.3.1 Analisi delle interviste

L'analisi delle interviste si è sviluppata attraverso un processo articolato in più fasi. In primo luogo, tutte le interviste sono state riascoltate integralmente e trascritte parola per parola, cercando di mantenere il più possibile la fedeltà al parlato. In una seconda fase, i testi trascritti sono stati rilette attentamente per l'inserimento della punteggiatura, con l'obiettivo di migliorarne la leggibilità senza alterare il senso originario delle affermazioni né interrompere il flusso discorsivo dell'intervista. Durante questa revisione sono stati oscurati tutti i dati sensibili per tutelare l'identità dei partecipanti. Sono stati inoltre inseriti i segni convenzionali “[sic]” in corrispondenza di espressioni linguisticamente scorrette o non pienamente conformi all'italiano standard, a testimonianza della fedeltà alla registrazione originale.

Una volta ultimata questa fase preliminare di trascrizione e pulizia dei dati, si è passati alla costruzione di una tabella di analisi per ciascuna in-

intervista. Le tabelle sono state strutturate secondo un insieme di categorie tematiche comuni. La scelta di queste categorie è stata guidata dalla volontà di far emergere i tratti essenziali del profilo didattico di ciascun docente.

Per ciascuna categoria tematica, sono stati individuati all'interno del testo delle interviste segmenti rilevanti che rispecchiassero in modo diretto o implicito i temi in questione. Tali segmenti sono stati estratti, sintetizzati e annotati nella tabella, corredati di riferimenti testuali (numeri di riga), al fine di garantire la tracciabilità e la trasparenza del processo analitico.

Di seguito si esplicitano i criteri adottati per la selezione delle informazioni da ricondurre a ciascuna categoria.

Formazione scolastica e accademica

In questa sezione sono state raccolte le informazioni relative al percorso di studi del docente. I dati sono stati selezionati attraverso una rilettura attenta dell'intervista, prendendo in considerazione esclusivamente i riferimenti espliciti alla formazione scolastica e accademica così come dichiarati dal docente nel corso del colloquio.

Percorso di formazione all'insegnamento

Questa voce raccoglie i riferimenti alla formazione specificamente legata all'insegnamento. La selezione delle informazioni è avvenuta in modo sistematico, individuando tutti i passaggi in cui il docente menziona esperienze formative orientate alla pratica didattica, comprese eventuali abilitazioni o percorsi universitari mirati.

Esperienze professionali

In questa sezione sono stati raccolti tutti i riferimenti relativi alle esperienze lavorative del docente, sia in ambito scolastico che extrascolastico.

Convinzioni didattiche ed epistemologiche

Questa sezione presenta il punto di vista del docente in merito a:

- la natura della matematica;
- le modalità di apprendimento degli studenti;
- il ruolo dell'insegnante.

In questo caso, per “convinzione” si adotta la definizione proposta da Philipp (2007), secondo la quale le convinzioni degli insegnanti non coincidono necessariamente con affermazioni esplicite, ma possono essere inferite dall'analisi delle loro risposte. Pertanto, alcune delle convinzioni riportate nella tabella non corrispondono a frasi pronunciate dai docenti, ma sono formulate dal ricercatore come sintesi interpretative, coerenti con quanto emerso nel corso dell'intervista e finalizzate a restituire in modo sintetico l'orientamento del docente rispetto ai temi affrontati.

Stile di insegnamento

L'analisi dello stile di insegnamento è stata condotta sulla base del modello dei cinque profili elaborati da Grasha. A partire dai comportamenti, dalle pratiche e dalle intenzioni didattiche dichiarate durante l'intervista, le informazioni sono state confrontate con gli indicatori operativi definiti all'interno del quadro teorico di riferimento. Ciascun comportamento è stato quindi assegnato a uno o più stili in modo sistematico, attraverso una catalogazione in tabella. Ogni assegnazione è accompagnata da una motivazione esplicita, fondata sulla corrispondenza tra quanto affermato dal docente e i criteri propri dello stile individuato.

Considerazioni sui sistemi semiotici

Questa sezione raccoglie tutti i riferimenti emersi durante l'intervista in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella pratica didattica. La

selezione è avvenuta secondo due criteri: da un lato, sono stati rilevati direttamente i passaggi in cui l'insegnante ha utilizzato termini o espressioni riconducibili esplicitamente alla teoria dei registri di rappresentazione di Duval; dall'altro, sono stati considerati anche quegli interventi in cui, pur in assenza di un lessico specialistico, emerge una consapevolezza implicita delle problematiche legate all'uso e al coordinamento dei diversi registri.

Considerazioni sulla tecnologia

In questa sezione sono stati raccolti non solo i riferimenti all'impiego concreto di strumenti digitali nell'insegnamento, ma anche le riflessioni espresse dai docenti in merito alla loro utilità, alle potenzialità didattiche e ai limiti percepiti.

3.3.2 Analisi delle videoregistrazioni

Per analizzare in che modo i docenti utilizzano i registri semiotici nel corso della lezione frontale, ogni videoregistrazione è stata suddivisa in segmenti corrispondenti ai cambi di attività svolti dal docente: ogni segmento copre un'azione didattica come, ad esempio, una spiegazione teorica, lo svolgimento di un esercizio, un esempio alla lavagna oppure un momento di confronto con la classe. Ogni volta che il docente conclude un'attività e ne avvia un'altra, viene definito un nuovo segmento. Ogni segmento è stato così scelto in quanto portatore di un'azione didattica significativa e analizzabile in termini di scelte comunicative e uso dei registri semiotici. Per ciascun segmento sono stati indicati: il minutaggio corrispondente nel video, le attività e le strategie didattiche rilevate, il tipo di supporto utilizzato (Lavagna di ardesia o LIM), i registri semiotici impiegati e le trasformazioni di rappresentazione individuate. In quest'ultima colonna sono state distinte le trasformazioni interne a uno stesso registro (trattamenti) da quelle tra registri diversi (conversioni), secondo la classificazione proposta da Duval.

Capitolo 4

Risultati

4.1 I docenti dalle interviste

Di seguito vengono presentati i profili dei quattro docenti coinvolti nella ricerca. Si tratta di brevi testi descrittivi elaborati a partire dalle tabelle di sintesi delle interviste. Ogni profilo restituisce in forma discorsiva le informazioni essenziali relative a quanto dichiarato da ciascun docente.

4.1.1 Profilo Docente 1

Il docente ha conseguito la laurea in matematica secondo il vecchio ordinamento quadriennale, proseguendo poi con un dottorato in geometria algebrica. Dopo alcuni anni di attività nel mondo della ricerca, ha capito che quell'ambiente non rispecchiava pienamente i suoi interessi. Ha quindi deciso di orientarsi verso l'insegnamento, affinando le proprie competenze didattiche attraverso i corsi della SSIS, dove ha conseguito l'abilitazione all'insegnamento della matematica e della fisica.

In circa tredici anni di attività nella scuola secondaria di secondo grado, ha lavorato quasi esclusivamente al liceo scientifico, dove anche attualmente insegna matematica e fisica. Predilige la lezione frontale, in linea con uno stile riconducibile prevalentemente ai profili di Formal Authority e Facilitator, ma presenta anche tratti di Expert, Delegator e Personal Model.

Pur mantenendo una forte centralità nella conduzione della lezione, valorizza la partecipazione attiva degli studenti attraverso domande stimolo e esempi guidati.

Dal punto di vista epistemologico, considera la matematica un sistema strutturato e coerente, da comprendere attraverso il ragionamento e la connessione tra concetti. Ritiene quindi importante abituare gli studenti a vedere lo stesso oggetto matematico da più prospettive e promuove una visione della disciplina che vada oltre la mera applicazione procedurale.

Per quanto riguarda i registri semiotici, mostra una consapevolezza, seppur implicita, della teoria di Duval: sottolinea l'importanza di lavorare attivamente sulle trasformazioni tra registri, con particolare attenzione alla transizione dal registro grafico a quello algebrico, spesso vissuto dagli studenti come ostico. Inoltre, afferma che il ragionamento geometrico-visivo è generalmente più efficace dell'approccio algebrico, prevalente nei libri di testo.

Nell'ambito della tecnologia, pur manifestando una preferenza per la lavagna di ardesia, fa un uso consapevole e integrato della LIM, utilizzata sia come supporto grafico che come strumento per la visualizzazione dinamica dei concetti tramite GeoGebra. Ricorre alla piattaforma Google Classroom per la condivisione di materiali, esercizi e risoluzioni dettagliate, sostenendo l'importanza di fornire agli studenti strumenti di studio individuale. È favorevole all'impiego della tecnologia solo quando questa si dimostra realmente funzionale alla comprensione: ne riconosce i vantaggi nella visualizzazione, nella chiarezza espositiva e nel coinvolgimento, ma mantiene un atteggiamento critico verso strumenti come ChatGPT o Photomath, che ritiene attualmente poco affidabili o scarsamente efficaci per l'insegnamento della matematica.

4.1.2 Profilo Docente 2

Il docente ha conseguito la laurea triennale in fisica e successivamente la laurea magistrale in didattica e storia della fisica, grazie alla quale ha avuto modo di seguire insegnamenti specificamente dedicati alla didattica

della matematica, della fisica e alla filosofia della scienza. Fin dai tempi della triennale ha mostrato un marcato interesse per l'insegnamento, ambito verso il quale ha sempre orientato le proprie aspirazioni professionali. Ha inoltre frequentato i corsi della SSIS, pur senza potersi formalmente iscrivere.

Nel corso della sua carriera ha maturato esperienze in diverse tipologie di scuole secondarie di secondo grado, sia paritarie che statali, insegnando in diversi indirizzi liceali. Attualmente insegna sia matematica che fisica al liceo scientifico. Il suo approccio didattico si fonda prevalentemente sulla lezione frontale. Tuttavia, considera essenziale che l'insegnamento soddisfi due condizioni in ordine gerarchico: innanzitutto, che l'insegnante rappresenti un solido punto di riferimento culturale e umano per la classe; in secondo luogo, che venga garantita una varietà metodologica, in grado di adattarsi alle diverse esigenze e ai diversi livelli di apprendimento degli studenti. In questo senso, lo stile didattico dichiarato si riconosce principalmente nei profili di Delegator, Expert e Facilitator, ma presenta anche elementi di Formal Authority e Personal Model.

Dal punto di vista epistemologico, considera la matematica una disciplina strutturata e coerente, che deve essere resa accessibile attraverso spiegazioni chiare e ben costruite. Per questo motivo, lavora molto sulla definizione dei concetti e sulla costruzione progressiva del significato matematico. Sottolinea, inoltre, come le diverse metodologie non siano mai subordinate all'input iniziale di comprensione e ritiene importante riconoscere la diversità dei percorsi individuali e valorizzare i progressi di ciascuno, indipendentemente dal livello raggiunto.

In merito ai registri semiotici, mostra una consapevolezza chiara della loro rilevanza per l'apprendimento matematico. Considera utile rappresentare uno stesso oggetto in più modi per intercettare diversi stili cognitivi e favorire una comprensione articolata. Attribuisce particolare importanza alla definizione accurata dei concetti, ritenendola una condizione necessaria per permettere agli studenti di passare con maggiore facilità da un registro all'altro.

Pur affermando che non esista uno strumento digitale imprescindibile per l'insegnamento della matematica, fa un uso regolare e mirato della LIM, del libro digitale, di GeoGebra e della piattaforma Google Classroom, utilizzata per la condivisione di materiali. Considera le tecnologie didattiche utili soprattutto quando permettono di visualizzare concetti complessi, ad esempio tramite animazioni o costruzioni grafiche, ma sottolinea come esse non possano sostituire il rapporto educativo né garantire di per sé il successo dell'insegnamento. L'adozione di strumenti digitali deve quindi essere sempre valutata in funzione degli obiettivi formativi e delle caratteristiche della classe.

4.1.3 Profilo Docente 3

Il docente si è laureato in fisica secondo il vecchio ordinamento quadriennale. Ha progressivamente maturato un interesse verso l'insegnamento dopo aver avuto un primo contatto con il mondo della ricerca, che non lo ha particolarmente affascinato. Durante il quarto anno del suo percorso universitario ha quindi scelto l'indirizzo didattico, grazie al quale ha avuto modo di seguire insegnamenti specificamente dedicati alla didattica della fisica. Successivamente, ha frequentato ulteriori percorsi formativi alla SSIS, che gli hanno permesso di affinare le proprie competenze didattiche e di conseguire l'abilitazione all'insegnamento della fisica e, in seguito, anche quella all'insegnamento della matematica e dell'informatica.

Attualmente è docente di matematica e fisica al liceo. Vanta circa venticinque anni di esperienza nella scuola secondaria di secondo grado, di cui quindici maturati al liceo e i restanti in vari altri tipi di scuole a indirizzo tecnologico o scientifico. Descrive il proprio approccio didattico come un equilibrio tra teoria e pratica, con l'obiettivo di rendere la matematica più accessibile. Ritene fondamentale adattare linguaggio e spiegazioni alle esigenze specifiche del gruppo classe, cercare di stimolare la partecipazione attiva degli studenti e valorizzare i collegamenti tra concetti. È convinto che la didattica non debba seguire rigidamente l'ordine del libro di testo, ma

debba articolarsi in percorsi flessibili, capaci di favorire una visione globale della disciplina e le sue connessioni anche interdisciplinari.

Il suo stile di insegnamento si colloca prevalentemente nel profilo del Facilitator, con tratti di Expert e Delegator. È attento alla costruzione condivisa del sapere e non esita a ridurre il rigore formale, quando necessario, per favorire la comprensione degli studenti. Organizza lavori di gruppo, propone attività di problem solving e incoraggia l'autonomia anche nell'uso degli strumenti digitali.

Dal punto di vista epistemologico, considera la matematica una disciplina che deve essere costruita insieme agli studenti.

Pur non utilizzando un lessico tecnico-didattico, dimostra una consapevolezza implicita della teoria dei registri di Duval. È cosciente delle difficoltà che gli studenti incontrano nel passaggio da un registro all'altro e attribuisce particolare importanza al registro grafico, che ritiene centrale per la costruzione di significato.

Per quanto riguarda le tecnologie digitali, pur riconoscendo le limitazioni imposte dalle risorse scolastiche, ne valorizza il potenziale didattico. Fa uso abituale di strumenti come Desmos, GeoGebra e fogli di calcolo, considerandoli particolarmente utili per stimolare l'interesse degli studenti e per visualizzare in modo efficace concetti astratti. Mostra una visione didattica aperta alla sperimentazione e al miglioramento continuo, pur evidenziando anche i limiti pratici legati alla tecnologia: talvolta l'uso degli strumenti digitali può comportare perdite di tempo. Ritiene comunque auspicabile un uso più consapevole e diffuso delle tecnologie disponibili, anche attraverso una maggiore formazione dei docenti.

4.1.4 Profilo Docente 4

Il docente si è laureato in fisica secondo il vecchio ordinamento quadriennale e ha poi conseguito un dottorato in fisica teorica. Inizialmente intenzionato a proseguire la carriera accademica con un post-doc all'estero, ha poi preferito rimanere in Italia e dedicarsi alla carriera scolastica. Non ha seguito

percorsi formativi specifici per l'insegnamento, ma ha ottenuto l'abilitazione tramite concorso a cattedra e vanta circa venticinque anni di esperienza nella scuola secondaria di secondo grado, sempre in ambito liceale e sempre come docente di matematica e fisica.

Nella sua didattica cerca di rendere gli argomenti più accessibili proponendo differenti punti di vista. Attribuisce particolare valore alla possibilità di mostrare diversi approcci alla risoluzione degli esercizi, incoraggiando gli studenti a trovare la propria strada e valorizzando il ragionamento matematico piuttosto che l'applicazione rigida di procedure. Spesso affronta uno stesso argomento in modi diversi a seconda del livello della classe, cercando sempre di adattare il proprio intervento ai bisogni degli studenti. Il suo stile di insegnamento si colloca prevalentemente nei profili di Facilitator ed Expert, con elementi anche di Delegator e Formal Authority. Pur utilizzando principalmente la lezione frontale, incoraggia il confronto, accoglie soluzioni alternative e propone lavori di gruppo, specialmente in preparazione alle verifiche. Ritieni che la competenza disciplinare sia condizione necessaria per essere autorevoli e per instaurare un rapporto educativo efficace. Sottolinea come l'aspetto umano sia tanto importante quanto quello didattico, e ritiene essenziale che l'insegnante sappia modulare il proprio intervento in base alla risposta della classe. Considera il rigore importante, ma subordinato alla comprensione: aiutare gli studenti a capire è, per lui, la priorità. In questo senso, pone attenzione al dialogo educativo e alla creazione di un clima di ascolto, in cui gli studenti si sentano liberi di esprimere dubbi o proporre alternative.

Dal punto di vista semiotico, è consapevole delle difficoltà che molti studenti incontrano nel passaggio da un registro all'altro, in particolare dal registro geometrico a quello algebrico. Pur non utilizzando il linguaggio tecnico della didattica, dimostra una comprensione implicita delle problematiche legate alla necessità di utilizzare diversi registri semiotici in matematica. Valorizza l'interpretazione personale, considera utile proporre rappresentazioni approssimative che richiedano uno sforzo di astrazione, e cerca di sviluppare

la capacità degli studenti di passare tra differenti forme di rappresentazione.

Per quanto riguarda le tecnologie digitali, ne fa un uso limitato. Le utilizza solo quando ritiene che siano realmente funzionali all'apprendimento, perché è convinto che uno strumento tecnologico, se non integrato con consapevolezza, possa facilmente distogliere l'attenzione dal contenuto centrale della lezione. Apprezza risorse come Desmos per la visualizzazione di concetti matematici, ma sottolinea che non è la tecnologia in sé a determinare l'efficacia didattica. Alcuni strumenti introdotti durante la didattica a distanza, come Google Classroom, sono ancora impiegati dal docente per supportare lo studio individuale. Complessivamente, mantiene una posizione critica ma aperta nei confronti della tecnologia.

4.2 I docenti dall'osservazione in aula

Di seguito vengono presentati i risultati emersi dalle osservazioni in aula. Viene descritto l'uso effettivo dei registri semiotici, il ruolo delle tecnologie nella lezione, le strategie comunicative, le modalità di conduzione dell'attività didattica e la relazione con gli studenti.

4.2.1 Osservazione Docente 1

Il Docente 1 propone un percorso sulla circonferenza in geometria analitica scandito da una costante alternanza tra spiegazione teorica, esempi applicativi ed esercizi. L'uso dei registri semiotici è ampio e consapevole: la lingua comune è il punto di partenza di ogni spiegazione e si accompagna regolarmente al registro figurale geometrico, tramite disegni alla lavagna tradizionale o l'impiego di GeoGebra, e al registro algebrico, attraverso la scrittura di formule, equazioni e passaggi dimostrativi.

Un aspetto particolarmente rilevante è l'elevata frequenza delle conversioni tra registri rispetto ai trattamenti: il numero di conversioni tra registri è infatti più del doppio rispetto a quello dei trattamenti, un dato che mette in evidenza una didattica orientata in modo marcato alla costruzione di si-

gnificato attraverso il confronto tra rappresentazioni appartenenti a registri diversi. Colpisce anche la distribuzione dei registri utilizzati nei diversi segmenti osservati: la stragrande maggioranza di essi prevede l'uso simultaneo di tre registri: figurale geometrico, algebrico e della lingua comune. Questa sistematica compresenza suggerisce che il docente non si limita a presentare i concetti in un unico linguaggio, ma li costruisce gradualmente attraverso una triangolazione di rappresentazioni. Per quanto riguarda la tipologia di conversioni effettuate, le più frequenti sono quelle dal registro della lingua comune al registro algebrico, ma anche le conversioni inverse, da registro algebrico a quello della lingua comune, risultano piuttosto frequenti. Questo dato evidenzia la funzione del linguaggio naturale come ponte tra la formalizzazione simbolica e la costruzione di significato. Anche le conversioni da lingua comune a registro figurale geometrico sono molto ricorrenti. Complessivamente, il docente ha utilizzato tutti i tipi di conversione possibili tra i registri attivati.

L'impiego delle tecnologie è mirato e funzionale all'obiettivo didattico. Il docente utilizza la LIM per proiettare sia l'ebook del libro di testo sia file propri (schemi e appunti) e fa ampio ricorso a GeoGebra per costruire e manipolare oggetti geometrici dinamici e mostrare come variazioni nel grafico della circonferenza influenzino l'equazione corrispondente. L'uso di questi strumenti avviene quasi sempre in integrazione con la lavagna tradizionale.

Le strategie comunicative sono caratterizzate da una forte attenzione alla classe: il docente cerca costantemente il coinvolgimento degli studenti, ponendo domande mirate, sollecitando osservazioni, incoraggiando ragionamenti alternativi e valorizzando i dubbi come occasioni di approfondimento. Talvolta, adatta le definizioni o le modalità operative in base alle esigenze emergenti, mostrando flessibilità e spirito critico.

Infine, la relazione con gli studenti appare improntata all'ascolto e al dialogo: il docente si mostra disponibile a chiarimenti, accoglie i contributi degli alunni e si adopera per rendere i contenuti accessibili, anche attraverso la semplificazione del linguaggio tecnico o l'uso di analogie. Complessivamen-

te, lo stile di insegnamento osservato si avvicina ai profili Expert e Facilitator secondo la classificazione di Grasha. Il profilo Expert si riconosce nella padronanza disciplinare dimostrata dal docente, nel frequente uso di terminologia tecnica, nell'attenzione costante alla correttezza formale e nell'abitudine a richiamare teoremi, definizioni e conoscenze pregresse per costruire connessioni tra concetti. Parallelamente, è evidente la presenza del profilo Facilitator in numerosi aspetti della conduzione didattica: il docente pone frequentemente domande mirate, stimola la riflessione, propone osservazioni per far emergere significati, valorizza il ragionamento degli studenti e incoraggia strategie risolutive differenti.

4.2.2 Osservazione Docente 2

Durante le lezioni osservate, il Docente 2 affronta l'insegnamento della circonferenza guidando gli studenti in un percorso graduale che parte dalla definizione geometrica dell'oggetto matematico e ne esplora progressivamente le caratteristiche algebriche e grafiche. L'organizzazione delle spiegazioni è fortemente lineare: ogni passaggio è giustificato, rielaborato e collegato a quanto già costruito in precedenza, anche grazie a frequenti richiami a concetti già noti.

Per quanto riguarda l'impiego dei registri semiotici, i segmenti osservati mostrano un ricorso prevalente alla combinazione tra il registro della lingua comune e quello algebrico, spesso utilizzati in modo coordinato per introdurre e formalizzare i concetti. Tuttavia, è da sottolineare anche la presenza significativa di segmenti in cui compaiono congiuntamente tutti e tre i registri (lingua comune, algebrico e figurale geometrico), in cui l'oggetto matematico viene rappresentato, spiegato e visualizzato attraverso linguaggi differenti ma complementari. L'analisi delle trasformazioni tra registri evidenzia che anche in questo caso i trattamenti risultano significativamente meno frequenti rispetto alle conversioni. Questo evidenzia un approccio orientato a favorire il coordinamento tra registri differenti, piuttosto che la sola manipolazione interna a uno stesso registro. In particolare, nel corso del ciclo di lezioni, il

docente ha utilizzato tutte e sei le tipologie di conversione possibili tra i tre registri impiegati. Tuttavia, due conversioni risultano particolarmente frequenti: la più ricorrente è quella da registro algebrico a registro della lingua comune, seguita da quella inversa, ovvero da registro della lingua comune a registro algebrico. Questo dato suggerisce un intento didattico volto a decodificare e rendere accessibile l'espressione simbolica attraverso la parola. Tale scelta può essere letta come una strategia per sostenere la comprensione profonda dei procedimenti, evitando che restino semplici tecnicismi formali.

Per quanto riguarda le tecnologie digitali, il loro impiego è sempre ben integrato nella struttura della lezione. La LIM viene utilizzata sia come lavagna interattiva per la scrittura e la costruzione di schemi, sia come supporto per la proiezione di materiali (come il libro digitale o file PDF). Nel corso delle lezioni, trova spazio anche l'uso di GeoGebra, impiegato per visualizzare in modo dinamico proprietà geometriche o per esplorare situazioni particolari che richiedono un supporto grafico interattivo.

La conduzione della lezione si mantiene perlopiù frontale, ma il docente stimola frequentemente la partecipazione attiva, ponendo domande mirate, accogliendo dubbi e rilanciando spunti provenienti dalla classe. La selezione attenta degli esempi, l'uso efficace e flessibile della lavagna (sia tradizionale che digitale), e la capacità di bilanciare rigore formale e chiarezza espositiva testimoniano una pratica didattica riconducibile allo stile Facilitator. Questo stile emerge nella volontà di accompagnare attivamente gli studenti nel processo di apprendimento, sostenendoli con spiegazioni accessibili. Al tempo stesso, si riscontrano tratti tipici del profilo Expert, visibili nella padronanza dei contenuti e nell'impegno a trasmettere una visione strutturata e coerente della matematica.

4.2.3 Osservazione Docente 3

Il Docente 3 ha sviluppato il percorso sul tema della circonferenza in geometria analitica alternando momenti di spiegazione teorica a fasi operative, discussioni collettive e approfondimenti. L'impostazione delle lezioni

è improntata alla partecipazione attiva degli studenti, attraverso domande frequenti, sollecitazioni esplicite e una costante attenzione ai contributi provenienti dalla classe. Le spiegazioni non seguono un ordine rigidamente lineare, ma si costruiscono dinamicamente a partire dagli spunti offerti dagli studenti.

Nel corso delle lezioni, il docente impiega con regolarità i registri della lingua comune e quello algebrico, che costituiscono l'abbinamento più ricorrente. La maggior parte dei segmenti osservati, infatti, si fonda sull'utilizzo di questi due registri. Il secondo abbinamento per frequenza è quello tra registro della lingua comune e registro figurale geometrico, anche se con un numero di occorrenze sensibilmente inferiore rispetto al primo. Sono invece rari i segmenti in cui compaiono contemporaneamente tutti e tre i registri. Particolarmente significativo è il dato relativo alle trasformazioni tra registri: il numero di conversioni supera ampiamente il doppio di quello dei trattamenti, confermando una didattica fortemente orientata al confronto tra registri diversi piuttosto che alla manipolazione interna a un singolo registro. Le conversioni più frequenti sono quelle tra registro della lingua comune e registro algebrico, in entrambe le direzioni. Decisamente meno frequenti risultano le conversioni che coinvolgono il registro figurale geometrico. In particolare, è quasi del tutto assente la conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune e non è mai stata rilevata una conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico.

Durante le osservazioni, il docente ha sempre lavorato in aule dotate esclusivamente di LIM e di una lavagna bianca di dimensioni ridotte. Non è quindi possibile stabilire se, in presenza di una lavagna di ardesia, ne avrebbe fatto uso. La LIM è stata dunque utilizzata con regolarità come principale supporto per la scrittura. La LIM è stata inoltre impiegata anche per l'integrazione di software di geometria dinamica. In particolare, il docente ha fatto ampio ricorso a Desmos per esplorare graficamente i concetti e mostrare in tempo reale l'effetto della variazione dei parametri dell'equazione della circonferenza sul grafico. L'utilizzo delle tecnologie risulta complessivamente

ben integrato con le strategie didattiche adottate e funzionale alla costruzione del significato matematico.

Dal punto di vista comunicativo, l'approccio del docente è fortemente dialogico: pone numerose domande alla classe, valorizza le risposte degli studenti e raccoglie le osservazioni per costruire collettivamente la spiegazione. In diversi momenti, scrive alla lavagna sotto dettatura, coinvolgendo gli studenti nell'elaborazione dei passaggi risolutivi. Il linguaggio adottato è accessibile, con frequenti richiami a conoscenze pregresse o a situazioni già affrontate. Gli errori vengono accolti come occasione per chiarimenti e discussioni.

Lo stile di insegnamento osservato si colloca prevalentemente nel profilo Facilitator, in quanto il docente guida attivamente gli studenti nella costruzione del significato matematico attraverso domande mirate, richiami espliciti a conoscenze pregresse, spiegazioni condivise e l'uso di strategie multiple per affrontare lo stesso problema. L'attenzione alla comprensione concettuale, l'adattamento continuo al livello della classe e il coinvolgimento degli studenti nel ragionamento mostrano un approccio centrato sullo studente e sul dialogo, tipico di questo stile. Accanto a ciò, emergono tratti del profilo Expert, riconoscibili nella solida padronanza disciplinare mostrata dal docente: le spiegazioni risultano articolate e ben strutturate e frequenti sono i collegamenti tra concetti anche appartenenti a nuclei tematici differenti, a testimonianza di una profonda competenza contenutistica.

4.2.4 Osservazione Docente 4

Il Docente 4 ha sviluppato il percorso sulla circonferenza in geometria analitica articolando le lezioni in momenti di spiegazione teorica, attività di esercitazione guidata e interventi puntuali di supporto e chiarimento. A queste modalità più tradizionali, si sono affiancate attività di esplorazione dinamica condotte attraverso l'uso di strumenti digitali.

Per quanto riguarda l'impiego dei registri semiotici, dalle osservazioni emerge un uso frequente del registro della lingua comune e di quello algebrico, che rappresentano la combinazione più ricorrente nei segmenti analizzati.

Subito dopo, con una frequenza solo leggermente inferiore, si colloca l'utilizzo simultaneo di tutti e tre i registri osservati: lingua comune, algebrico e figurale geometrico. Questa varietà suggerisce un'intenzione didattica orientata a costruire il significato matematico attraverso un'integrazione di linguaggi. Per quanto riguarda le trasformazioni tra registri, le conversioni risultano più del triplo rispetto ai trattamenti. Ciò segnala una forte attenzione del docente alla riformulazione dei concetti attraverso registri diversi piuttosto che alla manipolazione interna a uno stesso registro. Analizzando più in dettaglio le tipologie di conversione tra registri, quella più frequente è il passaggio da registro della lingua comune a registro algebrico, seguita dalla conversione inversa, da registro algebrico a quello della lingua comune. Al terzo posto per frequenza, si colloca la conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico. La conversione da registro figurale geometrico a quello algebrico non è mai stata osservata nei segmenti analizzati, mentre le altre due tipologie di conversione possibili sono state rilevate solo in modo sporadico.

Le tecnologie digitali sono parte integrante dell'attività didattica. Il docente fa uso della LIM non solo per scrivere, ma anche per proiettare materiali e software di geometria dinamica. Va tuttavia precisato che, durante le osservazioni, il docente ha sempre lavorato in aule prive di lavagna di ardesia e dotate esclusivamente di LIM e di una lavagna bianca di dimensioni ridotte. Non è quindi possibile stabilire se, in presenza di una lavagna tradizionale, il docente ne avrebbe fatto uso. In ogni caso, la LIM è stata sfruttata in modo ricco e articolato, soprattutto in combinazione con il software Desmos, utilizzato per esplorare visivamente le proprietà geometriche della circonferenza e per mostrare in tempo reale gli effetti delle variazioni dei parametri dell'equazione della circonferenza sul suo grafico.

La conduzione della lezione è prevalentemente frontale, ma ricca di momenti dialogici e partecipativi. Il docente alterna spiegazioni strutturate, in cui dimostra una solida padronanza dei contenuti e una notevole attenzione alla correttezza formale e al rigore logico dei passaggi, a fasi di confronto con

la classe, durante le quali stimola la partecipazione attiva degli studenti e ne valorizza i contributi. Questa doppia modalità riflette una combinazione di due stili di insegnamento secondo la classificazione di Grasha: da un lato, il profilo Expert emerge nella cura con cui il docente espone i concetti matematici, nell'uso preciso del linguaggio disciplinare e nella volontà di guidare la classe verso una comprensione accurata e strutturata degli argomenti. Dall'altro lato, si riconoscono caratteristiche del profilo Facilitator nella scelta di coinvolgere gli studenti nel ragionamento, nel porre domande aperte, nell'incoraggiare l'espressione di ipotesi e nell'utilizzare strategie che promuovano la costruzione condivisa del significato.

Capitolo 5

Discussione dei risultati

5.1 Tra dichiarato e agito: analisi docente per docente

5.1.1 Docente 1

Nel caso del Docente 1, si osserva una sostanziale coerenza tra quanto emerso nell'intervista e quanto rilevato attraverso l'osservazione in aula. Lo stile di insegnamento dichiarato, riconducibile prevalentemente ai profili di Formal Authority e Facilitator, si traduce in una conduzione salda della lezione, ben organizzata e chiaramente orientata al raggiungimento di obiettivi definiti, ma al tempo stesso attenta alla partecipazione attiva della classe. In particolare, accanto alla strutturazione rigorosa del percorso didattico, il docente stimola frequentemente il coinvolgimento degli studenti, sollecita domande, valorizza osservazioni spontanee e accoglie strategie risolutive alternative. L'agito conferma anche la presenza di tratti riconducibili allo stile Expert, visibili nella padronanza disciplinare e nell'uso della terminologia tecnica, e di componenti dei profili Delegator e Personal Model, soprattutto nella promozione dell'autonomia attraverso strumenti come Classroom e nella spiegazione dettagliata dei propri ragionamenti.

Per quanto riguarda l'uso dei registri semiotici, l'intervista mette in luce

una consapevolezza implicita ma solida del valore della varietà rappresentativa nella costruzione del significato matematico. Il docente sottolinea la necessità di mostrare più prospettive sullo stesso oggetto, riconoscendo la maggiore efficacia del registro figurale geometrico rispetto all'approccio algebrico. Le osservazioni in aula confermano pienamente questa impostazione: la quasi totalità dei segmenti didattici analizzati mostra un uso simultaneo di tre registri – lingua comune, algebrico e figurale geometrico – a indicare una precisa intenzionalità nel costruire significato attraverso la triangolazione tra linguaggi. Tale scelta metodologica è perfettamente coerente con l'idea, centrale nella teoria di Duval, che la comprensione matematica dipenda dalla capacità di coordinare registri differenti, e non semplicemente di operare all'interno di ciascuno di essi. Le trasformazioni semiotiche osservate rafforzano questa lettura: le conversioni tra registri risultano più che doppie rispetto ai trattamenti, e interessano tutte le possibili combinazioni tra i tre registri coinvolti. In particolare, le conversioni più frequenti sono quelle tra lingua comune e registro algebrico, in entrambe le direzioni, seguite da quelle tra lingua comune e registro figurale geometrico. Questo dato conferma l'uso strategico del linguaggio naturale come mediatore tra la rappresentazione simbolica e quella visiva, e suggerisce una forte attenzione all'accessibilità dei concetti, in linea con quanto dichiarato nell'intervista. Il docente non si limita, dunque, a presentare rappresentazioni molteplici, ma ne guida attivamente l'integrazione e la conversione, favorendo nei propri studenti lo sviluppo di competenze.

Anche l'impiego delle tecnologie digitali risulta coerente con l'impianto epistemologico e metodologico emerso dal colloquio. Pur manifestando una preferenza per la lavagna di ardesia, il docente integra efficacemente l'uso della LIM e di GeoGebra, utilizzati rispettivamente per proiettare materiali e per visualizzare dinamicamente proprietà geometriche ed equazioni. L'utilizzo degli strumenti digitali è selettivo, mirato e pedagogicamente fondato, e si configura sempre come supporto alla comprensione. Anche la condivisione di materiali tramite Google Classroom e la proposta agli studenti di

usare autonomamente GeoGebra per verificare le proprie soluzioni rientrano in una logica di accompagnamento all'autonomia che rispecchia gli elementi dichiarati nell'intervista e riconducibili al profilo Delegator.

In sintesi, il profilo del Docente 1 mostra un'evidente coerenza tra convinzioni epistemologiche, scelte didattiche e pratiche concrete. In relazione alla domanda di ricerca, il caso mette in luce come l'utilizzo articolato e intenzionale dei registri semiotici sia chiaramente sostenuto da uno stile di insegnamento che bilancia autorevolezza e facilitazione, e da una visione della matematica come sistema strutturato di relazioni da esplorare attraverso rappresentazioni complementari. La varietà e la coordinazione tra registri non sono elementi aggiuntivi, ma tratti distintivi di un approccio alla didattica fondato sull'idea che il significato si costruisca attraverso il confronto e la mediazione tra registri. Questo allineamento tra dichiarato e agito suggerisce che, almeno in questo caso, le convinzioni del docente operano come leva fondamentale nella strutturazione delle pratiche semiotiche in aula.

5.1.2 Docente 2

Nel caso del Docente 2, la relazione tra quanto dichiarato nell'intervista e quanto osservato nella pratica didattica appare per lo più coerente, ma arricchita da alcune sfumature interessanti. Pur affermando di fondare la propria azione didattica prevalentemente sulla lezione frontale, il docente descrive uno stile non rigidamente trasmissivo, ma capace di accogliere una varietà metodologica e di adattarsi alle esigenze degli studenti. Questa impostazione, che si riconosce principalmente nei profili di Delegator, Expert e Facilitator, trova conferma nell'agito osservato: la lezione si configura come un percorso lineare e ben strutturato, guidato da una solida competenza disciplinare, ma costantemente aperto all'interazione con la classe. Il docente stimola la partecipazione, sollecita domande, accoglie i dubbi e costruisce i concetti progressivamente, senza rinunciare alla chiarezza espositiva. Lo stile Facilitator, in particolare, emerge con forza nella cura posta nella volontà di sostenere lo sviluppo del pensiero autonomo degli studenti, mentre il profilo

Expert si manifesta nella padronanza teorica e nella costruzione ordinata dei contenuti. Alcuni tratti riconducibili al profilo Formal Authority si intravedono nella coerenza dell'impianto didattico e nell'attenzione alla correttezza formale, ma non risultano predominanti.

Sul piano dell'uso dei registri semiotici, il docente mostra una consapevolezza esplicita della loro importanza per l'apprendimento matematico. In particolare, sottolinea il ruolo delle definizioni nella costruzione del significato e nella facilitazione del passaggio tra registri. Questa attenzione alla chiarezza concettuale si riflette anche nella pratica osservata, in cui il registro della lingua comune accompagna costantemente gli altri registri: i tre registri osservati sono spesso utilizzati in modo coordinato, con una chiara intenzionalità nel rappresentare lo stesso oggetto matematico attraverso linguaggi differenti ma complementari. Questo approccio è pienamente in linea con il quadro teorico di riferimento, secondo cui la comprensione autentica passa attraverso la coordinazione di rappresentazioni e non attraverso l'uso isolato dei singoli registri. L'analisi delle trasformazioni semiotiche rafforza questa lettura: come già rilevato nel caso del Docente 1, anche qui le conversioni tra registri sono nettamente più frequenti rispetto ai trattamenti. In particolare, spiccano le conversioni tra registro algebrico e lingua comune, sia da registro algebrico a registro della lingua comune sia da registro della lingua comune a registro algebrico. Questa simmetria conferma l'impegno del docente nel guidare gli studenti non solo verso la padronanza formale, ma anche verso la comprensione profonda dei procedimenti matematici. È interessante notare che sono state attivate tutte le sei possibili conversioni tra i registri osservati, a testimonianza di una pratica didattica ricca, articolata e intenzionalmente orientata alla mediazione rappresentativa.

Anche l'impiego delle tecnologie risulta coerente con quanto dichiarato. Il docente sottolinea come nessuno strumento sia indispensabile in sé, ma ne riconosce il valore quando integrato consapevolmente nella lezione. Le osservazioni confermano un uso efficace e flessibile della LIM, impiegata sia come lavagna digitale sia come strumento per la visualizzazione di materiali,

e un impiego mirato di GeoGebra per la rappresentazione dinamica di proprietà geometriche. Le tecnologie non sostituiscono mai la spiegazione, ma la amplificano, facilitando l'accesso a concetti complessi.

In relazione alla domanda di ricerca, il caso del Docente 2 evidenzia come l'utilizzo dei registri semiotici sia profondamente intrecciato sia con lo stile di insegnamento sia con un impianto epistemologico che concepisce la matematica come sistema coerente di significati da costruire progressivamente. In questo caso, come nel precedente, le convinzioni epistemologiche e didattiche del docente non solo orientano, ma sostengono attivamente l'uso dei registri nella pratica, contribuendo a una didattica attenta alla diversità cognitiva degli studenti e alla costruzione condivisa del significato matematico.

5.1.3 Docente 3

Nel caso del Docente 3, si rileva una sostanziale coerenza tra quanto dichiarato e quanto osservato nella pratica didattica, se pur con qualche qualche sostanziale differenza. Lo stile di insegnamento emerso nell'intervista si orienta prevalentemente verso il profilo Facilitator, con tratti di Expert e Delegator, e trova conferma nell'impostazione delle lezioni osservate, dove emerge chiaramente un atteggiamento orientato alla partecipazione attiva degli studenti e alla costruzione condivisa del sapere. Il docente pone numerose domande, accoglie osservazioni e risposte spontanee, guida il ragionamento collettivo e adatta in modo flessibile il percorso didattico sulla base dei contributi della classe. Le spiegazioni non seguono una struttura rigidamente lineare, ma si costruiscono dinamicamente attraverso l'interazione, mostrando una didattica profondamente dialogica e centrata sullo studente. Accanto a questi elementi, si evidenziano tratti del profilo Expert, riconoscibili nella solida padronanza dei contenuti, nella capacità di collegare concetti anche appartenenti a nuclei tematici diversi e nella competenza nel mantenere un quadro disciplinare strutturato, pur in una cornice flessibile.

Per quanto riguarda l'uso dei registri semiotici, il docente mostra, pur senza riferimenti terminologici espliciti, una consapevolezza implicita della

teoria di Duval, riconoscendo l'importanza del registro grafico per la costruzione del significato matematico. Tuttavia, l'analisi dei segmenti osservati mostra un ricorso prevalente alla combinazione tra lingua comune e registro algebrico, con un numero nettamente inferiore di segmenti che coinvolgono anche il registro figurale geometrico. I tre registri compaiono simultaneamente solo in rari casi, a differenza di quanto osservato per altri docenti. Questo dato suggerisce una possibile discrepanza tra la centralità attribuita al registro grafico a livello dichiarativo e il suo utilizzo effettivo nella pratica quotidiana. La predominanza dell'abbinamento registro della lingua comune – registro algebrico potrebbe derivare da una preferenza operativa legata all'andamento del gruppo classe, ma segnala comunque un margine di scarto tra intenzione e realizzazione. Le trasformazioni semiotiche osservate offrono uno spunto ulteriore per riflettere su questa discrepanza. Le conversioni tra registri risultano molto più frequenti dei trattamenti, a conferma di un approccio orientato alla costruzione di significato attraverso il confronto tra linguaggi differenti, in linea con quanto auspicato da Duval. Tuttavia, la distribuzione delle conversioni mostra uno squilibrio rilevante: le più frequenti sono quelle tra registro algebrico e lingua comune, in entrambe le direzioni, mentre risultano molto più rare le conversioni che coinvolgono il registro figurale geometrico. In particolare, non si rilevano conversioni da quest'ultimo al registro algebrico, e la conversione verso la lingua comune è quasi del tutto assente. Questo dato suggerisce che, pur valorizzando il registro grafico come strumento di esplorazione, il docente tende a non farne un tramite esplicito per la formalizzazione o la verbalizzazione, limitandone così il potenziale didattico nella costruzione di collegamenti tra registri.

L'uso delle tecnologie si presenta in linea con quanto dichiarato. Il docente lavora in aule dotate esclusivamente di LIM, che viene utilizzata regolarmente sia come supporto alla scrittura sia per l'integrazione di Desmos, impiegato per visualizzare in tempo reale l'effetto delle variazioni dei parametri sul grafico della circonferenza. L'utilizzo dello strumento appare funzionale e ben integrato nella struttura della lezione, a supporto della visualizzazio-

ne dinamica e della comprensione concettuale. Nel corso delle riprese, non sono emersi incoraggiamenti espliciti all'uso autonomo di strumenti digitali da parte degli studenti, ma l'atteggiamento complessivo resta coerente con un'impostazione didattica aperta alla sperimentazione, in linea con il profilo Delegator delineato nel colloquio.

Nel complesso, il caso del Docente 3 contribuisce ad articolare ulteriormente la risposta alla domanda di ricerca. L'uso dei registri semiotici nella pratica didattica è coerente con uno stile facilitante e partecipativo e con una visione della matematica come sapere da costruire collettivamente, ma mostra anche alcune tensioni tra quanto dichiarato e quanto effettivamente agito, in particolare per quanto riguarda il ruolo del registro figurale. Tali discontinuità non compromettono la qualità complessiva dell'approccio didattico, ma suggeriscono che la messa in atto di pratiche coerenti con una visione integrata dei registri può risentire di fattori pragmatici, contingenti o legati all'abitudine operativa. In questo senso, il caso del Docente 3 mette in luce come la relazione tra stile di insegnamento, convinzioni epistemologiche e uso dei registri non sia sempre lineare, ma vada intesa come dinamica, negoziata e soggetta a vincoli situati.

5.1.4 Docente 4

Nel caso del Docente 4, si osserva una notevole coerenza tra le convinzioni espresse in sede di intervista e le pratiche didattiche rilevate durante l'osservazione in aula. Il docente si colloca prevalentemente nei profili di Facilitator ed Expert, con elementi anche di Delegator e Formal Authority, e questa varietà di stili si riflette in una conduzione della lezione che alterna momenti strutturati a spazi di dialogo e partecipazione attiva. La lezione è guidata con sicurezza, ma mai in modo rigido: accanto alla trasmissione dei contenuti, trovano spazio attività di esercitazione, momenti di confronto e valorizzazione di soluzioni alternative. In linea con quanto dichiarato, il docente adatta il proprio intervento alle esigenze della classe, bilanciando rigore formale e attenzione alla comprensione. Il profilo Expert si manifesta nel-

la padronanza dei contenuti e nella cura nell'uso del linguaggio disciplinare, mentre quello Facilitator emerge nella volontà di accompagnare gli studenti nel ragionamento, ponendo domande aperte, stimolando l'espressione di dubbi e promuovendo un clima dialogico.

Sul piano dell'uso dei registri semiotici, l'azione didattica del docente è perlopiù coerente con quanto emerso in fase di intervista. Il docente riconosce l'importanza del passaggio tra registri per favorire l'apprendimento e mostra una chiara consapevolezza, seppur espressa in modo non tecnico, delle difficoltà che questo comporta per gli studenti. Nella pratica, si osserva un uso prevalente della combinazione tra lingua comune e registro algebrico, ma anche un impiego significativo della triangolazione tra i tre registri utilizzati (lingua comune, algebrico, figurale geometrico). Questa varietà rappresentativa suggerisce un'intenzionalità didattica orientata alla costruzione del significato attraverso l'integrazione dei linguaggi, in linea con il quadro teorico proposto da Duval. Le trasformazioni semiotiche rilevate rafforzano questa lettura: le conversioni tra registri risultano più del triplo rispetto ai trattamenti, a conferma di un'impostazione didattica incentrata sull'interconnessione tra rappresentazioni piuttosto che sulla manipolazione interna a un singolo registro. Le conversioni più frequenti sono quelle tra lingua comune e registro algebrico, seguite da quelle da registro della lingua comune a registro figurale geometrico. Tuttavia, si nota l'assenza della conversione dal registro figurale a quello algebrico, che potrebbe costituire un punto di debolezza considerando l'importanza attribuita dal docente alla capacità di passare tra forme rappresentative. Questo scarto potrebbe dipendere da vincoli situazionali, ma suggerisce una possibile area di sviluppo per una didattica ancora più coerente con gli obiettivi dichiarati.

L'uso delle tecnologie rispecchia fedelmente l'atteggiamento critico ma aperto espresso nell'intervista. Il docente fa uso regolare della LIM sia per la scrittura sia per la proiezione di materiali e l'integrazione di software di geometria dinamica, in particolare Desmos. La tecnologia viene utilizzata per esplorare visivamente le proprietà geometriche e per mostrare in tempo

reale l'effetto delle variazioni dei parametri sul grafico della circonferenza. Sebbene le condizioni non consentano di valutare l'eventuale uso di una lavagna tradizionale, l'impiego della LIM appare ricco e articolato, pienamente funzionale alla costruzione del significato.

In relazione alla domanda di ricerca, il caso del Docente 4 evidenzia come l'uso dei registri semiotici sia profondamente intrecciato a uno stile di insegnamento che combina rigore disciplinare e attenzione alla comprensione, e a una visione epistemologica che privilegia la costruzione condivisa del sapere. La varietà dei registri impiegati, l'elevato numero di conversioni tra essi, l'integrazione critica delle tecnologie e la tensione costante tra chiarezza espositiva e ascolto attivo delineano un approccio riflessivo e consapevole. Alcune asimmetrie, come la mancata conversione dal registro figurale a quello algebrico, non contraddicono ma anzi arricchiscono il quadro, mostrando come la relazione tra convinzioni, stili e pratiche sia complessa e situata. Il contributo del Docente 4 alla domanda di ricerca conferma che le pratiche semiotiche in aula non sono rigidamente determinate né dallo stile né dalle convinzioni epistemologiche, ma prendono forma nell'interazione dinamica tra intenzionalità didattica, contesto e risposta della classe.

5.2 Insegnanti a confronto

Il grafico riportato in Figura 5.1 mostra la distribuzione percentuale degli stili di insegnamento per ciascun docente, così come emersa dall'analisi delle interviste sulla base della classificazione proposta da Grasha. Questo quadro rappresenta una sorta di "situazione iniziale", che offre uno spunto prezioso per confrontare le dichiarazioni dei docenti con quanto osservato nelle pratiche d'aula.

Come si può notare, esiste una notevole variabilità tra i docenti nella distribuzione degli stili. Il Docente 3, ad esempio, si caratterizza per una forte predominanza del profilo Facilitator (45,5%), seguito da Expert (36,4%), mentre risultano assenti completamente gli stili Formal Authority e Personal

Model. Al contrario, il Docente 1 presenta un profilo maggiormente bilanciato, con una distribuzione piuttosto equa tra Facilitator, Formal Authority ed Expert (tutti intorno al 21–29%), ma con una presenza residuale anche degli altri stili. Il Docente 2 mostra un profilo misto, con quote simili tra Expert, Facilitator e Delegator, a segnalare una certa flessibilità dichiarata nella gestione delle dinamiche d'aula. Infine, il Docente 4 si distingue per un equilibrio tra Facilitator, Expert e Formal Authority, mentre, come il Docente 3, non presenta tracce del profilo Personal Model. Tuttavia, se si confrontano questi dati con le evidenze raccolte durante l'osservazione delle lezioni (cfr. sez. 4.2), emerge un elemento comune a tutti i docenti che merita particolare attenzione: gli stili più ricorrenti nelle pratiche didattiche reali sono, per tutti e quattro, Expert e Facilitator. Questo dato è significativo perché suggerisce una convergenza spontanea e indipendentemente dalle dichiarazioni verso una modalità di insegnamento che combina la padronanza disciplinare e il rigore formale tipici del profilo Expert, con la disponibilità al dialogo, all'ascolto e all'adattamento del percorso didattico tipici del profilo Facilitator. Questa convergenza può essere interpretata in più modi. Da un lato, è possibile che l'azione didattica reale spinga i docenti ad attivare competenze trasversali che superano le intenzioni esplicitate in fase di intervista. Dall'altro, è plausibile che la struttura stessa dell'insegnamento della matematica, soprattutto su un tema come la circonferenza in geometria analitica (ricco di concetti astratti e di passaggi tra registri) favorisca un equilibrio tra il ruolo di esperto e quello di facilitatore.

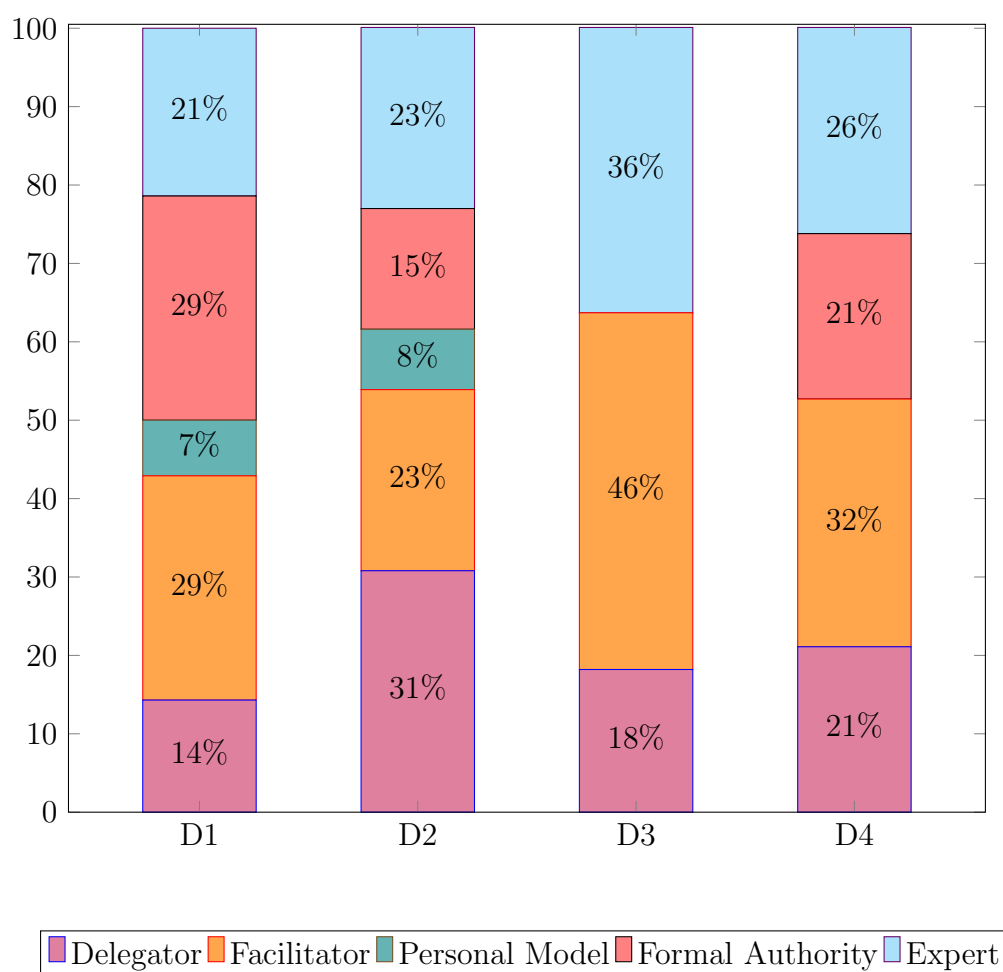


Figura 5.1: Distribuzione percentuale degli stili di insegnamento per ciascun docente, sulla base del numero di affermazioni riconducibili ai cinque profili di Grasha.

Il grafico in Figura 5.2 illustra la distribuzione percentuale dell'uso combinato dei registri semiotici da parte dei quattro docenti osservati mettendo in evidenza significative differenze sia tra i diversi insegnanti, sia tra quanto dichiarato in fase di intervista e quanto effettivamente agito in aula.

Un primo dato evidente riguarda il registro figurale geometrico, che, nonostante sia riconosciuto da tutti come strategico per l'apprendimento visivo e concettuale, risulta generalmente il meno utilizzato in forma isolata (mai presente da solo) e appare in misura contenuta anche nelle combinazioni binarie o ternarie. Solo il Docente 1 ne fa un uso intensivo e sistematico, in

coerenza con quanto aveva affermato in sede di intervista, distinguendosi come il più fedele al proprio profilo dichiarato. In particolare, oltre la metà dei segmenti osservati (54,2%) presenta una triangolazione tra tre registri (lingua comune, algebrico e figurale geometrico) e un ulteriore 20,3% include la combinazione registro della lingua comune + registro figurale geometrico. Questo conferma una didattica orientata alla costruzione di significato tramite la molteplicità dei codici rappresentativi. Il Docente 3, pur avendo espresso una consapevolezza implicita dell'importanza del registro figurale geometrico, lo utilizza molto meno frequentemente: solo l'11,6% dei segmenti presenta l'integrazione dei tre registri, mentre la maggioranza dei casi è dominata dalla combinazione registro della lingua comune + registro algebrico (58,1%), segno di una tendenza più marcata verso la verbalizzazione e la formalizzazione. I Docenti 2 e 4 si collocano in una posizione intermedia. Entrambi utilizzano una buona varietà di combinazioni, ma con un certo sbilanciamento a favore della coppia registro della lingua comune + registro algebrico (rispettivamente 48,3% e 48,2%) e un uso più contenuto del registro figurale geometrico (10,3% di registro della lingua comune + registro figurale geometrico per il Docente 2 e 5,4% per il Docente 4).

Nel complesso, il grafico suggerisce una tendenza generale verso una crescente algebrizzazione del discorso matematico, potenzialmente rischiosa se non bilanciata da registri che facilitino la comprensione visiva e intuitiva. Questi dati aprono a una riflessione più ampia: se da un lato i docenti mostrano consapevolezza del valore dei diversi registri, come emerso nelle interviste, dall'altro le scelte operative in aula continuano a privilegiare situazioni in cui il linguaggio naturale e quello algebrico occupano una posizione dominante.

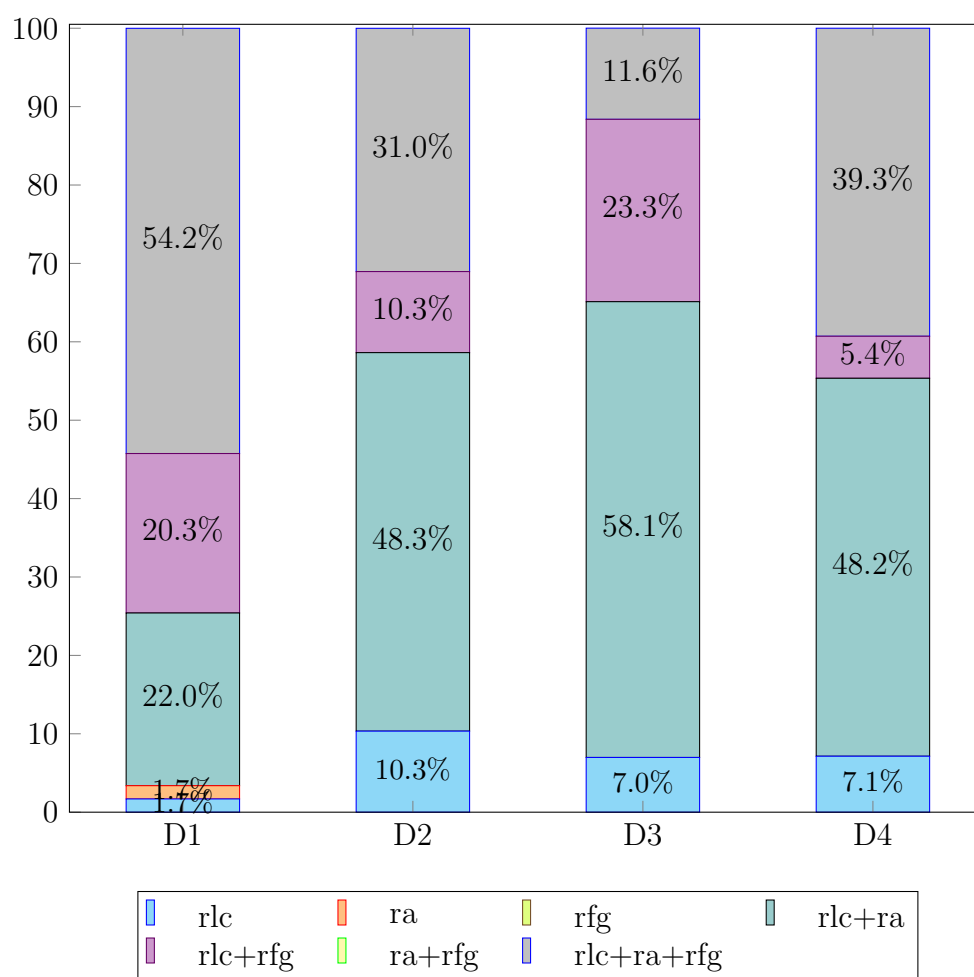


Figura 5.2: Distribuzione percentuale dell'utilizzo combinato dei registri semiotici nei quattro docenti osservati.

Legenda: rlc = registro della lingua comune, ra = registro algebrico, rfg = registro figurale geometrico.

Il grafico riportato in Figura 5.3 evidenzia una tendenza condivisa da tutti i docenti: le conversioni tra registri semiotici sono sistematicamente più frequenti dei trattamenti. Esse costituiscono oltre i due terzi delle trasformazioni complessive osservate, con percentuali che variano dal 67,4% (Docente 1) fino al 76,4% (Docente 4).

Questa netta predominanza delle conversioni può essere letta in continuità con quanto emerso dall'analisi precedente: la maggior parte dei segmenti didattici osservati coinvolge più registri in combinazione, piuttosto che un unico

registro isolato. Di conseguenza, è naturale che le pratiche didattiche si caratterizzino per un uso intensivo delle conversioni, intese come passaggi da un registro all'altro, mentre i trattamenti, cioè le operazioni interne a uno stesso registro, risultano meno centrali nell'economia della lezione.

Dal confronto tra i quattro docenti, il Docente 1 si distingue per una certa equilibratura relativa, con una proporzione di conversioni leggermente inferiore rispetto agli altri colleghi. Questo dato si inserisce coerentemente nel quadro di una didattica attenta all'integrazione dei registri ma anche al rigore formale, come già emerso in precedenza. Il Docente 4, al contrario, presenta la maggiore incidenza di conversioni, pari al 76,4%. Tale dato suggerisce una prassi didattica particolarmente orientata alla riformulazione e al passaggio tra registri semiotici differenti, a supporto della costruzione di significato e dell'accessibilità concettuale. Il Docente 3, pur mostrando una distribuzione molto simile, si colloca leggermente al di sotto (71,6%), mantenendo una forte coerenza con il suo stile comunicativo. Infine, il Docente 2 mostra valori comparabili a quelli del Docente 1, con un rapporto conversioni/trattamenti che evidenzia una didattica strutturata ma anche attenta alla mediazione tra registri, in linea con la sua propensione a chiarire e collegare concetti attraverso rappresentazioni diverse.

Nel complesso, questi dati confermano che la conversione tra registri è una pratica largamente adottata da tutti i docenti osservati, indipendentemente dalle differenze stilistiche, e rappresenta un elemento chiave della loro azione didattica. Ciò riflette una tendenza positiva: la capacità di proporre e gestire il passaggio tra diversi registri semiotici si configura come un indicatore di competenza professionale e di attenzione alle dinamiche cognitive dell'apprendimento.

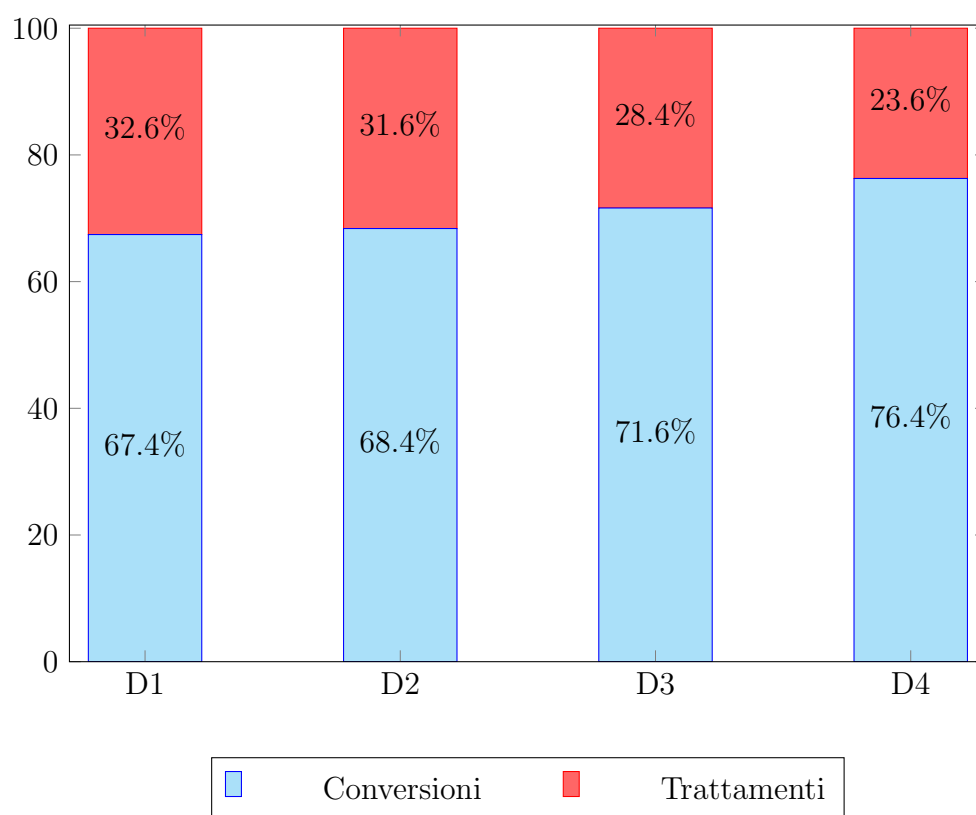


Figura 5.3: Distribuzione percentuale di conversioni e trattamenti nei quattro docenti osservati.

La Figura 5.4 mostra la distribuzione percentuale delle diverse tipologie di conversioni tra registri semiotici messe in atto dai quattro docenti durante le lezioni osservate. Il grafico evidenzia alcune differenze interessanti nelle preferenze di ciascun docente, che si collegano sia al loro stile di insegnamento sia all'impostazione epistemologica dichiarata.

Il Docente 1 presenta una distribuzione piuttosto equilibrata tra tre tipologie principali di conversioni: dal registro della lingua comune al registro algebrico (27,9%), dal registro della lingua comune al registro figurale geometrico (26,5%) e dal registro algebrico al registro della lingua comune (22,5%). Questi dati confermano quanto già emerso in precedenza: una didattica che valorizza il passaggio continuo tra i registri per costruire significato. È interessante sottolineare come il Docente 1 sia uno dei due docenti, insieme

al Docente 2, ad aver utilizzato tutte le sei combinazioni possibili di conversioni tra i registri utilizzati, seppur con frequenze differenti: un segnale di versatilità e consapevolezza semiotica. Il Docente 2 mostra un picco significativo nella conversione da registro algebrico a registro della lingua comune (44,1%), seguita dalla conversione opposta, da registro della lingua comune a registro algebrico (36,6%). Anche in questo caso, il linguaggio naturale svolge una funzione di mediazione fondamentale tra formalismo simbolico e comprensione. Al contrario, le conversioni che coinvolgono il registro figurale geometrico sono marginali. Ciò suggerisce una didattica in cui la parola e il formalismo algebrico assumono un ruolo privilegiato nella spiegazione, mentre il supporto visivo risulta accessorio e meno sistematico. Il profilo del Docente 3 è dominato dalla conversione da lingua comune a registro algebrico (59,4%), seguita dalla conversione opposta (22,6%). Anche qui si nota una forte polarizzazione tra parole e simboli, con un impiego molto più contenuto del registro figurale geometrico. Le conversioni che coinvolgono quest'ultimo sono presenti ma residuali e alcune tipologie di conversioni, come da registro figurale geometrico a registro algebrico, non sono mai state osservate. Questo profilo si collega a uno stile didattico orientato alla chiarezza espositiva e alla progressiva formalizzazione, ma meno incline all'integrazione tra rappresentazioni visive e simboliche. Il Docente 4 mostra un quadro simile a quello del Docente 3: la conversione da registro della lingua comune a registro algebrico rappresenta la tipologia più frequente (59%), seguita da quella inversa (21,9%). Anche in questo caso, il registro figurale compare in modo più marginale. È interessante osservare che solo tre tipologie di conversione raggiungono valori significativi, mentre le altre sono poco rappresentate o assenti. Questo dato suggerisce un utilizzo della conversione funzionale al passaggio tra parole e formule, ma con un coinvolgimento più limitato della rappresentazione visiva.

Nel complesso, i dati mostrano che, pur con differenti sfumature stilistiche, tutti e quattro i docenti attribuiscono un ruolo centrale alla mediazione tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, mentre l'impiego del registro

figurale geometrico nelle conversioni risulta più limitato e selettivo. Anche questa tendenza riflette, almeno in parte, una concezione della didattica della matematica fortemente legata alla verbalizzazione e alla formalizzazione, in cui la dimensione visiva assume un ruolo complementare, ma non strutturalmente integrato.

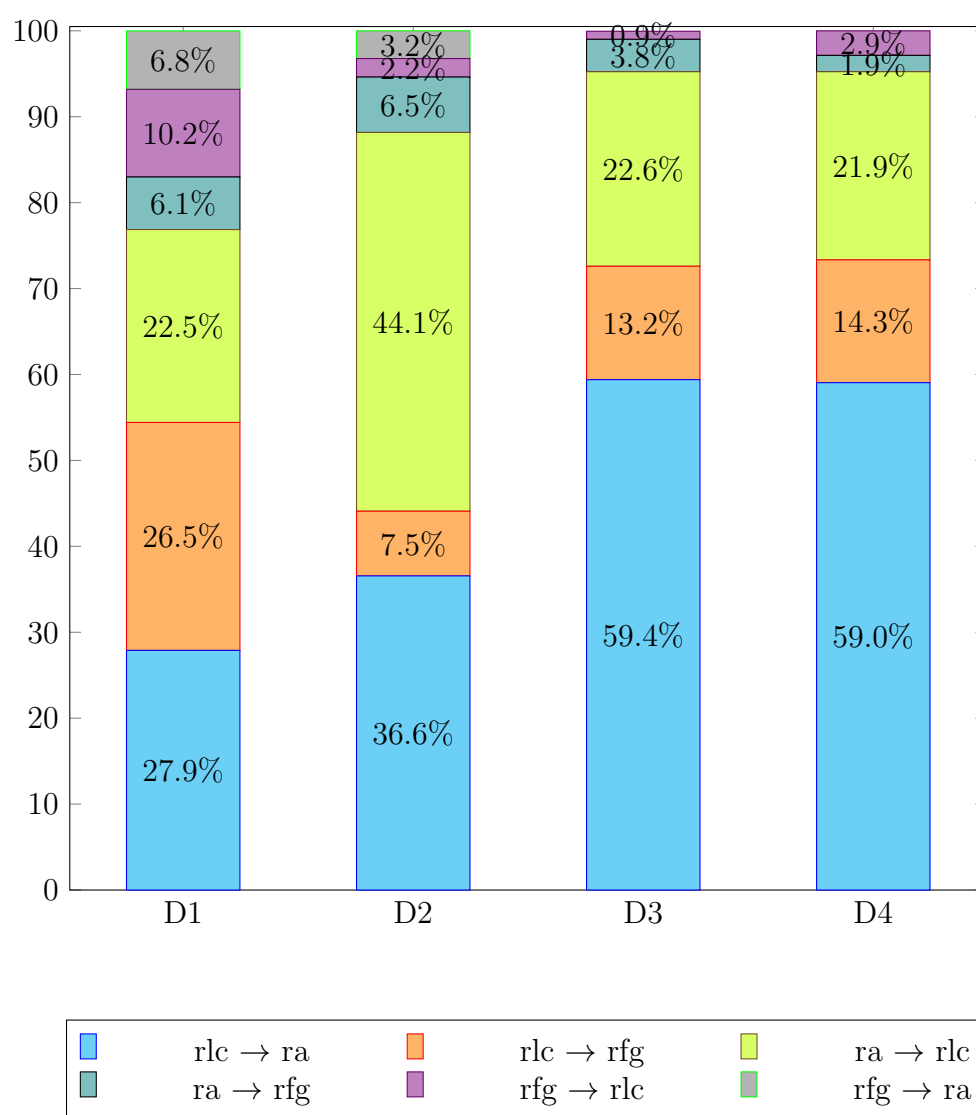


Figura 5.4: Distribuzione percentuale delle conversioni tra registri semiotici nei quattro docenti osservati.

Legenda: rlc = registro della lingua comune, ra = registro algebrico, rfg = registro figurale geometrico.

Un ultimo elemento di confronto riguarda l'uso delle tecnologie digitali nelle pratiche didattiche dei docenti osservati. In generale, l'impiego della tecnologia si configura come strumentale e selettivo: nessuno dei docenti vi ricorre in modo pretestuoso o decorativo, ma sempre con l'intento di favorire la comprensione attraverso la visualizzazione, la manipolazione dinamica o la condivisione di materiali.

Tuttavia, è importante notare che in molte situazioni osservate la LIM non rappresenta una scelta didattica tra più opzioni, ma costituisce di fatto l'unico strumento disponibile per scrivere. La lavagna di ardesia è spesso assente, o sostituita da lavagne bianche di dimensioni ridotte, e questo porta i docenti a sfruttare la LIM anche per attività che, in altre condizioni, avrebbero potuto essere condotte in modo analogo con strumenti più tradizionali. In questi casi, la tecnologia assume un ruolo funzionale ma non innovativo, servendo principalmente come supporto per la scrittura, l'organizzazione dello spazio e la visualizzazione stabile dei passaggi.

Detto ciò, il Docente 1 e il Docente 2 fanno un uso particolarmente consapevole della LIM e di software come GeoGebra, sfruttandoli per costruire rappresentazioni interattive, esplorare concetti geometrici e mettere in evidenza le relazioni tra forme grafiche e formalizzazioni simboliche. Questo uso integrato dei registri, in cui la tecnologia supporta il passaggio tra registro figurale geometrico, algebrico e linguaggio naturale, appare pienamente coerente con l'approccio semiotico osservato nelle loro lezioni, rafforzando la centralità delle conversioni tra registri come strumento per la costruzione del significato. Il Docente 3 e il Docente 4, invece, fanno spesso uso di Desmos per visualizzare le proprietà della circonferenza e rendere evidenti le connessioni tra variazioni nei parametri algebrici e modifiche nella rappresentazione grafica. Anche in questi casi, l'utilizzo della tecnologia non è fine a sé stesso, ma sostiene processi di conversione tra registri, in particolare tra il registro algebrico e il registro figurale geometrico, contribuendo a rendere accessibili concetti complessi.

Capitolo 6

Conclusioni

Questo lavoro si è proposto di indagare come si differenzi l'utilizzo dei registri semiotici di rappresentazione da parte degli insegnanti di matematica in relazione ai loro stili di insegnamento e alle loro convinzioni didattiche ed epistemologiche. L'analisi ha preso in esame quattro docenti della scuola secondaria di secondo grado, attraverso interviste e osservazioni in aula focalizzate sull'insegnamento della circonferenza in geometria analitica.

Dai dati raccolti emerge in primo luogo che tutti i docenti osservati fanno un uso articolato e ricorrente del registro della lingua comune, del registro algebrico e del registro figurale geometrico. In tutti i casi, il numero delle conversioni tra registri risulta notevolmente superiore a quello dei trattamenti, a conferma di una pratica didattica orientata alla costruzione del significato attraverso il confronto tra linguaggi, in linea con il quadro teorico proposto da Duval. Tuttavia, queste somiglianze strutturali non devono nascondere le differenze sostanziali che riguardano la scelta di quali registri vengano attivati più frequentemente e quali tipologie di conversione vengano privilegiate.

In particolare, si osserva che mentre alcuni docenti fanno un uso sistematico della triangolazione tra i tre registri, come il Docente 1, altri mostrano una tendenza a privilegiare coppie più ristrette, in particolare la combinazione registro della lingua comune + registro algebrico, lasciando il registro figurale geometrico in secondo piano. Questo andamento sembra riflettere,

almeno in parte, una tendenza più ampia verso una algebrizzazione della pratica scolastica, in cui il registro figurale geometrico viene considerato subordinato alla formalizzazione simbolica. Tale orientamento, consapevole o implicito, rischia di rafforzare una visione procedurale della matematica, che privilegia l'esecuzione rispetto alla comprensione visuale e concettuale. Analogamente, anche le conversioni più frequenti variano tra i docenti: in alcuni casi predominano quelle da registro della lingua comune a registro algebrico, in altri le conversioni inverse. Si tratta quindi di differenze qualitative, che riguardano la direzione, la funzione e l'intenzionalità con cui i registri vengono messi in relazione.

Queste differenze non sembrano essere spiegate in modo significativo dagli stili di insegnamento, così come definiti nel modello di Grasha adottato nella ricerca. Pur essendo stata condotta una mappatura degli stili dichiarati, l'osservazione ha mostrato una convergenza evidente verso i profili Expert e Facilitator in tutti e quattro i casi, indipendentemente dalle autoanalisi fornite dai docenti in fase di intervista. Questo dato suggerisce che la categoria di "stile di insegnamento", almeno nella forma in cui è definita da Grasha, non si rivela uno strumento discriminante efficace per comprendere le differenze osservate nell'uso dei registri semiotici. Gli stili risultano infatti relativamente omogenei nell'agito e sembrano riflettere più un orientamento generalizzato nella cultura professionale dei docenti di matematica.

Molto più rilevanti appaiono invece le convinzioni epistemologiche e didattiche, così come emerse nelle interviste. Le concezioni sulla natura della matematica, sulle modalità di apprendimento e sul ruolo della rappresentazione nei processi cognitivi risultano strettamente connesse alle scelte semiotiche operate in aula. I docenti che attribuiscono centralità alla costruzione del significato, alla pluralità dei linguaggi e alla mediazione didattica tendono ad attivare una maggiore varietà di registri e a guidare in modo più sistematico le conversioni tra essi. Anche nei casi in cui il linguaggio della didattica della matematica non è esplicitamente presente, si rileva una consapevolezza implicita dell'importanza della dimensione rappresentativa. Al contrario, laddove

prevale una visione trasmissiva o procedurale dell'insegnamento, l'uso dei registri risulta meno articolato o variegato. È importante sottolineare, tuttavia, che non sempre esiste una piena corrispondenza tra quanto dichiarato e quanto effettivamente agito in aula. In alcuni casi le convinzioni esplicitate nelle interviste trovano riscontro diretto nelle pratiche osservate; in altri si evidenziano scarti significativi, come nel caso del Docente 3, che dichiara di attribuire un ruolo centrale al registro figurale geometrico, ma che nella pratica osservata lo utilizza in modo marginale. Questi disallineamenti non devono essere letti come semplici incoerenze, ma come manifestazione della complessità che caratterizza l'azione didattica, condizionata da vincoli materiali, da contesti situati e da abitudini professionali consolidate.

Un'ulteriore dimensione da considerare riguarda l'uso delle tecnologie digitali, che rappresentano una risorsa potenzialmente rilevante per la gestione dei registri semiotici in classe. Tutti i docenti fanno uso della LIM e, in alcuni casi, di software come GeoGebra o Desmos, spesso integrati con strumenti tradizionali. In generale, la tecnologia viene impiegata in funzione della visualizzazione dinamica dei concetti, a supporto delle rappresentazioni grafiche e simboliche. Tuttavia, anche qui si osservano differenze: in alcuni casi la tecnologia si configura come uno strumento attivo di esplorazione e mediazione semiotica; in altri, il suo impiego appare più funzionale che intenzionale, dettato da vincoli strutturali, come l'assenza della lavagna di ardesia, piuttosto che da una scelta progettuale consapevole. Ciò conferma che non è la sola presenza della tecnologia a determinare la qualità del lavoro sui registri semiotici, ma la sua integrazione coerente all'interno del disegno didattico.

In sintesi, il quadro emerso evidenzia che non sempre esiste una corrispondenza lineare tra convinzioni e pratiche: anche se le idee didattiche ed epistemologiche dei docenti costituiscono un orientamento importante, esse non garantiscono di per sé coerenza con l'agito. Le pratiche semiotiche risultano infatti dall'interazione tra progettualità, strumenti disponibili e contesto scolastico. Gli stili di insegnamento, almeno nella forma proposta da Grasha,

non si sono invece dimostrati uno strumento utile a distinguere le pratiche osservate. L'agito in aula tende a convergere verso i profili Expert e Facilitator, confermando che tali categorie non spiegano le differenze nell'uso dei registri.

Alla luce di queste considerazioni, è possibile formulare alcune riflessioni conclusive. Un primo limite dello studio riguarda il numero ristretto di docenti coinvolti, tutti operanti nello stesso grado scolastico e in contesti tra loro simili. Inoltre, l'indagine ha preso in esame un unico tema del curricolo e ciò limita la possibilità di generalizzare i risultati ad altri nuclei disciplinari o a differenti livelli scolastici. Un secondo limite riguarda il modello di stili didattici adottato. Sebbene la classificazione di Grasha abbia offerto una prima griglia interpretativa utile, essa si è rivelata poco sensibile alle specificità della didattica della matematica. Ciò suggerisce l'opportunità di elaborare, in futuro, un quadro di stili più adatto a cogliere le caratteristiche proprie dell'insegnamento matematico, in cui elementi come la gestione dei registri semiotici, l'uso delle tecnologie e la costruzione del significato assumano un ruolo centrale.

Dal punto di vista delle implicazioni didattiche, i risultati sottolineano l'importanza di inserire nella formazione degli insegnanti momenti strutturati di riflessione sull'uso delle rappresentazioni. La consapevolezza dell'articolazione tra registri, delle difficoltà insite nella conversione e delle scelte semiotiche attivate in aula non può essere lasciata al caso o affidata alla sola esperienza. Occorre promuovere percorsi di sviluppo professionale che offrano strumenti di osservazione, analisi e discussione delle pratiche, anche attraverso metodologie attive come laboratori, autoanalisi video e osservazioni tra pari. A sostegno di queste ultime considerazioni, si inseriscono i lavori di Santagata et al. (2007) sull'uso dell'analisi di lezioni videoregistrate nella formazione degli insegnanti. In particolare, questi studi mostrano come percorsi di riflessione guidata su video di lezioni reali possano potenziare la capacità degli insegnanti, sia in formazione iniziale che in servizio, di osservare criticamente le pratiche didattiche e di riconoscere le connessioni tra

azioni del docente e apprendimento degli studenti.

In prospettiva, sarà utile estendere l'indagine ad altri contenuti della matematica scolastica e ad altri ordini di scuola, per verificare se le tendenze emerse si confermano in contesti differenti. Allo stesso tempo, la progettazione di un modello di stili specificamente pensato per l'insegnamento della matematica rappresenta una direzione promettente di ricerca, capace di integrare in modo più mirato dimensioni come la mediazione semiotica, la progettualità epistemologica e l'uso critico della tecnologia come elementi caratterizzanti la professionalità docente.

Appendice A

Domande guida per le interviste conoscitive ai docenti

Background formativo e professionale

1. Qual è stato il suo percorso di studi?
2. Ha partecipato a corsi specifici per l'insegnamento? E per l'insegnamento della matematica?
3. Quali sono state le sue esperienze lavorative principali? Ha avuto esperienze in settori diversi da quello dell'insegnamento?
4. Come ha avuto inizio la sua carriera di insegnante? Cosa l'ha portata a scegliere questa professione?
5. In quali tipi di scuola ha insegnato?
6. Quante e quali materie insegna o ha insegnato nel corso della sua carriera?
7. (Da fare a uno solo dei docenti) *Qual è il contesto scolastico attuale in cui insegna? Può descrivere il livello scolastico, le caratteristiche degli studenti e la disponibilità di risorse tecnologiche nella Sua scuola?*
8. Quanti anni di esperienza ha nell'insegnamento della matematica?
9. Ritiene che la sua formazione iniziale sia stata sufficiente per affrontare le sfide dell'insegnamento della matematica?

10. Ha avuto esperienze di insegnamento all'estero o in contesti scolastici diversi da quelli italiani? Come queste esperienze hanno influenzato il suo approccio didattico?

L'insegnamento della matematica

1. Come descriverebbe il suo approccio didattico?
2. Quali strategie didattiche utilizza più spesso in classe?
3. Quali sono, secondo Lei, gli aspetti più importanti da considerare quando si insegna matematica?
4. Come prepara le Sue lezioni? (solo se non viene fuori già nella risposta: *scambia idee o materiali con i colleghi?*)
5. Come valuta l'efficacia delle sue lezioni? Quali segnali considera più indicativi della comprensione da parte degli studenti?

Tecnologia e insegnamento della matematica

1. Qual è la Sua opinione generale sull'impiego delle tecnologie nell'insegnamento della matematica?
2. Ha seguito corsi di formazione specifici sull'uso della LIM o di altri strumenti digitali? Se sì, quali competenze ha acquisito? Come le applica nelle Sue lezioni?
3. Ha avuto esperienze significative nell'utilizzo della LIM o di altri strumenti tecnologici? In che modo hanno influenzato il suo approccio didattico e le sue strategie di insegnamento?
4. Quali strumenti digitali utilizza regolarmente durante le lezioni di matematica? Quali sfide ha incontrato nell'integrare la tecnologia nelle lezioni? Come le ha superate?
5. C'è uno strumento digitale che considera particolarmente efficace per l'insegnamento della matematica? Può fare un esempio concreto di come lo utilizza?
6. Ha notato differenze nell'atteggiamento e nel coinvolgimento degli studenti quando utilizza strumenti digitali rispetto a quando non li utilizza? Se sì, quali?

Sistemi semiotici di rappresentazione e circonferenza

1. Come presenta per la prima volta la circonferenza agli studenti? Quali rappresentazioni utilizza di solito?
2. Ritiene di aver cambiato il modo in cui utilizza le diverse rappresentazioni della circonferenza durante le lezioni rispetto a quando ha iniziato a insegnare? Se sì, quali modifiche ha apportato e per quali motivi?
3. Ha mai notato differenze nell'efficacia delle rappresentazioni in base al livello della classe o al tipo di studenti? Se sì, può fare qualche esempio?
4. Quali difficoltà incontra nell'utilizzo di più tipi di rappresentazioni per la circonferenza? Ritiene che gli studenti abbiano difficoltà nel passare da una rappresentazione all'altra? Se sì, quali strategie usa per aiutarli?
5. Utilizza strumenti tecnologici digitali per rappresentare la circonferenza? Se sì, quali e come li integra nelle sue lezioni?
6. **SOLO SE RISPOSTA POSITIVA ALLA DOMANDA PRECEDENTE** Pensa che l'uso di strumenti digitali migliori la comprensione della circonferenza da parte degli studenti? Se sì, in che modo?

Appendice B

Trascrizione dell'intervista a Docente 1

- 1 **Intervistatore:** Qual è stato il suo percorso di studi?
- 2 **Docente 1:** Io ho studiato al liceo scientifico, poi matematica a [città],
3 non a [città] perché sono di [città], che è vicino a [città]. Ho studiato
4 lì, poi ho fatto il dottorato a [città] in geometria algebrica. Dopo di
5 che ho fatto qualche anno di ricerca, poi ho visto che l'ambiente non
6 mi ispirava più di tanto, quindi ho fatto la SSIS e ho preso l'ultimo
7 anno della SSIS. E ho preso lì l'abilitazione in matematica e fisica,
8 che si chiamava A-049, che ora è la A-027. E ho fatto un po' di anni
9 alla scuola privata, in cui insegnavo solo fisica. Intanto facevo anche,
10 per integrare, dei tutorati all'università di matematica, di algebra e
11 geometria o di analisi, e poi ho collaborato con la [casa editrice] al libro
12 [titolo del libro], sia come correttore che come creatore di esercizi. E
13 poi mi sono trasferito, ho fatto un anno di prova a [città], al [nome
14 scuola], e poi dal 2017 o 2018 sono qua.
- 15 **Intervistatore:** [Ha seguito] corsi specifici per l'insegnamento o per
16 l'insegnamento della matematica nello specifico?
- 17 **Docente 1:** Li ho fatti, quelli alla SSIS e basta. Prima nulla, perché
18 ho scelto un indirizzo puro di ricerca all'università. Quindi diciamo
19 che ho imparato a insegnare dalla SSIS in poi e poi, ovviamente, sul
20 campo.
- 21 **Intervistatore:** Quindi ha detto inizialmente scuola privata...
- 22 **Docente 1:** Sì, per 5 anni.

23 **Intervistatore:** Ha notato qualche differenza tra la scuola privata e
24 quella pubblica in termini di intervento didattico richiesto?

25 **Docente 1:** A priori no, dipende ovviamente anche dalla scuola pri-
26 vata. Il livello dei ragazzi era abbastanza basso, ma c'erano anche dei
27 ragazzi molto bravi. Quindi, fondamentalmente, approcci simili. Ci
28 sono scuole private di eccellenza, ma non era il mio caso. Comunque
29 si sta decisamente meglio nel pubblico: al di là della lezione in classe,
30 l'ambiente è molto più sano, almeno per quanto riguarda la mia espe-
31 rienza. Quando mi sono trasferito io, almeno altri dieci professori lo
32 hanno fatto.

33 **Intervistatore:** A livello di ordini scolastici in cui ha insegnato,
34 sempre alle superiori o ha insegnato anche alle medie?

35 **Docente 1:** No, sempre superiori e sempre liceo. Quindi in realtà
36 non conosco neanche bene gli altri [indirizzi].

37 **Intervistatore:** Liceo come?

38 **Docente 1:** Liceo scientifico. Qua mi è capitata anche qualche classe
39 delle scienze umane e al [nome scuola] anche [liceo] economico sociale.
40 Qua abbiamo sia scientifico che scienze applicate, ma il grosso delle
41 ore le faccio alle scienze applicate.

42 **Intervistatore:** Insegna anche fisica?

43 **Docente 1:** Sì, sì. Ad esempio, quest'anno ho una [classe] e una
44 [classe] delle scienze applicate in cui faccio tutta matematica e tutta
45 fisica.

46 **Intervistatore:** Da quanti anni insegna?

47 **Docente 1:** Se mettiamo 5 del privato più i 7 [del pubblico], ormai
48 anche 8, sono circa 13 anni.

49 **Intervistatore:** Visto che comunque non ha avuto una formazio-
50 ne prettamente didattica, la sua formazione iniziale alla SSIS è ri-
51 sultata sufficiente come punto di inizio per affrontare le varie sfide
52 dell'insegnamento in classe?

53 **Docente 1:** No, i primi anni ho avuto due tipi di difficoltà. Uno
54 riguarda la materia, cioè trovare il giusto livello di approfondimento
55 e anche il modo di passare la materia ai ragazzi. E poi il discorso di
56 avere a che fare con i ragazzi. La cosa era abbastanza evidente negli
57 anni in cui facevo anche il tutorato all'università e insegnavo, cioè
58 la materia all'università è molto più difficile, molto più approfondita

59 e così via. Però mi risultava molto più semplice ed ero molto meno
60 nervoso, perché uno parla a un auditorium che, anche se non ti ascolta,
61 va bene lo stesso. Invece i ragazzi bisogna anche tenerli in riga, ma
62 non semplicemente dicendogli di stare zitti, ma anche coinvolgendoli.
63 Quindi il problema di coinvolgerli lo ho appreso negli anni. Ma se
64 mi guardassi nei primi anni di insegnamento... orrore! Nella SSIS ci
65 sono il tirocinio, che è molto importante, e quello sì, dà un'idea delle
66 difficoltà e così via, ma poi uno impara di più sul campo, a spese dei
67 primi anni e delle prime coorti di ragazzi.

68 **Intervistatore:** Parlando più specificamente dell'insegnamento, co-
69 me descriverebbe il suo approccio didattico?

70 **Docente 1:** Io, venendo da un tipo di insegnamento universitario,
71 non so se purtroppo o per fortuna, tendo a dare molta importanza
72 alla lezione frontale. Quella sicuramente come base per le lezioni, per
73 esporre l'argomento e poi anche non solo l'argomento come contenuto,
74 ma anche come modalità di affrontare i problemi, prima di far fare a
75 loro dei problemi anche loro stessi [sic]. Infatti, una delle cose che mi
76 chiedevano nei primi anni di insegnamento, è fare più esercizi, cioè non
77 dare nulla per scontato ma approfondire per bene anche il metodo per
78 risolvere certe tipologie di esercizi.

79 **Intervistatore:** Sì, che magari effettivamente venendo da un ambito
80 universitario si fa molta teoria e molta meno pratica...

81 **Docente 1:** Anche lì ci sono gli esercizi, perché comunque anche lì
82 facevo una parte di tutorato sugli esercizi. Però diciamo che a scuola è
83 meglio ogni tanto fermarsi e fare un discorso un po' più generale sulla
84 metodologia di risoluzione. Oggi si chiama problem solving. Probabil-
85 mente era quello che mancava all'inizio. Però, d'altra parte, io cerco di
86 far partecipare anche durante la parte frontale della lezione i ragazzi,
87 quindi interrompermi e fare delle micro-domande che mi fanno capire
88 se mi stanno seguendo oppure no, oppure anche dei mini-esercizi per
89 vedere se alcuni concetti sono chiari oppure no, prima di mettermi a
90 fare la risoluzione complicata di un problema. Oppure, ecco, e poi
91 anche nella lezione frontale cerco di andare al di là di quello che può
92 essere, ad esempio, la pagina scritta del libro, che per loro è di una
93 difficoltà insormontabile. Cioè, mettersi a leggere e a decifrare il libro
94 di matematica è una cosa che non si può dare per scontato. Io ce
95 l'ho come riferimento il libro, perché vanno a rivedere almeno le cose
96 fondamentali. Però fondamentalmente loro da soli non riuscirebbero a

97 fare nulla. Ad esempio, anche certe parti del libro che sono solamente
98 un disegno stampato, molto spesso lo riapro [sic] in GeoGebra o in
99 qualche programma, usando la possibilità di utilizzare la LIM o altri
100 supporti tecnologici. Questo mi permette di trasformare un'immagine
101 fissa, statica, in una invece che si può modificare. Quindi parte della
102 lezione consiste nel far osservare ciò che cambia e ciò che rimane nel...
103 ad esempio cambiare dei parametri. Nel caso della circonferenza, come
104 cambia e cosa vuol dire. La cosa è molto più semplice, naturalmente,
105 se si può vedere contemporaneamente l'immagine e anche certi calcoli
106 che, magari, farli alla lavagna distraerebbero e invece vengono fatti
107 automaticamente dall'applicazione. Poi ovviamente c'è anche la parte
108 più noiosa, in cui questi calcoli uno deve saperli fare.

109 **Intervistatore:** Immagino quindi che ci siano LIM in tutte le classi.

110 **Docente 1:** In questa scuola le hanno messe in tutte le classi, sì. Le
111 hanno anche cambiate da poco. Una volta c'erano quelle col proiettore,
112 ma erano piuttosto scomode. Sia perché il proiettore a un certo punto
113 non proiettava niente, sia perché c'era la penna che non andava e
114 poi bisognava fare la calibrazione ogni volta. Una roba abbastanza
115 penosa. Invece adesso è tutto abbastanza rapido, a parte, vabbè,
116 i soliti problemi: ogni tanto non funzionano. Ma questo sta nella
117 tecnologia in generale. Ecco, poi io in realtà vorrei sempre avere anche
118 una lavagna di gesso, perché a me piace molto utilizzarla anche per
119 cose così, al volo. E poi mi piace anche magari tenere aperta la LIM
120 con una pagina del libro oppure il testo di un esercizio e poi svolgerlo
121 però completamente nella lavagna di gesso.

122 **Intervistatore:** Quindi, sostanzialmente, lei usa la lavagna di gesso
123 per “fare la lavagna di gesso” [sic], e la LIM, invece, non semplicemente
124 come una “lavagna di gesso multimediale”, ma proprio per utilizzare
125 altri contenuti e avere accesso al libro online...

126 **Docente 1:** Esatto. Purtroppo in certe classi sono costretto a usare
127 anche la LIM perché non c'è la lavagna di gesso. Quindi, ad esempio,
128 qui in quest'aula non c'è la lavagna di gesso. Quindi, se dovessi fare
129 lezione qui, dovrei alternare l'uso dello schermo della LIM.

130 **Intervistatore:** Però lei preferirebbe avere le due possibilità...

131 **Docente 1:** Ci sono dei vantaggi anche a usare come lavagna la LIM,
132 perché uno può scegliere i colori, spostare le cose, ingrandire. Insomma
133 quindi, potendo usare la LIM, uno sfrutta anche le potenzialità. Però

134 diciamo che mi trovo ancora meglio con la lavagna di gesso, a parte
 135 che mi rovino le mani alla lavagna.

136 **Intervistatore:** A livello di utilizzo della LIM, eventualmente, se lei
 137 fa ad esempio lezione con la LIM, poi sono materiali che condivide
 138 [con la classe]? O anche solo, ad esempio, i vari applicativi GeoGebra
 139 che costruite, poi è qualcosa che...

140 **Docente 1:** Dipende dalle volte. Nella [classe] scrivo quasi tutto alla
 141 lavagna, quindi ogni tanto faccio la foto alla lavagna, però raramente
 142 gliel'ho caricata. Più che altro lo faccio solamente per promemoria
 143 mio. In altre classi, invece, ogni tanto faccio questo, cioè esporto in
 144 PDF quello che ho scritto e glielo lascio, senza elaborarlo più di tanto.
 145 Piuttosto uso anche Classroom. Quindi il materiale, sia per dare i
 146 compiti per la volta successiva, lo carico non durante l'ora ma dopo,
 147 il prima possibile, su Classroom. E lì, se c'è bisogno, metto anche
 148 del materiale aggiuntivo. Ad esempio degli esercizi che non ci sono
 149 nel libro, oppure dei miei appunti. Qualcosa sulla parabola gliela
 150 avevo messa, magari anche sulla circonferenza gli metto qualcosa
 151 che scrivo io e che magari assomiglia di più alle lezioni che faccio. E
 152 poi a volte la risoluzione di problemi la scrivo al tablet e poi faccio
 153 l'esportazione e la carico su Classroom.

154 **Intervistatore:** Quindi, se volessimo fare un riassunto sulle strategie
 155 didattiche utilizzate, potremmo dire che il suo metodo si basa preva-
 156 lentemente sulla lezione frontale, ma coadiuvata da metodologie più
 157 innovative e dall'utilizzo della LIM anche per coinvolgere un po' più
 158 l'audience?

159 **Docente 1:** Esatto, sì sì, diciamo così. Cioè diciamo: cose come
 160 flipped classroom o lavori di gruppo li faccio raramente, molto molto
 161 raramente.

162 **Intervistatore:** Quindi, secondo Lei, quali sono gli aspetti più impor-
 163 tanti da considerare quando si insegna matematica? Anche a livello
 164 di preparazione di una lezione, cioè a cosa pensa quando prepara una
 165 lezione?

166 **Docente 1:** Allora, ci sono diversi livelli. Nel senso che... allora...
 167 c'è... perché noi ci troviamo dei vincoli. Non sui programmi, adesso
 168 non ci sono più i programmi, però in realtà ci sono, perché le scuo-
 169 le, a partire dalle indicazioni nazionali, fissano comunque, diciamo,
 170 dei punti, che poi sono quelli che poi, fondamentalmente, non sono
 171 proprio quelli che compaiono all'esame di stato, ma quasi. E quello

172 sicuramente indirizza molto. Però, al di là dei contenuti, ecco, quello
173 che io cerco di far capire, e lì anche nella lezione sulla circonferenza, io
174 cercherò di fare dei paralleli tra quello che io dico sulla circonferenza
175 e quello che ho già detto sulla parabola. Quindi provare anche non
176 semplicemente a fare ciascun modulo come una cassetta indipendente,
177 ma a far capire che c'è un modo di vedere la materia che aiuta anche a
178 imparare meglio. Perché certe strategie e anche certi modi di vedere,
179 per esempio, che una curva può essere nello stesso tempo un grafico,
180 una conica, un insieme di zeri di una equazione, una funzione... e la
181 stessa cosa vale per la parabola, per la circonferenza, con le dovute
182 differenze, coi dovuti aggiustamenti.

183 **Intervistatore:** Quindi torniamo sempre al discorso di GeoGebra che
184 permette anche di avvicinare un po' di più a questa idea...

185 **Docente 1:** Sì, esatto. E poi un'altra cosa che invece riguarda la
186 risoluzione dei problemi, questa è una cosa a cui [sic] io trovo molto
187 spesso in disaccordo col modo proposto dal libro, che questo libro parte
188 dalla definizione di luogo geometrico delle coniche, poi dà l'equazione,
189 [cioè] trova l'equazione con la dimostrazione che io ho provato a fare
190 per la parabola. Per la circonferenza è più facile, che poi [sic] viene
191 però dimenticata dai ragazzi. E il libro, specialmente questo qui, si
192 sofferma pesantemente, utilizza l'aspetto analitico/algebrico. Io, in-
193 vece, quando è possibile, cerco di far ragionare e far vedere il modo
194 geometrico. Quindi diciamo che, almeno in questa parte del program-
195 ma, mi piace molto, anche per la mia formazione, di far capire [sic]
196 che la matematica è anche capire che uno stesso ente matematico si
197 può vedere in modi diversi. E questo ha importanza sia teoricamente,
198 quindi è proprio una conoscenza profonda della matematica, sia anche
199 praticamente, perché dei problemi che svolti con questi metodi alge-
200 brici sono complicatissimi perché implicano, ad esempio, dei sistemi di
201 tre equazioni in tre incognite... invece, ad esempio, la parabola dato
202 il vertice e un punto, cioè se uno sceglie di procedere con l'equazione
203 $y = ax^2 + bx + c$ ci perde mezz'ora. Se uno invece si ricorda che c'è
204 anche l'equazione, che viene detto nel libro, ma una sola volta e poi
205 viene lasciata perdere, quella $a(x - x_{\text{vertice}})^2 + y_{\text{vertice}}$, quella lì, in due
206 righe, letteralmente due righe, uno riesce a fare lo stesso problema.
207 E poi anche altri problemi, che sono ancora più complicati, ridotti a
208 questo qui con varie strategie. Insomma, per esempio, sapendo la rela-
209 zione tra vertice, fuoco e direttrice, molti problemi che hanno il fuoco
210 e la direttrice che, insomma, col metodo algebrico hanno un sacco di

211 $\frac{\Delta}{4a}$ che uno non si ricorda mai e sbaglia, o sbaglia perché non si ricor-
212 da le formule, o sbaglia perché è un procedimento lunghissimo, invece
213 nell'altro modo, passo passo e anche con molti meno passi, uno riesce
214 a farlo in maniera rapida. Quindi anche questo è una cosa che, forse,
215 i ragazzi seguono con più difficoltà all'inizio perché non è un metodo,
216 diciamo così, algoritmico, cioè procedurale, che ti dice: "fai questo,
217 fai quest'altro e poi hai il risultato", ma uno ha bisogno di un po'
218 più di intuizione, di pazienza. Però, una volta che uno è entrato nello
219 spirito, e alcuni ragazzi lo hanno fatto, poi è bello vedere che nella
220 verifica lo stesso problema viene svolto da alcuni col metodo lungo, da
221 altri col metodo breve. E questo mi dice molto anche dello spirito e
222 dell'attenzione con cui hanno seguito in classe.

223 **Intervistatore:** Ecco, quindi, anche proprio per stare su questa cosa,
224 secondo Lei, cosa è indicativo della comprensione degli studenti? An-
225 che rispetto alle domande che fanno, come vanno le verifiche... nel sen-
226 so, lei dice: "adesso c'è qualcuno che usa un tipo di metodo, qualcuno
227 che ne utilizza un altro"...

228 **Docente 1:** Sì, anche qui io, soprattutto per un problema di contin-
229 gentamento dei tempi, purtroppo, anche se questa è una cosa che mi
230 ripropongo di superare nei prossimi anni, cioè di fare come il collega
231 [docente] anche delle interrogazioni, invece io non ne faccio. Mi baso
232 solo sullo scritto, però anche lo scritto mi dà molte informazioni sul
233 modo in cui hanno recepito la materia. Quindi, al di là della corret-
234 tezza della risoluzione, anche il tipo di procedimento che hanno scelto
235 mi dice se l'alunno si limita a ripetere quello che c'è scritto nel libro
236 oppure se è andato un po' più avanti e ha recepito le mie sollecitazioni.

237 **Intervistatore:** E quindi dopo, per la preparazione delle lezioni
238 l'anno dopo, si ricorda o tiene conto dei risultati? E quindi ma-
239 gari: "questa cosa evitiamo di farla di nuovo perché vedo che non
240 funziona"...

241 **Docente 1:** Oppure mi dico: "facciamola meglio!". Ecco, le prime
242 volte io davo molto per scontato, cioè facevo molti meno esempi di
243 quelli che faccio adesso della parte, diciamo così, geometrica. E quindi
244 quella lì, invece... ad esempio, quest'anno mi sono ripromesso di fargli
245 molti più esempi di quel tipo lì nella risoluzione. E ho visto che i
246 risultati ci sono stati, quindi una fetta abbastanza grossa, non tutti
247 ma i più degli alunni, mi hanno seguito in questo modo.

248 **Intervistatore:** E quindi, in generale, a livello di preparazione delle
249 lezioni, come si gestisce?

250 **Docente 1:** Diciamo che quasi mai mi [sic] butto giù per iscritto la
251 lezione, però ce l'ho abbastanza bene in testa: l'ordine degli argomenti,
252 gli esempi da fare, l'ordine più logico anche da seguire. Poi ogni tanto
253 faccio delle parentesi indietro. Per esempio, oggi mi è capitato in
254 un esercizio di trovare la notazione degli intervalli che non avevo mai
255 spiegato. Allora ho detto: “vanno via dieci minuti per spiegare quello”
256 e poi gli dico... gli do il riferimento del libro. Infatti devo ricordarmi
257 dopo di darglielo, perché se lo vadano a studiare.

258 **Intervistatore:** Rispetto a tutto quello che abbiamo detto finora,
259 l'opinione rispetto all'utilizzo della tecnologia in classe è positiva?

260 **Docente 1:** È positiva quando si innesta bene nel modo di fare
261 lezione.

262 **Intervistatore:** Okay, però comunque, in generale, lo avverte come
263 un valore aggiunto rispetto alla scuola di qualche anno fa, in cui si
264 aveva a disposizione solo la lavagna di gesso e basta, quindi qualcosa
265 che apre a nuove possibilità, oppure semplicemente come una cosa
266 “cool” ma che non aggiunge nulla di che?

267 **Docente 1:** Diciamo che sostanzialmente sì, però appunto continuare
268 a poter usar la lavagna di gesso è importante. Bisogna stare attenti
269 a non farsi sopraffare troppo dalle nuove tecnologie. Ad esempio, la
270 parte a cui il collega [nome docente] è molto interessato [sic] sull'in-
271 telligenza artificiale, ChatGPT... ecco... io veramente non riesco. Ho
272 una repulsione. Quindi non mi sono proprio mai neanche interessato.

273 **Intervistatore:** È bello vedere queste differenze tra di voi [docenti].

274 **Docente 1:** Quindi, se questo fa parte delle nuove tecnologie, vabbè.
275 A parte che, nella matematica [sic], ChatGPT non sa fare nulla per
276 ora, quindi non è che mi perdo [sic] tanto.

277 **Intervistatore:** Effettivamente anche noi all'università abbiamo fat-
278 to un po' di sperimentazioni, e per ora non ci siamo ancora...

279 **Docente 1:** E non solo ChatGPT, c'è anche quello che riconosce,
280 adesso non mi ricordo il nome, le formule.

281 **Intervistatore:** Photomath?

282 **Docente 1:** Sì, Photomath. Ho fatto fare in un'altra classe, in una
283 [classe], tipo $\sin(x) > 2$. Ci ha detto: “non so rispondere”. Quindi
284 siamo ancora in alto mare ecco.

285 **Intervistatore:** Quindi, a livello sia di strumenti che proprio di
286 applicazioni come ChatGPT...

287 **Docente 1:** Sì, diciamo che mi piace molto, appunto, avendo la...
288 diciamo così... la predilezione per l'aspetto geometrico della matema-
289 tica, chiaramente avere a disposizione delle... Anche ecco una cosa
290 che... per esempio nel caso della parabola, tutta la costruzione della
291 parabola punto per punto che è completamente assente nel loro libro,
292 gli ho fatto fare una lezione [sic] che secondo me è stata molto buona,
293 in cui alla fine, quando ho fatto fare la traccia della figura costruita
294 punto per punto ed è venuta fuori la parabola, ho sentito qualcuno
295 che diceva proprio: "oh, figo". Quindi è una buona strada. Adesso,
296 non sarà perfetta, poi però insomma...

297 **Intervistatore:** Quindi diciamo che, a livello di applicazioni che
298 utilizza in classe, abbiamo detto GeoGebra,...

299 **Docente 1:** Sì, Desmos ogni tanto. Ma sì, più o meno quelli... Geo-
300 Gebra è abbastanza diciamo "a tutto tondo", così che ti permette
301 di...

302 **Intervistatore:** E questi li ritiene degli strumenti efficaci nel suppor-
303 tare le sue lezioni?

304 **Docente 1:** Sì.

305 **Intervistatore:** E invece, rispetto ai primi tempi quando queste tec-
306 nologie erano nuove, ci sono state delle difficoltà nell'inserirle, da parte
307 sua, nelle lezioni?

308 **Docente 1:** Sì, certo. Uno deve trovare i tempi giusti. Perché, anche
309 adesso, ci sono delle cose che anche con GeoGebra riesco a improvvi-
310 sare lì per lì, delle altre che me le devo preparare perché altrimenti,
311 anche semplicemente cambiare il nome dei punti, trovare l'ordine giu-
312 sto... uno deve avere già il pacchetto pronto e usarlo. Quello è il
313 problema. Però, ecco, l'aspetto positivo è che in realtà si trovano, per
314 certi argomenti, dei pacchetti già fatti, già fatti [sic] che si possono
315 trovare in rete, e quello risparmia molto tempo.

316 **Intervistatore:** A livello di coinvolgimento degli studenti, quindi,
317 [possiamo dire che è] notevolmente migliorato rispetto a una situazione
318 standard senza l'utilizzo della tecnologia?

319 **Docente 1:** Sì, secondo me una parte degli studenti è più attenta
320 alla lezione. Poi, una parte che ancora qui [sic] non sono riuscito a
321 proporre in classe, cioè... è di farli usare loro [sic] questi strumenti

322 qui. Io gli dico sempre: “usate GeoGebra, anche semplicemente come
323 conferma di esercizi che poi dovete sapere fare voi per... la risoluzione
324 è inutile che ve la dica io. Basta che introduciamo, ad esempio, la
325 parabola e la fate tracciare a GeoGebra. E poi vedete se è uguale a
326 quella che avete fatto voi, oppure no”. Anche una cosa del genere.
327 Alcuni credo che stiano imparando, però diciamo che non è una cosa
328 che ho formalizzato in una lezione.

329 **Intervistatore:** Però, in ogni caso, il suo obiettivo è anche quello di
330 renderli autonomi rispetto all'utilizzo...

331 **Docente 1:** Sì sì, di farli usare [sic] [questi strumenti]. Perché anche
332 questi tipi di software non credo che li facciano [sic] in informatica.
333 Loro hanno delle ore di informatica, ma credo che lì facciano più pro-
334 grammazione, oppure applicativi ma di altro tipo. Ma non applicativi
335 speciali della matematica. Quindi questo è una cosa che bisogna ag-
336 giungere. Però, ecco, avere qualcuno che ne sa già di informatica
337 naturalmente è un vantaggio rispetto ad altre classi, invece, in cui
338 sono completamente a zero. E allora lì non fanno neanche, insom-
339 ma, accendere il computer. Gli applicativi che usano solitamente sono
340 molto “social”, ma non di questo tipo.

341 **Intervistatore:** Per entrare nell'argomento della circonferenza, soli-
342 tamente, come si regola per presentare per la prima volta la circon-
343 ferenza agli studenti? Che tipo di rappresentazioni predilige o pensa
344 siano più efficaci?

345 **Docente 1:** Beh, per la circonferenza è piuttosto semplice. Diciamo
346 così: partire dalla definizione, diciamo, euclidea e quindi sintetica, e
347 si può trovare in quattro e quattr'otto l'equazione. Quindi già co-
348 minciare ad andare in parallelo tra le proprietà, diciamo, geometriche
349 intrinseche e quelle dell'equazione. E poi avendo già fatto la retta e
350 poi la parabola è anche più facile, diciamo, anticipare quello che poi
351 si andrà a studiare poi [sic] della circonferenza. Quindi cominciare
352 intanto a tradurre in equazioni e quindi nel piano cartesiano la circon-
353 ferenza, e poi vedere man mano le proprietà di una e dell'altra come
354 si rispecchiano.

355 **Intervistatore:** E rispetto al discorso che facevamo prima della dif-
356 ferenza tra... pensa di aver modificato nel tempo le idee di base da
357 mettere in campo per spiegare la circonferenza la prima volta? Oppure
358 più o meno ha sempre avuto questa tipologia di approccio?

359 **Docente 1:** Per la prima volta direi sì, non è tanto diverso. Ecco,
360 magari di recente mi sono anche soffermato, lo ho fatto credo l'anno
361 scorso o due anni fa, sul provare a fare rappresentare a loro le circon-
362 ferenze con dei raggi particolari. Ad esempio, una circonferenza che
363 ha raggio cinque e ha il centro in un punto con le coordinate intere si
364 vede che ha tanti punti che hanno le coordinate intere. E questa cosa
365 a me piace immensamente, perché si collega alle equazioni a soluzioni
366 intere, alle equazioni diofantee. Ovviamente non parlo di equazioni
367 diofantee, però diciamo che è bello il collegamento tra una proprietà
368 di un numero e la possibilità di rappresentare senza avere il compasso,
369 perché uno se ha raggio cinque riesce a trovare uno due tre... almeno
370 dodici punti.

371 **Intervistatore:** E invece quando ha insegnato, ad esempio, all'eco-
372 nomico sociale, che immagino che si facciano [sic] le stesse cose ma a
373 un livello più di base, ci sono state differenze sostanziali nel suo lavoro
374 o delle difficoltà specifiche legate al diverso tipo di scuola?

375 **Docente 1:** Beh, sì. Di ciascun argomento si scelgono dei sotto-
376 argomenti molto basilari e si fanno più... magari... degli esercizi,
377 anche lì molto molto [sic] più di base. E si predilige magari meno il
378 ragionamento astratto e più il saper fare dei problemi, almeno quelli
379 fondamentali.

380 **Intervistatore:** A livello delle varie rappresentazioni che si possono
381 fornire agli studenti, Lei ha notato dei tipi di trasformazioni in cui gli
382 studenti hanno più difficoltà? Quindi, per esempio, passare dall'equa-
383 zione alla rappresentazione nel piano cartesiano piuttosto che mettere
384 in relazione altri linguaggi, o no?

385 **Docente 1:** Allora le difficoltà di avere, ad esempio, l'equazione di
386 una parabola e trovare il grafico? Oppure viceversa?

387 **Intervistatore:** Esatto.

388 **Docente 1:** Mi sa che in questo caso forse la difficoltà maggio-
389 re è passare dal grafico all'equazione avendo dei punti sulla curva.
390 Perché... sì, sicuramente è più complicato. È una strategia indiretta
391 e anche più astratta, probabilmente perché uno deve partire da una
392 forma coi parametri dell'equazione e trovare i parametri. Quindi è un
393 ragionamento un po' più indiretto.

394 **Intervistatore:** E quindi, in generale, queste qui sono tutte cose [sic]
395 che considera anche nello svolgimento degli esercizi?

396 **Docente 1:** Sì, esatto. In quel caso lì si dedica molto meno tempo a
397 fare il grafico di una parabola piuttosto che tornare indietro. E anche
398 nel caso del grafico, anche lì gli do comunque [sic] delle strategie. Ad
399 esempio, quello che loro gli viene in mente [sic] di fare così istinti-
400 vamente è fare la tabellina dei punti. Che va bene, va anche bene,
401 però, insomma, se avete una parabola c'è un punto molto importante.
402 Quindi magari trovate quello, trovate la concavità e, anche se non ave-
403 te nessun altro punto, più o meno capite molte cose, molte proprietà
404 che ha la parabola, solamente da queste informazioni. Per esempio,
405 una ragazza nell'ultima verifica per disegnare una parabola che faceva
406 parte di una funzione definita a tratti ha provato a trovare le inter-
407 sezioni con gli assi cartesiani. In quel caso lì non era necessario, e in
408 quel caso lì invece bisognava andare per punti. Quindi il vertice era
409 importante, ma non le intersezioni con gli assi, ad esempio. Quando
410 è possibile, faccio queste osservazioni: che non tutti i dati hanno la
411 stessa importanza a seconda del contesto in cui uno è, quindi di dove
412 si vuole arrivare, dell'obiettivo ecco.

413 **Intervistatore:** Parlando della circonferenza, di solito utilizza stru-
414 menti digitali particolari?

415 **Docente 1:** Beh, anche lì faccio sempre GeoGebra e sempre le solite
416 cose.

417 **Intervistatore:** Quindi negli anni ha riscontrato, specificatamente
418 nel discorso della circonferenza, prestazioni migliori collegate al fatto
419 che ha introdotto l'utilizzo di certi strumenti tecnologici?

420 **Docente 1:** Allora forse no, perché lì... non lo so, ho dei dubbi.
421 Perché quello lo uso appunto, purtroppo, per ora solo a livello di... a
422 livello espositivo. E quindi, forse, se invece anche loro lo usassero di
423 più... però, ripeto, in classe è un po' difficile farlo usare. Ma anche
424 lì, già dalla prima lezione, esorterò a utilizzare [questi strumenti] in
425 maniera "buona".

426 **Intervistatore:** Quindi diciamo, in generale, non... cioè sì, ma-
427 gari un coinvolgimento maggiore, ma, in generale, non dei risultati
428 particolarmente migliori...

429 **Docente 1:** Diciamo no che possa quantificare [sic]. Certo è che fare
430 i cerchi con GeoGebra è più facile che farli alla lavagna: sicuramente
431 uno è più preciso. Poi magari capita che lo stesso problema lo faccio
432 per bene alla lavagna, per bene però con la mia mano, e poi gli dico:
433 "questa figura qui, attenzione, si può fare molto meglio!". E poi, come

434 conclusione, gliela faccio con GeoGebra. Quindi non è che utilizzo
435 GeoGebra per risolvere l'esercizio, do solamente [sic] una piccola parte
436 per mostrare [il disegno] in maniera comprensibile.

437 **Intervistatore:** Invece, una cosa che non le ho chiesto prima è, in ge-
438 nerale, come ritiene che l'utilizzo di questi strumenti abbia influenzato,
439 in generale, il suo approccio all'insegnamento?

440 **Docente 1:** Probabilmente lo ha reso molto più tranquillo, sicura-
441 mente. Cioè nel senso che anche, per esempio, avere la possibilità
442 di visualizzare qualcosa e di non dovermi basare solo sulle mie abilità
443 grafiche è estremamente confortante. E poi anche avere a disposizione,
444 ad esempio, il libro, poterlo semplicemente riprodurlo [sic] e criticare
445 anche, quando c'è la possibilità... però che anche loro abbiano tutto
446 in una volta [sic]. Ad esempio, una definizione, oppure anche passare
447 in rassegna i vari casi senza stare a farli, rende un po' più rapido al-
448 cune parti della lezione. Anche se in altri casi è importante scrivere
449 lentamente. Perché dove invece ho un ragionamento da fare... lì dargli
450 tutta la soluzione già fatta non va bene. Perché loro, insomma, sono
451 persi davanti alla pagina, esattamente come lo sono a casa. E bisogna
452 costruire il ragionamento un po' alla volta e poi solo alla fine fargli
453 vedere, magari in bella scritta [sic], tutto. Bisogna alternare i due
454 mezzi e saperli maneggiare bene.

Appendice C

Trascrizione dell'intervista a Docente 2

1 **Intervistatore:** Qual è stato il suo percorso di studi?

2 **Docente 2:** Sì, allora, dunque, io ho un percorso di studi di laurea
3 triennale più laurea specialistica in fisica. Ho conseguito la laurea
4 triennale nel 2008 e la laurea specialistica nel 2011. All'epoca era
5 un bel periodo dal punto di vista della didattica, perché ho seguito
6 i corsi della SSIS con la [nome professore] e la [nome professore] e,
7 per ragioni legate al fatto che ho sfiorato con la tempistica degli studi,
8 per un brevissimo intervallo di tempo non sono riuscito a iscrivermi
9 alla SSIS, la Scuola di Specializzazione dell'Istituto Superiore. Però
10 ho seguito tutti i corsi della didattica della fisica e della matematica
11 con [nome professore], [nome professore], [nome professore], eccetera.

12 **Intervistatore:** Quindi esisteva già all'epoca l'equivalente corso che
13 faccio io, ma in fisica?

14 **Docente 2:** Esatto. Infatti io mi sono laureato in laurea triennale
15 generale in fisica e la specialistica l'ho presa in didattica e storia della
16 fisica. Ho fatto dei corsi che mi hanno molto appassionato. Io avevo
17 questo pallino dell'insegnamento che mi è nato alla triennale, durante
18 i corsi del secondo e terzo anno della triennale. E il mio desiderio è
19 sempre stato quello di insegnare nelle scuole.

20 **Intervistatore:** Quindi non ha mai avuto nessun dubbio, è stata
21 proprio la prima scelta [l'insegnamento]?

22 **Docente 2:** Sì, nessun dubbio. E di base poi, durante l'ultimo anno
 23 della triennale e in particolar modo nella specialistica, ho avuto modo
 24 di affrontare dei corsi molto interessanti all'università di [città]: quelli
 25 di storia e filosofia della fisica con persone defunte [nome professore],
 26 [nome professore]. Con la [nome professore] ho fatto didattica della
 27 fisica moderna.

28 **Intervistatore:** Quindi, a livello di [sic] questo amore per l'insegna-
 29 mento, da dove è nato? È figlio d'arte?

30 **Docente 2:** No no, la mia passione per l'insegnamento è venuta fuo-
 31 ri dal fatto che, all'interno delle lezioni universitarie che seguivo, ero
 32 molto molto preso dalla reazione degli studenti all'apprendimento dei
 33 concetti di matematica e fisica. Quindi le lezioni avvenivano sempre
 34 a livello frontale e io, praticamente, ricordo che nasceva questa spin-
 35 ta verso la didattica perché c'era questa osservazione: vedevo i miei
 36 compagni di corso che reagivano in maniera totalmente diversa, come
 37 è naturale che sia, all'apprendimento della fisica. E mi chiedevo: ma
 38 è possibile studiare le metodologie? Eccetera, eccetera. E poi dopo è
 39 chiaro che, successivamente e parallelamente, è nato un forte interesse
 40 nei confronti della storia della fisica e, parallelamente alla storia della
 41 fisica, poi anche alla filosofia della fisica. Tutto è nato tra l'ultimo
 42 anno della triennale e gli anni della specialistica, dove ho fatto i corsi
 43 specifici di didattica della fisica e della matematica.

44 **Intervistatore:** Oltre però a quelli, la SSIS, però, non l'ha frequen-
 45 tata?

46 **Docente 2:** Non sono riuscito a frequentarla perché sono arrivato
 47 tardi.

48 **Intervistatore:** Quindi i corsi sull'insegnamento che ha seguito sono
 49 solo quelli [all'università]?

50 **Docente 2:** Sì, solo quelli.

51 **Intervistatore:** Quindi niente di più specifico dopo?

52 **Docente 2:** No, dopo ho seguito dei piccoli corsi di formazione
 53 all'interno della scuola, ma erano delle cose di poche ore

54 **Intervistatore:** Invece a livello di esperienze lavorative? Solo inse-
 55 gnamento? Nient'altro?

56 **Docente 2:** Solo insegnamento. Anche se ho perso molti treni: ho
 57 perso il treno della SSIS, ho perso anche il treno di diversi concorsi
 58 perché, proprio per questa mia voglia anche di lavorare e di mettermi

59 in gioco, ho fatto vari errori nella mia vita. Nel senso che... la SSIS
60 ho proprio perso il treno [sic] perché, lavorando anche a livello di
61 doposcuola, mi sono dato anche un po' da fare per aiutare i ragazzini
62 a fare matematica e fisica. Parliamo molto nello specifico di... io mi
63 sono laureato nel 2011 nella specialistica. Già dal 2007, 2008, 2009,
64 eccetera, eccetera, che facevo la triennale e la specialistica, facevo...
65 lavoravo, mi davo da fare. E questo mio darmi da fare mi ha dato
66 la possibilità di allungare molto, dilatare molto, il periodo di studi.
67 E quindi ho perso il treno della SSIS e poi dopo ho iniziato tardi a
68 lavorare. E quindi lavorando non sono stato molto bravo anche nei
69 concorsi. E quindi ho perso anche vari treni sui TFA, e quindi ho fatto
70 tanti anni di precariato.

71 **Intervistatore:** Quindi anche tante scuole? A livello di tipologia di
72 scuole solo superiori?

73 **Docente 2:** Sì sì, solo superiori. Io ho iniziato ufficialmente a in-
74 segnare facendo piccole supplenze nel 2012. Dal 2011/2012 c'è stata
75 una parentesi abbastanza felice con la fondazione [nome fondazione],
76 dove ho lavorato come divulgatore scientifico anche per il progetto
77 [nome progetto]. Mi sono anche divertito. Poi ho trovato un lavoro
78 chiaramente più soddisfacente, non solo dal punto di vista economico
79 ma anche dal punto di vista professionale, presso le scuole paritarie.
80 E dove [sic] ho fatto gavetta. Dal 2012 al 2019. Le scuole paritarie ho
81 lavorato [sic] molto, dal 2012 al 2018, presso una scuola, che è chiusa
82 per ragioni di finanze di fondi, che è la scuola [nome scuola]. È una
83 scuola che si trova vicino a [via 1], [via 2]. Ho iniziato con piccole
84 supplenze e corsi di recupero, poi l'anno scolastico 2014/2015 è stato
85 il mio primo anno pieno che ho fatto come incarico annuale. Quindi
86 anche nella graduatoria, per avere incarichi annuali di supplenza, dal
87 2012 al 2014 ho fatto... ho lavorato molto coi corsi di recupero, ho fat-
88 to piccole supplenze brevi, da due settimane, un mese. Mi chiamavano
89 in continuazione le scuole paritarie.

90 **Intervistatore:** Come tipologia di ambiente, [quello della scuola pa-
91 ritaria] è molto diverso da una scuola come potrebbe essere il [nome
92 scuola]?

93 **Docente 2:** Molto diverso.

94 **Intervistatore:** A livello di?

95 **Docente 2:** Allora, devo pensarci un attimo perché la risposta è
96 complessa. Perché non basta dire sempre: la fruizione. Nel senso,

97 non è solo legato a quello, è legato proprio all'ontologia che sta dietro
98 alla scuola privata. Nel senso che la scuola privata è, innanzitutto,
99 un'esperienza un po' più faticosa perché ti mette un pochino più alla
100 prova. Perché hai a che fare con dei ragazzi che vorrebbero avere un
101 rapporto uno a uno. Ma sei in una classe con venticinque persone e
102 non ce la fai. Allora devi comunque sviluppare anche un certo tipo
103 di attitudine legata alla pazienza, al rapporto umano, che sono fon-
104 damentali. Devo spezzare una lancia a favore del fatto che alla [nome
105 scuola], da quando ho preso l'incarico annuale dal 2014, e dopo che
106 ho fatto tutte le varie supplenzine e corsi di recupero, ho avuto anche
107 dei colleghi con cui abbiamo stabilito un forte legame da un punto di
108 vista professionale.

109 **Intervistatore:** Quindi comunque un ambiente positivo dal punto di
110 vista lavorativo?

111 **Docente 2:** Molto positivo, bellissimo. Dopo poi siamo diventati
112 anche amici. Però, comunque, anche dal punto di vista professionale
113 condividevamo questa missione, perché, insomma, i ragazzi erano co-
114 munque ragazzi che si atteggiavano in maniera un po' diversa rispetto
115 alla scuola pubblica diciamo.

116 **Intervistatore:** In che maniera un po' diversa?

117 **Docente 2:** Questa è una questione un po' delicata. Nel senso che,
118 per carità, alla [nome scuola], dove ho lavorato fino al 2018, si atteg-
119 giavano... erano un po' più distanti nei confronti dello studio, cioè
120 serviva un aggancio maggiore dal punto di vista umano. E non potevi
121 pretendere di dire: "oh, fai questo e basta". Cioè dovevi essere un
122 pochino più... ragazzi tra l'altro buonissimi. Nel senso che, però, co-
123 munque, la scuola la vivevano un po' più, come dire, si sentivano meno
124 partecipi. Si sentivano più come... cioè, da un punto di vista umano,
125 si è instaurato un bellissimo rapporto. E questo è stato un veicolo
126 fondamentale. Da un punto di vista della didattica [sic], si faceva più
127 fatica. Perché... insomma... agganciarli qui [sic] paradossalmente si
128 fa un pochino meno fatica. Perché, comunque, c'è un pochino più di
129 rigore dal punto di vista... si faceva più fatica a fare lezione, perché
130 i ragazzi erano un pochino più restii. Poi magari gli si abbuonava-
131 no un pochino di più le cose, capito. Però comunque, per esempio,
132 alla [nome scuola], anche se le insufficienze sonore partivano, perché
133 comunque la lontananza dalla materia e quindi gli obiettivi previsti
134 dalla programmazione non venivano raggiunti con determinati tipi di

135 verifiche, compiti, interrogazioni e quant'altro, il ragazzo non è che...
136 C'era una famiglia che si lamentava, ma poi dopo... nel senso... i
137 ragazzi erano anche molto tranquilli. Poi, nel 2018/2019, ho lavora-
138 to al [nome scuola], le scuole [nome scuola], che è sempre una scuola
139 paritaria, sempre liceo scientifico.

140 **Intervistatore:** E ora?

141 **Docente 2:** Ecco, poi dal 2019 al 2023 ho avuto una parentesi fe-
142 licissima di quattro anni di precariato di fila al liceo [nome scuola].
143 Matematica e fisica su vari indirizzi, quasi tutti. Cioè qui al liceo [no-
144 me scuola] ho fatto scientifico, scienze applicate, scienze umane. Li ho
145 fatti tutti, liceo sportivo. Dopo di che, grazie a Dio, dopo i vari treni
146 che ho perso a lavoro sono riuscito a entrare di ruolo l'anno scorso a
147 [città]. Dopo cosa è successo? È successo che nella classe di concorso
148 matematica e fisica si lavora sempre. E quindi qual è il discorso? Che
149 al [nome scuola] ho avuto questa enorme fortuna. È una scuola che
150 ho amato fin da subito, perché ho avuto una continuità dal punto di
151 vista lavorativo anche se le classi cambiavano. Perché io, non essendo
152 di ruolo, ovviamente... queste esperienze, dal punto di vista didatti-
153 co, mi hanno aperto molto la mente. Potremmo dire, in maniera un
154 po' grossolana, che nella scuola paritaria ho fatto quella fatica, quel
155 potenziamento... perché con i ragazzi del liceo scientifico, c'era anche
156 anche il liceo sportivo, era un po'... al [nome scuola] mi si è aperta
157 molto la mente, perché comunque ho avuto modo di conoscere vari
158 percorsi di studi diversi: liceo delle scienze umane, economico sociale,
159 e avvicinarmi ad un ambiente che mi ha aperto di più [la mente] da
160 un punto di vista professionale.

161 **Intervistatore:** E ora, a livello di classi in cui insegna ora, stiamo
162 parlando di classi di che liceo?

163 **Docente 2:** Scientifico e scienze applicate. Nella mia storia c'è l'anno
164 scolastico scorso, 2023/2024, che merita una menzione, perché è stato
165 l'anno in cui sono passato di ruolo tramite concorso regionale. E ho
166 avuto come scuola di titolarità il liceo artistico di [città]. Quindi io
167 ho lavorato l'anno scorso al liceo artistico, ho insegnato matematica e
168 fisica. E anche questa è stata un'esperienza molto bella.

169 **Intervistatore:** Agganciandosi a questa cosa qui, tutte queste espe-
170 rienze lavorative molto differenti tra loro hanno portato un arricchimento?
171

172 **Docente 2:** Moltissimo.

173 **Intervistatore:** Tornando invece alla formazione iniziale, secondo
174 Lei, è stata sufficiente rispetto alle sfide che ha affrontato negli anni?

175 **Docente 2:** Più che sufficiente. Sì sì. Il problema grosso poi quale è?
176 Il discorso che [sic] la formazione iniziale che ho avuto all'università
177 è stata favolosa, la consiglio a chiunque. Il discorso è che la difficoltà
178 è riuscire a districarsi nella complessità attuale con delle formazioni
179 che riescono un po' a stare al passo coi tempi. E non è una cosa sem-
180 plicissima, perché noi ogni cosa [sic] abbiamo la circolare, abbiamo
181 la riunione di qua, abbiamo la riunione di quest'altro, ogni tanto do-
182 vremmo preparare qualche lezione. Hai capito? È quello. Però i corsi
183 di formazione ci sono, eh, al [nome scuola]. Certo che però dopo una
184 [persona] ha il tempo che ha.

185 **Intervistatore:** Come considera il suo approccio didattico oggi, alla
186 luce di tutto quello che è successo?

187 **Docente 2:** Decisamente migliorabile. Nel senso che il mio approccio
188 didattico è un approccio, purtroppo, basato, per ragioni [di] tempisti-
189 che, a una didattica per lo più frontale. Apro una parentesi: l'anno
190 scorso, al liceo artistico [nome scuola], durante il mio anno di prova
191 che mi è valso il ruolo, ho avuto più tempo di sperimentare. E quin-
192 di ho utilizzato una maggiore didattica laboratoriale, una didattica...
193 classici lavori di gruppo. Quindi cooperative learning, peer to peer,
194 varie metodologie. Purtroppo la didattica è un po' confinata con le
195 tempistiche.

196 **Intervistatore:** Quindi Lei dice, in un contesto di liceo artistico,
197 che magari nessuno ti punta la pistola addosso perché anche se fac-
198 ciamo un po' meno matematica va bene uguale, c'è più tempo per
199 sperimentare... quindi, in ottica attuale, le lezioni frontali...

200 **Docente 2:** Sì, e capita molto spesso di fare anche dei peer to peer
201 o dei lavori di gruppo anche oggi al liceo scientifico. Per esempio,
202 sabato con la [classe] del liceo delle scienze umane ci siamo approcciati
203 ai problemi con le equazioni di secondo grado con un approccio... ho
204 mostrato il problema e ho detto ai ragazzi: "come lo risolvi?" Quindi li
205 ho divisi in gruppi. Allora, il fatto è questo: che i ragazzi, comunque,
206 già partivano da una base di saper usare l'equazione di secondo grado,
207 l'equazione di secondo grado fratta, l'equazione di secondo grado
208 parametriche [sic], eccetera. Dopo di che, con le loro conoscenze che
209 [sic] avevano a disposizione, gli chiedevo di lavorare in un contesto di

210 problem solving dove c'era, appunto, questo problema. E quindi uno
211 doveva elaborare una soluzione.

212 **Intervistatore:** Quindi, in generale, quali sono gli aspetti più impor-
213 tanti nell'insegnamento della matematica?

214 **Docente 2:** Ecco, quello che io faccio poco. Nel senso che una didat-
215 tica risulta, secondo me, non vorrei essere un po' arrogante, che una
216 didattica a mio parere risulta efficace quando vengono rispettati due
217 aspetti in ordine gerarchico: il primo è quello umano, dove il docente,
218 è inutile, è lui che guida la barca. E quindi, fondamentalmente, se vie-
219 ne visto come un punto di riferimento saldo non solo da un punto di
220 vista umano, ma anche dal punto di vista, come dire, umano e cultu-
221 rale, come educatore nel suo complesso, questo è il primo riferimento
222 assoluto in ordine gerarchico. Il secondo riferimento in assoluto in or-
223 dine gerarchico è che per garantire una didattica efficace è necessario,
224 a volte, rompere un po' il classico ritmo delle lezioni. E quindi, fonda-
225 mentalmente, garantire una eterogeneità nelle metodologie. A volte si
226 riesce, molte volte non si riesce. E riuscire un po' a catturare l'atten-
227 zione dei ragazzi che purtroppo [sic], anche dal concorso che ho fatto,
228 anche da come facciamo noi: noi pensiamo che le metodologie siano la
229 soluzione a tutti i problemi. Ma il ragazzo, quello che vuole, vuole [sic]
230 che ci sia un insegnante che gli spieghi bene le cose e che capisca bene
231 le cose, questo è il discorso. Dopo di che, qual è il discorso? Che se
232 viene meno l'aggancio tra l'insegnante e lo studente da questo punto
233 di vista, tu puoi anche fare il Kahoot!, puoi fare utilizzare la LIM con
234 delle animazioni, puoi fare la flipped classroom dando il materiale per
235 casa, però se mancano i fondamenti...

236 **Intervistatore:** Okay, quindi prima [bisogna] instaurare un rapporto.

237 **Docente 2:** Assolutamente, alla fine la cosa è sempre data dal rap-
238 porto coi ragazzi.

239 **Intervistatore:** E quindi, a livello di preparazione delle lezioni, lei
240 come si regola?

241 **Docente 2:** Allora, per la preparazione delle lezioni, così. Il momento
242 in cui riesco a preparare le lezioni è il momento più bello perché,
243 tendenzialmente, il mio percorso parte dalla verifica. Parto dalla prova
244 finale che può essere un' interrogazione orale o una verifica scritta dove
245 vengono somministrati degli esercizi che tengono conto di determinati
246 obiettivi minimi da cui poi partono anche gli altri obiettivi. E da lì,
247 poi, snocciolo le lezioni sulla base degli obiettivi a cui voglio arrivare.

248 **Intervistatore:** E quindi, alla fine, come valuta l'efficacia delle sue
249 lezioni?

250 **Docente 2:** Lo vedo dalla faccia dei ragazzi. Sì perché, nel senso, ci
251 sono a volte dei ragazzi che si sentono a distanza. Allora il mio scopo
252 è quello di provare a... non [a] “far piacere” la matematica e fisica,
253 perché a me non è che mi interessa [sic] di far piacere la matematica
254 e fisica, ma quello di arrivare a dire che ciascuno ha un suo livello: c'è
255 chi ti può [sic] arrivare all'otto o al nove, c'è chi può arrivare al sei. E
256 quindi provare in qualche maniera, ma talvolta...

257 **Intervistatore:** Quindi provare a coinvolgere i ragazzi per quanto
258 possibile. In quest'ottica vorrei chiederle come utilizza, se utilizza, la
259 tecnologia in classe?

260 **Docente 2:** Sì, allora, dunque, sulla tecnologia io utilizzo [Google]
261 Classroom. Quindi su Classroom carico dei materiali digitali. Quin-
262 di posso caricare, non so, per esempio, partendo più banalmente da
263 dei video che voglio far vedere solo dopo che ho spiegato le cose e
264 successivamente utilizzo il libro digitale. Specialmente per far vedere
265 anche delle animazioni o delle costruzioni grafiche che mi risultano un
266 pochino più difficili da costruire a mano. Talvolta la LIM è molto
267 utile anche perché hanno diverse opzioni per disegnare in maniera un
268 pochino più precisa. Però, molto spesso, a volte la utilizzo a volte no,
269 dipende dai casi. E poi utilizzo, mi piace molto ancora, sono un po'
270 antico, utilizzare GeoGebra. Poi sui programmi di matematica... ad
271 esempio, [docente] è molto più avanti di me, molto più smart. Vabbè,
272 ma non bisogna fare paragoni.

273 **Intervistatore:** Però, interessante. Perché mi avete già detto in due
274 cose completamente diverse, che non c'entrano assolutamente nien-
275 te l' una con l'altra. Quindi benissimo, quello che cerchiamo noi:
276 personaggi totalmente diversi.

277 **Docente 2:** Noi, per esempio, abbiamo la riunione di dipartimento
278 su cui condividiamo un po', e poi dopo arrivarci.

279 **Intervistatore:** Quindi non vi trovate mai a preparare insieme lezioni
280 o altre cose?

281 **Docente 2:** Allora, dunque, per esempio, mi hai fatto venire in men-
282 te una cosa importantissima. Perché io, nel corso della mia carriera
283 lavorativa, ho sviluppato due punti che per me rappresentano un gran-
284 de interesse dal punto di vista professionale. Allora, il primo punto

285 riguarda l'interdisciplinarietà. Nel senso che qui al [nome scuola] si
286 sperimenta molto da questo punto di vista. E questo, devo dire, è
287 un'altra cosa bella di questa scuola, perché ho la possibilità di parlare
288 e confrontarmi con i colleghi. Io credo che l'efficacia della didattica
289 sia, e questo purtroppo però... ho molti colleghi che stimolo e che han-
290 no una buona volontà di mettersi in gioco e di strutturare insieme
291 dei percorsi interdisciplinari. Ma anche, ad esempio, percorsi dove ci
292 scambiamo anche opinioni dal punto di vista della stessa disciplina.
293 E comunque vedo che ci sono colleghi che sono aperti al dialogo da
294 questo punto di vista. Quello che si può lavorare [sic] appunto per ga-
295 rantire una didattica più efficace è quello di rendere questi interventi,
296 frutto della buona volontà di alcuni colleghi, come qualcosa di strut-
297 turato. Cioè fare, a settembre, una programmazione interdisciplinare
298 vera e propria. Che poi, alla fine, a volte si fa, a volte non si fa questa
299 programmazione interdisciplinare. Specialmente anche in quinta che
300 serve moltissimo. E poi un'altra cosa su cui veramente è difficile uscire
301 [sic] e rappresenta un po' la seconda questione: oltre l'interdisciplina-
302 rità, che rappresenta un po' il mio tarlo, ho fatto anche dei laboratori
303 l'anno scorso, durante l'anno di prova, ma che devo dire non riesco
304 mai a trovare la chiave di volta, è il discorso della valutazione. Super
305 annoso e anche super inflazionato, in quanto è difficilissimo riuscire a
306 uscire da una logica di valutazione sommativa, in quanto la valuta-
307 zione formativa deve essere contestualizzata e verbalizzata. E poi la
308 valutazione formativa serve poi anche a far sviluppare allo studente
309 delle certe determinate [sic] competenze. E allora, se non fai la didat-
310 tica per competenze, la valutazione formativa risulta a metà. Poi a
311 me piace anziché... cioè uscire dalla logica: "attenzione, compito in
312 classe! Attenzione, interrogazione!"

313 **Intervistatore:** Invece, rispetto all'utilizzo delle tecnologie in classe,
314 lei dice molto [sic]: "differenziamo l'offerta per i ragazzi". Allora le
315 chiedo, è cambiato qualcosa nel tempo? Come si è evoluto il [suo]
316 rapporto [con le tecnologie] nel tempo? Come lei riesce a sfruttare
317 l'introduzione delle nuove tecnologie all'interno delle lezioni? C'è stato
318 un miglioramento [da questo punto di vista]?

319 **Docente 2:** Sì, c'è stato un notevolissimo miglioramento.

320 **Intervistatore:** E per utilizzare la LIM in modo efficiente, ha seguito
321 dei corsi?

322 **Docente 2:** No, non li ho seguiti.

323 **Intervistatore:** Durante le lezioni, in classe, anche se si predilige
324 una didattica frontale, l'utilizzo della LIM, abbiamo detto, per cercare
325 di far vedere meglio certi disegni. Ma a livello di software utilizzati
326 abbiamo detto GeoGebra...

327 **Docente 2:** Sì, GeoGebra, e poi utilizzo Classroom.

328 **Intervistatore:** E Classroom anche per condividere la lavagna che
329 ha scritto durante la lezione?

330 **Docente 2:** Mi è capitato [di farlo] durante la DAD durante il
331 COVID.

332 **Intervistatore:** Però regolarmente no?

333 **Docente 2:** Ah no, attenzione. Regolarmente lo faccio quando, ad
334 esempio, quando [sic] i ragazzi mi chiedono la correzione di determinati
335 esercizi. E allora io cosa faccio, li scrivo e poi li metto sulla Classroom.

336 **Intervistatore:** Per quanto riguarda la lavagna di gesso?

337 **Docente 2:** La uso in maniera equivalente alla LIM.

338 **Intervistatore:** Nel senso che anche la LIM viene utilizzata molto
339 spesso come foglio bianco?

340 **Docente 2:** Per esempio, se non utilizzo materiali da far vedere,
341 materiali che possono essere banalmente video e PowerPoint e oppure
342 [sic] se non utilizzo il libro digitale per far vedere delle costruzioni
343 grafiche, molto spesso io utilizzo la LIM come una lavagna normale.
344 A meno che non devo fare costruzioni particolari di cerchi, magari mi
345 potrà venire quando faccio la circonferenza.

346 **Intervistatore:** Invece, a livello di atteggiamento dei ragazzi post
347 un utilizzo [sic] più massiccio di queste tecnologie, a livello di
348 atteggiamento [sic], c'è più coinvolgimento oppure bene o male lo
349 stesso?

350 **Docente 2:** Ecco, questa cosa è subordinata, appunto, all'osservazio-
351 ne che avevamo fatto pochi minuti fa. Nel senso che la metodologia
352 non è mai subordinata all'input iniziale di comprensione. Cioè, nel
353 senso, nel momento in cui i ragazzi riescono a entrare un po' in confi-
354 denza con la disciplina... per esempio, mi è capitato di vedere un buon
355 coinvolgimento in un percorso legato alla cinematica, al moto rettilineo
356 uniforme e al moto uniformemente accelerato da parte di una [classe].
357 Nel momento in cui io facevo questo percorso c'era comunque un coin-
358 volgimento anche con la lezione frontale. Quindi, viceversa, magari,

359 io mi scervello a fare mille metodologie diverse, ma poi i ragazzi mi
360 dicono: “io voglio capire come si fa l’esercizio”.

361 **Intervistatore:** Invece a livello della circonferenza, nel tempo ci sono
362 state delle modifiche da parte sua rispetto a come spiegare, da che
363 punto partire?

364 **Docente 2:** Sì, beh, la circonferenza in geometria analitica è un argo-
365 mento che si presta molto bene anche alla trattazione, come dire, da
366 più punti di vista. Una trattazione non con diverse metodologie, ma
367 trattata sotto diversi aspetti, sotto varie sfaccettature. E quindi uti-
368 lizzando dei linguaggi, dei segni diversi. Quindi, fondamentalmente, la
369 circonferenza è un argomento molto interessante. Ma anche la parabola,
370 però devo dire che sulla circonferenza c’è la possibilità di spaziare,
371 perché può essere trattata sotto tanti aspetti: storico, poi spiegata
372 da un punto di vista con, appunto, la rappresentazione classicamen-
373 te geometrica, la rappresentazione legata alla geometria analitica, lo
374 studio tramite equazioni...

375 **Intervistatore:** Intanto che siamo in tema, rispetto poi alla capa-
376 cità dei ragazzi di fare delle trasformazioni rispetto ai diversi sistemi
377 semiotici di rappresentazione, Lei ha notato qualche difficoltà partico-
378 lare? Cioè, per esempio, è più difficile passare dalla rappresentazione
379 geometrica alla rappresentazione algebrica o viceversa?

380 **Docente 2:** Nel momento in cui, nell’istante iniziale, si riesce a fissare
381 bene una definizione con [un] linguaggio che sia il più possibile semplice
382 - l’ho sperimentato tantissimo parlando di funzioni, delle funzioni in
383 matematica - nel momento in cui la prima parte, un po’ delicata, si
384 riesce in qualche maniera si riesce [sic] a fissare bene la definizione di
385 funzione, inizialmente dal punto di vista insiemistico e poi algebrico,
386 nel momento in cui si fissa bene l’attenzione e si passa magari un po’
387 di tempo in più a capire qual è la definizione, il ragazzo, una volta
388 che ha capito cos’è, non fa fatica a passare da un linguaggio all’altro.
389 Se, invece, lo si dà per scontato, il ragazzo non lo capisce, non capisce
390 l’utilità e lo impara a memoria. Io, in maniera forse elementare, forse
391 proprio come lo si dice, proprio a livello basso, proprio gli dico [sic]:
392 “guardate, in una funzione ci sono vari modi di... ci sono diversi
393 linguaggi. [È] come dire la stessa cosa in inglese, come dirlo [sic] in
394 francese eccetera”.

395 **Intervistatore:** Quindi Lei proprio, però, pone l’attenzione quindi
396 su queste cose perché...

397 **Docente 2:** Sono anche cose molto belle, perché tu la stessa cosa la
398 dici in maniere diverse.

399 **Intervistatore:** Quindi, secondo Lei, è una difficoltà che, alla fine,
400 si viene ad annullare [sic] se uno lavora bene comunque in generale
401 rispetto a questo passaggio, [ossia la] trasformazione da un linguaggio
402 all'altro?

403 **Docente 2:** Assolutamente.

404 **Intervistatore:** Però, in generale, rispetto magari a quando si ricorda
405 inizialmente di aver presentato la circonferenza i primi anni, si ricorda
406 qualche tipo di modifica che ha fatto [e] che abbia detto: “adesso ho
407 trovato la chiave di lettura che può essere perfetta per la mediazione”?

408 **Docente 2:** Sì... allora... dunque... io molto spesso tra i vari errori
409 che commetto, un errore è quello, a volte, di tenere poco conto de-
410 gli argomenti precedenti, inteso in questa maniera: che, non so, per
411 esempio, in un percorso di matematica da terza superiore si può fare,
412 non so, per esempio, le funzioni [sic]. Sto concludendo la parabola, mi
413 sto avviando verso la circonferenza e trattandole [sic] nel loro ambito
414 di validità, rischiando di lavorare in compartimenti stagni. E questo,
415 purtroppo, è un rischio, perché ovviamente c'è da fare: parabola, que-
416 sto punto, questo punto, questo punto e questo punto; circonferenza:
417 questo punto, questo punto, questo punto e questo punto. Ecco, il
418 continuo richiamo agli argomenti precedenti mi è servito a creare un
419 collante. I ragazzi lo vedono? “Nooo, non è possibile! Un'altra volta
420 dobbiamo vedere questo argomento!” Poi, però, quando lo capiscono,
421 si mettono in moto. È quello il discorso. Quindi, per esempio, sulla
422 circonferenza dov'è che è nata la chiave di volta? Un tempo face-
423 vo solamente definizione, dimostrazione, equazione canonica, [equa-
424 zione] caratteristica e rappresentazione [grafica], posizione reciproca
425 retta-circonferenza. Adesso, magari, ci metto diverse rappresentazio-
426 ni: storica, poi il contesto legato alle coniche, cioè come si sviluppa
427 all'interno delle coniche. Poi ci sono tanti modi per poterla vedere
428 da un punto di vista: questo è un certo tipo di linguaggio, questo è
429 un altro tipo di linguaggio. E poi, per ultimo, ma non per ultimo di
430 importanza, [il] collegamento tra la circonferenza e le funzioni. Que-
431 sto diverso approccio, un po' più ricco, magari faccio un esercizio in
432 meno su come determinare l'equazione della circonferenza, ma questo
433 modo, un po' più ricco, dà una maggiore eterogeneità dal punto di
434 vista contenutistico.

435 **Intervistatore:** Quindi, magari, in ottica di riuscire a intercettare
436 un po' meglio tutti i vari stili di apprendimento dei vari studenti, la
437 loro attenzione...

438 **Docente 2:** Sì, esatto, esatto.

439 **Intervistatore:** Bello. Secondo me, questo fattore qui non è che lo
440 ritrovo [sic] poi in tutti voi insegnanti. Anche perché poi, ovviamente,
441 a seconda di chi magari ha seguito anche più una formazione anche,
442 diciamo, dalla parte umanistica della matematica, sicuramente questo
443 è il valore aggiunto che si riesce comunque a raggiungere. Invece,
444 a livello di studenti diversi che ha incontrato, quindi a insegnare al
445 liceo scientifico oppure alle scienze umane, oppure all'altro, eccetera,
446 c'è una differenza sostanziale nel modo di agire, per esempio anche
447 rispetto alla circonferenza, che immagino le sarà capitata di farla in
448 diversi contesti, c'è stato qualcosa che ha cambiato totalmente rispetto
449 magari a un liceo scientifico? Oppure la partenza è più o meno quella
450 e poi, ovviamente, ci sarà un grado maggiore di approfondimento o un
451 grado minore di approfondimento?

452 **Docente 2:** Allora, questa domanda è una domanda molto impor-
453 tante. Perché il tema della circonferenza, ad esempio, trattato al liceo
454 artistico, al liceo delle scienze umane o al liceo scientifico è un tema
455 che offre tre sfide didattiche completamente diverse. Al liceo artistico
456 ci sono dei ragazzi che hanno un pregiudizio molto forte nei confronti
457 della matematica, e quindi cosa succede? Succede che, in realtà, noi
458 disegnamo scolpiamo, hanno questo talento e la matematica non...
459 quando tu parti con la definizione di circonferenza e parti con l'equa-
460 zione canonica e le caratteristiche [della circonferenza], loro la fanno
461 come materia che devono studiare per prendere sei, per prendere la
462 sufficienza, e la sfida dell'artistico è quella di riuscire a contestualizza-
463 re questo argomento all'interno del percorso di riferimento. L'artistico
464 è quello dove ho visto... e, a volte, l'ho capito tardi l'anno scorso. Ma
465 io ho fatto un anno solo di liceo artistico, non è una cosa che si ca-
466 pisce subito. Per questo che l'anno del liceo artistico lo considero un
467 anno chiave, perché la matematica e la fisica sono viste come quella
468 materia che o le fai e dici: "questi non capiscono niente". Quindi
469 dopo succede appunto [che] non ci arrivano, non ci possono arrivare.
470 E quindi inizi ad auto alimentarti [sic] con la frustrazione, perché non
471 riescono a capire dalle equazioni fino alla circonferenza. Quindi è pro-
472 prio la frustrazione. Oppure dici: "guarda, qual è il nostro obiettivo?
473 Di cosa ha bisogno un ragazzo che esce dal percorso liceale del liceo

474 artistico?” E queste osservazioni io ho iniziate a farle l’anno scorso e
 475 poi sono ritornato qua, quindi...

476 **Intervistatore:** Quindi la sfida è molto differente?

477 **Docente 2:** Sì, la sfida è molto differente. Al liceo delle scienze
 478 umane, anche quello, il discorso del cerchio è un pochino, diciamo,
 479 più che altro subordinato sempre a un percorso di scienze umane che
 480 invece, insomma, è comunque sempre subordinato al percorso di studi.

481 **Intervistatore:** E invece al liceo scientifico è veramente così forte
 482 l’idea della matematica “bella”?

483 **Docente 2:** Diciamo che non è proprio così forte.

484 **Intervistatore:** Quindi, magari, gli interessa di più l’ambito delle
 485 scienze, però non è che proprio è per forza amore per la matematica?

486 **Docente 2:** È sempre un po’ subordinato, a volte, come [sic] si pone
 487 l’insegnante. Poi insomma la [classe], la classe che ho io, [classe] scien-
 488 ze applicate, è una classe di ragazzi che intervengono. Però, ovviamen-
 489 te, è una classe estremamente sfaccettata, insomma molto eterogenea,
 490 quindi, insomma...

491 **Intervistatore:** E sono molti?

492 **Docente 2:** [numero alunni]. Ecco, per esempio, la didattica, chiara-
 493 mente, dico forse una banalità, farla in una classe da diciotto, basta
 494 anche diciotto, è una cosa. In una classe da ventotto non...

495 **Intervistatore:** Immagino che dopo lì rientri anche prepotentemente
 496 il fatto che, per esempio, i lavori a gruppi siano più complicati da orga-
 497 nizzare tempisticamente. Allora, io credo di essere a posto: della LIM
 498 abbiamo parlato, di cosa utilizza per come [sic] strumenti di rappre-
 499 sentazione anche digitali. Ecco, questa è una domanda che non le ho
 500 fatto però: c’è uno strumento digitale che considera particolarmente
 501 efficace nel per [sic] l’insegnamento della matematica?

502 **Docente 2:** Allora, sicuramente... digitale giusto?

503 **Intervistatore:** Sì.

504 **Docente 2:** No, nessuno in particolare.

505 **Intervistatore:** Poi non mi ricordo una cosa, probabilmente ne ab-
 506 biamo già parlato: Lei la lavagna di gesso la usa?

507 **Docente 2:** La uso. Sì sì sì, assolutamente, però in maniera esatta-
 508 mente analoga alla LIM.

Appendice D

Trascrizione dell'intervista a Docente 3

1 **Intervistatore:** Quale è stato il tuo percorso di studi?

2 **Docente 3:** Allora, il mio percorso di studi, vabbè, alle superiori ho
3 fatto il liceo scientifico, tutto a [città], il [nome scuola], e poi mi sono
4 laureato in fisica a [città], col vecchio ordinamento dei quattro anni.
5 Ho maturato, dopo aver preso contatto col mondo della ricerca, non
6 mi ha molto affascinato, quindi durante il corso di studi ho maturato
7 l'idea di fare l'insegnante. Quindi ho fatto l'indirizzo didattico.

8 **Intervistatore:** E lì come funzionava?

9 **Docente 3:** Che al quarto anno c'erano [sic] proprio una opzione.

10 **Intervistatore:** Quindi tre anni standard per tutti e il quarto più
11 specializzato [sic]?

12 **Docente 3:** Esatto, alla fine non è tanto diverso da adesso, ma era
13 un anno solo. E quindi ho fatto l'indirizzo didattico e dopo, erano i
14 tempi della SSIS, la specializzazione. Vabbè, ho fatto un primo ciclo in
15 cui ho preso l'abilitazione in fisica a [città], poi, vabbè, per questioni,
16 diciamo, burocratiche, quindi la vecchia A-038, adesso fisica si chiama
17 A-019, comunque solo fisica. Anche perché già lavoravo nel frattempo,
18 cioè subito dopo la laurea ho iniziato a fare supplenze. Poi dopo,
19 successivamente, vabbè, per questioni burocratiche, mi sono trasferito
20 a [città], perché lavoravo lì come università. E quindi ho preso altre
21 due abilitazioni, cioè la matematica e fisica e informatica.

22 **Intervistatore:** Quindi, tornando un attimo al discorso del curricu-
23 lum didattico, rispetto alla tua formazione specifica come insegnante,
24 [hai frequentato] corsi specifici per l'insegnamento solo in ambito [sic]
25 [del] quarto anno di studi più la SSIS?

26 **Docente 3:** Sì, praticamente ho fatto: il quarto anno di studi, la
27 SSIS che sono stati due anni, e, in realtà, altri due. Però alla fine
28 avevo un sacco di crediti, quindi, diciamo, sono stati due anni molto
29 più blandi. Ho fatto didattica della matematica a [città] e didattica
30 dell'informatica, perché gli esami quelli generali, pedagogia [e] così
31 [via], mi erano stati riconosciuti. E ho fatto didattica della fisica a
32 [città 1], e poi a [città 2] ho fatto didattica della matematica e didattica
33 dell'informatica, e anche un po' di storia della matematica. Diciamo
34 che almeno la mia percezione per la mia formazione è stata di molto
35 più efficace [sic] la parte di [città 1] di fisica.

36 **Intervistatore:** Quindi la parte iniziale diciamo.

37 **Docente 3:** Sì sì.

38 **Intervistatore:** Ma a livello della parte didattica, o in generale come
39 formazione contenutistica?

40 **Docente 3:** Diciamo che, secondo me, a [città] era meno curata, ci
41 tenevano meno. E quindi, sì, i contenuti erano un po' meno strutturati.
42 Cioè sembravano un po' scoordinati, mentre qui, a [città], c'è stato, nel
43 corso di laurea in didattica della fisica, c'è stato [sic] più un percorso
44 definito. E ho un po' più preso [sic] degli strumenti che dei due [sic] ho
45 esportato quelli magari sulla matematica, anche per la mia formazione.
46 Perché io sono un fisico molto praticone, molto sperimentale.

47 **Intervistatore:** Quindi, a livello di esperienze lavorative, oltre l'in-
48 segnamento?

49 **Docente 3:** Praticamente niente, cioè, nel senso che [sic] lavorative
50 ufficiali. Poi ho partecipato qualche volta a qualche start up facendo
51 dei progetti o robe del genere. Però, aspetta, per molti anni forse
52 questo conta: ho progettato dei percorsi di robotica per ragazzi con
53 l'università di [città] per un museo. Cioè gli ho proprio progettato i
54 percorsi museali, per un progetto che si chiama [nome progetto].

55 **Intervistatore:** Rimanendo nell'ambito della formazione, secondo te
56 la tua formazione iniziale rispetto alla didattica, rispetto in generale
57 alla formazione, è stata sufficiente per poi diventare un insegnante? O
58 c'è stato molto da imparare sul campo?

59 **Docente 3:** Allora, secondo me, per quello che è stata la mia espe-
60 rienza, l'università ha dato la base, diciamo, teorica un po' troppo
61 astratta. Cioè, nel momento in cui si deve declinare per i ragazzini, io
62 forse anche eccedo troppo in quel senso, perché magari la faccio anche,
63 delle volte... certe cose, pur di fargliele capire, le semplifico eccessi-
64 vamente o le "cialtronizzo". Cioè, diciamo, il rigore va sotto il livello
65 minimo sindacale, però secondo me questo aspetto qui all'università
66 non te lo insegnano.

67 **Intervistatore:** Quindi, diciamo, una formazione che comunque...
68 sì, da un punto di vista "utile", però, da tanti punti di vista più
69 prettamente legati al rapporto coi ragazzi...

70 **Docente 3:** L'aspetto comunicativo... cioè il come comunicare le
71 cose, e in particolare relativo a quello che dicevo poi prima della SSIS,
72 mentre in fisica sono uscito con degli strumenti per far questo. Che
73 poi uno si deve comunque affinare per i fatti suoi, [ma] per matematica
74 mi sono reso conto di non averli. E li ho dovuti costruire io. Perché
75 io credo, cioè mi sembra, anche di vedere che molti colleghi magari
76 cercano di fare il corso loro [sic] di matematica come, non so, il corso
77 di analisi all'università semplificato. E, invece, la mia impressione è
78 che così non funziona e che dobbiamo fare qualcosa di molto diverso.
79 Però questo qualcosa di molto diverso è un po' molto fai da te, questa
80 è un po' la mia...

81 **Intervistatore:** Ma questo perché non... secondo te avresti dovuto
82 aver bisogno [sic] di più basi in matematica? Tipo proprio come corsi...
83 cioè, io mi metto nei panni di io [sic] laureato in matematica: magari
84 in fisica andrò un po' più a tentoni, rispetto anche magari proprio ai
85 contenuti di base, che magari non so bene quali siano, mentre magari
86 in matematica so qual è la storia di un concetto. Invece, dal punto di
87 vista fisico, sono totalmente...

88 **Docente 3:** Allora, questo in parte. Cioè, per alcuni argomenti speci-
89 fici, sì. Perché, ad esempio, ho molto questo problema, anche, secondo
90 me, relativo al fatto che sono laureato in fisica. Anche se sembra stra-
91 no, per, non so, temi come la probabilità e la statistica, perché magari
92 io li ho sempre usati molto. Cioè, perché alla fine un fisico li usa mol-
93 to, però non so, li usi un po' come uno che usa la calcolatrice senza
94 aver assolutamente l'idea dell'elettronica, di cosa c'è dentro. Mentre,
95 per altri aspetti in cui poi alla fine gli esami sono analoghi, ecco, cioè,
96 aspetti geometrici o di analisi così, ne so meno perché interessa meno

97 a me, ma non perché ho fatto esami, secondo me, meno approfonditi
 98 rispetto a matematica.

99 **Intervistatore:** Invece tornando alla scelta della carriera da inse-
 100 gnante, hai detto: “io ho maturato un interesse nell’insegnamento”.
 101 Ma non ho ben capito se rispetto al fatto che il mondo della ricerca
 102 non ti interessasse? O comunque anche con degli altri interessi forti
 103 sotto?

104 **Docente 3:** Allora, il mondo della ricerca, così, a livello idealistico mi
 105 interessava. Però, diciamo, non mi piaceva molto. Non mi è piaciuta,
 106 però, anche quando adesso lo guardo [sic], alcuni aspetti molto...
 107 allora, intanto, vabbè, l’ingresso era abbastanza complesso e anche in
 108 termini relazionali. Cioè, nel senso, io non sono molto bravo a ven-
 109 dermi. Quindi mi sono reso conto che non sarei riuscito ad arrivare
 110 troppo in là, oppure mi implicava [sic] delle cose che mi davano fa-
 111 stidio sostanzialmente. E l’altro [aspetto], un po’ più personale, nel
 112 senso che, se poi uno mi dà un laboratorio, io rischio che, anche se poi
 113 mi piace parlare con le persone, avere delle relazioni, però se, non so,
 114 se [sic] qualcuno mi dà un laboratorio con delle cose da fare, io rischio
 115 di tapparmi lì dentro e, non so, uscire alle undici di sera, eccetera. E
 116 quindi questo è un aspetto un po’ più personale, non so come si può
 117 qualificare ecco.

118 **Intervistatore:** Ci penserò, però ho capito.

119 **Docente 3:** Cioè mi costringe a relazionarmi con della gente l’inse-
 120 gnamento. Più di quello che farei se dovessi fare il ricercatore. Perché
 121 io sono quello che si “intripa” se deve fare una cosa e ha una macchina
 122 da far funzionare. E sta lì una settimana chiuso dentro.

123 **Intervistatore:** E, invece, da quanto tempo insegni?

124 **Docente 3:** Dal 2000.

125 **Intervistatore:** E sempre alle superiori?

126 **Docente 3:** Sempre alle superiori, anche se in molti posti diversi.

127 **Intervistatore:** A livello di tipologia di scuola?

128 **Docente 3:** Esatto, sì, ho fatto un po’ tutto, cioè professionale, ITIS.
 129 E la cosa strana, cioè, in realtà, strana, quando potevo scegliere sce-
 130 gliero, però sempre in ambito tecnologico/scientifico. Cioè ho lavora-
 131 to praticamente sempre, tranne due anni, o professionale industria e
 132 artigianato, ITIS elettronica o così o liceo scientifico.

133 **Intervistatore:** E invece ora da quanti anni è che insegni qua?

134 **Docente 3:** Molto, circa dal 2012, o comunque da più di dieci anni.

135 **Intervistatore:** Quindi moltissimi anni di liceo?

136 **Docente 3:** Sì sì sì, anche perché, anche prima, io credo di avere una
 137 quindicina di anni di liceo di esperienza. Però matematica da poco,
 138 cioè solo da una decina d'anni matematica.

139 **Intervistatore:** Perché comunque, okay, una decina di anni di mate-
 140 matica, e abbiamo detto prettamente ambito scientifico. Quindi liceo
 141 scientifico e niente altre cose... tipo artistico...?

142 **Docente 3:** Un anno avevo, per completare, proprio due ore al clas-
 143 sico. Però, se togli questo, poi per venire a [città] sono stato un anno
 144 all'alberghiero. Però sono sempre stati degli spot. È venuto un po' da
 145 solo, però non mi ci trovo [sic] poi male. Cioè, alla fine, anche qua mi
 146 hanno sempre fatto fare solo lo scientifico. Perché, diciamo, siccome
 147 ho questa forte propensione al laboratorio e gli altri, invece, dei due,
 148 moltissimi cercano di evitarlo, mi hanno messo subito alle scienze ap-
 149 plicate. Io anche qui vari indirizzi non li ho mai visti praticamente. E
 150 ,vedi, è successo un po' come ti dicevo: se mi dai un laboratorio mi ci
 151 posso chiudere dentro.

152 **Intervistatore:** E attualmente insegni sia matematica che fisica?

153 **Docente 3:** Sì.

154 **Intervistatore:** Com'è il contesto di insegnamento di questa scuola
 155 a livello di tecnologie, laboratori?

156 **Docente 3:** Non sono la persona giusta per chiederlo, perché il la-
 157 boratorio di fisica sono io il responsabile [sic]. Quindi secondo me
 158 funziona benissimo.

159 **Intervistatore:** Anche a livello di risorse dico. Ad esempio, immagi-
 160 no che le LIM ci siano in tutte le classi.

161 **Docente 3:** Le LIM ci sono in tutte le classi anche se, purtroppo, ri-
 162 spetto a 10 anni fa, è stata proprio fatta una politica di propagazione
 163 a scapito fortissimo della qualità. Cioè le LIM che abbiamo adesso,
 164 rispetto a quelle di dieci anni fa, consentono, secondo me, un terzo
 165 delle possibilità. E ti dico qual è il problema essenzialmente, cioè
 166 fanno solo due cose quelle che abbiamo: o sono una versione digitale
 167 della lavagna tradizionale oppure sono una ripetizione dello schermo
 168 del computer. Mentre quelle che avevamo all'inizio, quelle vecchie, col

169 proiettore, che erano molto più costose, c'era un software... adesso, io
170 un po' ci capisco di software, c'era un software molto più complicato
171 da sviluppare. Però avevano intanto la... cioè secondo me le cose più
172 importanti che facevano, che adesso non ci sono, sono sostanzialmente
173 queste: uno, per esempio, i ragazzi, cioè, se io adesso uso la lavagna,
174 sono sconnesso da internet. Quindi questo vuol dire che, se voglio
175 fargli vedere un'immagine o un'altra roba, io devo... perché proprio
176 fisicamente loro hanno Android, quindi la lavagna va con Android. Se
177 io voglio andare su internet devo selezionare la porta HDMI e diventa
178 lo schermo del computer che poi gestisco con la penna. Però, comun-
179 que, alla fine, io sto guardando un computer, gli faccio vedere quello
180 che si vede su un computer. Quindi non posso inserire nella mia lava-
181 gna delle immagini prese da internet, così poi vedrai come disegno io,
182 e altre cose. D'accordo. In più quello che succedeva all'inizio, che era
183 fantastico secondo me, è che i ragazzi si scaricavano il PDF delle mie
184 schermate e se lo dividevano.

185 **Intervistatore:** E invece adesso? Non si può?

186 **Docente 3:** Non si può, perché quello che è sulla lavagna non è su
187 internet.

188 **Intervistatore:** Ah, okay, questa cosa non me la aveva ancora detta
189 nessuno. Io pensavo che fossero favolose queste [LIM] che ci sono ora.

190 **Docente 3:** No, sono delle schifezze... almeno questa è la mia opi-
191 nione.

192 **Intervistatore:** Che poi adesso, se non sbaglio, le chiamano tipo
193 SmartBoard.

194 **Docente 3:** Sì, SmartBoard. No, ma ce ne sono di più belle. È che
195 queste hanno preso quelle economiche [sic] per metterle dappertutto.
196 Io avevo... lì ci sono questioni, diciamo, politiche anche dietro. Nel
197 senso, la politica di metterle dappertutto e di investire dei soldi altrove
198 o anche per far figo [sic] di avere quelle. Perché io avevo detto: “dei
199 due, teniamo quelle vecchie finché vanno”. No, invece, quando ci sono
200 stati i soldi, invece che comprarne venti buone e tenere le venti LIM
201 vecchie, ne abbiamo comprate quaranta.

202 **Intervistatore:** E a livello di altri dispositivi tecnologici?

203 **Docente 3:** L'altra cosa che avevo, scusa, è che gli altri [sic] avevano
204 molti tool di disegno. Per esempio avevano: un compasso virtuale,
205 una squadra virtuale, un goniometro virtuale. Io tiravo fuori tutte

206 queste robe e facevo vedere agli studenti come si costruivano le cose.
 207 Adesso no. E ho contro di me l'aspetto per cui nel team digitale ci sono
 208 un paio di colleghi di matematica, ma loro sono precisissimi, quindi
 209 disegnano molto bene. Quindi non riesco neanche a spiegargli la mia
 210 difficoltà.

211 **Intervistatore:** Invece, dicevo, a livello di altri dispositivi tecnologici
 212 che la scuola mette a disposizione?

213 **Docente 3:** Allora, il laboratorio di informatica... la difficoltà del
 214 laboratorio di informatica, io non lo uso poi da alcuni anni, è che è
 215 molto richiesto. Però io ho il vantaggio che nel laboratorio di fisica
 216 abbiamo i portatili. Quindi, quando voglio fare qualcosa al computer,
 217 anche per matematica, io me ne frego, la travesto da lezione di fisica.

218 **Intervistatore:** Anche tablet?

219 **Docente 3:** I tablet ci sono, non li uso, ma ci sono. L'altra cosa è che
 220 i ragazzi hanno molto comunque il tablet loro. E lo possono utilizzare.
 221 Per esempio, io li faccio lavorare molto con Desmos in matematica. E
 222 li faccio lavorare molto col loro [tablet] regolarmente. Anche perché
 223 così non hai tutta questa infrastruttura. Cioè dici: "okay ragazzi", li
 224 metto a gruppi, così se uno ha la batteria scarica segue gli altri.

225 **Intervistatore:** Però, comunque, anche su questi aspetti non riusciamo
 226 a interfacciarci granché facendo lavorare gli studenti, ad esempio,
 227 con il loro tablet e con la LIM?

228 **Docente 3:** Quello so che si fa, però io adesso, sinceramente, io ce
 229 l'ho un po' con questi affari. No, perché quello, invece, si può, perché
 230 ti connetti via bluetooth. Cioè, praticamente, quelle robe lì, avendo
 231 che [sic] il loro processore va con Android però non sono collegati,
 232 perché non sono collegati al Wi-Fi, praticamente, se io uso Android,
 233 loro sono sconnessi dal mondo però va il bluetooth. Cioè è come avere
 234 un telefono senza SIM, oppure lo schermo di un computer. Ma tanto
 235 quello lo vedi perché mi scappa sempre di [omissis] con quegli affari,
 236 anche quando faccio lezione, brontolo insomma.

237 **Intervistatore:** Invece, tornando un po' più al discorso "formazio-
 238 ne", ritiene che la sua formazione iniziale per andare a insegnare sia
 239 stata sufficiente?

240 **Docente 3:** Secondo me sì, quello che manca lo prendi sul campo.

241 **Intervistatore:** Quindi, a livello della parte della didattica, abba-
 242 stanza soddisfatto?

243 **Docente 3:** No, allora aspetta... cioè nel senso che... quindi stiamo
 244 più parlando della SSIS? Più delle cose di didattica generale?

245 **Intervistatore:** Sì, esatto.

246 **Docente 3:** Secondo me, quello che proprio notavo, è che mi so-
 247 no stati dati pochi strumenti. Non da tutti, ma da una parte delle
 248 materie diciamo umanistiche. Cioè, nel senso che, per esempio, una
 249 volta, adesso ti racconto questo aneddoto perché forse può aiutarti
 250 a far capire [sic] cosa intendo. Una volta mi ricordo che stavamo...
 251 c'era questa lezione di adesso non mi ricordo neanche come si chiama
 252 la materia. Comunque era tipo la psicologia dell'apprendimento. Al-
 253 lora questa [docente] iniziò a spiegarci cosa succedeva nella testa di
 254 qualcuno quando vedeva, non so, quando leggeva una poesia o quando
 255 vedeva un quadro o robe così [sic]. Allora noi le dicemmo: "ma a noi
 256 interesserebbe anche cosa succede nella testa di qualcuno se vedi [sic]
 257 una formula, se vedi un grafico, se vedi un diagramma di flusso, se
 258 vedi un rettangolo". E lei ci fa: "io non mi occupo di queste cose".
 259 Cioè questi aspetti qua sono... cioè... anzi, a me sarebbe anche inte-
 260 ressato sapere [sic] alcuni aspetti di queste cose, no? Cioè, oltre che
 261 interessato, lo riterrei forse anche utile. E un pochino ho cercato di,
 262 cioè, parlando con gli studenti poi delle volte, avendo del feedback.
 263 Però è una cosa molto fai da te diciamo.

264 **Intervistatore:** E invece, a livello di tipologie di scuole dove hai
 265 insegnato, ci sono anche delle scuole private?

266 **Docente 3:** No.

267 **Intervistatore:** Quindi solo sul pubblico [sic]? E comunque, in ge-
 268 nerale, hai notato delle differenze molto forti rispetto, magari, a un
 269 contesto rispetto ad un altro [sic]? O, in generale, comunque...

270 **Docente 3:** Intendi?

271 **Intervistatore:** Allora, in realtà intendo tante cose. Non volevo
 272 strutturare troppo la domanda per sentire cosa... intanto, a livello...
 273 cioè in realtà su più livelli, intanto a livello di professionale, istituto
 274 tecnico e liceo, che differenze ci sono, magari proprio sostanziali? E
 275 poi, a livello di differenti tipologie di classe che ti trovi [davanti] i
 276 diversi anni, se c'è stato [sic], se vedi molta differenza, molta variabilità
 277 o se il tuo intervento [didattico] comunque, più o meno, parte dalle
 278 stesse basi e può andare bene per più ambiti?

279 **Docente 3:** No, molta variabilità. Allora, nei professionali... cioè è
280 brutto fare gli strati [sic] ma, diciamo, partendo dal basso, il problema
281 lì è che è gente che non vuole andare a scuola ovviamente, non gliene
282 frega niente. Non lo so, poi io ero anche molto giovane quando c'ero e
283 molto inesperto. Delle volte me lo chiedo. Cioè l'ultimo professionale
284 che ho fatto è stato l'alberghiero quando sono venuto in provincia di
285 [città 1]. Perché prima ero a [città 2] e tutto sommato mi trovavo
286 [bene]. All'inizio ero un po' preoccupato perché avevo fatto tutto il
287 giro, ero arrivato al liceo. Poi, per venire in provincia, no, bisogna fare
288 così. Sono tornato all'alberghiero, e, invece, alla fine poi, alla fine non
289 sono stato insoddisfatto. Ovviamente uno si pone gli obiettivi. Però
290 lì, tutto sommato, cioè loro non vogliono, non gli interessa la scuola.
291 Gli interessa il loro lavoro, e ti fanno sempre quei discorsi, no? Tanto
292 questa roba non gli interessa: "cosa me ne faccio?", e tutto il resto. E
293 però, cioè, vedevo che riuscivo un pochino, a mica a [sic] tutti magari,
294 però, diciamo, a una certa quota, a un pochino incuriosirli e fargli fare
295 delle cose. Perché avevo quasi abolito le lezioni frontali, cioè gli facevo
296 fare della gran roba [sic] a loro e gli ponevo come un po' delle piccole
297 sfide, piccoli giochi.

298 **Intervistatore:** E queste esperienze ti hanno aiutato anche nell'in-
299 segnamento invece poi magari anche a un liceo?

300 **Docente 3:** Sì, perché mi hanno aiutato ad avere molta più pazienza,
301 secondo me, e a capire molto di più la loro difficoltà. Perché, anche
302 delle volte che mi salta fuori che strangolerei qualcuno, penso che tutto
303 sommato, poveretti, nel senso, che c'è una... adesso poi, adesso ho solo
304 i grandi dalla terza in avanti. Insomma, cioè, è gente che conosci, che
305 con cui [sic] si viaggia. E alla fine, sì, ti aiuta molto ad aver pazienza
306 non in senso, cioè, a capire di più le difficoltà che ci sono. Perché hai
307 un metro di paragone ben diverso da quello che può avere uno che ha
308 sempre lavorato al liceo. Infatti, allora, sono stati anni anche molto
309 difficili a volte, però credo come esperienza sia stata molto importante.

310 **Intervistatore:** Quindi, all'interno della tua formazione, positiva
311 [come esperienza]?

312 **Docente 3:** Più formativi che professionali forse, professionalizzanti.

313 **Intervistatore:** Quindi, in generale, oggi, dopo tutto questo percor-
314 so, oggi come descriveresti il tuo approccio didattico?

315 **Docente 3:** Allora, io cerco molto di farli interagire e anche perché
316 adesso, quando posso, e quest'anno sono fortunato che è così, che ho

317 delle classi molto reattive. E quindi, in realtà, cerco proprio di pro-
318 porre i temi come qualcosa che costruiamo un po' insieme, diciamo,
319 facendogli tirare fuori quello che già sanno, no? E andando avanti un
320 po' a passettini, facendo in modo di stare dietro a tutti. E sicuramen-
321 te un aggettivo che darei è "poco lineare", nel senso che, a volte, una
322 cosa che a loro dà fastidio e che, a volte, mi dicono è che sono poco
323 sequenziale. Per esempio rispetto al libro di testo eccetera. Anche
324 perché tendo a sottolineare, in particolare, alcuni temi che mi inte-
325 ressano, cioè che mi interessano anche per loro, no? Nel senso, non
326 so, l'aspetto relativo alle funzioni di qualsiasi cosa: quando posso, io
327 mi interrompo e notiamo se ha degli aspetti utili. E poi quello for-
328 se appunto dipende dal fatto che, come fisico, magari vedo di più la
329 funzione che la parte formale. Però cose del genere, però questo un
330 pochino a volte disorienta. Però io credo anche che poi sia anche...
331 cioè, lo so che gli dà fastidio, però ritengo che sia poi anche utile che
332 uno non si abitui a partire da pagina uno e studiare fino a pagina
333 venti.

334 **Intervistatore:** Beh, sì, è formativo. Quindi queste sono le caratte-
335 ristiche principali?

336 **Docente 3:** Sì, le prime cose che mi vengono in mente, sì.

337 **Intervistatore:** E invece, a livello di metodologie didattiche utiliz-
338 zate, hai detto lezioni frontali un po'...

339 **Docente 3:** Sì, la lezione frontale cerco sempre di farla comunque
340 molto interattiva. Faccio parecchio lavoro di gruppo, cooperative
341 learning se si vuole fare i fighetti, ma insomma...

342 **Intervistatore:** Più a livello di problem solving o più a livello di, non
343 so, facciamo un progetto più ampio?

344 **Docente 3:** Allora, bella domanda. Nella scuola di come è adesso
345 [sic] faccio fatica a fare dei progetti ampi. Mi piacerebbe, una volta
346 lo facevo, adesso ci sono tutta una serie di cose in mezzo, no? Che
347 si prendono tutta una parte e che comunque sono progetti più ampi
348 se vogliamo. Tipo il PCTO di educazione civica, tutte queste robe
349 qui. Per cui non riesco ad avere tanto tempo, cerco di fargli fare
350 dei piccoli progetti delle volte, che però portano magari avanti un
351 po' loro. Magari anche a casa. Cioè delle volte gli faccio fare dei
352 progetti, anche se più in fisica che in matematica. Però dei progetti che
353 magari ogni gruppo ha un obiettivo e poi facciamo condivisione. Ad
354 esempio, questo spazio qua è molto bello per fare ste robe [sic] e cose

355 del genere. Però, purtroppo, un po' più semplici, un po' più piccoli e
356 un po' più autonomi. Però questo sostituisce quasi completamente le
357 interrogazioni orali, quindi a loro piace.

358 **Intervistatore:** Intanto che siamo entrati in tema, quindi anche
359 molta valutazione formativa?

360 **Docente 3:** Sì, molta.

361 **Intervistatore:** Però, a livello... per esempio, se noi prendiamo un
362 determinato argomento, quindi sviluppi un po' tipo lezione frontale
363 e un po' e un po' [sic]... non ci sono mai, tipo, degli argomenti che
364 svolgi totalmente in una modalità?

365 **Docente 3:** No, direi di no. Anche perché faccio fatica, no? Allora,
366 ci sono state delle volte che ho provato a fare... no, solo frontale no,
367 perché vedo... cioè, fare anche quelle volte che li metto a gruppi,
368 anche solo a fare tre esercizi insieme, magari un po' difficili, mi aiuta
369 anche molto a capire. Cioè, al di là di cose, invece, in cui faccio
370 cose più complesse, nel senso che li faccio... per esempio, vabbè, oggi,
371 non so, li ho fatti arrivare un po' loro al discorso delle tangenti della
372 parabola, a gruppetti. E loro si mettono sempre un gruppi un po'
373 misti. Quindi, magari, c'è quello bravo che ha più idee e gli altri gli
374 stanno dietro. Però ci arrivano e però, anche quando semplicemente
375 gli faccio fare tre esercizi perché voglio vedere, cioè mi aiuta molto,
376 perché un conto è se glieli do a casa. Sono ragazzi che mediamente li
377 fanno [gli esercizi] perché ci tengono, non perché siano chissà che, ma
378 perché semplicemente gli scoccia prendere quattro alla verifica. Però
379 vedo un pochino meglio, cioè magari riesco un pochino a vedere dove
380 sono le difficoltà e tutto il resto. Anche piuttosto, per esempio, l'altro
381 aspetto, cerco di non fare quelle cose tipo chiamo uno alla lavagna.
382 Perché gli altri mi stanno poco dietro, dei due preferisco fare in questo
383 modo.

384 **Intervistatore:** Quindi, in generale, secondo te, quali sono gli aspetti
385 più importanti da considerare quando si insegna matematica?

386 **Docente 3:** Secondo me lo chiedi alla persona sbagliata, però ci provo.
387 Allora, gli aspetti più importanti, secondo me, dunque, intanto, sono
388 di dare una visione globale della matematica. Che è quello che io
389 penso, almeno per quella che è stata la mia esperienza. Però delle
390 volte poi sento anche gli studenti e mi dicono un po' la stessa cosa.
391 Cioè delle volte manca un po'... nel senso che fai la parabola, poi,
392 non so, fai, boh, le formule di duplicazione, e poi, oppure... anche

all'università è così. Almeno, io lo sentivo molto così. E, secondo me, una relazione c'è, cioè: mi fanno il teorema di Weierstrass, okay, mi dici questa cosa, ma poi, dopo, questa cosa, cosa c'entra con tutto il resto? Dove la uso? C'è, magari, okay, la usi per dimostrare un altro teorema. Però questa è una cosa che alla scuola manca, cioè che, secondo me, nella formazione un po' manca. E poi l'altro aspetto, che, probabilmente, questo non è molto bello, però io cerco di dare una visione anche un po' ad ampio spettro anche sul piano applicativo. Perché alla fine, dei ragazzi che vanno al liceo, quelli che vanno a fare davvero matematica e fisica sono il dieci per cento. Anche quelli che seguono una carriera scientifica o tecnica vanno in gran parte a ingegneria o robe del genere. Allora non è poi neanche troppo giusto dire: "ah io sono un fisico". Cioè, a parte che, ... e quindi bisogna, secondo me, devo anche cercare, nel limite delle mie competenze, di dare un po' uno sguardo verso le varie applicazioni. Che questa è l'altra cosa che non c'è sui libri e che cerco di fare io.

Intervistatore: E quindi in ottica magari anche di questa cosa, come prepari le lezioni? Se le prepari.

Docente 3: No, allora, delle volte sì, delle volte no. In realtà cerco di fare un po' di tutto. Tipo quando introduco un argomento, la prima volta li faccio parlare un po' e cerchiamo un pochino di, appunto, di dargli un senso e di strutturarli, no? Non so, appunto, la parabola, okay, è un luogo di punti. Allora definiamo cos'è un luogo di punti, eccetera. Poi, per esempio, appunto, in cose di geometria analitica, comunque una parte di geometria formale c'è: come si ricava un'equazione, eccetera. E poi, in realtà, cerco di fargli fare molte applicazioni. Nel senso di esercizi, cercando di darli molto diversi. Cioè non addestrarli a fare sempre la stessa cosa e cercando di sottolineare quelli che sono i... non so... di andare un po' più al livello, a un livello superiore. Cioè vedere magari le tecniche o gli aspetti un po' più generali che si ripetono. E questi glieli faccio notare. Non so, per esempio, appunto, mi viene sempre la parabola, perché la stiamo facendo adesso. Però gli aspetti della parabola relativi, appunto, al senso delle tangenti, oppure ad aspetti delle funzioni. E se in un esercizio mettiamo un delta uguale a zero, cioè questa cosa, il delta, non è una macchinetta per fare equazioni di secondo grado, ma ce l'ha un senso. Ecco, queste cose qua cerco un po' di sottolinearle, magari con gli esercizi.

Intervistatore: In tutto questo poi come valuta effettivamente l'efficacia di una lezione?

432 **Docente 3:** Allora, la valutazione, diciamo, in itinere più o meno,
 433 vedo se riescono a fare gli esercizi. Cerco di chiedergli che difficoltà
 434 hanno avuto.

435 **Intervistatore:** Quindi anche proprio lezione per lezione, dopo aver-
 436 gli assegnato, magari, anche qualcosa da fare a casa?

437 **Docente 3:** Sì, esatto, sì. O parlando con loro, oppure in base a
 438 cosa mi chiedono di correggere, eccetera. E oppure, appunto, come ti
 439 dicevo, quando faccio poi quei lavoretti di gruppo cerco di individuare
 440 dove siano le difficoltà. Poi, ovviamente, c'è la valutazione, quella
 441 sommativa, ma è una classica verifica.

442 **Intervistatore:** Opinione generale sull'impiego delle tecnologie nel-
 443 l'insegnamento della matematica?

444 **Docente 3:** Mi piacerebbe averne di più e saperle usare meglio. Cioè,
 445 per esempio, io in fisica mi sento tranquillo. Allora, intanto c'è una
 446 tecnologia più vasta perché appunto... tutto quello che ho lo so usare.
 447 In matematica, spesso, secondo me, a me mancano anche un po' le
 448 conoscenze a livello di quali siano [sic], quali possono essere. Perché
 449 poi sono più cose software [sic], no? Però anche, per esempio, anche
 450 se appunto poi ho l'abilitazione in informatica, anche, per esempio,
 451 gli aspetti legati alla programmazione, eccetera. A volte li sottolineo,
 452 però loro, cioè... magari, non ho modo di farglieli fare, perché poi le
 453 ore di informatica del collega sono poche. E loro, spesso, iniziano a
 454 programmare dopo, cioè è un po' difficile coordinarsi.

455 **Intervistatore:** E invece, quindi, abbiamo detto, nessun corso spe-
 456 cifico sull'utilizzo della LIM? Di qualche software particolare? Di
 457 qualche applicazione particolare?

458 **Docente 3:** No, allora, ho fatto magari qualche corso di formazione.
 459 Però su cose più, diciamo, laboratoriali. Oppure cose... cioè sto pro-
 460 prio su due poli, no? Magari, appunto, o cose di laboratorio, oppure,
 461 magari, qualche conferenza più culturale se vogliamo chiamarla così.
 462 Non so, di storia della matematica, così. Quando c'è qualcosa che mi
 463 interessa e ho tempo, che succede sempre meno, ci vado, no? Questi
 464 corsi... perché io poi sono un po' dell'idea che il software c'è, a me
 465 piace smanettarci.

466 **Intervistatore:** Quindi, in generale, come valuti la tua esperienza
 467 rispetto, magari, a quella che era dieci anni fa senza alcun tipo di
 468 tecnologia in classe? Oggi, diciamo, l'avvento della tecnologia, come
 469 valuti questo nuovo orizzonte, diciamo, anche dell'insegnamento?

470 **Docente 3:** Ha pro e contro. Dunque, ovviamente i pro sono comun-
471 que che, almeno potenzialmente, ti permette di fare un sacco di cose.
472 Cioè, non so, appunto, usare cose come Desmos e GeoGebra o simili
473 non è male. Come, secondo me, non è male, in certi casi, per esempio,
474 spingere i ragazzi a esplorarne i limiti [di Desmos e GeoGebra]. Non
475 so, per esempio, un anno ho fatto, ho trovato delle cose che facevano
476 “crashare” un po’ Desmos. Per cui le cose non funzionavano bene.
477 Io gli ho fatto cercare dove non funzionava, perché lì devi anche aver
478 capito meglio come funziona. E i contro sono che, in certi contesti, ti
479 fa perdere un sacco di tempo. Perché... non so... abbiamo il labora-
480 torio. Vabbè, è quello di fisica, però tanto i problemi sono quelli. E,
481 non so, hanno gli aggeggi che si connettono al loro telefono. Allora:
482 quello non gli piace il bluetooth, oppure un giorno in classe non ho la
483 lavagna di ardesia. C’era un giorno che non funzionava la LIM e non
484 si capiva perché, alla fine era il cavo che, vabbè, aveva un problema.
485 Ceh, io non avevo più neanche una lavagna, questi aspetti qua.

486 **Intervistatore:** E quindi, giusto perché abbiamo nominato la lavagna
487 di ardesia, la usi ancora?

488 **Docente 3:** Non ce l’ho.

489 **Intervistatore:** Ah, quindi proprio non ce l’hai [la lavagna di arde-
490 sia]. Perché altri mi hanno detto che ce l’hanno ancora.

491 **Docente 3:** Perché io sono nei prefabbricati [a insegnare] e non ce
492 l’ho. Io, tendenzialmente, non mi piace [sic].

493 **Intervistatore:** Okay, quindi, anche se ce l’ avessi, non la useresti?

494 **Docente 3:** Diciamo, quando avevo la LIM vecchia, con le Prome-
495 thean insomma, che facevano tutto, non avevo motivo. Adesso delle
496 volte la userei, perché, per esempio, con quell’altra, queste hanno dei
497 limiti. Ad esempio, non puoi scorrere su una pagina, no? Allora...
498 cioè, finita una pagina, devi aprirne un’altra. Allora... cioè, delle
499 volte vai avanti e indietro. E, se avessi quella di ardesia, magari per
500 qualcosa che mi serve lì, come una volta. Non so, magari facevi un
501 problema, scrivevi da un lato i dati. Perché, invece, una LIM come
502 superficie è molto più piccola di una lavagna di ardesia. Diciamo che,
503 se le LIM fossero buone, non ce ne sarebbe bisogno. Tranne quando
504 manca la luce.

505 **Intervistatore:** Quindi, a livello di strumenti digitali utilizzati re-
506 golarmente nelle lezioni di matematica, a parte le LIM, a livello di
507 applicazioni, invece, abbiamo detto Desmos, GeoGebra...?

508 **Docente 3:** Sì, per la matematica, in generale, anche i fogli di calco-
509 lo delle volte, soprattutto quando faccio statistica o cose del genere.
510 Probabilità o statistica, così, che altro?

511 **Intervistatore:** Invece magari, inizialmente, il passaggio tra no tec-
512 nologia e tecnologia [in classe] è stato difficoltoso?

513 **Docente 3:** No, perché, in realtà, mi incuriosiva personalmente.
514 Quindi, cioè, quando sono arrivate erano robe che avevo già speri-
515 mentato.

516 **Intervistatore:** C'è uno strumento digitale che consideri particolar-
517 mente efficace per l'insegnamento della matematica?

518 **Docente 3:** Secondo me i software grafici, cioè come GeoGebra, De-
519 smos, così. Perché credo che sia quello su cui [sic] loro hanno più
520 [bisogno]. È anche un canale di input per loro molto efficace.

521 **Intervistatore:** Invece, a livello di introduzione della tecnologia e
522 [livello di] coinvolgimento degli studenti, c'è stato, secondo te, un
523 significativo miglioramento del coinvolgimento?

524 **Docente 3:** All'inizio, sì. Adesso, secondo me, è una cosa talmente
525 banale e abituale che non è più una novità.

526 **Intervistatore:** Quindi bello che ci sia, però più a livello di che cosa
527 riesce a fare rispetto che [sic] proprio a un coinvolgimento.

528 **Docente 3:** Sì sì, cioè, è più che adesso se usi la lavagna di ardesia ti
529 dicono che sei un rottame, non: “che bello che c'è la lavagna nuova”.
530 Invece, quando c'era la LIM all'inizio, cioè, questa è una cosa che
531 nell'evoluzione... lo avrai visto anche te?

532 **Intervistatore:** Sì sì, perché per noi, all'inizio, cioè, noi non le aveva-
533 mo [le LIM] neanche in tutte le classi. Quindi per me era tipo: “wow,
534 questa cosa è fantastica”. Poi, ovviamente, avevano i suoi problemi
535 [sic]. Cioè tutte le volte stare là a calibrare la penna che non fun-
536 zionava, cioè c'era qualcosa. Però bello. Direi che su questa sezione
537 ci siamo abbastanza, direi che passiamo direttamente alla parte più
538 inerente alla circonferenza. Allora, la prima cosa che chiedo di solito,
539 e direi che seguiamo lo stesso iter, è: come di solito presenti per la
540 prima volta la circonferenza in classe?

541 **Docente 3:** Di solito la presento come luogo dei punti. Penso che farò
542 così anche adesso. E perché mi riallaccio, diciamo... aspetta... stiamo
543 parlando ovviamente di circonferenza sul piano cartesiano. Cioè loro
544 la conoscono già [la circonferenza], quindi la presento così. Perché mi

545 riallaccio alle loro conoscenze precedenti. E, partendo dalla definizio-
 546 ne, a quel punto, conoscendo anche la distanza tra due punti, ricavare
 547 [l'equazione] non è questa cosa così strana. Più o meno l'approccio è
 548 questo.

549 **Intervistatore:** Perfetto. E invece a livello di cambiamenti nel tempo
 550 che hai fatto rispetto al primo approccio che dai ai tuoi studenti,
 551 rispetto a questo argomento, c'è qualche variazione sostanziale che
 552 negli anni [sic] hai detto: "wow"? Non so, magari, rispetto a: "ho
 553 visto che questa cosa proprio non funziona"?

554 **Docente 3:** No, non mi viene in mente niente, c'è una cosa che in
 555 realtà... io erano [numero] o [numero] anni che non avevo una terza
 556 di matematica tra l'altro. Non... questo non ci avevo pensato, ma è
 557 un aspetto che può essere... quindi non ci sono state molte... e sono
 558 [numero] in tutto che insegno matematica al liceo, quindi...

559 **Intervistatore:** Quindi, diciamo, magari non c'è stato più di tanto
 560 modo di sperimentare.

561 **Docente 3:** No, esatto, non ci avevo pensato. Mi è venuto in mente
 562 adesso parlando.

563 **Intervistatore:** Quindi, proviamo a fare lo stesso questa domanda.
 564 Perché quella dopo sarebbe stata: hai mai notato delle differenze nel-
 565 l'efficacia delle rappresentazioni, in base, magari, anche al livello della
 566 classe e alla tipologia di studenti?

567 **Docente 3:** No, appunto, ormai si perde. No, direi di no. Anche
 568 perché è una cosa che, cioè, secondo me, fatta come la faccio è ab-
 569 bastanza efficace. Per esempio, l'ellisse all'inizio lo facevo [sic] come
 570 luogo di punti, adesso vedo che funziona meglio come dilatazione della
 571 circonferenza. E poi dopo, cioè, parto dalla formula e poi dopo vado
 572 a fare...

573 **Intervistatore:** E sempre rimanendo, invece, sui sistemi di rappre-
 574 sentazione della circonferenza. Quindi, magari, muoversi da un piano
 575 grafico a un piano dell'equazione, a un piano analitico, ci sono delle
 576 difficoltà particolari degli studenti nel passare da un sistema di rap-
 577 presentazione all'altro? Oppure, cioè, una volta che sono più o meno
 578 competenti in materia riescono abbastanza facilmente?

579 **Docente 3:** Beh, cioè, dopo ci riescono. In una fase iniziale fanno
 580 molta fatica. Perché, soprattutto quando si esce dalla circonferenza
 581 centrata sull'origine, anche se ci ho già lavorato, diciamo, capire al volo

582 la questione della traslazione e poi, soprattutto, dalla forma canonica,
583 insomma, capire che è la stessa roba che avevamo fatto prima, scritta
584 in forma diversa, è, forse, da un punto di vista formale della parte
585 introduttiva, è la cosa che io noto che sia più difficile. Quindi dalla
586 forma canonica, diciamo, alla forma quella $x^2 + y^2$... pitagorica.

587 **Intervistatore:** Per quanto riguarda, invece, la tecnologia, rispetto
588 proprio specificamente a questo tipo di argomento, c'è qualcosa che
589 utilizzi di solito?

590 **Docente 3:** Sempre Desmos.

Appendice E

Trascrizione dell'intervista a Docente 4

1 **Intervistatore:** Qual è stato il suo percorso di studi?

2 **Docente 4:** Io ho fatto prima il liceo scientifico, non qui a [città]
3 ma vicino a [città], a [città], e dopo di che sono andato a fare fisica a
4 [città]. E dopo ho fatto il dottorato in fisica teorica. E dopo di che
5 avevo una borsa di studio per andare a fare un postdoc ad [città], ma
6 ho deciso che, siccome non c'era la possibilità di tornare, ho deciso
7 che forse era l'ora [sic] di fare qualche scelta. E ho detto: “vabbè, va
8 bene anche insegnare, non mi dispiace”.

9 **Intervistatore:** Okay, quindi diciamo che, alla fine, l'insegnamento è
10 stato più, diciamo, magari una cosa che non è partita da un interesse
11 prettamente nell'insegnamento.

12 **Docente 4:** All'inizio ti devo confessare che, magari, ero un po' ti-
13 moroso perché ricordavo la mia classe del liceo e dicevo: “sei sicuro di
14 quello che vai a fare?” Avevo una classe di liceo abbastanza complicata.

15 **Intervistatore:** Posso capire, anche noi eravamo degli studenti un
16 po' particolari. E quindi a livello di, invece, corsi specifici per l'inse-
17 gnamento seguiti?

18 **Docente 4:** Guarda, nessuno. Perché, allora, nel corso di studi [al-
19 l'università], avevo fatto proprio l'indirizzo di carattere... quello che
20 era quello [sic] che una volta si chiamava l'indirizzo generale. Che
21 proprio dedicato [sic] alla ricerca e quindi poi è capitato che, appunto,
22 dopo che ho fatto questa scelta, ci fu il concorso per insegnare che era

23 partito nel 2000, mi sembra. E ho vinto, sono andato a insegnare a
24 [città], sempre in un liceo scientifico e lì sono rimasto per [numero]
25 anni. Sono rimasto lì perché mi trovavo molto bene effettivamente.
26 Era un po' uno sbattimento che dovevo andare [sic] sempre avanti e
27 indietro da [città] fino a [città], erano 130 chilometri al giorno, però
28 stavo bene e sono rimasto lì. Poi, quando è nata mia figlia, ho detto:
29 "forse è ora di chiedere il trasferimento". E lo stesso anno mi hanno...
30 sono venuto qua. Quindi dal 2001 al 2008 sono stato a [città]. Poi, dal
31 2008 in poi sono qua. Però non ho fatto effettivamente nessun corso
32 specifico per l'insegnamento.

33 **Intervistatore:** E invece, a livello di insegnamento: matematica?
34 Matematica e fisica? Sempre tutte e due?

35 **Docente 4:** Sì, io ho vinto il concorso nella classe di concorso che era
36 matematica e fisica. E ho sempre insegnato matematica e fisica. E
37 allora, quando ero a [città], siccome a [città] c'erano fondamentalmente
38 tantissimi insegnanti di matematica, diciamo laureati in matematica,
39 e pochissimi in fisica e nessun matematico vuole fare fisica, allora mi
40 avevano dato quasi tutte le classi di liceo di fisica. E quindi avevo
41 una prevalenza nettissima di fisica, però avevo anche delle classi di
42 matematica sin da subito.

43 **Intervistatore:** E quindi, a livello di esperienza lavorativa, solo
44 queste qui oppure ha insegnato anche alla scuola privata?

45 **Docente 4:** Avevo insegnato un anno, l'anno in cui stavo facendo il
46 concorso, alla scuola privata di [nome scuola] che c'era una volta.

47 **Intervistatore:** Quindi un'esperienza, diciamo, abbastanza diversa.

48 **Docente 4:** Sì sì, era quasi una sorta di tutoraggio o lezioni indivi-
49 duali, quello dipendeva molto da quanto pagavano.

50 **Intervistatore:** Immagino, più paghi, più sei seguito.

51 **Docente 4:** Però ti dico una cosa, che è stato formativo. Perché ho
52 dovuto insegnare di tutto. Nel senso che insegnavo sì matematica e
53 fisica soprattutto, ma mi è capitato anche di insegnare informatica
54 teorica, proprio anche dover smollarmi [sic] su queste cose. Nel senso,
55 dovevo anche... "okay, questo qui nessuno lo vuole fare, tu sei disposto
56 a farlo? Va bene allora". Poi, però, dovevo studiarnele certe cose e
57 quindi te la dovevi un po' cavare anche su argomenti che conoscevi
58 poco. È stata un'esperienza anche questa importante.

59 **Intervistatore:** E a livello di altre tipologie di lavori oltre l'insegna-
60 mento?

61 **Docente 4:** No... allora... io ho collaborato per un certo periodo
62 con dei miei amici che si occupavano di, diciamo così, di informatica,
63 di programmazione, di sistemi informatici. Quindi, non so, su server,
64 programmazione oppure creazione di server di Internet, pagine web.
65 E anche la parte hardware. Però non era una cosa, era più un ritaglio.

66 **Intervistatore:** E... invece... okay, quindi a livello di scuole in cui
67 ha insegnato, ha detto solo liceo scientifico quindi?

68 **Docente 4:** Sì.

69 **Intervistatore:** E anche adesso sempre liceo scientifico?

70 **Docente 4:** Sì, allora, quando ero a [città] ero al liceo scientifico o
71 c'era un indirizzo che era liceo scientifico tecnologico. Che era un liceo
72 senza latino ma con informatica fondamentalmente, con tante ore di
73 tutte le materie, perché si facevano trentacinque ore settimanali.

74 **Intervistatore:** Quindi era una sorta di scienze applicate di adesso?

75 **Docente 4:** Sì sì, un po' più pesante. Qui a [città] più che [sic] non
76 c'era tanto quel liceo lì, ma c'era ad esempio il PNI, Piano Nazionale
77 Informatica. Che era semplicemente era [sic] l'analogo. Era molto
78 simile al PNI che si trovava più spesso qui a [città]. Però sempre, ad
79 esempio, adesso qua o liceo scientifico qualche volta, però, essenzial-
80 mente, scienze applicate. Cioè, teoricamente, potrei insegnare in tutti
81 [gli indirizzi di liceo], di solito si ruota abbastanza. Però io, non so,
82 sono stato sempre assegnato a classi di scienze applicate o scientifico.
83 E anche lo sportivo, scusami. Che però è un liceo scientifico, sono le
84 varie opzioni dello scientifico comunque.

85 **Intervistatore:** Quindi, ricapitolando, più o meno da quanti anni è
86 che insegni?

87 **Docente 4:** Dal 2001, quindi sono venticinque [anni] praticamente.
88 E qua se vuoi, specificamente qua, dal 2008.

89 **Intervistatore:** Quindi, a fronte anche del fatto che mi ha detto che
90 non ha fatto nessun tipo di corso di formazione da insegnante...

91 **Docente 4:** No, no, mi sono precipitato. Non ho fatto neanche, come
92 è successo a molti di fare, il periodo di precariato. Nel senso, oppure
93 di... mi sono proprio precipitato, proprio nel senso precipitato [sic]
94 dal, diciamo così, dal fare ricerca all'università a quando ho deciso di

95 smettere. Dopo un anno ho vinto il concorso e sono diventato subito
 96 di ruolo.

97 **Intervistatore:** Quindi un percorso molto liscio diciamo.

98 **Docente 4:** Sì, guarda, mi rendo conto, tra l'altro, di essere stato
 99 molto fortunato. Perché, non avendo fatto nessun anno di precariato,
 100 che per certe cose sono anche importanti [sic], perché ti permettono
 101 di fare delle esperienze. Però non ho vissuto tutta quella parte, ab-
 102 bastanza angosciante, di non sapere qual è il futuro fra qualche mese
 103 magari. Io questa cosa, per esempio, io non la ho mai vissuta. È
 104 stata, da questo punto di vista, un vantaggio. Poi, per altre cose,
 105 ovviamente, mi sono evitato [sic] alcune cose magari anche utili per
 106 la formazione dell'insegnante. Sicuramente mi manca questa parte di
 107 precariato.

108 **Intervistatore:** E in generale, comunque, rispetto a una preparazio-
 109 ne più, magari, di ambito universitario, più specifica, che cosa pensi
 110 che [e] in che modo pensi che la tua preparazione ti possa essere ser-
 111 vita? E in che modo, invece, pensi che ci potrebbe essere qualcosa,
 112 invece, che avresti apprezzato, magari, una volta entrato in classe, co-
 113 me tipologia di, diciamo, competenza in più che poteva dare, magari,
 114 un corso di didattica?

115 **Docente 4:** Certo, chiaro, chiaro. Sicuramente, a volte, sento che mi
 116 manca qualcosa sulla metodologia. E anche sulla, semplicemente, an-
 117 che sulla parte di valutazione. È vero che poi, durante gli anni, si sono
 118 fatti dei corsi di formazione sulla valutazione eccetera, eccetera. Devo
 119 dire che, viceversa, l'esperienza sulla parte di ricerca mi ha aiutato.
 120 Nel senso che, comunque, ero tranquillo nell'affrontare gli argomenti
 121 con i ragazzi. I quali capiscono le tue competenze. Evidentemente, i
 122 ragazzi hanno capito le mie competenze e mi hanno sempre apprezzato
 123 da quel punto di vista. Per esempio, io non ho mai avuto discussioni
 124 con studenti. Perché comunque loro capiscono che tu sei competente
 125 su quella materia e su questo ti rispettano. Poi devi essere anche come
 126 insegnante competente [sic], anche come essere umano, e questa è la
 127 parte forse più difficile. Perché, fondamentalmente, se hai una buona
 128 preparazione universitaria dal punto di vista dei contenuti, in genere,
 129 a parte, magari [sic], i primi anni, in cui hai dubbi su come trasmettere
 130 queste competenze ai ragazzi, poi ti accorgi che ne hai a sufficienza di
 131 competenze per tramettere i contenuti in maniera corretta. Poi, la co-
 132 sa più difficile, invece, è la parte di gestione degli studenti: affrontare

133 le loro problematiche, essere autorevoli con loro e non autoritari. Cioè
134 che [sic], qualche volta, mi capita di fare degli urli. Però, quello che ti
135 fa la differenza [sic], è che devi essere con loro autorevole sia sul piano
136 didattico, ma loro lo sprezzano molto, soprattutto negli ultimi anni
137 sicuramente, sul punto di vista [sic] umano: sentire che di fronte hai
138 una persona di cui si possono fidare, anche dal punto di vista umano.
139 Io, ad esempio, non ho mai avuto, ad esempio, contestazioni sui voti.
140 Perché, anche perché, se uno mi dice... allora, ci sono alcuni inse-
141 gnanti che dicono: “ti ho dato questo voto e questo ti tieni”. Io trovo
142 che se, a volte mi capita, di discutere su guardiamo [sic] un esercizio.
143 Magari non avevo capito cosa voleva fare lo studente. Perché, a volte,
144 se lui mi sa spiegare, io sono disposto a cambiare il voto. E questo
145 non mi sento di perdere [sic] in questa cosa di autorevolezza. Anzi, ne
146 guadagni. Perché discuti con lo studente quello che stai facendo.

147 **Intervistatore:** Anche nella mia esperienza non c'è questa cosa, ma
148 perché... effettivamente capisco il discorso. Nel senso che la nostra
149 prof, secondo me, non era più di tanto competente nella materia. E
150 quindi, quando noi le portavamo le verifiche e le dicevamo: “prof, lei
151 ha corretto in un modo da un lato e in un modo [diverso] dall'altro”,
152 lei non sapeva come rispondere.

153 **Docente 4:** Allora, questo, ad esempio, è la difficoltà che spesso han-
154 no chi viene [sic] da matematica e insegna fisica. Perché la questione
155 è: “quanta fisica avete fatto?” Poca. E, mentre la fisica, rispetto alla
156 matematica... in matematica, non è che un ragazzo di liceo ti viene
157 a chiedere: “che cos'è il tensore di Riemann?” Piuttosto che un'al-
158 tra cosa, no? Invece, in fisica, uno ti può chiedere: “ma che cos'è il
159 Bosone di Higgs?” Perché lo ha sentito nominare. Allora, chi non ha
160 la preparazione ad ampio spettro sulla fisica, fa più difficoltà [sic]. E
161 dopo, piano, piano, con l'esperienza, le acquisisci certe cose. Però,
162 chiaramente, questo ti rende insicuro. E ti rende più rigido. Mentre,
163 se sei tranquillo dal punto di vista delle tue conoscenze, è chiaro che
164 poi, vabbè, ne parliamo. Perché poi, in fondo, a volte, magari hai
165 capito l'espressione che volesse dire una cosa quello che hanno scritto
166 [sic]. Invece, ne avevano scritto un'altra. E quindi io sono sempre
167 disponibile a dialogare su questa cosa e questo, sinceramente, mi va
168 bene. Nel senso che non voglio essere rigido su questa parte qua.

169 **Intervistatore:** E invece, a livello dell'approccio didattico, per esem-
170 pio, nelle lezioni, quindi nella trasmissione più che altro dei contenuti,
171 come descriveresti il tuo approccio?

172 **Docente 4:** Diciamo che forse più intuitivo... nel senso, non avendo
173 una... io cerco di sentire molto anche quello che è la classe [sic]. Un po',
174 cercando di capire, seguo il mio istinto su come affrontare l'argomento.
175 Quindi, non so, posso [sic] lo stesso argomento, a volte, mi capita di
176 affrontarlo in maniera diversa in due classi diverse. Perché sento che,
177 magari [sic] facciamo l'esempio anche proprio della circonferenza, c'è
178 chi ha una preparazione, ad esempio, della geometria descrittiva più
179 forte. Quindi, magari, parto usando questa cosa qui. Mentre, se sento
180 una classe che magari su quella parte lì è un po' più debole, cerco di
181 approcciarla [sic] in un'altra maniera. Quindi non ho un approccio
182 fisso agli argomenti, cerco di sentire un po' la classe come risponde ai
183 vari stimoli.

184 **Intervistatore:** E invece, proprio a livello di lezione frontale, labo-
185 ratori di qualche tipo...

186 **Docente 4:** Allora, la maggior parte [sic] faccio lezioni frontali. Al-
187 lora, uso poco anche la parte, diciamo, di tecnologia. Nel senso che,
188 se è utile, la uso. Però deve essere veramente utile perché sennò, se-
189 condo me, a volte, è un... distoglie da quello che è la cosa centrale.
190 E, secondo me, c'è anche un'altra questione, che magari poi è una
191 mia idea sbagliata, però... cioè... fare una circonferenza perfetta è
192 veramente utile a uno studente? O lo sforzo che deve fare lo studente
193 per astrarre da un disegno approssimativo, per avere in testa l'idea di
194 circonferenza, è più importante? Quella è la questione. Quindi, fare
195 le circonferenze perfette può essere utile in certe situazioni in cui, ma-
196 gari [sic] per capire com'è la situazione, l'esercizio, eccetera, eccetera.
197 Però, in sé, non è fondamentale.

198 **Intervistatore:** Okay, invece, a livello di, per esempio, lavori di
199 gruppo o cose del genere?

200 **Docente 4:** Allora, a me capita di far fare... allora, ogni tanto...
201 dare, prima delle verifiche soprattutto, dare degli esercizi. E li metto
202 in gruppo a lavorare a gruppetti. E, di solito, li faccio scegliere a loro
203 [i gruppi], e li metto in gruppi di tre o quattro ragazzi. E fanno gli
204 esercizi. A mano a mano che li risolvono, me li portano, in modo
205 che confrontiamo se la soluzione è corretta o meno. Però, di solito,
206 lo faccio, quindi un... prima delle verifiche, una o due lezioni, li la-
207 scio lavorare in gruppo. In modo che si possano aiutare tra di loro.
208 Poi, adesso, ultimamente, faccio anche il corso sulle olimpiadi di ma-
209 tematica. E anche lì nello specifico faccio le gare a squadre. Quindi,

210 faccio proprio lavorare in gruppo in questo... in questo senso. Però,
211 anche all'interno della classe, ripeto, di solito la settimana prima della
212 verifica, un po' di lavoro di gruppo lo faccio fare.

213 **Intervistatore:** E invece, a fronte di tutto quello che mi hai detto,
214 adesso, secondo te, quali sono gli aspetti più importanti da considerare
215 quando si insegna matematica?

216 **Docente 4:** Allora, secondo me, da una parte c'è il rigore comunque.
217 Per esempio, alle... non tanto, diciamo, nelle classi terze, ma nelle
218 quinte, ad esempio, mi piace fare tutte le dimostrazioni fatte in ma-
219 niera corretta. E, a volte, anche se so che, tra virgolette, perdo tempo,
220 nel senso che, a livello di liceo, non verrà mai chiesto quelle cose [sic]
221 se non da me ma, per esempio, all'esame, all'esame è difficile. Perché
222 all'esame non c'è tempo di fare teoria di matematica, se non qualche
223 cosa. E, però, faccio i vari teoremi, tutti li dimostriamo. Sono pro-
224 prio rare le cose che non dimostro in maniera rigorosa. E l'altra cosa
225 che secondo me è importante è, comunque, soprattutto nelle classi più
226 basse, è, per certe cose, è... io non mi occupo della parte algebrica,
227 no? Che si fa soprattutto in prima e in seconda. Quindi, facciamo la
228 geometria analitica dalla terza in poi. Però è, dice che è, anche aiuta-
229 bile [sic] l'intuizione matematica ai ragazzi [sic]. Non è sempre facile
230 perché, ovviamente, in una classe di venti o venticinque persone, tu gli
231 proponi delle cose. E poi lavorare sulla singola persona è complicato.
232 Perché non c'hai tempo. Però cerco, da una parte, alcune cose [sic]
233 di essere rigoroso. Dall'altra parte, per cercare di aiutarli a capire,
234 andare un po' al di là della semplice costruzione geometrica su che
235 cosa stiamo facendo.

236 **Intervistatore:** Okay, quindi, diciamo, da un lato rigore, però, dal-
237 l'altro, anche cercare di un attimo...

238 **Docente 4:** Sì, aiutare la crescita dell'intuito, dell'intuizione mate-
239 matica. Questo, secondo me, è un aspetto molto da... questa parte
240 qui, a volte, da anche da [sic] fisico. Nel senso che la fisica ha bisogno,
241 prima ancora del rigore, dell'intuizione. E questo, credo che eredito
242 un po' da questa cosa qui [sic]. Poi lo fanno tutti ovviamente, in un
243 certo senso. Però è una cosa che... anche i primi anni che insegnavo,
244 avevi [sic] bisogno di chiarire il concetto fisico prima ancora di metterti
245 lì a fare una dimostrazione, eccetera, eccetera. E questa me la sono
246 sempre portata dietro, da sempre in un certo senso.

247 **Intervistatore:** Ho capito, e invece, in generale come vengono pre-
 248 parate le lezioni, come prepari le lezioni?

249 **Docente 4:** Mah, ormai devo dire che non le preparo quasi più. Nel
 250 senso che so quello... gli argomenti, guardo sul... li guardo il libro
 251 [sic]. Se è, magari, se è un libro nuovo quali sono l'ordine [sic] degli
 252 argomenti che viene fatto nel libro, che comunque cerco di seguirlo
 253 [sic]. Anche se poi non è detto. Nel senso che, se la lezione o gli
 254 studenti mi portano in un posto leggermente diverso, seguo, cioè non
 255 voglio essere proprio rigido. Alla fine gli argomenti che devono fare
 256 li trovano sul libro. A volte, se c'è qualcosa che sul libro non c'è, lo
 257 preciso prima. Nel senso: "attenzione che questa parte non c'è". Però,
 258 quindi, dal punto di vista della preparazione, ormai poco. Perché gli
 259 argomenti sono quelli, li ho fatti tante volte e cerco di seguire il libro
 260 per... nell'esposizione. E in modo che loro, comunque, che i ragazzi
 261 abbiano un riferimento preciso. Però, a volte, appunto, c'è una specie
 262 di flusso di coscienza che mi porta a fare...

263 **Intervistatore:** Okay, anche, magari, in relazione a quello che dice-
 264 vamo prima, di come senti che loro riescono a...

265 **Docente 4:** Sì sì, a volte parto con l'idea di fare un certo tipo di
 266 dimostrazione, poi mi trovo lì e che vedo [sic] che la classe ha dei dubbi
 267 su altre cose, oppure... e, allora, magari, vado in quella direzione
 268 lì. Cerco di essere elastico in questo, in questo senso. A volte mi
 269 chiedo anche io se è corretto, è giusto o no questa cosa [sic], no?
 270 Perché, ovviamente, questa cosa può aiutare alcuni, può essere un
 271 danno per altri. Perché di fronte... il problema è sempre quello: hai
 272 tante persone con... è vero che, arrivati in terza, già cominciano ad
 273 avere una strutturazione più definita. Ma, comunque, con che [sic]
 274 hanno avuto percorsi diversi anche alle medie, e secondo me influisce
 275 molto quello che hai fatto alle elementari e alle medie, alle medie
 276 soprattutto, il modo di pensare, la tua formazione matematica. E
 277 quindi, comunque, te li ritrovi che sono molto diverse [sic].

278 **Intervistatore:** Esatto, sono già grandi da questo punto di vista.

279 **Docente 4:** Sì sì.

280 **Intervistatore:** E dopo di che, a questo punto, come valuti l'efficacia
 281 della tua lezione?

282 **Docente 4:** Cerco di vedere e sentire quello che... chiedo ai ragazzi
 283 se... io chiedo sempre ai ragazzi se le cose sono state chiare, perché

284 preferisco, dico sempre, preferisco sempre dire: “se qualcosa non l’a-
285 vete capita, anche la cosa più stupida, ditelo adesso che è meglio”.
286 Perché, anche perché, come dico sempre a loro: “un dubbio di uno
287 è sempre un dubbio di tutti”. Spesso, quindi, cerco di chiedere loro
288 certe cose. Poi, magari, gli faccio svolgere un esercizio sulla lavagna.
289 Magari cerco di capire se alcune cose sono state comprese bene, o se
290 non lo sono state, magari, ripetere il concetto [sic]. Quindi questo
291 è un po’ il metodo di valutazione: il feedback che chiedi ai ragazzi.
292 Anche semplicemente guardandoli è... nel senso che, il problema è che
293 alcuni ragazzi non si espongono. E lo so perché ero uno di questi. Nel
294 senso che ho sempre fatto fatica a espormi davanti alla classe con un
295 dubbio. Piuttosto davo una gomitata al mio compagno di banco e gli
296 facevo chiedere. Allora, sapendo che questo è comunque una cosa [sic]
297 che viene anche dai miei studenti, un po’ guardando la reazione della
298 faccia riesci a capire: sono stato chiaro? Non sono stato chiaro?

299 **Intervistatore:** Però, per esempio, quindi... perché, magari, non
300 so, tu li prendi in terza che hanno avuto degli insegnanti diversi. E
301 dopo tu hai questo approccio che, magari, li inciti invece a dire [sic]:
302 “fatemi domande, esponete...”, insomma, così. E nel corso dell’anno
303 migliorano su questa cosa?

304 **Docente 4:** Allora, alcuni sì e alcuni no. Quindi è proprio una que-
305 stione di carattere. C’è chi... per esempio, per quanto mi riguarda,
306 non era, anche all’epoca, non era una questione dell’insegnante. Era
307 una mia questione, forse più... non tanto nei confronti degli insegna-
308 ti, nei confronti degli altri studenti. Quindi, questa cosa non cambia
309 tanto: alcuni migliorano, capiscono che possono relazionarsi con me.
310 Magari non lo fanno sul nel [sic] momento della lezione. Mi vengono
311 a cercare dopo, alla fine della lezione, e mi fanno la domanda. E,
312 quindi, un miglioramento... loro, evidentemente, si sentono, quelli che
313 fanno così, vuol dire che si sentono tranquilli con me. Ma, magari,
314 un po’ meno nei confronti degli altri. Poi lì è una cosa che dipende
315 molto dalle, il miglioramento o meno, dalla classe stessa. Cioè, alla
316 fine, quando i ragazzi si conoscono, se la classe è una buona classe che
317 è coesa, allora tutti si sentono un po’ più liberi di intervenire. Ci sono
318 delle classi, invece, che sono estremamente competitive tra di loro. E,
319 allora, questo qui diventa complicato. Anche lì, è una questione un
320 po’ di come gestisci un po’ la cosa, nel senso, appunto, individui delle
321 cose, capisci cos’è... magari, inizialmente, qualcuno si espone, e devi
322 farlo [sic] in modo che sia una cosa che sia per tutti. Se uno desse

323 solo una risposta, secondo me, individuale a quella persona, a volte
 324 serve per i... però devi parlare comunque a tutti quanti, perché dici:
 325 “il ragionamento è sempre... okay, è una cosa che mi chiede lui ma,
 326 probabilmente, ce ne sono altri cinque o sei che non hanno capito”.
 327 Allora la risposta è per tutti quanti. E questo, magari, un po’ aiuta a
 328 far capire che chiedere qualcosa è importante per sé e per tutti.

329 **Intervistatore:** Invece, tornando più al discorso della tecnologia, che
 330 prima mi hai fatto un accenno [sic] sul fatto che, sì, la usi un pochino,
 331 un po’ no. Però così, in generale, in che modo la utilizzi, quando la
 332 utilizzi?

333 **Docente 4:** Allora, la maggior parte dei casi [sic] la utilizzo come
 334 lavagna perché non c’è altra alternativa.

335 **Intervistatore:** Okay, perfetto, quindi proprio in sostituzione della
 336 lavagna di gesso.

337 **Docente 4:** Io sono proprio un appassionato di lavagne di gesso.
 338 Nel senso che ho tutti i miei gessettini particolari che faccio venire
 339 dal Giappone. E mi capita di usarla a volte. Però uso, per esempio,
 340 spesso, per quando [sic] si tratta di studiare le funzioni o robe del
 341 genere, qui per esempio uso un sito che è Desmos. Quello lo uso
 342 abbastanza, nel senso, per far vedere alcune cose mi piace e l’ho sempre
 343 usato da quando è uscito praticamente. E devo dire che è successo
 344 che, invece, alcuni studenti lo hanno apprezzato moltissimo, perché lo
 345 hanno utilizzato per fare delle cose anche, anche artistiche devo dire.
 346 Non uso molto GeoGebra, poi, del resto preferisco fare a mano.

347 **Intervistatore:** Okay, e quando hai detto che utilizzi la lavagna cioè
 348 la SmartBoard, dopo lo utilizzi [sic] anche come valore aggiunto? Tipo
 349 prendo la lezione che ho scritto sulla lavagna e la carico su Classroom?

350 **Docente 4:** Guarda, io questo non voglio farlo perché preferisco che
 351 prendano gli appunti. E, in realtà, non salvo mai niente. Questo for-
 352 se... ogni tanto mi dico: “mah, forse dovrei salvarlo”. In realtà, se
 353 devo dare del materiale, ce l’ho già fatto. Già ho dei documenti in
 354 PDF o scritti a mano magari, o con il tablet. Però quello che faccio
 355 io in classe preferisco che i ragazzi stiano attenti [sic]. Do tutto il
 356 tempo del mondo per copiare quello che c’è [alla lavagna], ma devono
 357 avere il loro materiale. Perché sennò rischi che: “tanto c’è quello lì [su
 358 Classroom]” e scrivi con meno attenzione. E lo faccio anche, appunto,
 359 quando faccio un argomento che magari sul libro... questo mi capita
 360 più spesso in fisica. Però, fondamentalmente, anche in matematica,

361 con gli argomenti che sul libro non ci sono. Faccio anche semplice-
362 mente un esempio di tipo matematico: con qualche classe, quando
363 ho avuto tempo, ho fatto, ad esempio, gli sviluppi di Taylor, i limiti
364 con gli sviluppi di Mc Laurin, e ste cose qua. Che so che è una cosa
365 che poi, all'università, i limiti... qua ti insegnano i limiti fatti in una
366 maniera, poi, all'università, li fanno in un'altra. E siccome ho visto
367 che, quando l'ho fatto, i ragazzi poi questa cosa l'hanno trovata utile,
368 quando io c'ho tempo lo faccio. Però questo qui sul libro non c'è fon-
369 damentalmente, anche quello lì dico [sic], prima della lezione: "questa
370 cosa qui, qui sul libro non la trovate. Prendete bene gli appunti, poi
371 se avete dei dubbi me lo dite". Però non lascio il materiale. Forse è
372 un errore, però, boh, mi è venuto sempre così.

373 **Intervistatore:** Mah, in realtà credo che sia soggettivo. Effettiva-
374 mente ci sta, è che, sì, tutte le cose hanno un po' i pro e i contro. Ef-
375 fettivamente, molto spesso, sì, i ragazzi dopo pensano: "vabbè, tanto
376 c'è online".

377 **Docente 4:** No, infatti, quello è il mio problema principale. Quindi,
378 ad esempio, se vuoi, la tecnologia la uso in un'altra maniera. Nel
379 senso che tutti gli strumenti di tipo... che si sono sviluppati durante
380 il periodo del COVID continuo a usarli. Nel senso che le Classroom
381 dove metto il materiale, dove metto gli esercizi, anche risolti, continuo
382 a utilizzarli. Per esempio, una cosa che faccio spesso è, soprattutto
383 prima delle verifiche, siccome ne ho tanti, propongo loro degli esercizi.
384 Ma do anche la risoluzione. Non la soluzione, proprio la risoluzione.
385 In modo che, dico sempre: "la risoluzione non serve per copiare cosa è
386 stato fatto, ma per verificare se quello che avete fatto è stato fatto in
387 maniera corretta". E devo dire che, piano piano, se... magari, so che,
388 magari [sic] in terza tendono un po' a scopiazzare quello che ho fatto,
389 poi, più si va avanti, cominciano a utilizzarlo come uno strumento
390 questo qua [sic].

391 **Intervistatore:** Quindi c'è una maggiore consapevolezza diciamo.

392 **Docente 4:** Sì sì, piano piano arrivano alla consapevolezza dell'uso
393 di questa tipologia di strumento.

394 **Intervistatore:** E, quindi, però, in generale, abbiamo detto, usi po-
395 co... perché la mia prossima domanda sarebbe stata se effettivamente
396 poi, quando utilizzi la LIM o qualcosa del genere, vedi che la lezione
397 migliora. O che nel tempo, magari, oggi giorno le lezioni sono mi-

398 gliorate anche grazie all'utilizzo della tecnologia. Però, sì, dici che
399 comunque...

400 **Docente 4:** Secondo me, l'idea è che non tanto [sic]. Cioè, nel senso
401 che, in passato ci ho anche un po' più provato a far usare [la tecnolo-
402 gia]. Non avendo visto dei miglioramenti sensibili ho detto... nel senso,
403 proprio l'idea è: "cos'è che trasmette il sapere? Non è la tecnologia,
404 è il modo in cui tu ti relazioni coi ragazzi". Anche, semplicemente, è
405 molto più importante come tu ti relazioni coi ragazzi. Se tra me e i
406 ragazzi devo mettere la LIM come strumento per fare la lezione non
407 serve questa cosa qua, meglio avere la lavagna di ardesia che la LIM
408 che fa la lezione.

409 **Intervistatore:** E invece, a livello di corsi, per esempio, di formazione
410 per l'utilizzo di queste cose?

411 **Docente 4:** Guarda, ne avevo fatto molti anni fa ma... qualcosina,
412 ma poi non...

413 **Intervistatore:** Cioè tipo per l'utilizzo della LIM all'inizio inizio
414 [sic]?

415 **Docente 4:** Sì sì, anche perché poi mi è capitato che [per] certe cose
416 ero più avanti io di... però, in questo caso, se vuoi non dal punto di
417 vista didattico, nel dal [sic] punto di vista proprio più tecnico: a volte
418 mi è capitato di essere io a... soprattutto quando c'è stato, è iniziato
419 il COVID. Io penso di aver iniziato a fare cose online subito il giorno
420 dopo che è stata chiusa la scuola. E aver iniziato mentre altra gente
421 ha iniziato molti mesi dopo. Per cui io mi ricordo di non aver perso
422 molto tempo. Poi è chiaro che il rendimento degli studenti era quello
423 che era, però... quindi, dal punto di vista tecnico, sono stato sempre
424 molto autonomo su queste cose. Forse ho seguito qualcosa a livello
425 didattico, però anche lì poi il tempo non c'è, una cosa e l'altra... ho
426 fatto poi poco, forse sarebbe stato da fare di più effettivamente, però
427 non c'è tempo.

428 **Intervistatore:** Non c'è tempo. No no ma, infatti, immagino. E,
429 invece, proprio a livello di... diciamo, da quando hai iniziato magari
430 [sic] a pensare di integrare la tecnologia un pochino durante le lezioni,
431 ci sono state delle sfide particolari da affrontare? Cioè, non so, anche
432 solo a livello di ripensamento, magari, un po', del ritmo della lezione.

433 **Docente 4:** Mah, no, devo dire che, da questo punto di vista, anche
434 durante il periodo, appunto, del COVID, il problema grosso, diciamo,

435 la sfida grossa, è stata... erano non tanto le lezioni. Era l'attenzione dei
436 ragazzi, ovviamente. Ma quello, ceh, c'era diversa gente che metteva
437 le immagini in movimento per tenerti... e, ovviamente, le verifiche.
438 Ma quello penso che sia stato un problema che ancora è irrisolvibile.
439 Però, dal punto di vista della lezione in sé, no, non è cambiato.

440 **Intervistatore:** E quindi, invece, non ci sono degli strumenti digitali
441 che pensi siano particolarmente, diciamo, determinanti per un buon
442 insegnamento della matematica?

443 **Docente 4:** Personalmente no.

444 **Intervistatore:** Mi sembrava di aver capito.

445 **Docente 4:** Ho una certa età. Non è tanto poi per quello, perché mi
446 è sempre piaciuta l'innovazione tecnologica, no? Però l'idea è stata
447 che, nel corso degli anni, ho visto che tu puoi innovare la tecnologia
448 che utilizzi, ma non è quello che determina il successo.

449 **Intervistatore:** E quindi anche a livello di proprio differenze [sic]
450 nell'atteggiamento dei ragazzi quando si utilizzano delle tecnologie o
451 quando non si utilizzano, c'è una differenza?

452 **Docente 4:** Guarda, a volte, all'inizio sono entusiasti. Dopo un po',
453 non sono più così tanto entusiasti. Nel senso che questo, per esempio,
454 succede anche quando fai le cose... una cosa diversa dalla matematica,
455 in fisica, in laboratorio: le prime volte sono entusiasti di andare in
456 laboratorio. Dopo diventa: vado in laboratorio, poi, dopo, c'è da fare
457 la relazione. Queste cose qua non... ti passa la voglia. Quindi, in un
458 certo senso, la reazione è un po' questa, no? Ceh, quando tu inizi a fare
459 un'attività, sì, all'inizio, è carina, è una novità. Allora c'hai il picco
460 di attenzione. Ma dopo questo picco si rinormalizza [sic]. Quindi,
461 qualche volta, ogni tanto, sì, usarla con parsimonia può essere utile,
462 perché quando devi mettere in evidenza qualcosina [sic]. Però, se la
463 usi troppo, alla fine diventa noiosa come tutto il resto. E quindi se è
464 noiosa con la lavagna è noiosa con la LIM, se non è noiosa con l'una
465 non è noiosa con l'altra.

466 **Intervistatore:** Okay, quindi, invece, tornando più al nostro discorso
467 della circonferenza. Allora, all'inizio mi avevi detto che non hai un
468 metodo standard di introduzione della circonferenza.

469 **Docente 4:** Sì, in generale parto da... proprio dalla definizione. Quin-
470 di, partendo anche dalle loro conoscenze pregresse che hanno fatto [sic]
471 in prima e in seconda, cerchiamo di rimettere insieme tutte le cose che

472 abbiamo visto, per esempio, nella parabola: abbiamo visto la defini-
473 zione di parabola e l'abbiamo ricavata come luogo dei punti. E l'idea
474 è seguire lo stesso procedimento. Questo è quello che ho fatto con la
475 [classe]: di rifare la stessa cosa. Poi, magari, parti dalla circonferen-
476 za col centro l'origine e poi fai anche la circonferenza con centro in
477 un altro posto. Magari poi vedere il collegamento tramite anche le
478 trasformazioni geometriche.

479 **Intervistatore:** Ecco, infatti, questa è l'altra domanda. Cioè, anche
480 proprio a livello di sistemi di rappresentazione della circonferenza, hai
481 notato delle particolari difficoltà su un modo o su un altro? Oppure
482 sul passaggio da uno all'altro? Oppure, una volta che poi gli studenti
483 hanno più o meno capito, riescono ad avere una visione tra virgolette
484 completa?

485 **Docente 4:** Allora, l'uso delle trasformazioni geometriche per i ragaz-
486 zi è sempre un po' complicato. Quindi, lascio il caso della circonferenza
487 che è [sic] estremamente semplice fare anche il caso più generale, e,
488 secondo me, i ragazzi preferiscono partire dalla definizione col luogo
489 geometrico e [poi] ricavare l'equazione. E vederla con le trasforma-
490 zioni geometriche, secondo me, quando lo proporrò, ci sarà qualcuno
491 che si lamenterà: "nooo con le trasformazioni geometriche". Anche
492 se le abbiamo fatte. Le avevano fatte in parte anno scorso [sic], le
493 abbiamo rifatte anche in quest'anno [sic], però è sempre un po' ostica
494 questa cosa. Non c'è un motivo particolare. Secondo me è proprio
495 una questione di rigidità mentale. Cioè, è più facile quell'altro tipo
496 di approccio, questo qui è sempre un po' più complicato: "come devo
497 farlo?" "Non mi ricordo come mettere la costante" "La devo mette-
498 re...". Allora, quando per loro è una difficoltà in più, e reagiscono
499 chiudendosi un pochino. Quindi, alla fine, io le propongo tutte e due.
500 In generale, tutti i modi in cui si può introdurre lo faccio [sic]. Però
501 ce ne sono alcuni come, appunto, le trasformazioni... diciamo che una
502 parte dei ragazzi tendono [sic] un po' a... per esempio, ti dico una
503 cosa con cui succede la stessa cosa [sic]: risoluzione dei sistemi di pri-
504 mo grado. Allora, ho quattro metodi. Ce n'è uno che nessuno vuole
505 mai fare: Cramer. Che poi diventa... io dico sempre: "in realtà poi
506 diventa il modo più facile: lo puoi generalizzare, lo puoi fare diven-
507 tare...". Però, quando tu senti Cramer e vedi ragazzi tutti [sic] che
508 fanno delle espressioni. E, invece, l'altro giorno ho preso... c'era un
509 sistema tre per tre. Gli ho fatto fare con le matrici [sic]. Quindi li
510 devi un po' costringere, poi, magari, per qualcuno più sveglio, capisce

511 [sic]. Perché dopo fanno i collegamenti con informatica in cui usa-
 512 no le matrici. Però ci sono certe cose, è proprio un istinto di rifiuto
 513 non motivato. E, secondo me, anche lì, appunto, la questione della
 514 circonferenza con le trasformazioni è un po' in quella situazione lì.

515 **Intervistatore:** Okay. E, invece, a livello di passaggi, proprio, non
 516 so, do l'equazione, chiedo il disegno, oppure, parto dal disegno e chiedo
 517 l'equazione: c'è qualcosa che loro avvertono come più difficile dei due?

518 **Docente 4:** Mah, secondo me, sulla circonferenza in genere no.

519 **Intervistatore:** Quindi riescono più ad avere una visione un po' più...

520 **Docente 4:** Sì, sai, la circonferenza, essendo abbastanza facile, hanno
 521 fatto molto. In genere, i due passaggi sono abbastanza... per loro,
 522 secondo me, in generale, è più semplice [passare] dall'equazione alla
 523 figura. Perché, magari, nella figura fanno fatica ad identificare alcune
 524 cose. E quindi ci sono quelli che fanno un po' più fatica. Se ti devo
 525 dire, tra le due diciamo, la maggior parte trova più facile dall'equazione
 526 alla...

527 **Intervistatore:** Però comunque dici che c'è variabilità tra gli stu-
 528 denti?

529 **Docente 4:** Sì sì sì.

530 **Intervistatore:** Quindi non è una, diciamo, risposta definitiva?

531 **Docente 4:** Nono, devi guardare... guarda, è molto soggettivo. Di-
 532 pende anche come è stata fatta negli anni precedenti. Anche come,
 533 teoricamente, come la fanno in disegno e anche come la fanno alle
 534 medie.

535 **Intervistatore:** Quindi, diciamo, in generale proprio, anche se ci sono
 536 moltissimi fattori che alla fine concorrono in quello che loro vedono più
 537 difficile o più semplice...

538 **Docente 4:** Esatto, in questo senso è... ad esempio, sulla parabola,
 539 in cui non hanno altro tipo di atteggiamento, e anche lì più struttu-
 540 rato [sic], no? Anche lì, secondo me, vanno meglio dall'equazione alla
 541 figura. Però non c'è una grossa differenza alla fine.

542 **Intervistatore:** Okay. Generalmente, quindi, per fare queste lezioni
 543 sulla circonferenza usi delle tecnologie? O la risposta è uguale a quella
 544 di prima?

545 **Docente 4:** Mah, fondamentalmente è come quella di prima. Qual-
 546 cosa in più perché è più facile. Poi mi piace fare i cerchi a mano. Però

547 capita sicuramente un po' di più di usarne. Ma, fondamentalmente,
548 non tantissima.

549 **Intervistatore:** Okay, però, comunque, diciamo, sei il primo che mi
550 dice che, effettivamente, non pensi che ci sia un, non so come dire, che
551 l'utilizzo delle tecnologie non sia legato a una comprensione, magari,
552 migliore per il fatto che ho fatto un cerchio perfetto.

553 **Docente 4:** Ti ripeto, siccome, in un certo senso, io preferisco che i
554 ragazzi facciano questo sforzo, cioè, okay, il mio disegno è impreciso.
555 Ma sappiamo quello che stiamo facendo. Cioè passare da una cosa
556 reale a una cosa ideale. E devi fare uno sforzo di astrazione. Questo
557 qui è, anche qui, la stessa cosa che si fa, forse si fa di più, in fisica,
558 in cui tu rappresenti un oggetto poi in realtà devi sapere che quel-
559 l'oggetto che rappresenta [sic], anche se lo rappresenta [sic] come un
560 rettangolino, non è un rettangolino ma è un punto, quando stiamo
561 facendo i punti materiale [sic], eccetera. Oppure tutta una serie di
562 cose in cui l'astrazione la fa il cervello, non la fa il modo, non lo fa
563 [sic] solo il metodo che, lo strumento che usi.

564 **Intervistatore:** Certo, direi che siamo a posto. Ah, no, invece, però,
565 l'ultima domanda che ti faccio è questo [sic]: la consapevolezza, ma-
566 gari, del fatto che non ci sia, diciamo, un metodo, come dire, univoco
567 magari, o più giusto degli altri per introdurre un certo argomento,
568 è una consapevolezza che hai sempre avuto? O è qualcosa che ti è
569 venuta dall'esperienza?

570 **Docente 4:** Mah, allora, secondo me, è venuta più dall'esperienza.
571 Nel senso che, piano, piano, ho capito che, appunto, capire la classe e
572 quindi adattare quello che fai alla classe è la cosa che acquisisci un po'
573 con l'esperienza. Un po' ce la devi avere dentro. Nel senso che, secondo
574 me, è anche derivata dal fatto che, a volte, io stesso avevo bisogno,
575 quando ero studente ma anche studente di università, di avere, su certe
576 cose, approcci diversi. Quindi, magari, cercare di capire la stessa cosa
577 in maniera diversa mi aiutava a capirla nel suo complesso. Quindi,
578 andavo spesso a cercare, diciamo, una spiegazione di una certa cosa,
579 poi ne cercavo un'altra per capire se mi tornava. Quindi, magari, una
580 cosa che mi sembrava di avere capito bene di là, invece, mi accorgevo
581 che poi non l'avevo veramente compresa. Quindi, ho sempre avuto
582 questa tendenza a cercare di varie vie [sic] per comprendere qualcosa.
583 E questo, forse, è quello... in un certo senso lo riporto in classe.
584 Quindi, da una esperienza personale, lo riporto in classe. Poi ho visto

585 che questa cosa è apprezzata, a volte, dagli studenti. Perché tu hai
586 di fronte studenti che capiscono un approccio, ma non ne capiscono
587 un altro, e viceversa. Quindi, il tentativo anche di far vedere diversi
588 approcci e cercare di aiutare vari studenti a trovare la loro via. Perché
589 io dico sempre, quando propongo lo svolgimento di un esercizio, ce ne
590 sono alcuni [sic], vabbè, che sono la via che propongo, è quella più
591 semplice. Però, io dico sempre: “io non è che vi giudico. Se voi avete
592 un altro approccio che è efficace e che funziona mi va benissimo. Non
593 sto a discutere sul metodo che deve essere tipo quello che [sic] una
594 volta c’era l’ECDL, la Patente Europea dei Computer, che dovevi,
595 per fargli mettere in grassetto una lettera, dovevi fare esattamente
596 questa procedura, sennò te la dava sbagliata. Quindi questo qui [sic],
597 non voglio fare questo, voglio che sviluppate un senso della... del
598 ragionamento matematico. E poi trovate la vostra via. Una via che
599 sia, ovviamente, che deve funzionare”. Poi magari io dico: “okay, tu
600 hai scelto questa via. C’era questa qua che è più semplice, che è più
601 efficace”. Okay, qui ci sono io per queste cose qua, però se mi trovi
602 una via diversa va bene.

603 **Intervistatore:** Sì, quindi lasciarli comunque liberi di fare quello che
604 vogliono.

605 **Docente 4:** Esatto.

Appendice F

Tabelle di analisi delle interviste ai docenti

Tabella di analisi dell'intervista al Docente 1	
Categoria	Contenuto
Formazione scolastica e accademica	• Diploma di liceo scientifico (2) • Laurea in matematica (2) • Dottorato in geometria algebrica (4-5)
Percorso di formazione all'insegnamento	• Abilitazione SSIS in Matematica e Fisica (A-049/A-027) (6-8)
Esperienze professionali	• Ricercatore (5) • Docente di fisica nella scuola privata (5 anni) (9; 23) • Tutor di algebra, geometria e analisi all'università (10-12) • Ha collaborato con una nota casa editrice sia come correttore di bozze che come creatore di esercizi (12-13) • Docente di matematica e fisica nella scuola pubblica (8 anni) (14-15; 45) Note: • Ha sempre insegnato esclusivamente nella scuola secondaria di secondo grado, in particolare al liceo, con prevalenza di incarichi presso il liceo scientifico opzione scienze applicate (40-43) • Insegna complessivamente da circa 13 anni (50)
Convinzioni didattiche ed epistemologiche	• Bisogna "tenere in riga" i ragazzi non semplicemente dicendogli di stare zitti ma anche coinvolgendoli (63-65) • È meglio ogni tanto fermarsi e fare discorsi sulle metodologie di risoluzione (87-88) • Il libro di testo è poco accessibile per gli studenti (97-98) • È importante saper fare i calcoli che ti portano a un certo risultato (113-114) • La LIM e la lavagna di ardesia hanno ruoli differenti ma complementari nelle lezioni (124-134) • È fondamentale lavorare sui collegamenti tra argomenti (182-193) • Il ragionamento geometrico e visivo è da preferire all'approccio analitico/algebrico predominante nei libri di testo (202-209) • Bisogna cercare di far ragionare lo studente (205) • La matematica è anche capacità di vedere lo stesso ente matematico da più prospettive (207-211) • Gli studenti tendono a preferire approcci algoritmici nella risoluzione dei problemi (227-229) • La risoluzione geometrica dei problemi richiede più intuizione e pazienza (230-231) • È importante fare molti esempi (259-263)

	È importante in certe situazioni scrivere lentamente per mostrare bene il ragionamento (476-483)	
Stile di insegnamento dichiarato	EXPERT	
	Comportamento	Motivazione
	Cerca di andare oltre la pagina scritta del libro (96-98)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Cerca di fare paralleli con argomenti trattati precedentemente (182-186)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Sottolinea come non tutti i dati abbiano la stessa importanza e come questa dipenda dal contesto e dall'obiettivo (437-440)	Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti
	FORMAL AUTHORITY	
	Comportamento	Motivazione
	Non prepara "per iscritto" le lezioni, ma ha ben chiaro in testa l'ordine logico di presentazione degli argomenti (266-268)	Struttura il percorso di apprendimento in modo ordinato
	Tiene aperto il libro sulla LIM e intanto lavora sulla lavagna (126-129)	È organizzato
	Utilizza esempi e materiali costruiti da sé (157-164)	È organizzato
	Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (409-416)	Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi
	PERSONAL MODEL	
	Comportamento	Motivazione
	Mostra come affrontare/risolvere i problemi (77-82)	Si propone come modello da imitare
	FACILITATOR	
	Comportamento	Motivazione
	Cerca di far partecipare i ragazzi durante la lezione frontale con micro-domande/piccoli esercizi (90-95)	Stimola la riflessione

	Cerca di far ragionare lo studente (205)	Guida lo studente in un processo di scoperta autonoma
	Usa la LIM con GeoGebra per rendere dinamici i disegni (102-105)	Cerca di rendere la materia accessibile
	In geometria, fa osservare cosa succede al variare dei parametri (107-110)	Favorisce l'osservazione attiva e la costruzione dei concetti matematici
DELEGATOR		
	Comportamento	Motivazione
	Cerca di rendere autonomi gli studenti nell'utilizzo dei software di geometria dinamica (344-353)	Promuove l'uso autonomo di strumenti digitali e risorse online
	Usa Classroom per la condivisione di materiali a supporto dello studio individuale: PDF delle lezioni, compiti, appunti personali e risoluzioni di esercizi (154-163)	Fa da sostegno nello studio
Altro		
Propone solo occasionalmente attività come lavori di gruppo o flipped classroom (169-171)		
Considerazioni sui sistemi semiotici	- Bisogna lavorare attivamente sulla trasformazione tra registri semiotici (407-426) - Gli studenti hanno difficoltà soprattutto nel passaggio da rappresentazioni grafiche a rappresentazioni algebriche (415-416)	
	Note: Il docente dice di utilizzare diversi registri di rappresentazione e mostra attenzione alle conversioni tra di essi (102-105; 107-110; 344-353; 202-209)	
Considerazioni sulla tecnologia	- Delegare i calcoli a un'applicazione sulla LIM anziché svolgerli manualmente alla lavagna può favorire il mantenimento dell'attenzione degli studenti (111-113) - La tecnologia è un valore aggiunto per rendere i concetti più visibili e comprensibili (305-317) - Ci sono dei vantaggi anche ad usare la LIM come semplice lavagna bianca virtuale: scegliere i colori, spostare le cose, ingrandire (140-142) - Può essere utile usare Classroom per la condivisione di materiali a supporto dello studio individuale: PDF delle lezioni, compiti, appunti personali e risoluzioni di esercizi (154-163) - La tecnologia è utile solo se si integra bene col modo di fare lezione (278-279) - Bisogna stare attenti a non farsi sopraffare dalle nuove tecnologie (286-287)	

	• ChatGPT e Photomath al momento sono poco utili o non ancora affidabili per l'insegnamento della matematica (288-304) • Bisogna trovare i tempi giusti, perché l'impiego della tecnologia può anche far perdere parecchio tempo (329-337) • Una parte degli studenti è più attenta grazie all'uso di strumenti tecnologici durante la lezione (341-342) • La tecnologia serve anche a casa per l'autocorrezione di esercizi (344-348) • La tecnologia è utile per realizzare rappresentazioni grafiche più chiare e leggibili (456-464) • La tecnologia può alleggerire/velocizzare certe parti della lezione (471-477)
	Note: Il docente dimostra una consapevolezza teorica implicita della teoria dei registri di rappresentazione di Duval, pur senza mai nominarla direttamente. Le sue pratiche evidenziano attenzione alle conversioni tra registri, all'uso di rappresentazioni grafiche, e alla valorizzazione della visualizzazione come supporto alla comprensione. Le difficoltà degli studenti nella conversione sono esplicitamente riconosciute

Tabella di analisi dell'intervista al Docente 2	
Categoria	Contenuto
Formazione scolastica e accademica	• Laurea triennale in fisica (2-3) • Laurea magistrale in fisica (curriculum didattico) (3)
Percorso di formazione all'insegnamento	• Durante la formazione universitaria ha seguito corsi di didattica della matematica e didattica della fisica oltre che corsi di storia e filosofia della fisica (6-12; 27-29) • Ha seguito i corsi della SSIS pur non riuscendo a formalizzare l'iscrizione per ragioni di tempistica (6-10)
Esperienze professionali	• Insegnante presso un servizio di doposcuola (64) • Docente di matematica e fisica nella scuola privata (85-94) • Divulgatore scientifico (79-81) • Docente di matematica e fisica nella scuola pubblica (148-152) Note: • Ha sempre insegnato esclusivamente nella scuola secondaria di secondo grado (77) • Ha lavorato in diversi indirizzi liceali (quasi tutti) (150-152)
Convinzioni didattiche ed epistemologiche	• La vera difficoltà è riuscire a districarsi nella complessità attuale con una formazione che riesca a stare al passo coi tempi (188-190) • È difficile mantenere coerenza tra le pratiche didattiche e le esigenze scolastiche concrete (199-206) • Il docente deve essere visto come punto di riferimento sia culturale che umano affinché la didattica risulti efficace (227-235) • Per garantire una didattica efficace è necessario a volte rompere il classico ritmo delle lezioni (227-239) • Bisogna riuscire a catturare l'attenzione dei ragazzi (240-241) • Le metodologie non sono di per sé la soluzione a tutti i problemi / le metodologie non sono mai subordinate all'input iniziale di comprensione (242-243; 373-375) • Gli studenti vogliono che ci sia un insegnante che gli spieghi 'bene' le cose (243-244) • Se viene meno il rapporto coi ragazzi, anche la metodologia più efficace perde valore (247-254)

	- Lo studente deve trovare un proprio equilibrio, anche se non eccelle: ciascuno deve arrivare al proprio livello (269-273) - È importante strutturare rapporti di collaborazione tra colleghi (303-317) - Una didattica per competenze che consenta una valutazione realmente formativa è auspicabile (324-330) - Per una didattica efficace è importante l'interdisciplinarietà (303-319) - È difficilissimo riuscire a uscire da una logica di valutazione sommativa in quanto la valutazione formativa deve essere contestualizzata e verbalizzata (324-327) - La valutazione formativa serve a far sviluppare allo studente certe determinate competenze (327-329) - Se non fai la didattica per competenze la valutazione formativa risulta a metà (329-330) - Il costante richiamo agli argomenti precedenti funge da elemento di continuità nel percorso didattico (445-447) - I diversi argomenti trattati in una scuola rispetto a un'altra offrono sfide didattiche differenti (482-484) - La numerosità della classe influenza la didattica (525-528)								
Stile di insegnamento dichiarato	EXPERT								
	<table><tr><th>Comportamento</th><th>Motivazione</th></tr><tr><td>Lavora molto sulla definizione dei concetti (405-410)</td><td>Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti</td></tr><tr><td>Riprende argomenti precedenti per creare continuità tra i contenuti proposti (445-446)</td><td>Fa collegamenti tra argomenti diversi e richiami a conoscenze pregresse</td></tr><tr><td>Affronta lo stesso concetto da più prospettive (449-462)</td><td>È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi</td></tr></table>	Comportamento	Motivazione	Lavora molto sulla definizione dei concetti (405-410)	Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti	Riprende argomenti precedenti per creare continuità tra i contenuti proposti (445-446)	Fa collegamenti tra argomenti diversi e richiami a conoscenze pregresse	Affronta lo stesso concetto da più prospettive (449-462)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Comportamento	Motivazione							
	Lavora molto sulla definizione dei concetti (405-410)	Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti							
	Riprende argomenti precedenti per creare continuità tra i contenuti proposti (445-446)	Fa collegamenti tra argomenti diversi e richiami a conoscenze pregresse							
Affronta lo stesso concetto da più prospettive (449-462)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi								
FORMAL AUTHORITY									
<table><tr><th>Comportamento</th><th>Motivazione</th></tr><tr><td>Costruisce e programma le lezioni a partire dagli obiettivi a cui vuole arrivare (260-264)</td><td>È organizzato/struttura il percorso di apprendimento in modo ordinato</td></tr><tr><td>Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (354-357)</td><td>Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi</td></tr></table>	Comportamento	Motivazione	Costruisce e programma le lezioni a partire dagli obiettivi a cui vuole arrivare (260-264)	È organizzato/struttura il percorso di apprendimento in modo ordinato	Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (354-357)	Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi			
Comportamento	Motivazione								
Costruisce e programma le lezioni a partire dagli obiettivi a cui vuole arrivare (260-264)	È organizzato/struttura il percorso di apprendimento in modo ordinato								
Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (354-357)	Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi								

	PERSONAL MODEL		
	Comportamento	Motivazione	
	Riconosce l'importanza del suo ruolo come modello e punto di riferimento sia umano che culturale (229-234)		
	FACILITATOR		
	Comportamento	Motivazione	
	Cerca di far arrivare ogni studente al proprio livello (268-273)		
	Utilizza diverse rappresentazioni dello stesso oggetto matematico (453-462)		
	Ogni tanto propone attività di peer education o lavori di gruppo (212-213)		
	DELEGATOR		
	Comportamento	Motivazione	
	Ogni tanto propone attività di peer education o lavori di gruppo (212-213)		
	Ogni tanto propone agli studenti attività di problem solving (222-224)		
	Stimola gli alunni a cercare soluzioni usando conoscenze pregresse (217-224)		
	Fornisce la risoluzione dettagliata di esercizi su Classroom (354-357)		
	Altro		
	Predilige la lezione frontale come modalità principale di trasmissione dei contenuti per motivi di tempistiche (198-200)		
Considerazioni sui sistemi semiotici	- La conferenza in geometria analitica è un argomento che si presta molto bene alla trattazione da più punti di vista e quindi a una trattazione utilizzando linguaggi diversi (387-392) - Bisogna utilizzare un linguaggio il più semplice possibile (405-416)		

	• È fondamentale fissare bene la definizione dei concetti matematici per consentire la transizione tra registri semiotici: i ragazzi, una volta che hanno capito cos'è un certo oggetto matematico, non fanno fatica a passare da un linguaggio all'altro (405-416) • Rappresentare un oggetto matematico in più modi dà una maggiore eterogeneità dal punto di vista contenutistico (449-462) • Rappresentare un oggetto matematico in più modi permette di intercettare meglio i diversi stili di apprendimento degli studenti (463-466) • Il contesto scolastico influenza le scelte semiotiche dell'insegnante (482-484) • Le tecnologie non sostituiscono il rapporto con lo studente e non sono garanzia di successo didattico (230-248; 370-383) • Classroom può essere utile per condividere con la classe materiali digitali (277-281) • La tecnologia è utile per mostrare animazioni e costruzioni grafiche che risulterebbero difficili da fare a mano (281-283) • Talvolta la LIM è molto utile anche perché ha diverse opzioni per realizzare disegni più precisi (283-285) • L'introduzione della tecnologia in classe ha portato a un miglioramento della didattica (333-340) • La LIM è utile per far vedere video e proiettare PowerPoint o il libro di testo in formato digitale (362-365) • Non c'è uno strumento digitale che sia particolarmente efficace per l'insegnamento della matematica (533-539)
Considerazioni sulla tecnologia	Note: Il docente ha una consapevolezza chiara dell'uso dei registri semiotici e delle difficoltà cognitive legate al loro coordinamento. Pur privilegiando una didattica frontale per necessità di tempo, dimostra attenzione all'utilizzo di più registri semiotici, alla personalizzazione della didattica e alla costruzione progressiva del significato matematico

Tabella di analisi dell'intervista al Docente 3	
Categoria	Contenuto
Formazione scolastica e accademica	• Diploma di liceo scientifico (2-3) • Laurea in fisica (vecchio ordinamento) (4-5) Note: Quarto anno di università a indirizzo didattico (7-8; 27-28)
Percorso di formazione all'insegnamento	• Abilitazione SSIS in Fisica, Matematica e Fisica e Informatica (15-23)
Esperienze professionali	• Partecipazione ad alcune startup (54) • Progettazione di percorsi museali di robotica per ragazzi (56-59) • Docente di matematica e fisica nella scuola pubblica (147-149) Note: • Ha sempre e solo insegnato nella scuola secondaria di secondo grado (134-135) • Insegna da circa venticinque anni (132-133) • Ha circa quindici anni di esperienza di insegnamento al liceo, di cui dieci come docente di matematica (147-149) • Ha insegnato in diversi tipi di scuole: professionali, ITIS, licei (137-142) • Ha sempre insegnato in indirizzi scolastici di tipo tecnologico/scientifico (138-139)
Convinzioni didattiche ed epistemologiche	• Molti colleghi propongono una matematica troppo accademica e poco adatta alla scuola (81-85) • L'intervento didattico del docente deve variare a seconda del tipo di scuola (303-322) • È importante durante le lezioni interagire coi ragazzi (343-347) • È importante costruire il sapere insieme agli studenti, partendo dalle loro conoscenze pregresse (343-348) • Bisogna fare in modo di stare dietro a tutti (348-349) • È importante non abituare gli studenti a seguire passivamente l'ordine del libro, ma favorire percorsi didattici flessibili che valorizzino collegamenti tra i concetti (349-362) • Molti studenti si sentono disorientati quando le lezioni non seguono l'ordine del libro di testo (349-362) • È importante dare una visione globale della matematica, anche sul piano delle applicazioni (419-434)

Stile di insegnamento dichiarato	• EXPERT		
	Comportamento	Motivazione	
	Propone collegamenti anche con altre discipline (485-491)	Fa collegamenti tra argomenti diversi	
	Propone collegamenti con le conoscenze pregresse degli studenti	Fa richiami a conoscenze pregresse	
	Cerca di dare una visione globale della matematica, anche rispetto alle applicazioni (419-434)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi	
	Propone esercizi mirati per far emergere eventuali difficoltà (405-411; 469-470)	Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti	
	• FACILITATOR		
	Comportamento	Motivazione	
	Non esita ad abbassare il rigore sotto il minimo sindacale se necessario (70)	Cerca di rendere la materia accessibile	
	Cerca di fare interagire gli studenti tra loro (343-344)	Promuove il dialogo tra pari	
	Cerca di costruire insieme agli studenti i concetti matematici a partire da ciò che già sanno (343-348)	Favorisce la costruzione di concetti matematici	
	Propone varie tipologie di esercizi per arrivare agli aspetti più generali della materia (453-458)	Stimola la riflessione	
	Organizza lavori di gruppo	Promuove il dialogo tra pari	
	• DELEGATOR		
	Comportamento	Motivazione	
	Fa lavorare gli studenti con Desmos in autonomia (239-240; 401-404)	Promuove l'uso autonomo di strumenti digitali	
	Organizza lavori di gruppo sia da portare a termine in classe che da portare a termine a casa (238-243; 379-387)	Promuove lo sviluppo dell'autonomia e dell'indipendenza	

	• Altro Non è lineare nelle spiegazioni (349-362)
Considerazioni sui sistemi semiotici	• Il registro grafico è quello di cui gli studenti hanno più bisogno (558-560) • Gli studenti fanno fatica a passare da una forma di rappresentazione di un oggetto matematico all'altra (622-630)
Considerazioni sulla tecnologia	• Le LIM più moderne consentono un terzo delle possibilità rispetto a quelle precedenti (174-199) • La condivisione del PDF della lezione scritta sulla LIM non è più possibile con le LIM più moderne: si è perso un canale di supporto didattico efficace (197-199) • Software di geometria dinamica come Desmos e GeoGebra così come i fogli di calcolo sono particolarmente utili ed efficaci per l'insegnamento della matematica (240; 546-550; 556-560) • Sarebbe bello avere più strumenti tecnologici a supporto delle lezioni di matematica e saper usare meglio quelli già disponibili (480-487) • L'utilizzo della tecnologia in classe ha pro e contro: da un lato consente potenzialmente di fare molte cose, dall'altro può farti perdere molto tempo (508-524) • Oggi l'effetto 'novità' legato all'impiego della tecnologia in classe è scomparso (564-565)
Note: Il docente predilige approcci interattivi e riflessivi, anche a costo di ridurre il rigore formale iniziale, e valorizza l'utilizzo di rappresentazioni grafiche tramite software. Ha una consapevolezza implicita dei registri semiotici e delle difficoltà di conversione, pur non esplicitando sempre le sue opinioni con il lessico tecnico della didattica	

Tabella di analisi dell'intervista al Docente 4	
Categoria	Contenuto
Formazione scolastica e accademica	• Diploma di liceo scientifico (2) • Laurea in fisica (3-4) • Dottorato in fisica teorica (4)
Percorso di formazione all'insegnamento	• Non ha frequentato alcun corso specifico per l'insegnamento (19-24; 33-34) • Vincitore diretto di concorso a cattedra (23-25; 104-105)
Esperienze professionali	• Docente nella scuola privata (1 anno) (47-52) • Collaborazioni occasionali a progetti in ambito informatico (65-70) • Docente di matematica e fisica nella scuola pubblica (38-39; 72-73; 89-92) Note: • Ha sempre insegnato matematica e fisica (38-39) • Ha sempre insegnato al liceo scientifico (non solo scientifico tradizionale, ma anche varie altre opzioni del liceo scientifico) (72-73; 89-92) • Insegna da circa venticinque anni (95-96)
Convinzioni didattiche ed epistemologiche	• La competenza disciplinare è un elemento fondamentale per ottenere il rispetto degli studenti (134-135) • Come insegnanti bisogna essere competenti sia dal punto di vista dei contenuti che dal punto di vista umano (137-142) • Con gli studenti bisogna essere autorevoli e non autoritari (142-144) • L'aspetto umano è importante quanto quello didattico per essere percepiti come autorevoli (135-149) • È importante accettare il confronto con gli studenti anche in sede di valutazione (150-158) • Non avere una preparazione ad ampio spettro sulla materia rende l'insegnante insicuro e di conseguenza più rigido (172-175) • È importante capire come la classe risponde agli stimoli che gli vengono dati (196-197) • Il rigore è importante ma bisogna anche aiutare gli studenti a capire (231-259) • È importante adattare il proprio intervento al livello della classe (186-197; 610-629) • Molti studenti hanno difficoltà a esprimere i propri dubbi davanti all'intera classe. Per questo, quando uno di loro trova il coraggio di fare una domanda, è importante rispondere in modo che la spiegazione sia utile a tutti (312-344)

Stile di insegnamento dichiarato	• EXPERT	
	Comportamento	Motivazione
	Fa dimostrazioni rigorose di tutti i teoremi proposti (233-240)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Propone contenuti universitari (es. sviluppi di Taylor) (388-396)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Cerca di collegarsi alle conoscenze pregresse degli studenti (502-508)	Fa richiami a conoscenze pregresse
	Cerca di affrontare un certo argomento in tutti i modi possibili (534)	È attento alla trasmissione di contenuti approfonditi
	Incoraggia domande e feedback (302-332)	Mostra preoccupazione per l'accuratezza e la padronanza dei contenuti
	• FORMAL AUTHORITY	
	Comportamento	Motivazione
	Cerca di seguire l'ordine degli argomenti proposto dal libro di testo (266-272)	Struttura il percorso di apprendimento in modo chiaro
	Fornisce materiale tramite Classroom se lo ritiene necessario (374-382)	È organizzato
	Mostra la via più efficace per risolvere un esercizio (641-644)	Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi
	Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (409-416)	Fornisce indicazioni precise su come risolvere gli esercizi
	• FACILITATOR	
	Comportamento	Motivazione
	Affronta lo stesso argomento in modi diversi in classi diverse per adattare il suo intervento al livello della classe (186-197)	Cerca di rendere la materia accessibile

	Cerca di aiutare il più possibile i ragazzi a capire (248-251)	Cerca di rendere la materia accessibile
	Cerca di condurre la lezione in base agli spunti offerti dagli studenti (270-272)	Cerca di rendere la materia accessibile
	Incoraggia domande e feedback; accoglie dubbi anche dopo la lezione (302-332)	Cerca di rendere la materia accessibile
	Accetta e valorizza soluzioni alternative se corrette (630-644)	Incoraggia diverse strategie di risoluzione
	Propone lavori di gruppo (214-227)	Promuove il dialogo tra pari
	• DELEGATOR	
	Comportamento	Motivazione
	Propone lavori di gruppo prima delle verifiche in modo che gli studenti si aiutano a vicenda (214-227)	Promuove l'autonomia e l'indipendenza
	Fornisce esercizi con risoluzione dettagliata su Classroom (409-416)	Fa da sostegno nello studio individuale
	Preferisce non rendere disponibili i materiali scritti durante la lezione al fine di incoraggiare gli studenti a prendere appunti (374-382)	Promuove l'autonomia e l'indipendenza
	Accetta e valorizza soluzioni alternative se corrette (630-644)	Promuove l'autonomia e l'indipendenza
	• Altro	
	Principalmente utilizza la lezione frontale come metodo di trasmissione dei contenuti (200)	
	• Le rappresentazioni geometriche approssimative hanno un valore didattico: lo sforzo che lo studente deve fare per astrarre da un disegno approssimativo è importante (204-211) • Le trasformazioni geometriche sono ostiche per la maggior parte degli studenti (518-519) • I ragazzi preferiscono partire dalla definizione come luogo geometrico e poi ricavare l'equazione (521-522) • È più semplice, in generale, il passaggi dall'equazione alla figura (559-561)	
	Considerazioni sui sistemi semiotici	

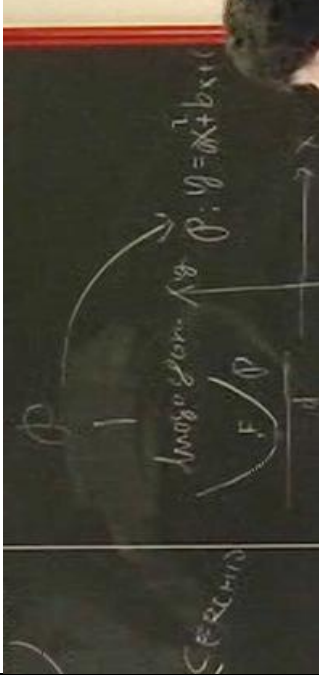
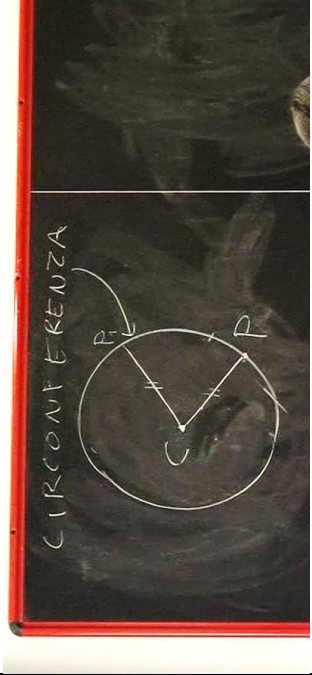
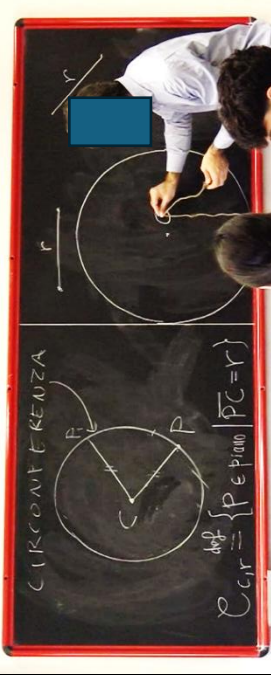
Considerazioni sulla tecnologia	• Se la tecnologia non è davvero utile alla lezione rischia di distogliere l'attenzione dall'obiettivo (201-204) • Nella maggior parte dei casi utilizzare la LIM è solo una necessità nata dal fatto che non in tutte le classi ci sono le lavagne di ardesia (355-356) • Desmos è utile per visualizzare i concetti (362-365) • Tutti gli strumenti, come ad esempio Classroom, che sono nati con la DAD continuano ad essere utili (405-408) • Non è la tecnologia di per sé a migliorare la qualità della lezione (428-436) • Non ci sono strumenti digitali particolarmente utili per un buon insegnamento della matematica (471-474) • Puoi innovare quanto vuoi la tecnologia che utilizzi, ma non è lei che determina il successo della lezione (478-479) • Quando si introduce un nuovo strumento tecnologico, gli studenti inizialmente mostrano entusiasmo, che tende però a diminuire nel tempo (483-495)
Note: Il docente mostra un approccio che combina rigore teorico e attenzione all'intuizione. Pur non utilizzando una terminologia specialistica sui registri semiotici, dimostra consapevolezza implicita delle difficoltà nel passaggio tra rappresentazioni e cerca di adattare il suo intervento didattico al livello della classe. Valorizza l'autonomia degli studenti e mantiene una posizione critica ma costruttiva sull'impiego delle tecnologie	

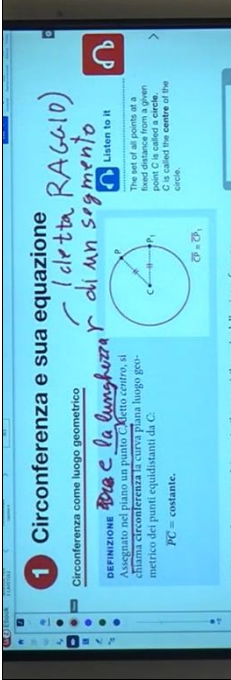
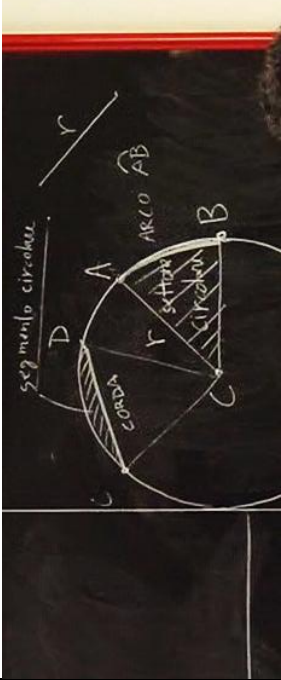
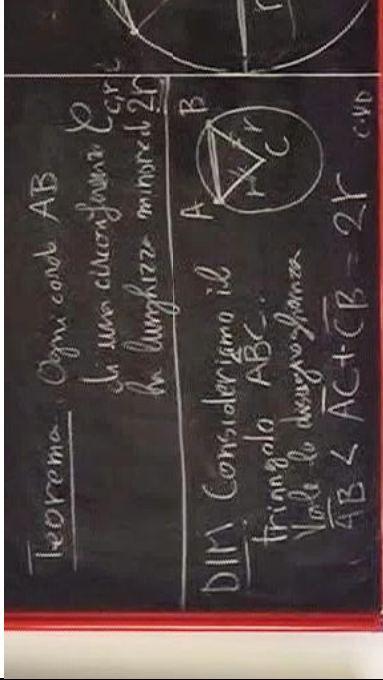
Appendice G

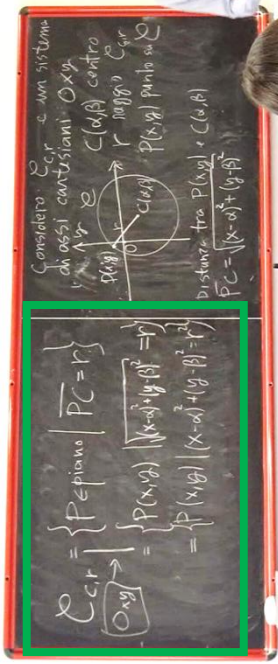
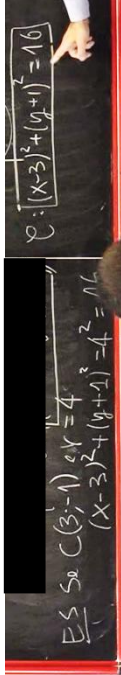
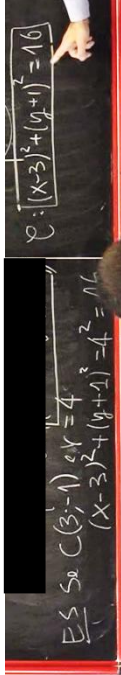
Tabelle di analisi dei video delle lezioni

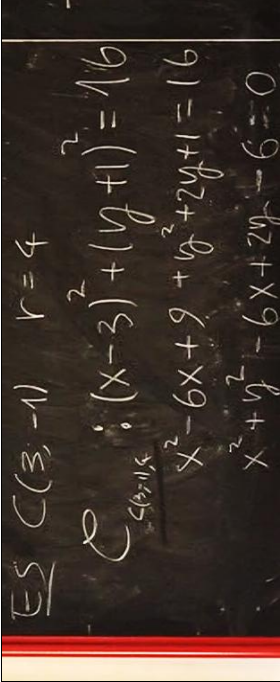
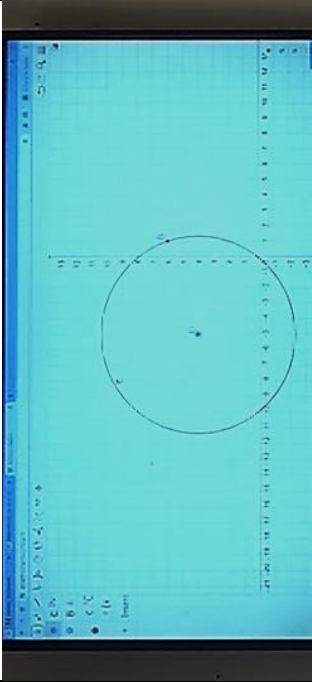
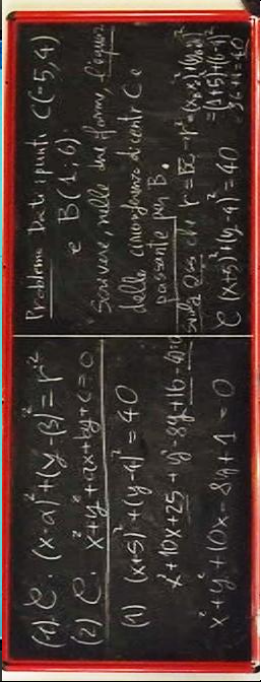
Il libro di testo utilizzato durante le lezioni è *Matematica.blu 2.0 Volume 3* (Bergamini et al., 2020). Alcune delle immagini riportate nelle tabelle sono, pertanto, parti dell'ebook di questo stesso volume proiettate alla LIM dal docente nel corso della spiegazione.

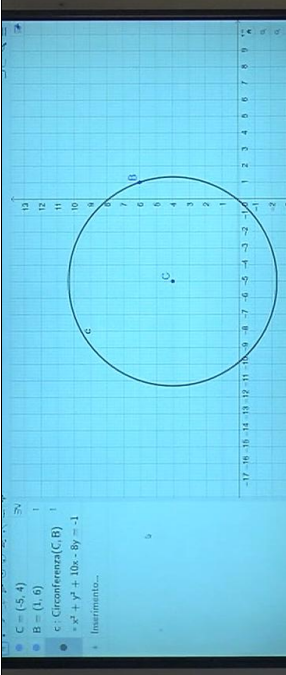
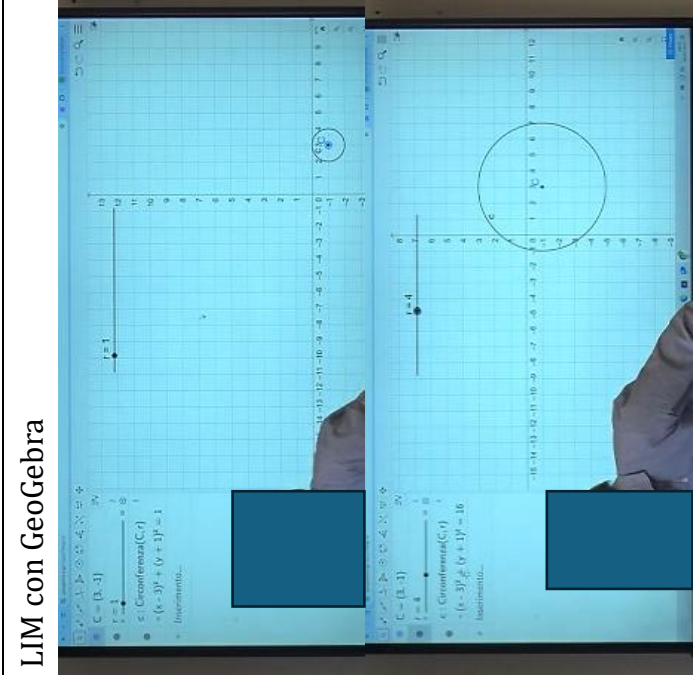
Docente 1				
Video/ minuti	Attività e strategie didattiche	Tipologia di supporto	Sistemi semiotici	Trasformazioni
Docente 1 lezione 1 (2 ore)		Note: il docente ha preparato la lezione per iscritto e ogni tanto consulta i suoi appunti		
Docente1 lezione 1 parte 1 00:00:00- 00:04:10	Introduzione all'argomento tramite: - richiami ad argomenti precedenti - mentre trattati (anche l'anno precedente) - esempi dalla vita quotidiana	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 1 parte 1 00:04:10- 00:06:00	Differenza tra cerchio e circonferenza	Lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

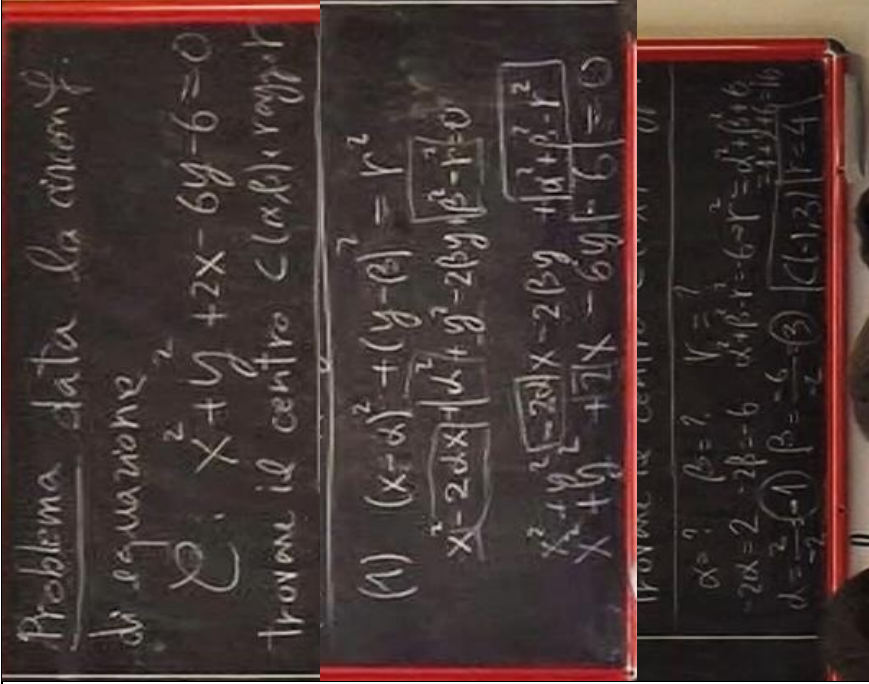
Docente1 lezione 1 parte 1 00:06:00- 00:10:50	Richiami all'introduzione della parabola Il docente cerca di coinvolgere gli studenti ponendo domande mirate Ripasso della relazione tra la descrizione "euclidea" e quella analitica della parabola	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione centro-raggio della parabola (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 1 00:10:50- 00:14:28	Introduzione della circonferenza in geometria analitica come luogo geometrico Il docente cerca di coinvolgere gli studenti ponendo domande mirate	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 1 parte 1 00:14:28- 00:22:25	Costruzione di una circonferenza dato il centro e il raggio con una cordicella di spago Il docente modifica leggermente la definizione di circonferenza del libro	LIM con ebook del libro di testo aperto Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive quello che dice a parole sulla LIM (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

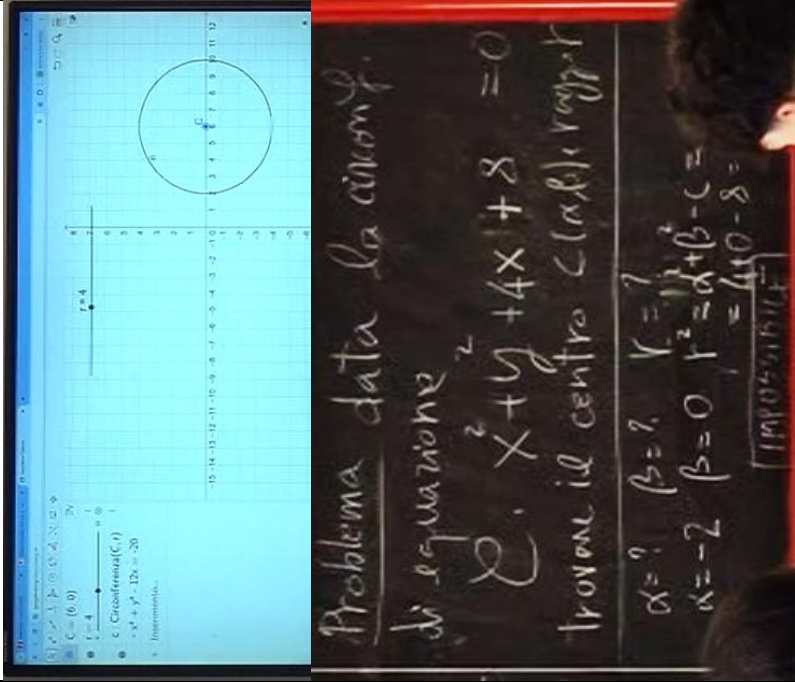
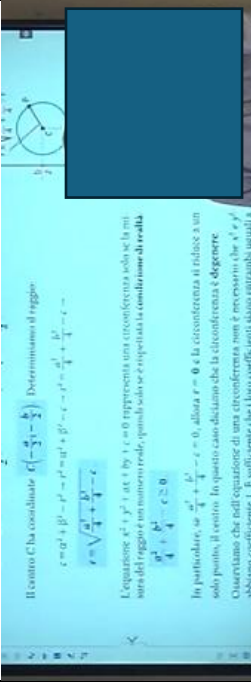
	perché così com'è non gli piace Richiami a quanto fatto per la parabola	 1 Circonferenza e sua equazione (detta RAGGIO) Circonferenza come luogo geometrico Definizione <i>Disce e la lunghezza di un segmento</i> Assegnato nel piano un punto O detto centro, si chiama circonferenza il luogo geometrico dei punti equidistanti da O. $PO = r$ costante. The set of all points at a fixed distance from a given point is a circle. Circle is the center of the circle.			
Docente1 lezione 1 parte 1 00:25:05- 00:30:30	Ripasso della nomenclatura delle parti della circonferenza Il docente cerca di coinvolgere gli studenti ponendo domande mirate	 segmento circolare CORDA ARCO AB radio	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 1 parte 1 00:30:30- 00:36:51	Proprietà delle circonferenze che valgono anche al di fuori della geometria analitica Cenni storici sull'evoluzione del concetto di circonferenza (Euclide, Cartesio) Enunciato e dimostrazione di un teorema sulle corde	 <u>Teorema</u> Ogni corda AB di una circonferenza C di lunghezza minore di $2r$ ha lunghezza minore di $2r$. <u>DIM.</u> Consideriamo il triangolo ABC. Vale la disuguaglianza $AB < AC + CB = 2r$.	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive quello che dice a parole alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive la disuguaglianza triangolare in linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

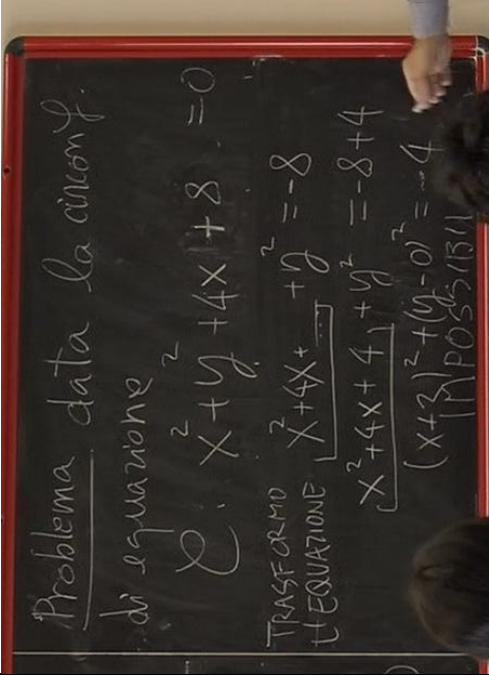
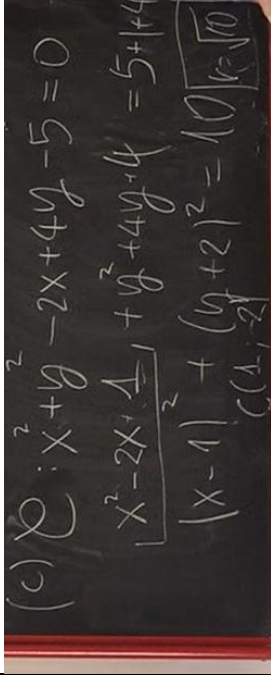
	Confronto con le proprietà della parabola				
Docente1 lezione 1 parte 1 00:36:51- 00:45:27	Introduzione dell'equazione della circonferenza Ripasso: calcolo della distanza tra due punti nel piano cartesiano	Lavagna di ardesia 	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive quello che dice a parole alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici alla lavagna (vedi riquadro verde in figura) (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 1 00:45:27- 00:48:40	Esercizio: troviamo l'equazione della circonferenza disegnata alla lavagna	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente ricava l'equazione centro-raggio della circonferenza disegnata alla lavagna (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico)	
Docente1 lezione 1 parte 1 00:48:40- end	Introduzione all'equazione della circonferenza in forma normale	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune	Registro algebrico	Il docente passa dall'equazione centro-raggio della circonferenza alla forma normale svolgendo i quadrati e poi riordinando i termini (trattamento all'interno del registro algebrico)

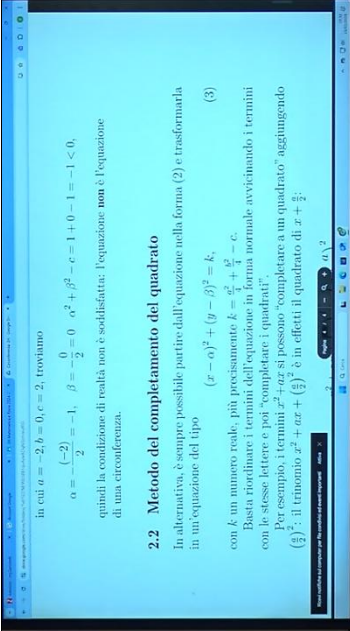
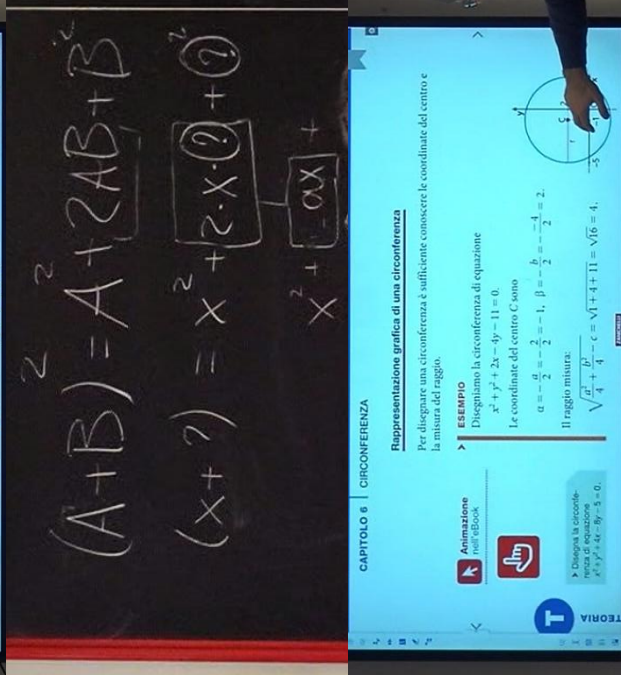
			Registro algebrico	
Docente1 lezione 1 parte 2 00:00:00- 00:09:00	Esercizio: scrivere nelle due forme viste l'equazione della circonferenza disegnata su GeoGebra Il docente cerca di coinvolgere gli studenti ponendo domande mirate Il docente mostra la pagina del libro dove viene trattato l'argomento	LIM con GeoGebra Lavagna di ardesia  	Registro figurale geometrico Registro della lingua comune	Il docente ricava dal disegno le coordinate di alcuni punti (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive quello che dice a parole alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente passa dall'equazione centro-raggio della circonferenza alla forma normale svolgendo i quadrati e poi riordinando i termini (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2 00:09:00- 00:12:07	Osservazione: vantaggi e svantaggi dei due modi di scrivere l'equazione di una circonferenza	LIM con GeoGebra	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente indica alcune parti del disegno fatto con GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

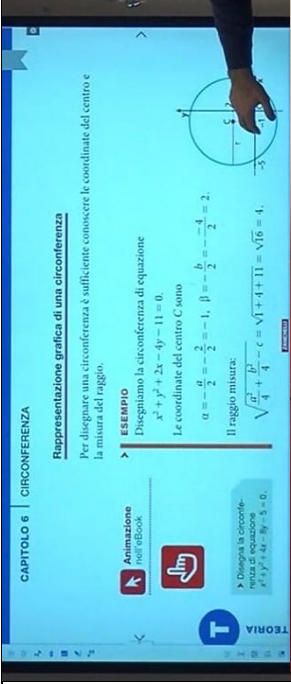
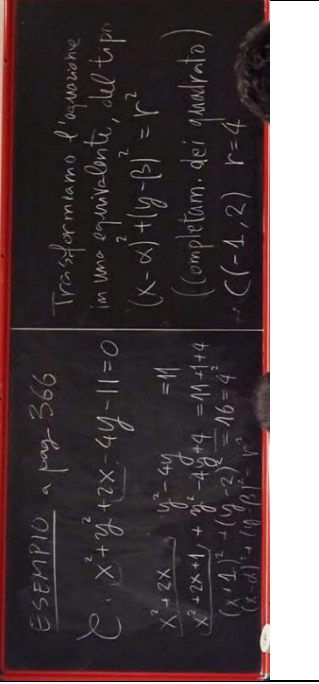
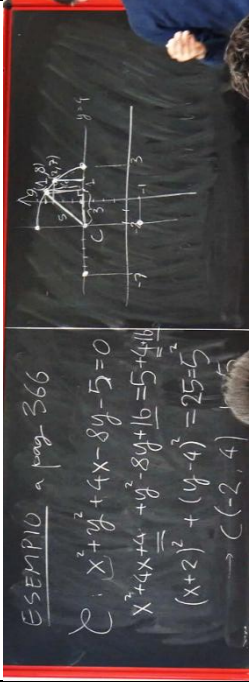
	Osservazione: GeoGebra ti dà l'equazione della circonferenza sia in forma centro-raggio che in forma normale		Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente mostra le coordinate dei punti scelti e l'equazione della circonferenza dati da GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2 00:12:07- 00:15:29	Il docente mostra come si disegna su GeoGebra una circonferenza di centro dato e raggio variabile	LIM con GeoGebra 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente sposta nel piano una circonferenza mantenendo fisso il raggio (trattamento all'interno del registro figurale geometrico) Il docente fa notare cosa succede all'equazione della circonferenza se si fissa il raggio e si sposta nel piano (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Il docente modifica il raggio di una circonferenza mantenendo fisso il centro (trattamento all'interno del registro figurale geometrico) Il docente fa notare cosa succede all'equazione della circonferenza se si fissa il centro e si modifica il raggio (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2	Esercizio: trovare il centro e il raggio di una circonferenza conoscendo la sua	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna quello che dice, sia a parole che in linguaggio algebrico (trattamento all'interno del registro

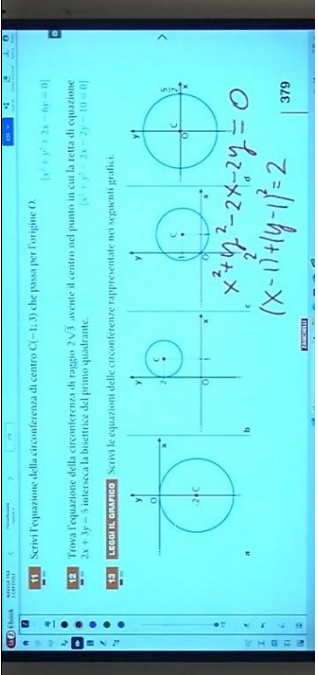
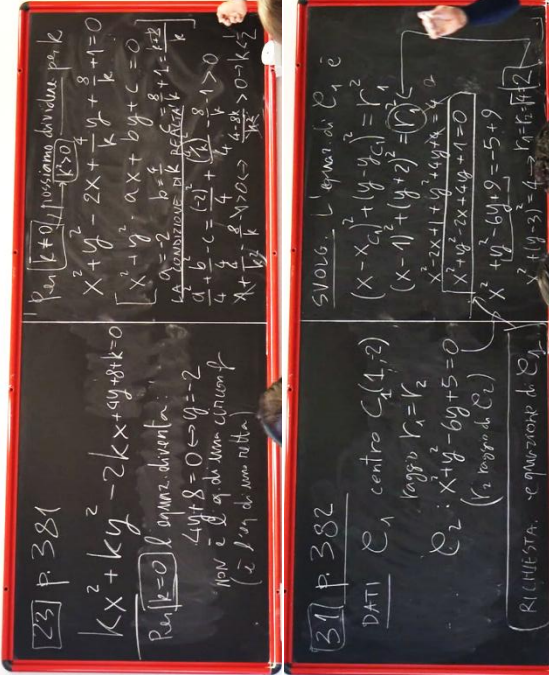
00:15:29-00:24:28	equazione in forma normale Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente propone due diversi metodi di risoluzione dell'esercizio alla classe		Registro algebrico	della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente svolge la forma centro-raggio della circonferenza in alpha e beta e la riordina (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente uguaglia i coefficienti del termine in x e del termine in y dell'equazione in forma normale, espressi in alpha e beta, con i rispettivi coefficienti dell'equazione della circonferenza scritta alla lavagna (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2 00:24:28-00:29:45	Il docente cerca di chiarire il dubbio di un alunno Il docente evidenzia i possibili problemi legati all'equazione di secondo grado per il raggio	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente rispiega a voce i passaggi appena eseguiti e indica sulla lavagna ciò che corrisponde a quanto sta dicendo (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

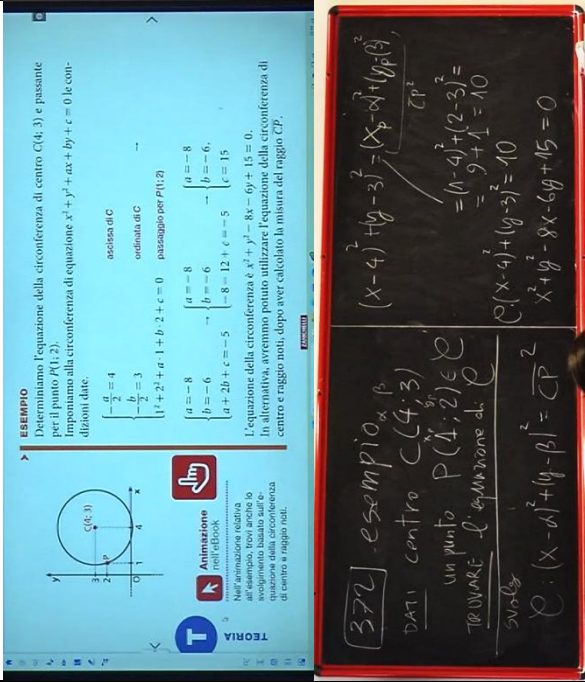
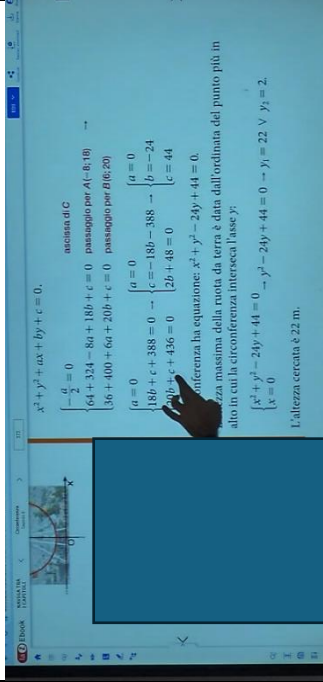
Docente1 lezione 1 parte 2 00:29:45- 00:36:55	Esempio Il docente modifica i coefficienti dell'esercizio precedente Osservazione: non è assurdo che il coefficiente di x e/o il coefficiente di y sia uguale a zero Il docente cerca di coinvolgere la classe sollecitando gli studenti a ragionare sull'esercizio proposto Osservazione: se ho l'equazione centro-raggio ho sempre una circonferenza; se parto da un polinomio in x^2 e y^2 potrei non avere una circonferenza	Lavagna di ardesia LIM con GeoGebra 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente utilizza GeoGebra per visualizzare i concetti illustrati (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente mostra come l'equazione della circonferenza cambi al variare della sua posizione nel piano cartesiano (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Il docente uguaglia i coefficienti del termine in x e del termine in y dell'equazione in forma normale, espressi in alpha e beta, con i rispettivi coefficienti dell'equazione della circonferenza scritta alla lavagna (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2 00:36:55- 00:40:00	Formule per trovare il centro e il raggio di una circonferenza conoscendo la sua equazione in forma normale	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente mostra e commenta le formule scritte sul libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

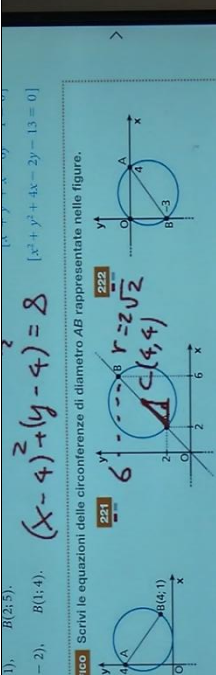
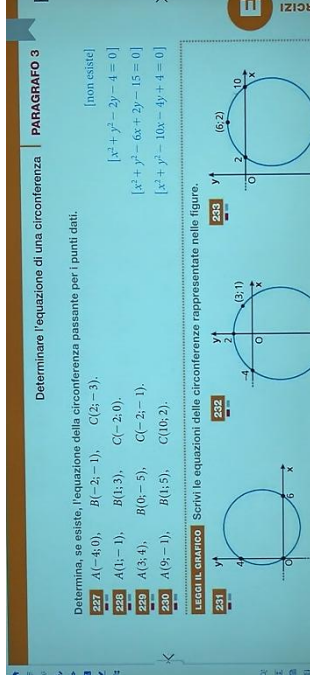
Docente1 lezione 1 parte 2 00:40:00- 00:44:45	Trasformiamo nella forma centro-raggio l'equazione dell'esercizio precedente: metodo del completamento del quadrato	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna quello che dice a parole (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 1 parte 2 00:44:45-	Esercizio col metodo di completamento del quadrato	Lavagna di ardesia 	Registro algebrico	Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 1 lezione 2 (1 ora)		Nota: il docente mostra alla classe alcuni appunti da lui redatti, che successivamente condividerà tramite Google Classroom e che sono allegati in Appendice H		
Docente1 lezione 2 00:00:00- 00:23:30	Riepilogo di quanto detto nella prima lezione sulla circonferenza in geometria analitica	LIM con file del docente Lavagna di ardesia LIM con ebook del libro	Registro della lingua comune	Il docente mostra e commenta cosa c'è scritto sul file PDF proiettato sulla LIM (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)

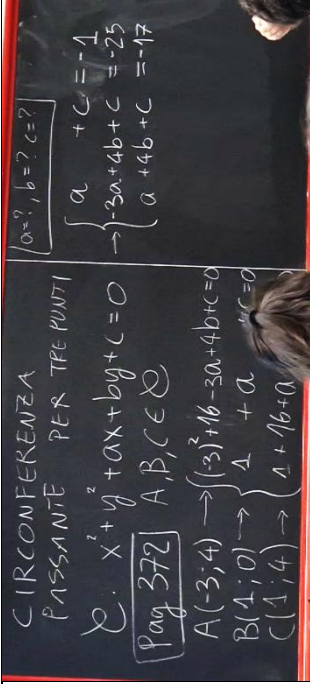
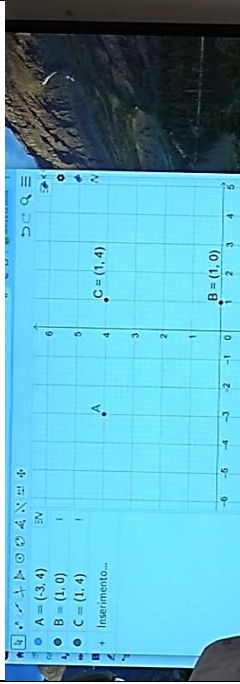
			Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna alcune formule (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente mostra e commenta cosa c'è scritto sul libro di testo proiettato sulla LIM (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)	
Docente1 lezione 2 00:23:30- 00:29:24	Svolgimento alla lavagna tramite il metodo del completamento del quadrato di un esercizio svolto	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia 	Registro algebrico Registro della lingua comune	Il docente scrive alla lavagna il testo dell'esercizio che sta dettando a voce (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico)	

	nel libro con una modalità diversa Il docente risponde alle domande degli studenti che chiedono chiarimenti	 	
Docente1 lezione 2 00:29:24- 00:37:54	Disegniamo una circonferenza partendo dalla sua equazione in forma normale usando il metodo del completamento del quadrato per trovare il centro e il raggio Osservazione: se il raggio è 5 ho 12 punti con coordinate intere nella mia circonferenza	Lavagna di ardesia 	Registro algebrico Registro figurale geometrico Registro della lingua comune Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per completare i quadrati (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente disegna la circonferenza alla lavagna sulla base di quanto scoperto (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente mostra sul disegno quanto sta osservando (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 2	LIM con ebook del libro di testo	Registro della	Il docente scrive sulla LIM l'equazione di una circonferenza disegnata nel libro di testo

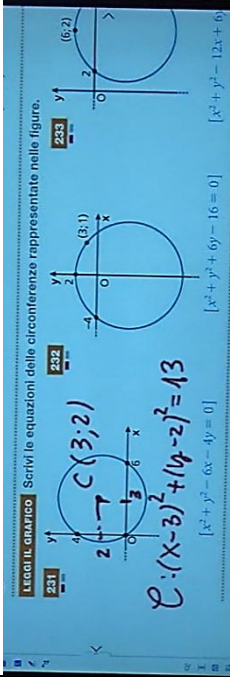
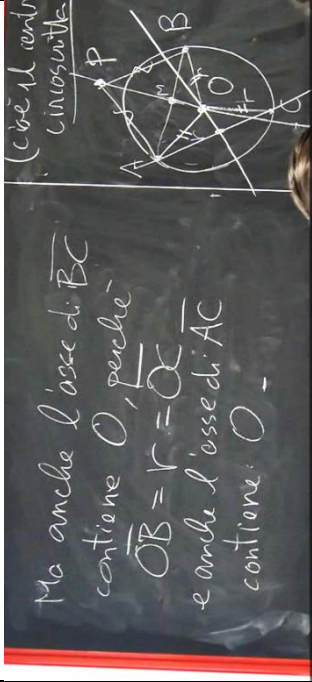
00:37:54-end			lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	(conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Il docente svolge l'equazione appena scritta per arrivare alla forma normale (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 1 lezione 3 (1 ora)		Note: il docente sfrutta la correzione degli esercizi per casa per introdurre nuovi concetti		
Docente1 lezione 3	Il docente mostra il procedimento 'migliore' per risolvere ciascuna tipologia di esercizio	LIM con ebook del libro di testo	Registro della lingua comune	Il docente legge ad alta voce il testo dell'esercizio e intanto scrive i dati alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
00:00:00-00:27:00	Il docente risponde a eventuali ulteriori richieste di chiarimenti Molte indicazioni vengono fornite solo a voce	Lavagna di ardesia 	Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente annota alla lavagna alcune cose viste nelle lezioni precedenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico + trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente rilegge ad alta voce e commenta cosa ha appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

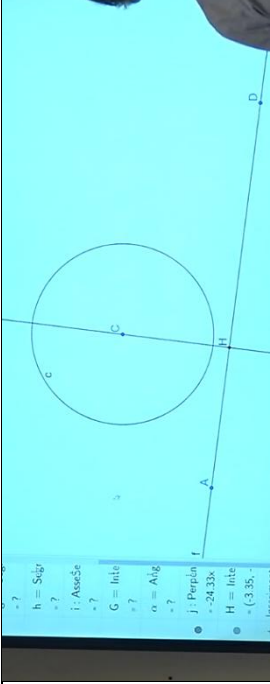
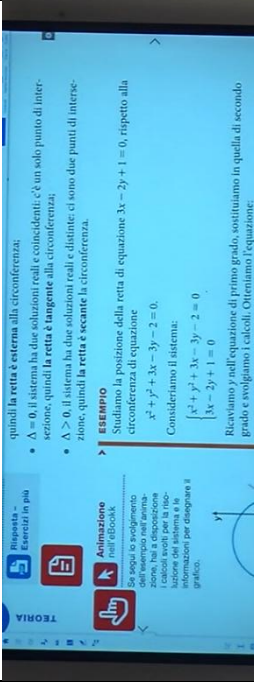
Docente1 lezione 3 00:27:00- 00:37:00	Determinare l'equazione della circonferenza dato il centro e un punto: lettura e commento del metodo proposto dal libro + svolgimento dello stesso esempio mediante il metodo preferito dal docente	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente mostra e commenta una pagina del libro di testo proiettato sulla LIM (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente legge ad alta voce il testo dell'esercizio e intanto ricopia i dati sulla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico + trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio proposto (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 3 00:37:00- 00:38:58	Analisi e commento di un esercizio svolto nel libro	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente mostra e commenta cosa c'è scritto sul libro proiettato sulla LIM (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)
Docente1 lezione 3	Esercizio: scrivi l'equazione della	LIM con ebook del libro di testo	Registro della	Il docente evidenzia alcune parti specifiche della figura e illustra il procedimento di

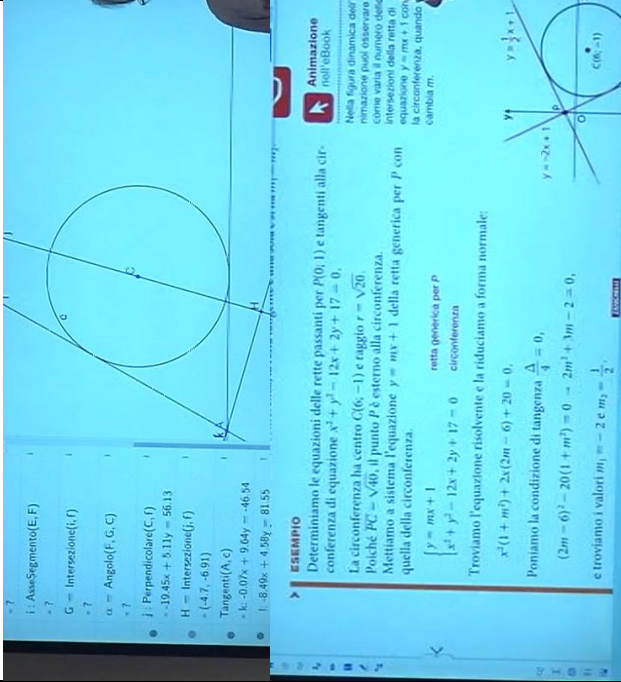
00:38:58-00:42:40	circonferenza di diametro AB rappresentata in figura Il docente propone più strategie di risoluzione		lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	risoluzione (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Il docente scrive in linguaggio algebrico sulla LIM ciò che dice a voce (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente1 lezione 3 00:42:40-end	Esercizio: trovare la circonferenza passante per 3 punti Discussione orale sulla risoluzione dell'esercizio tramite il sistema Osservazione: la circonferenza potrebbe non esistere. Caso di 3 punti allineati: sistema impossibile Il docente cerca di coinvolgere la classe nella discussione	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune	
Docente 1 lezione 4 (2 ore)				
Docente1 lezione 4 parte 1 00:00:00-end	Ricapitoliamo quanto visto nell'ultima lezione partendo dai dubbi sugli esercizi assegnati per casa	Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente scrive alla lavagna il testo dell'esercizio che sta dettando alla classe (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione in forma normale della

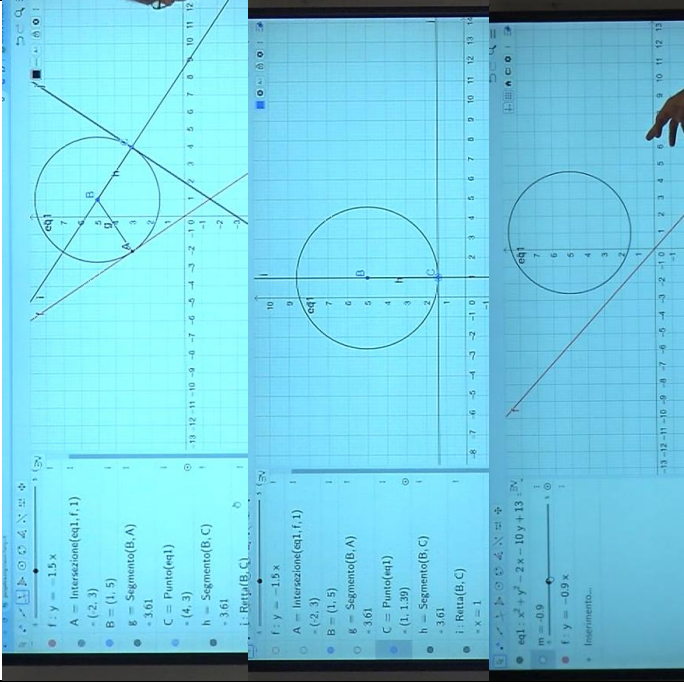
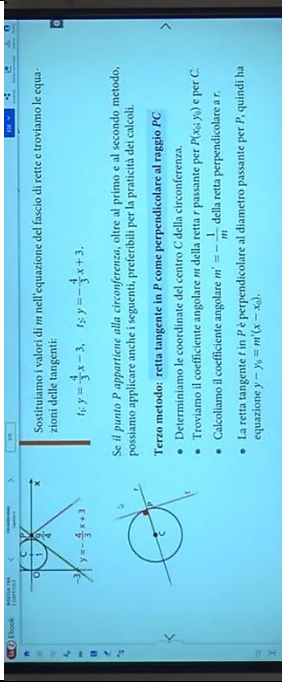
	Osservazione: alcuni collegamenti con la programmazione in informatica Metodo algebrico per trovare la circonferenza per 3 punti		circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente traduce i dati dell'esercizio in equazioni (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta a voce quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente dice a voce il procedimento di risoluzione e poi lo scrive alla lavagna in linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)		
Il docente interrompe un momento la lezione per fare l'appello e lasciare il tempo agli alunni appena entrati in classe di copiare la lavagna					
Docente1 lezione 4 parte 2 00:00:00-00:08:18	Continua lo svolgimento dell'esercizio		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente mostra i 3 punti su GeoGebra (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Dopo aver trovato l'equazione della circonferenza, il docente ricava il centro (trattamento all'interno del registro algebrico)	

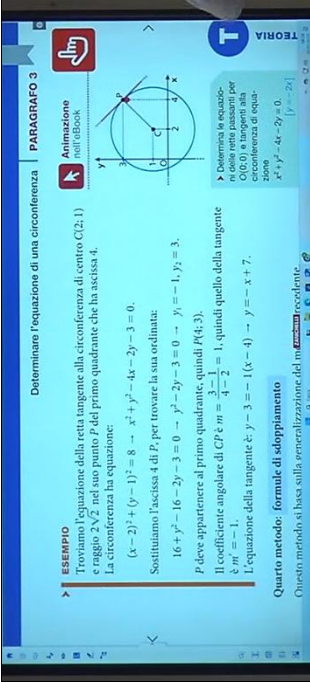
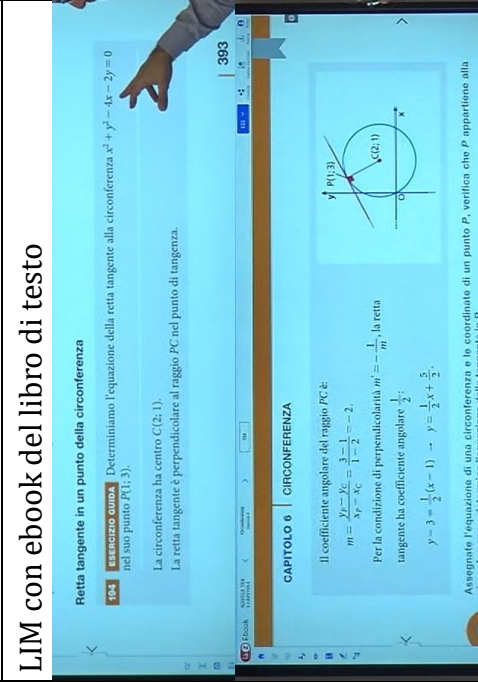
Docente1 lezione 4 parte 2 00:08:18- 00:27:10	Per rispondere alla domanda di uno studente, il docente propone un secondo metodo risolutivo: trovare prima il centro e il raggio della circonferenza 'geometricamente' e poi l'equazione della circonferenza Osservazione: nel caso dell'esercizio precedente, i 3 punti sono i vertici di un triangolo rettangolo isoscele Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: questo secondo metodo vale in generale per ogni terna di punti non allineati Osservazione: cosa succede per 3 punti allineati	LIM con GeoGebra	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente mostra i 3 punti su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente spiega a voce il metodo di risoluzione alternativo al precedente e intanto mostra quanto sta dicendo su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente modifica la figura su GeoGebra per mettere in risalto alcune caratteristiche (trattamento all'interno del registro figurale geometrico) Il docente commenta a voce quanto sta facendo su GeoGebra (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
---	---	------------------	---	---

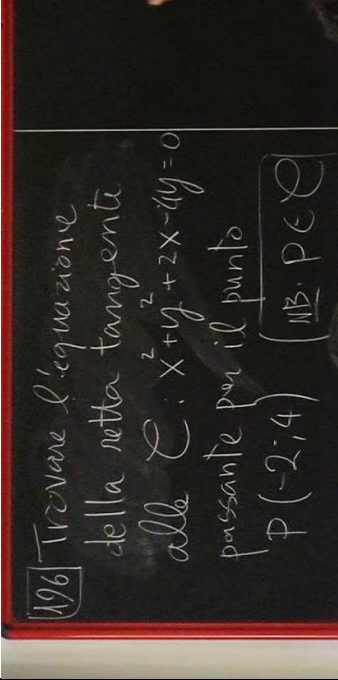
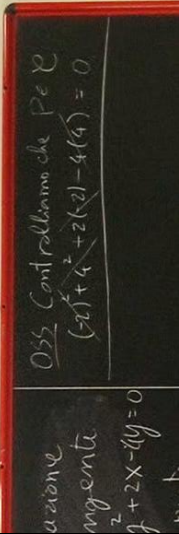
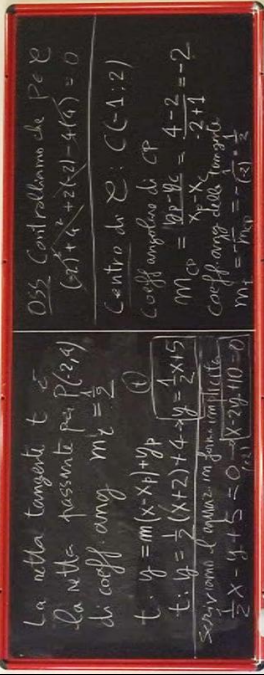
Docente1 lezione 4 parte 2 00:27:10- 00:30:08	Esercizio: scrivi l'equazione della cir- conferenza rappre- sentata in figura	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico Registro algebrico	Il docente elenca a voce le proprietà della cir- conferenza in figura (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua co- mune) Il docente scrive sulla LIM l'equazione centro- raggio della circonferenza in figura (conver- sione da registro figurale geometrico a registro algebrico)
Docente1 lezione 4 parte 2 00:30:08- end	Teorema del circo- centro e dimostra- zione	Lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico	Il docente detta il teorema e intanto lo scrive alla lavagna (trattamento all'interno del regi- stro della lingua comune) Mentre enuncia il teorema, il docente disegna la figura sulla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geome- trico) Il docente scrive e/o disegna alla lavagna e in- tanto commenta a voce cosa sta facendo e per- ché (conversione da registro figurale geome- trico a registro della lingua comune + tratta- mento all'interno del registro della lingua co- mune) Il docente traccia quanto detto/quanto scritto sulla figura (conversione da registro della lin- gua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 4 parte 3	Posizione reciproca di rette e circonfe- renze in geometria euclidea	LIM con GeoGebra	Registro della lin- gua co- mune	Il docente fa un disegno su GeoGebra e intanto descrive a parole ciò che fa (conversione da re- gistro figurale geometrico a registro della lin- gua comune)

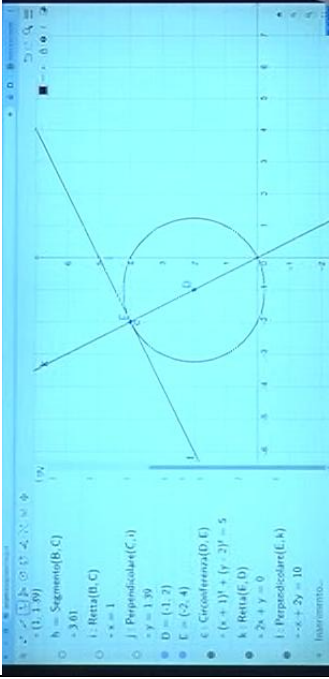
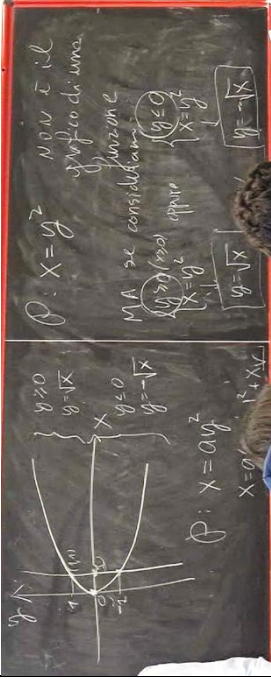
00:00:00-00:12:40			Registro figurale geome- trico		
Docente1 lezione 4 parte 3 00:12:40- 00:28:11	Posizione reciproca di rette e circonfe- renze in geometria analitica: come de- terminare algebrica- mente se una retta è tangente, secante o esterna a una circon- ferenza	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Il docente legge e commenta la pagina del libro di testo (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente detta un esercizio alla classe e lo scrive alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per risolvere l'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta a voce quanto scritto alla lavagna per rispondere a una domanda (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)	

Docente1 lezione 4 parte 3 00:28:11- end	Focus sul caso 'particolare' della retta tangente Paragoni col caso della parabola Quali rette passanti per un punto sono tangenti alla circonferenza? Come le trovo? Ho due metodi: uno algebrico e uno geometrico Il docente mette in guardia gli studenti sui rischi di usare il metodo algebrico Il docente mostra e commenta il metodo geometrico	LIM con GeoGebra LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente disegna su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente legge e commenta il metodo algebrico dalle pagine del libro di testo (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta il metodo geometrico dalle pagine del libro di testo (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alcune formule sulla LIM (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
--	--	--	--	---

Lezione 5 Docente 1 (2 ore)				
Docente1 lezione 5 parte 1 00:00:00- end	Riepilogo della lezione precedente Metodo per la ricerca delle tangenti valido solo per i punti sulla circonferenza Precisazioni sulle costruzioni su GeoGebra Caso particolare: rette tangenti alla circonferenza parallele agli assi cartesiani	LIM con GeoGebra 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente disegna su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Il docente interrompe la lezione per fare l'appello				
Docente1 lezione 5 parte 2 00:00:00- 00:07:40	Metodo per la ricerca delle tangenti valido solo per i punti sulla circonferenza: vediamo cosa dice il libro Dal libro, lettura e commento di un	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale	Il docente legge e commenta quanto scritto nel libro di testo (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta un esempio riportato nel libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

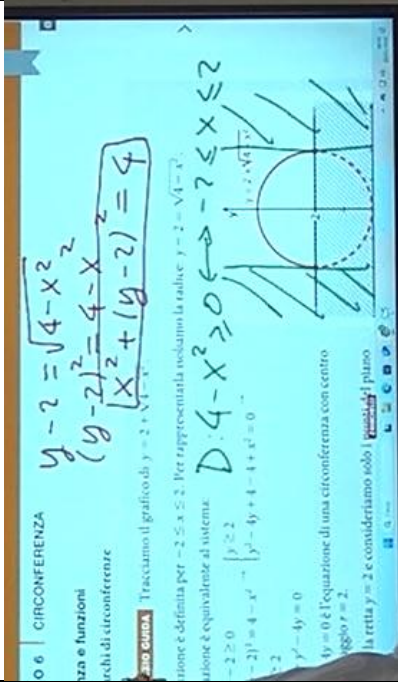
	esercizio svolto con questo metodo Osservazione: in molti esercizi il punto di tangenza non viene dato esplicitamente, ma bisogna ricavarlo dai Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: tutti i dati presenti nel testo di un esercizio sono utili al fine della sua risoluzione		geometrico	Il docente commenta la figura (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
Docente1 lezione 5 parte 2 00:07:40-00:14:35	Analizziamo l'esercizio guida del libro Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente risponde oralmente ad alcune domande		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente legge ad alta voce il testo dell'esercizio (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta lo svolgimento dell'esercizio (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente commenta la figura (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)

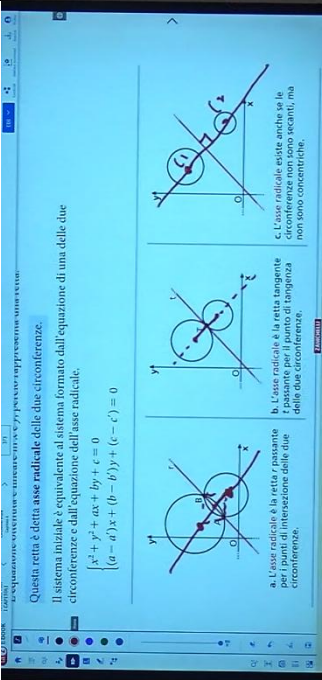
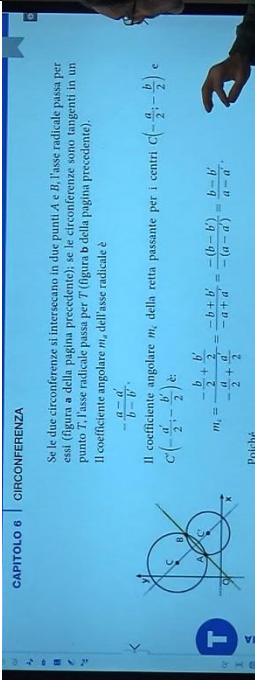
Docente1 lezione 5 parte 2 00:14:35- 00:31:00	Il docente assegna un esercizio da fare in classe Il docente dà alcuni suggerimenti su come procedere Il docente svolge l'esercizio alla lavagna	  	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna il testo dell'esercizio da svolgere in classe (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta il testo dell'esercizio e scrive alcune cose alla lavagna in linguaggio algebrico (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna lo svolgimento dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta e scrive alla lavagna quanto sta dicendo (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente prosegue con lo svolgimento dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto trovato (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare la forma implicita della retta e
---	--	--	---	--

				verificare la soluzione (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente1 lezione 5 parte 2 00:31:00- end	Disegniamo la retta e la circonferenza dell'esercizio Osservazione: per disegnare la circonferenza non serve il raggio ma basta il centro e un punto Osservazione: il termine noto è zero quindi la circonferenza passa per l'origine Il docente risponde oralmente ad alcune domande degli studenti	LIM con GeoGebra Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente fa il disegno su GeoGebra e intanto commenta (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Il docente torna sullo svolgimento dell'esercizio alla lavagna e commenta (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 5 parte 3 00:00:00- 00:06:05	Parabola e funzioni: richiamiamo alcuni concetti per introdurre il caso della circonferenza	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente disegna una parabola alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una parabola (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente completa il disegno (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alcune cose alla lavagna, sia a parole che in linguaggio

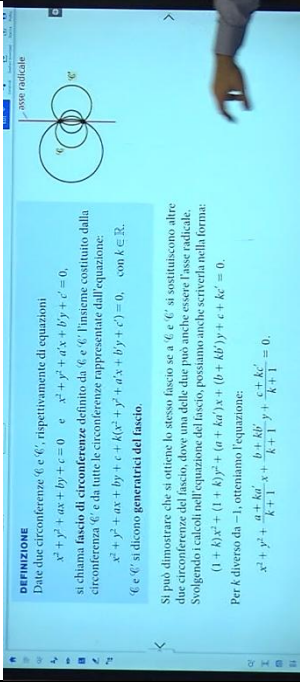
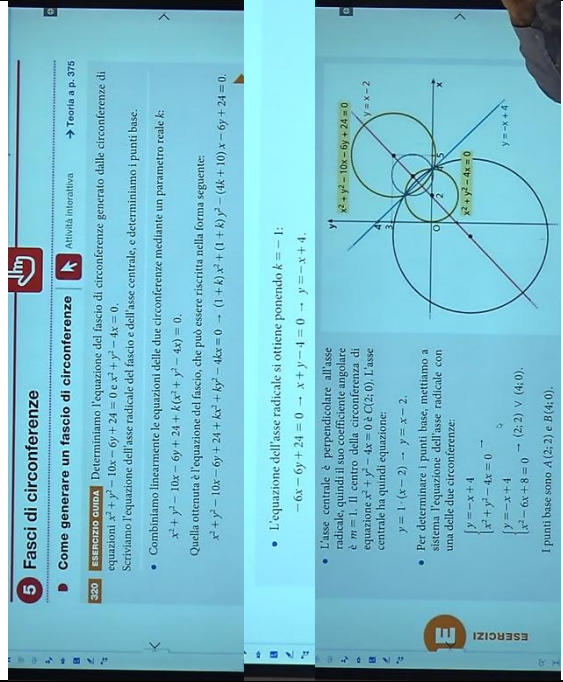
			Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa riferimento alla figura su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente imposta un sistema alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa un nuovo disegno su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente inserisce la funzione $f(x)$ su GeoGebra e mostra il suo grafico (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente inserisce la funzione $-f(x)$ su GeoGebra e mostra il suo grafico (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente fa un ulteriore commento su quanto scritto in precedenza alla lavagna per rispondere alla domanda di un alunno (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
--	--	--	---

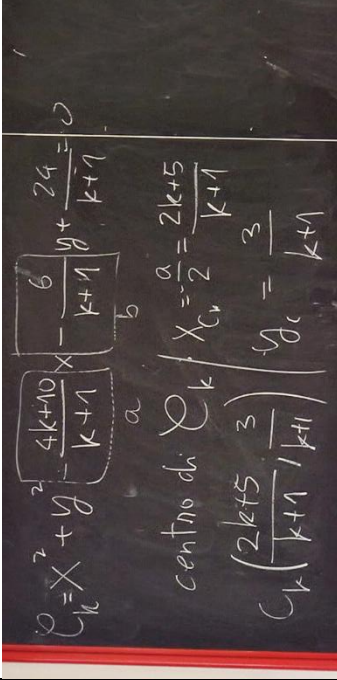
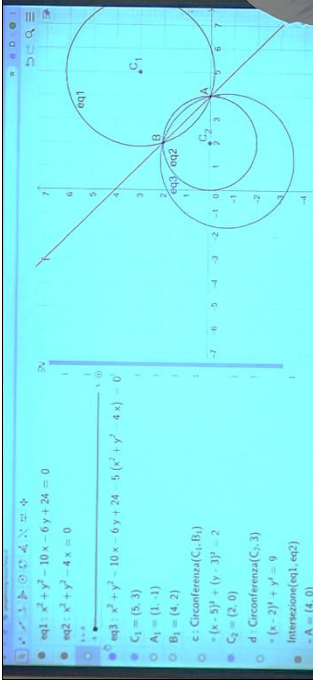
Docente1 lezione 5 parte 3 00:25:40- 00:39:00	Esercizio: trovare l'equazione corri- spondente al grafico utilizzando i dati della figura Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM con ebook del libro di testo LIM come lavagna bianca Lavagna di ardesia	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico Registro algebrico	Il docente commenta a voce il disegno alla lavagna (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente aggiunge alcuni elementi al disegno (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione della retta (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente disegna la semicirconferenza alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente ricava centro e raggio della semicirconferenza leggendo la figura e li scrive alla lavagna (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico + conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Il docente imposta l'equazione centro-raggio della circonferenza coi dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema che descrive la semicirconferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
---	---	--	---	--

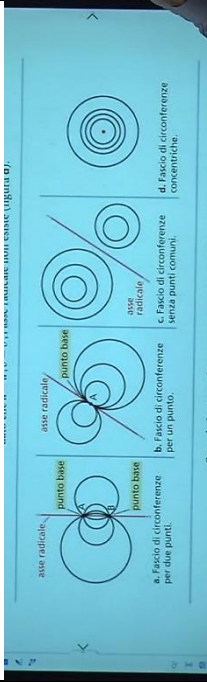
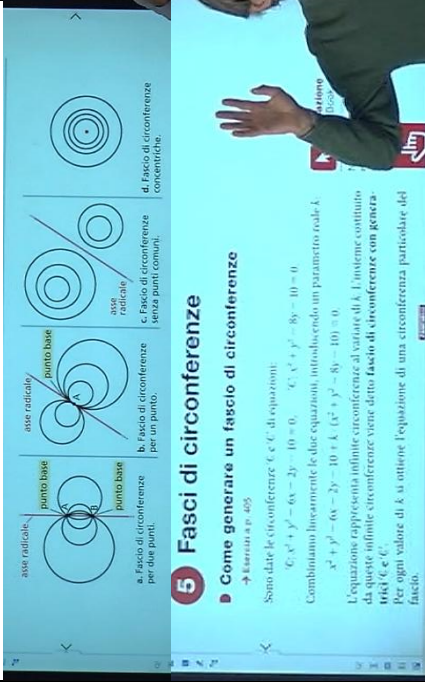
					Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente1 lezione 5 parte 3 00:39:00- end	Tracciare il grafico della funzione data: guardiamo insieme l'esercizio svolto sul libro	LIM con ebook del libro di testo		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente legge e commenta il procedimento del libro (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive un'equazione sulla LIM (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta l'equazione centro-raggio trovata (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta l'equazione per trovare il dominio della funzione (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente modifica il disegno sul libro (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente 1 lezione 6 (1 ora)		Nota: nei primi 19 minuti della lezione, il docente corregge gli esercizi assegnati per compito o ne svolge di nuovi. Questa parte del video non viene analizzata in quanto gli esercizi in questo caso non sono utilizzati per introdurre concetti nuovi.			
Docente1 lezione 6 00:19:00- end	Posizione di due circonferenze Il docente cerca di coinvolgere la classe	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia		Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente fa riferimento alle figure sulla pagina del libro (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

	Introduzione all'asse radicale	Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze. $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ - Se $a = a'$ e $b = b'$, le circonferenze sono concentriche e quindi non si intersecano, se $c \neq c'$, oppure coincidono se anche $c = c'$. - Se $a \neq a'$ o $b \neq b'$, le circonferenze non sono concentriche. Sottraiamo membro a membro le due equazioni. $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$ L'equazione ottenuta è lineare in x e y, perciò rappresenta una retta. Questa retta è detta asse radicale delle due circonferenze. Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e dall'equazione dell'asse radicale.	Registro algebrico Registro figurale geometrico	registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 7 parte 2 00:00:00-00:11:45	Asse radicale: cos'è e qual è il suo significato geometrico Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM con ebook del libro di testo  Questa retta è detta asse radicale delle due circonferenze. Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e dall'equazione dell'asse radicale. $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$ a. L'asse radicale è la retta passante per i punti di intersezione delle due circonferenze. b. L'asse radicale è la retta tangente ℓ passante per il punto di tangenza delle due circonferenze. c. L'asse radicale esiste anche se le due circonferenze non sono concentriche.	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente legge e commenta quanto scritto nel libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa riferimento alle figure sul libro di testo (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente aggiunge elementi ai disegni presenti nel libro (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente1 lezione 7 parte 2 00:11:45-00:17:40	Determinare il coefficiente angolare dell'asse radicale	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia  Se le due circonferenze si intersecano in due punti A e B, l'asse radicale passa per essi (figura a della pagina precedente); se le circonferenze sono tangenti in un punto T, l'asse radicale passa per T (figura b della pagina precedente). Il coefficiente angolare m_r dell'asse radicale è $m_r = \frac{-\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}{-\frac{b}{2} + \frac{b'}{2}} = \frac{-a + a'}{-b + b'} = \frac{-(a - a')}{-(b - b')} = \frac{b - b'}{a - a'}$ Il coefficiente angolare m_r della retta passante per i centri $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e $C'(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2})$ è $m_r = \frac{-\frac{b}{2} + \frac{b'}{2}}{-\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}} = \frac{-b + b'}{-a + a'} = \frac{-(b - b')}{-(a - a')} = \frac{b - b'}{a - a'}$ Polydè	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente legge e commenta quanto scritto nel libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione dell'asse radicale (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare il coefficiente angolare dell'asse

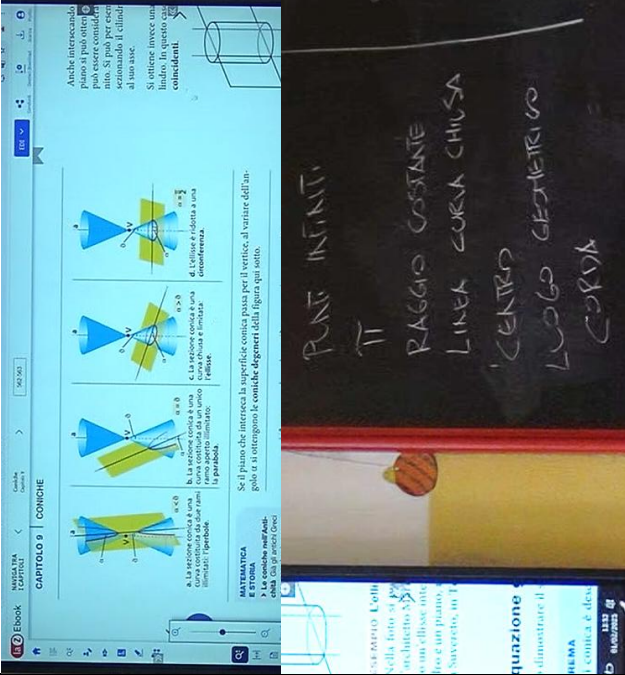
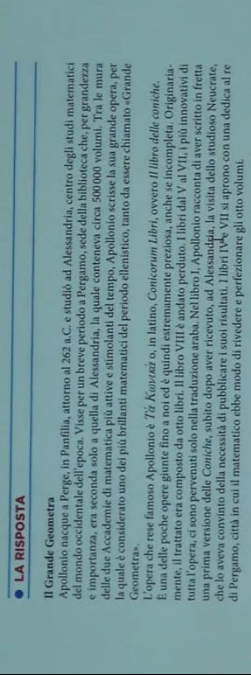
			radicale (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione del coefficiente angolare della retta passante per i due centri (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente legge e commenta quanto scritto nel libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente1 lezione 7 parte 2 00:17:40- 00:28:05	Esempio dal libro: determinare gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze data equazione data Il docente dà alcuni suggerimenti per lo svolgimento degli esercizi		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico
Docente1 lezione 7 parte 2 00:28:05-end	Facciamo insieme l'esercizio proposto dal libro	Lavagna di ardesia LIM con GeoGebra	Il docente detta il testo dell'esercizio alla classe e lo scrive alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente trova il centro e il raggio delle due circonferenze utilizzando i dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale

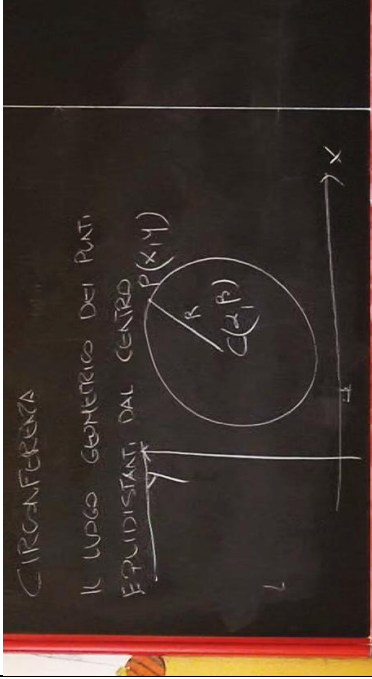
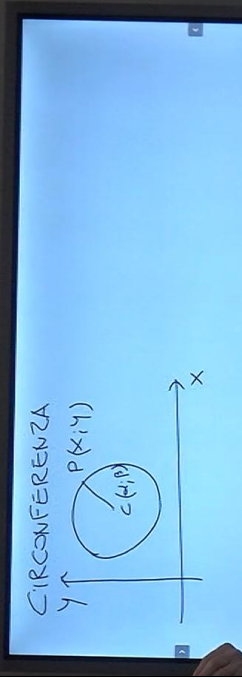
Docente1 lezione 7 parte 3 00:07:45-end	Non è stato possibile analizzare questa parte del video perché priva di audio			
Docente1 lezione 7 parte 4 00:00:00-00:01:30	Definizione di fascio di circonferenze (continua dal segmento precedente)		Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente legge e commenta le equazioni scritte nel libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente1 lezione 7 parte 4 00:01:30-00:16:10	Analisi di un esercizio svolto: determinare l'equazione del fascio di circonferenze date le due circonferenze generatrici + determinare l'equazione dell'asse radicale, dell'asse centrale e i punti base Il docente risponde brevemente ad alcune domande degli studenti		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente legge e commenta il testo dell'esercizio (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta lo svolgimento dell'esercizio (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta le equazioni delle due circonferenze (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente commenta il disegno del libro (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa il disegno su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente mostra come varia la figura al variare della variabile k che compare

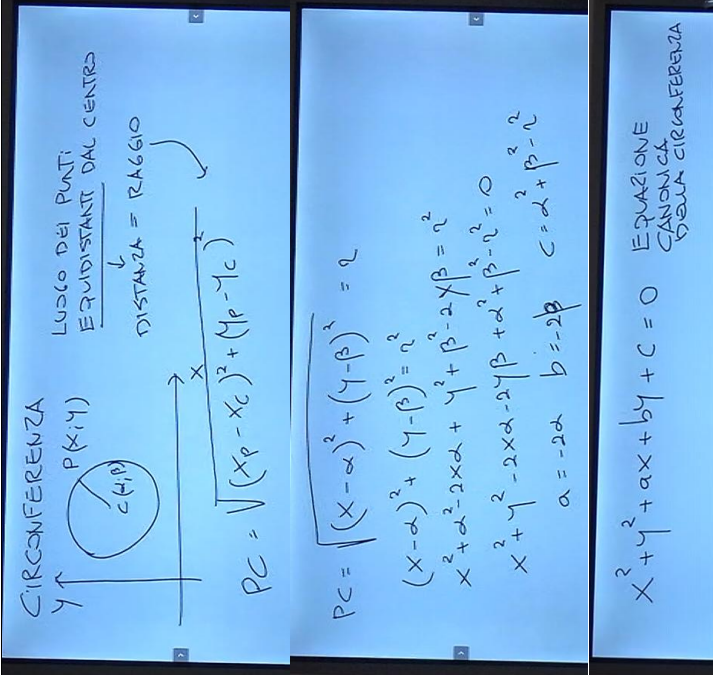
Docente1 lezione 7 parte 4 00:16:10- 00:22:05	Troviamo l'equazione del centro di una generica circonferenza del fascio	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia LIM con GeoGebra 			nell'equazione dal fascio (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente scrive in forma normale l'equazione del fascio a partire dall'equazione scritta sulla pagina del libro (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare il centro di una generica circonferenza del fascio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente inserisce le equazioni trovate su GeoGebra e mostra il disegno (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente mostra come si sposta il centro C_k di una generica circonferenza del fascio al variare di k (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente mostra su GeoGebra che C_k si trova sempre sull'asse centrale (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)		

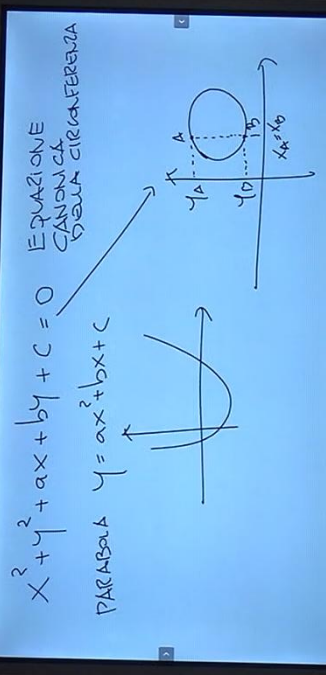
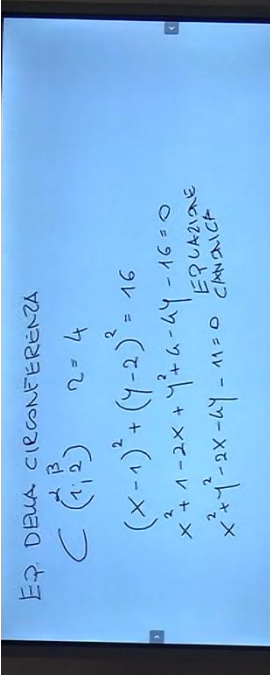
Docente1 lezione 7 parte 4 00:22:05- end	Fasci di circonfe- renze: caso in cui le due circonferenze generatrici non sono secanti	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico	Mentre parla, il docente fa riferimento ai dise- gni sul libro di testo (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geome- trico)
Docente 1 le- zione 8 (1 ora)		Nota: nel segmento da 00:07:00 a 00:37:25 il docente si limita alla correzione degli esercizi assegnati per casa, senza in- troddurre nuovi contenuti. Pertanto, questa parte della lezione non verrà analizzata.		
Docente1 lezione 8 00:00:00- 00:07:00	Riepilogo sui fasci di circonferenze	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico Registro figurale geome- trico	Il docente legge e commenta quanto scritto nel libro di testo (conversione da registro alge- brico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa riferimento ai dise- gni sul libro di testo (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geome- trico)
Docente1 lezione 8 00:07:00- 00:37:25	In questo segmento, il docente corregge alcuni esercizi assegnati per casa alternando spiegazioni orali, l'uso della lavagna di arde- sia e infine di GeoGebra per visualizzare meglio la situazione. Questa parte del video non viene analizzata poiché non vengono introdotti nuovi contenuti			
Docente1 lezione 8	Particolari fasci di circonferenze	LIM con ebook del libro di testo LIM con GeoGebra	Registro della	Il docente legge e commenta un esercizio svolto sul libro di testo (conversione da regi- stro algebrico a registro della lingua comune)

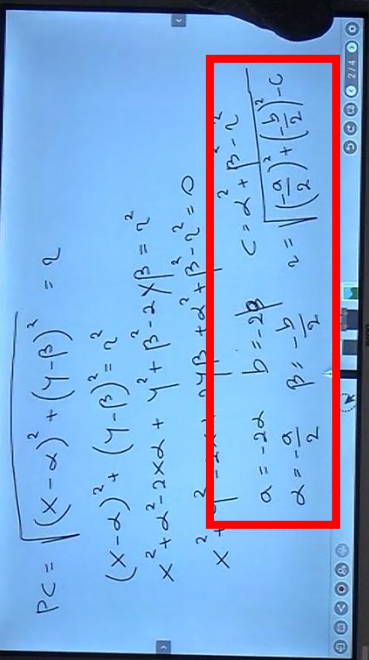
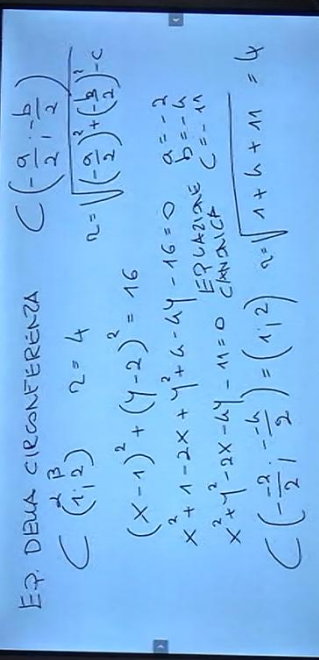
00:37:25-end	Circonfrenze secanti ESEMPIO GUIDA Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-1; 2)$ e $B(3; 0)$. Dobbiamo combinare linearmente l'equazione di due circonferenze passanti per A e B. Come prima circonferenza prendiamo quella che ha AB come diametro. Il centro è il punto medio $M(1; 1)$ di AB e il raggio è $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$ L'equazione della circonferenza è $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ Come seconda circonferenza possiamo prendere la retta per A e B immaginandola come una circonferenza di raggio infinito, cioè la circonferenza dei punti che corrisponde all'asse radicale. Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula per l'equazione della retta per due punti: $y - 2 = \frac{0 - 2}{3 - (-1)}(x + 1) \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow 2y - 4 = -x - 1 \rightarrow x + 2y - 3 = 0$ lingua comune Registro figurale Registro geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente mostra la situazione su GeoGebra (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente mostra cosa succede al variare del parametro k (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
--------------	---	--

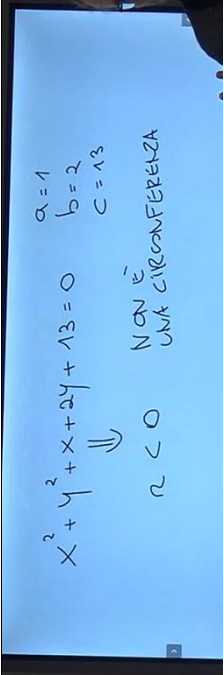
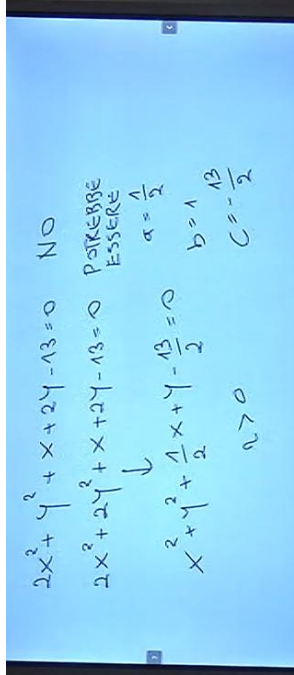
Docente 2				
Video/ minuti	Attività e strategie didattiche	Tipologia di supporto	Sistemi semiotici	Trasformazioni
Docente 2 lezione 1 (2 ore)				
Docente2 lezione 1 00:00:00- 00:12:40	Introduzione alla conferenza riprendendo il discorso sulle coniche già iniziato con la parabola Il docente cerca di coinvolgere la classe nella discussione invitando gli studenti a condividere ciò che sanno o ciò che viene loro in mente quando si parla di conferenza Il docente sottolinea l'importanza della conferenza nella storia dell'uomo	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente trascrive in maniera sintetica alla lavagna gli interventi degli studenti, sia in forma verbale che simbolica (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente2 lezione 1 00:12:40- 00:32:22	Inquadramento storico della conferenza attraverso riferimenti alla sua evoluzione nel corso della storia della matematica	LIM con file PDF del docente 	Registro della lingua comune	Il docente legge quanto scritto nel file proiettato sulla LIM (trattamento all'interno del registro della lingua comune)

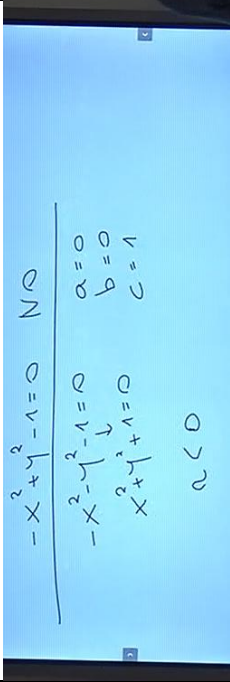
	Il docente cerca di coinvolgere gli studenti nella discussione ponendo domande mirate				
Docente2 lezione 1 00:32:22-end	Definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano Il docente fa ragionare la classe sul significato della definizione	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Il docente detta la definizione di circonferenza come luogo geometrico e la scrive alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente disegna sulla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)	
Docente 2 lezione 2 (2 ore)					
Docente2 lezione 2 parte 1 00:00:00-00:04:20	Ricapitoliamo cosa abbiamo visto nella lezione precedente Focus sulle notazioni che si utilizzano per indicare un punto generico della circonferenza e il suo centro	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive/disegna alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)	
Docente2 lezione 2 parte 1	Proviamo a tradurre la definizione di circonferenza come luogo geometrico	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Il docente detta la definizione di circonferenza come luogo geometrico e la scrive alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune)	

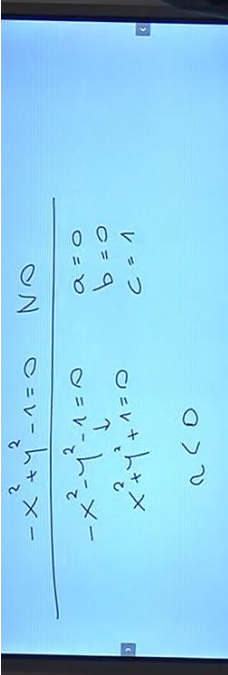
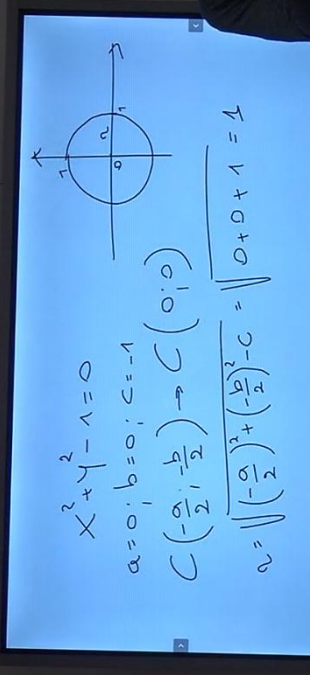
00:04:20-00:18:48	per trovare la sua equazione canonica Il docente cerca di coinvolgere la classe nella discussione con domande mirate Il docente fa domande alla classe per capire se lo stanno seguendo		Registro algebrico	Il docente traduce la definizione in linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta a voce la formula della distanza tra due punti che ha appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente sostituisce nella formula della distanza le coordinate del punto P e del punto C (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente spiega e commenta quanto appena fatto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta il risultato ottenuto dopo aver tolto la radice e svolto i quadrati (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente riordina i termini dell'equazione ottenuta (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente riscrive l'equazione ottenuta utilizzando i parametri a, b e c (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:18:48-00:22:35	Domanda per la classe: quali sono le differenze tra l'equazione canonica della circonferenza e	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta l'equazione canonica della circonferenza (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione canonica della parabola

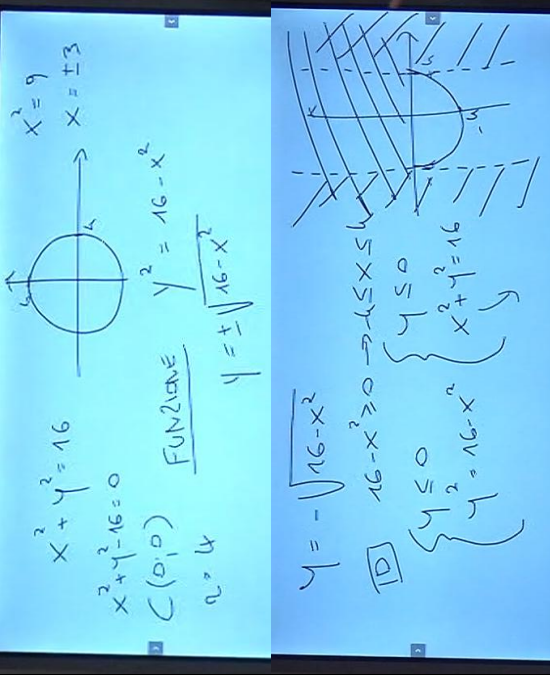
	quella della parabola? Osservazione: la circonferenza non è una funzione Domanda per la classe: come possiamo fare affinché anche la circonferenza diventi una funzione?		Registro figurale geometrico	(conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente rappresenta la parabola descritta dall'equazione alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente rappresenta la circonferenza descritta dall'equazione alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente evidenzia alcuni punti sulla circonferenza e spiega perché non si tratta di una funzione (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:22:35- 00:26:46	Esercizio: dati il centro e il raggio, trovare l'equazione canonica della circonferenza	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive i dati alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente imposta l'equazione centro-raggio e la legge ad alta voce (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente spiega cosa ha appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla forma canonica (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:26:46- 00:35:35	Troviamo il centro e il raggio della circonferenza data la sua equazione canonica	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Il docente ricava oralmente alpha, beta e r da una delle equazioni scritte in precedenza (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

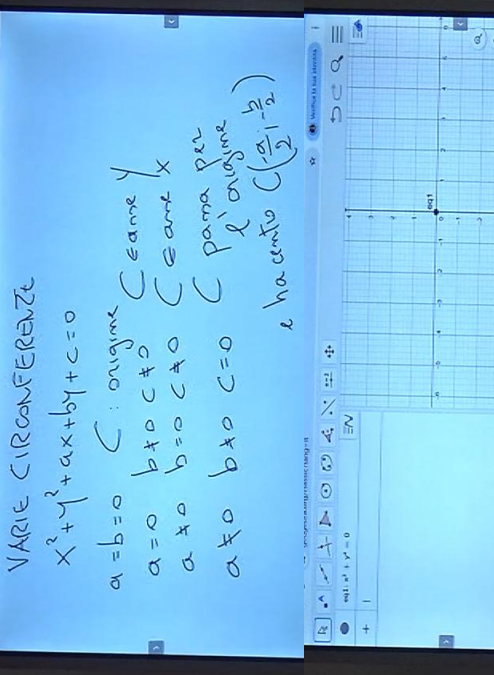
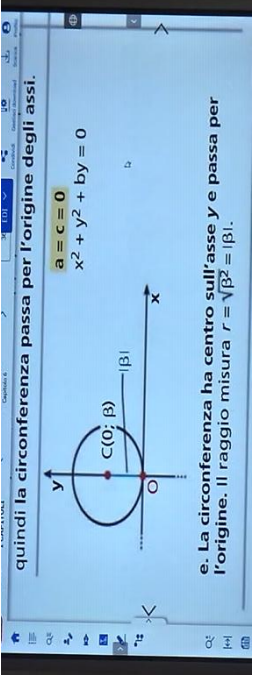
Il docente risponde alle domande degli studenti Richiami a quanto visto nel caso della parabola		Registro algebrico	Il docente scrive le equazioni per alpha, beta e r alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta le formule ottenute (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:35:35-00:39:20 Testiamo le formule appena ricavate per alpha, beta e r Il docente risponde alle domande degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente ripete ad alta voce e scrive alla lavagna le formule ottenute per trovare alpha, beta e r (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente ricava i valori di a, b e c nell'esercizio proposto e li scrive alla lavagna (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente ricava le coordinate del centro e il valore del raggio applicando le formule appena viste (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta cosa ha scritto/cosa sta scrivendo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:39:20-00:43:55 Esercizio: a partire dall'equazione canonica della circonferenza, individuiamo centro e raggio	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Il docente detta l'equazione di una circonferenza e la scrive alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

	Osservazione: nell'equazione proposta il raggio è negativo		Registro algebrico	Il docente dice quanto valgono in questo caso a, b e c e lo scrive alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna che l'equazione non rappresenta una circonferenza (trattamento all'interno della lingua comune)
Docente2 lezione 2 parte 1 00:43:55- 00:50:25	In risposta alla domanda di un alunno, il docente inizia a trattare anche il caso in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono diversi da 1 Il docente chiede agli studenti di rispondere alla domanda del compagno Il docente chiede alla classe che differenza c'è tra le due equazioni scritte alla lavagna		Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente scrive alla lavagna un esempio dettato da un alunno (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente dice quanto valgono a, b e c (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna una seconda equazione di secondo grado in x e y (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna che la prima equazione non è l'equazione di una circonferenza (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna che la seconda equazione potrebbe essere l'equazione di una circonferenza (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente dice quanto valgono a, b e c in questo caso e lo scrive alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

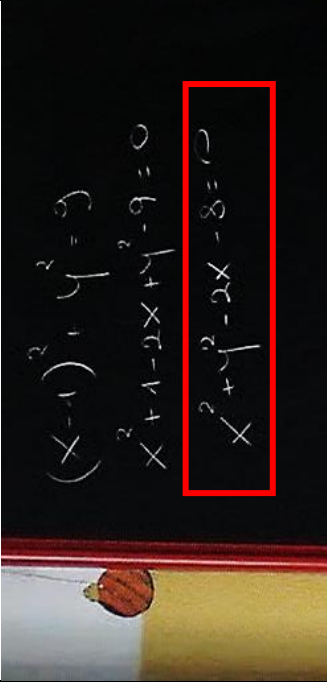
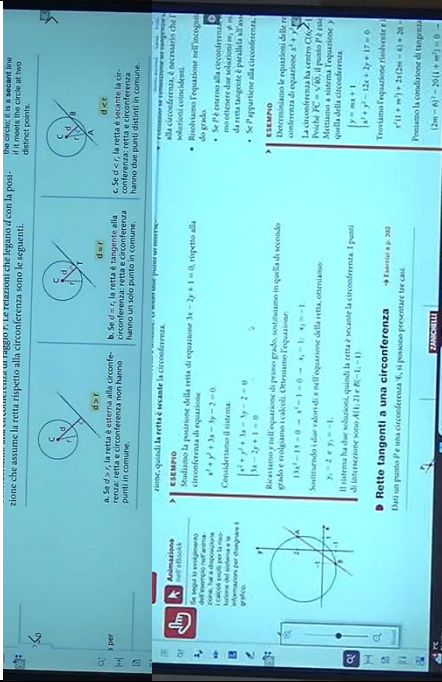
Docente2 lezione 2 parte 1 00:50:25- Docente2 lezione 2 parte 2 00:00:00- 00:00:45	Domanda per la classe: cosa succede se il coefficiente di x^2 e/o di y^2 è negativo? Il docente propone alcuni esempi di equazioni di se- condo grado in x e y e li commenta	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente fa alcuni commenti sull'equazione trovata (conversione da registro algebrico a re- gistro della lingua comune) Il docente detta e scrive sulla lavagna una equazione di secondo grado in x e y (tratta- mento all'interno del registro della lingua co- mune) Il docente commenta l'equazione scritta alla la- vagna (conversione da registro algebrico a re- gistro della lingua comune) Il docente detta e scrive sulla lavagna una se- conda equazione di secondo grado in x e y (trattamento all'interno del registro della lin- gua comune) Il docente commenta l'equazione scritta alla la- vagna (conversione da registro algebrico a re- gistro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conver- sione da registro algebrico a registro della lin- gua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna i valori di a , b e c (conversione da registro alge- brico a registro della lingua comune + conver- sione da registro della lingua comune a regi- stro algebrico)
--	--	---	--	---

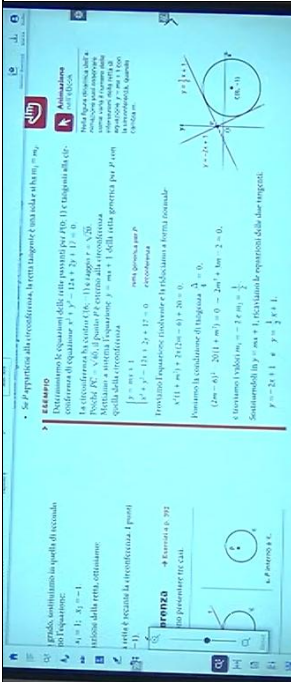
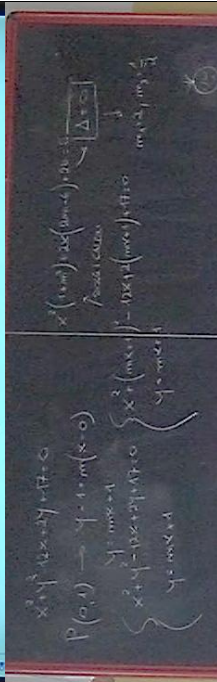
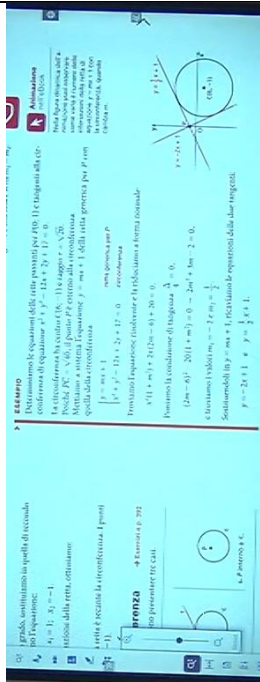
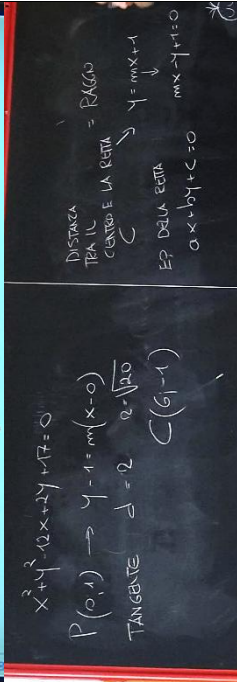
Docente2 lezione 2 parte 2 00:00:45- 00:03:35	Il docente risponde alla domanda di un alunno: perché nella parabola non potevo cambiare di segno a tutti i coefficienti dell'equazione e invece nella circonferenza posso farlo? Perché dall'altra parte dell'uguale ho 0 e non y come avevo nella parabola	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta le equazioni scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 2 parte 2 00:03:35- 00:08:14	Esempio: la circonferenza goniometrica Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Commento sul valore di c	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente detta e scrive alla lavagna l'equazione della circonferenza goniometrica (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta l'equazione (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive i valori di a, b e c (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per trovare il centro e il raggio della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente sostituisce i valori di a, b e c e svolge alcuni passaggi algebrici per trovare le coordinate del centro e del raggio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente disegna la circonferenza goniometrica a partire dalle informazioni trovate

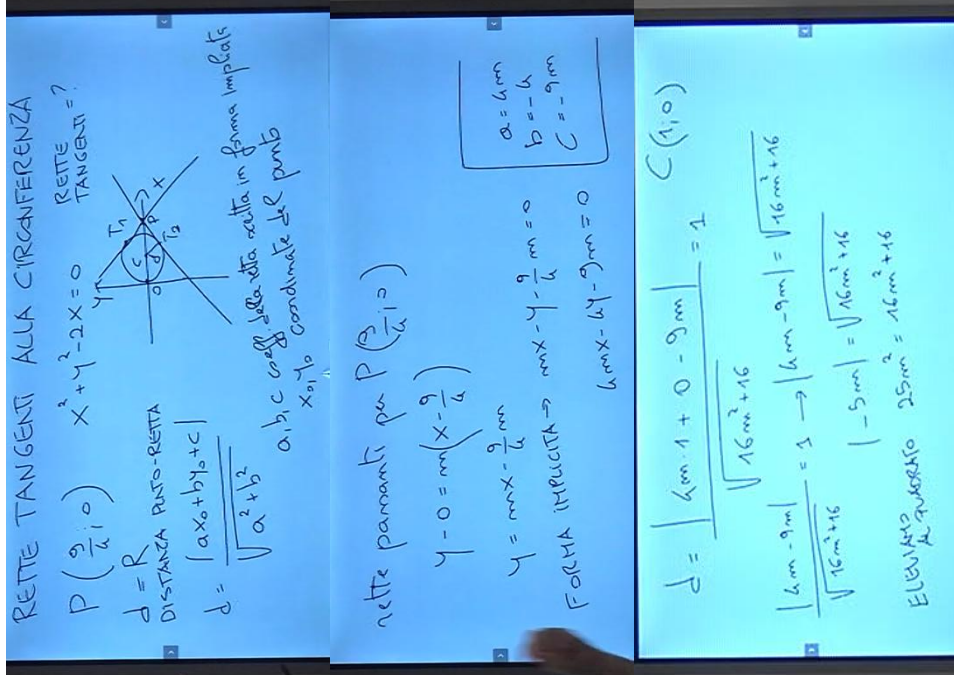
Docente2 lezione 2 parte 2 00:08:14- 00:25:40	Facciamo diventare la circonferenza una funzione Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente risponde alle domande degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico Registro figurale geome- trico	(conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente detta e scrive alla lavagna una equazione (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici e per trovare il centro e il raggio della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente rappresenta la circonferenza in esame (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente scrive alla lavagna quanto detto a voce da un alunno (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna una funzione e commenta le differenze col caso della circonferenza (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna un sistema e commenta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente rappresenta graficamente il sistema (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
---	---	---	---	--

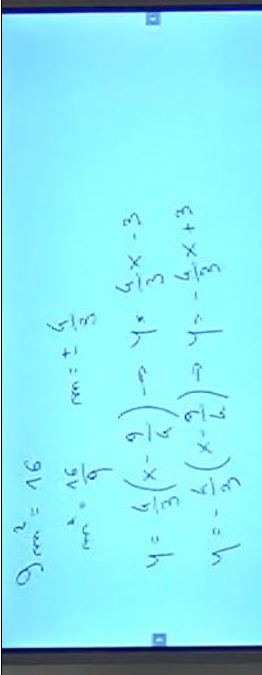
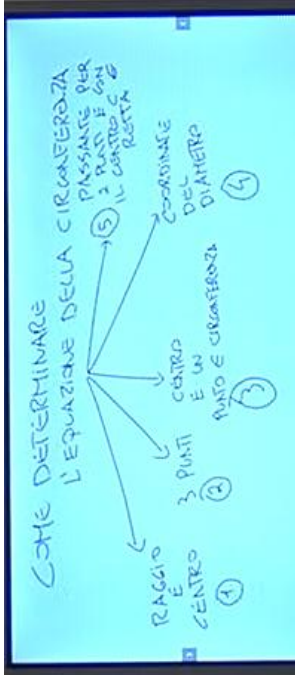
Docente2 lezione 2 parte 2 00:25:40- 00:38:40	Il docente mostra cosa succede se i parametri a, b e c dell'equazione canonica della circonferenza sono uguali a zero Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Un alunno chiede cosa succede se tutti e tre i parametri sono uguali a zero	LIM come lavagna bianca LIM con GeoGebra 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente detta e scrive alla lavagna l'equazione canonica della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna sinteticamente quello che dice/quello che dicono i ragazzi utilizzando un mix di parole e linguaggio algebrico (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente inserisce su GeoGebra l'equazione canonica con a, b e c uguali a zero e mostra il disegno (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
Docente2 lezione 2 parte 2 00:38:40-end	Ricapitoliamo tutti i casi analizzati utilizzando l'ebook del libro di testo	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente commenta la trattazione del libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
Docente 2 lezione 3 (1 ora)				
Docente2 lezione 3	Il docente mostra alla classe le varie modalità che offre	LIM con GeoGebra Lavagna di ardesia	Registro della	Mentre parla, il docente scrive su GeoGebra le coordinate di un punto (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

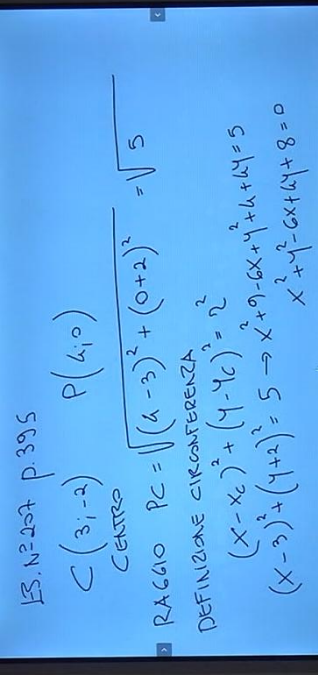
00:00:00-00:11:15	GeoGebra per disegnare una circonferenza Focus: la circonferenza dato il centro e un punto Focus: la circonferenza per 3 punti Focus: la circonferenza dati il centro e il raggio		lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente disegna con GeoGebra la circonferenza con centro il punto e mostra la corrispondente equazione (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Il docente commenta la forma centro-raggio dell'equazione della circonferenza proposta da GeoGebra (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente svolge alla lavagna l'equazione centro-raggio (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive su GeoGebra le equazioni di tre punti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente disegna con GeoGebra la circonferenza passante per i tre punti e mostra la sua equazione (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive su GeoGebra le coordinate di un punto (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente disegna la circonferenza dati il centro e il raggio e mostra la sua equazione (conversione da registro figurale geometrico a registro algebrico)
-------------------	---	--	--	--

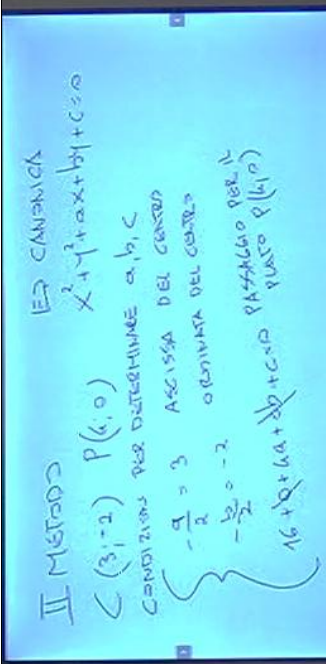
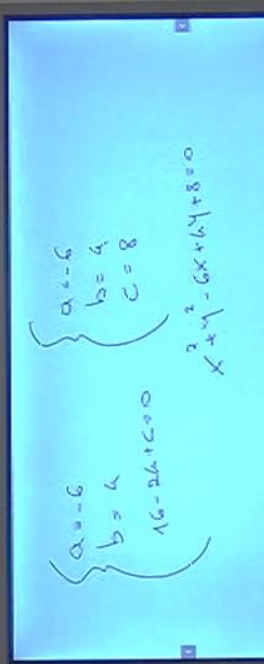
Docente2 lezione 3 00:11:15- 00:13:35	Come disegnare una circonferenza come quelle viste su GeoGebra	Lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta l'equazione scritta sulla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 3 00:13:35- 00:23:00	Posizione di una retta rispetto a una circonferenza Analogie col caso della parabola Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: in questo caso dipende tutto dal raggio	LIM con ebook del libro di testo 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente commenta le figure disegnate nel libro (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Il docente commenta un esercizio svolto sul libro (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 3 00:23:00- 00:31:25	Troviamo l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza passanti per un punto P esterno ad essa	LIM con ebook del libro di testo Lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente detta e scrive alla lavagna un esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente dice a voce il procedimento per risolvere l'esercizio e lo scrive alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

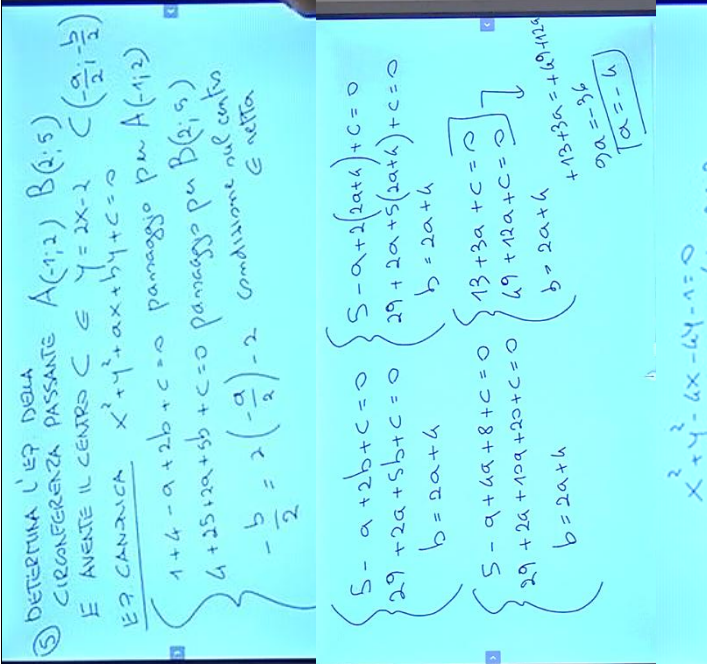
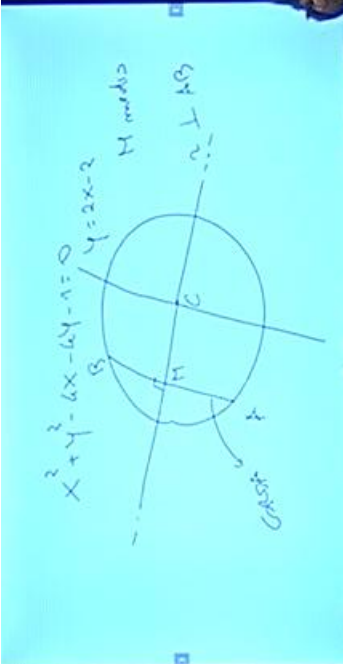
Metodo 'classico' usando il delta Il docente risponde alle domande	 	Il docente svolge alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno della lingua comune) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente legge e commenta il resto dello svolgimento dalla pagina del libro di testo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alcune informazioni in linguaggio algebrico alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente ripercorre lo svolgimento scritto alla lavagna e commenta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)	
Docente2 lezione 3 00:31:25-end	Metodo alternativo tipico per la circonferenza: utilizziamo la distanza punto retta Il docente invita la classe a pensare a un metodo alternativo per risolvere l'esercizio precedente	 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico Mentre parla, il docente fa riferimento alla figura nel libro di testo (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive sulla lavagna alcune informazioni in linguaggio algebrico e altre a parole (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico + trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente rilegge e commenta quanto scritto sulla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)

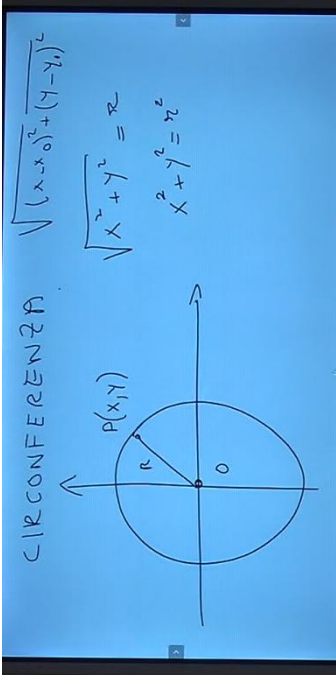
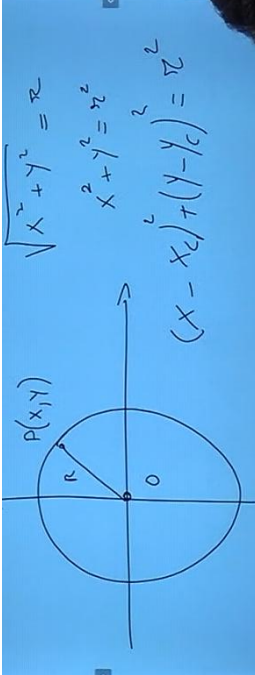
Docente 2 lezione 4 (2 ore)				
Docente2 lezione 4 parte 1 00:00:00- 00:33:40	Rette tangenti alla circonferenza: ricapitoliamo quanto visto l'ultima lezione Esercizio per capire meglio il metodo alternativo che si basa sulla distanza punto retta Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive i dati di un esercizio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta insieme agli studenti l'equazione della circonferenza scritta alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente, a partire da quanto, emerso disegna la circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente disegna il punto e le tangenti alla circonferenza passanti per quel punto (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente fa alcune osservazioni e scrive le informazioni principali alla lavagna in linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta la formula della distanza punto retta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive a parole alla lavagna a corsa corrispondono i coefficienti che compaiono nella formula (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente imposterà la formula per trovare il fascio di rette passanti per il punto P coi dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico)

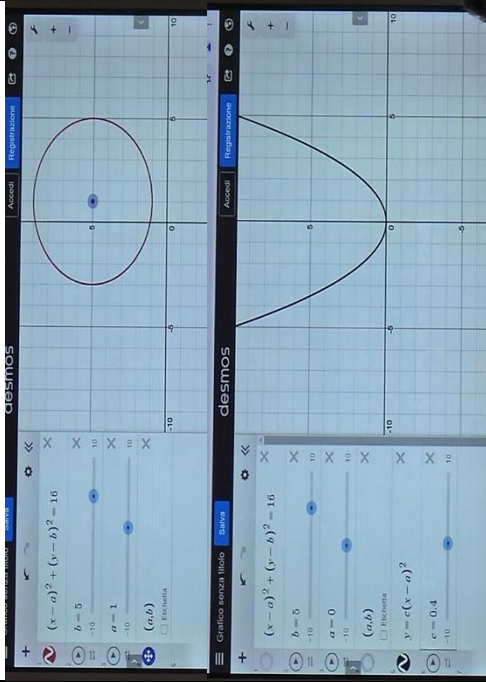
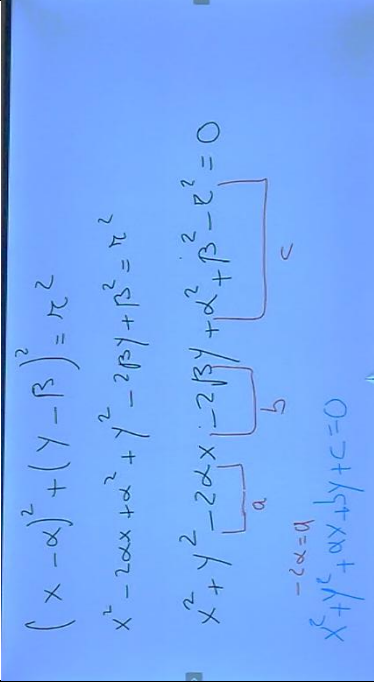
Docente2 lezione 4 parte 1 00:33:40- 00:43:55	Come determinare l'equazione di una circonferenza: 5 modi Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate			Il docente riscrive il fascio nella forma $y=mx+q$ (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente fa alcuni commenti sull'equazione trovata (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente riscrive la retta in forma implicita (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna i valori di a, b e c (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente imposta la formula della distanza punto retta coi dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta la formula appena scritta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta i passaggi algebrici (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)	Il docente mentre parla/sotto dettatura degli studenti fa uno schema riassuntivo alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune)	Registro della lingua comune		LIM come lavagna bianca	
---	---	--	--	--	---	-------------------------------------	--	-------------------------	--

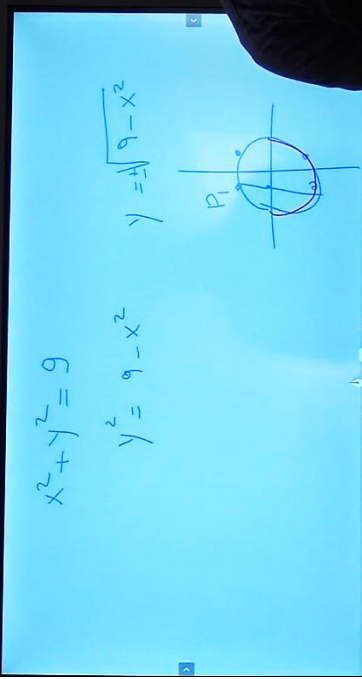
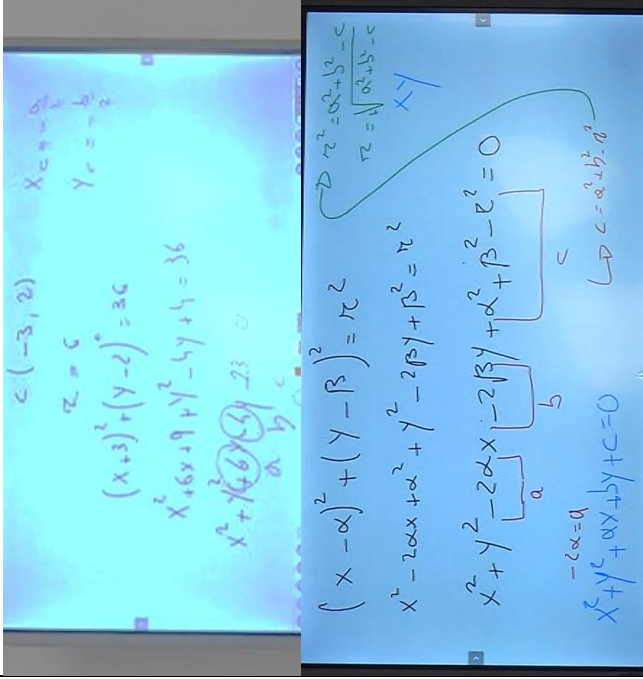
	Osservazione: questi 5 modi hanno dei punti in comune			
Docente2 lezione 4 parte 1 00:43:55- 00:53:05	Esercizio: determinare l'equazione di una circonferenza dati il centro e un punto Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente richiama i principali concetti visti i giorni precedenti per rispondere alle domande degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente detta un esercizio e scrive i dati alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposterà l'equazione della distanza tra due punti utilizzando i dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione centro-raggio di una generica circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente imposterà l'equazione utilizzando i dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla forma canonica della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 4 parte 1 00:53:05-	Determinare l'equazione di una circonferenza noti il centro e un punto	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna i dati dell'esercizio, l'equazione canonica della circonferenza in funzione dei parametri a, b e c

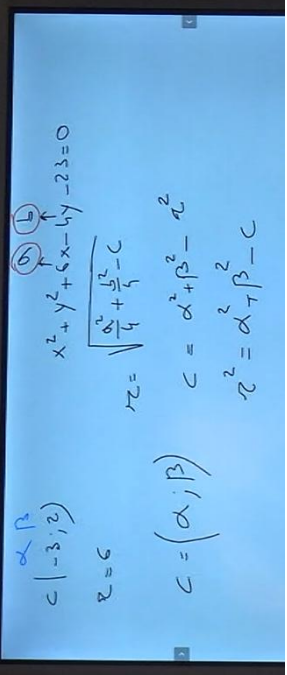
Docente2 lezione 4 parte 2 00:00:00- 00:08:40	appartenente ad essa: metodo alter- nativo tramite l'uso del sistema	 	Registro algebrico	e imposta il sistema (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive a parole quello che dice (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente commenta le equazioni appena scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici per arrivare alla soluzione dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente2 lezione 4 parte 2 00:08:40- 00:14:20	Tipologia 4: determinare l'equazione della circonferenza note le coordinate del diametro (discussione orale) Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate		Registro della lin- gua co- mune	
Docente2 lezione 4 parte 2	Tipologia 5: determinare l'equazione di una circonferenza passante per due	LIM come lavagna bianca	Registro della lin- gua co- mune	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna il testo dell'esercizio (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da

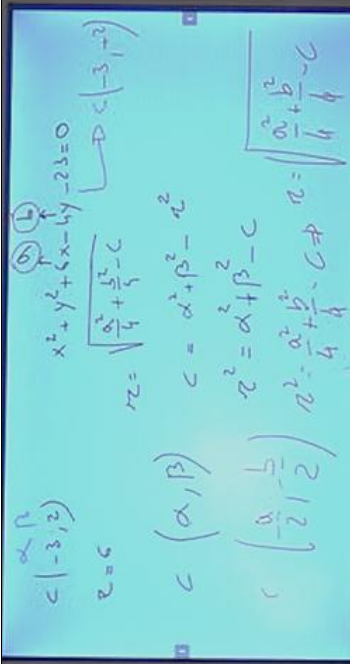
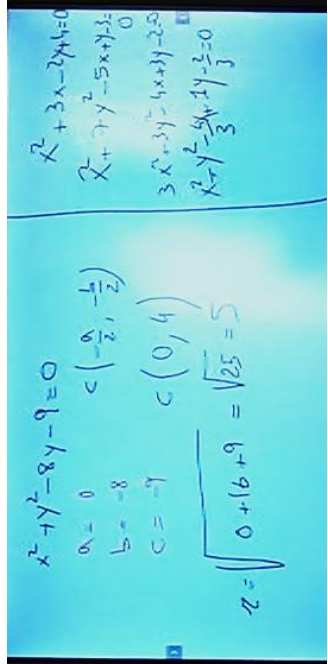
00:14:20-00:36:05	punti e avente il centro appartenente a una retta data Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate		Registro algebrico	registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione canonica della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente annota brevemente i commenti per iscritto (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente2 lezione 4 parte 2 00:36:05-end	Il docente discute con la classe una strada alternativa per risolvere l'esercizio Richiamo alla geometria del secondo anno: il teorema della corda	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente rappresenta graficamente la situazione dell'esercizio appena svolto (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente disegna la corda AB e il suo asse (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

Docente 3				
Video/ minuti	Attività e strategie didattiche	Tipologia di supporto	Sistemi semiotici	Trasformazioni
Docente 3 lezione 1 (1 ora) Osservazione: il docente introduce il concetto di circonferenza guidando gli studenti in un processo di scoperta collettiva. Segue attivamente gli spunti emersi dagli interventi della classe, motivo per cui la spiegazione risulta poco lineare				
Docente3 lezione 1 00:00:00- 00:08:55	Introduzione alla circonferenza in geo- metria analitica Poiché la circonfe- renza è un argo- mento già noto agli studenti, il docente invita la classe a con- dividere le cono- scenze pregresse Il docente modera la discussione ponendo domande mirate Equazione centro- raggio di una circon- ferenza centrata nell'origine	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico	Il docente disegna alla lavagna una circonfe- renza mentre gli studenti gli dicono cosa fare (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente scrive alla lavagna l'equazione della circonferenza traducendo la definizione come luogo geometrico dei punti del piano in lin- guaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 1 00:08:55- 00:10:12	Troviamo l'equa- zione centro-raggio di una circonferenza qualsiasi	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Il docente spiega a voce come trovare l'equa- zione centro-raggio di una circonferenza qual- siasi e lo scrive in linguaggio algebrico alla la- vagna (conversione da registro della lingua co- mune a registro algebrico)

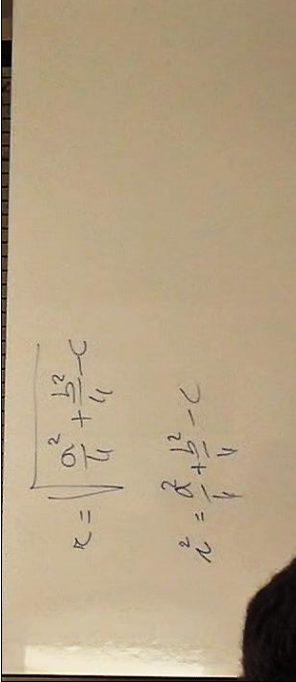
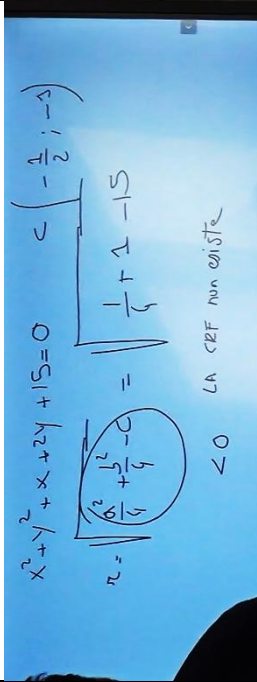
Docente3 lezione 1 00:10:12- 00:16:50	Osservazione: cosa succede se modifico i parametri dell'equazione Richiami al caso della parabola	LIM con Desmos 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente inserisce l'equazione della circonferenza su Desmos e mostra il suo grafico alla classe (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente scrive su Desmos l'equazione di una parabola in funzione di due parametri e mostra il suo grafico alla classe (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente mostra cosa succede graficamente se modifichiamo i parametri dell'equazione della parabola (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 1 00:16:50- 00:22:08	Troviamo l'equazione in forma normale della circonferenza	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente sviluppa i quadrati per arrivare all'equazione della circonferenza in forma normale (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente spiega a voce cosa ha appena fatto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente riscrive l'equazione utilizzando nuovi parametri (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente3 lezione 1 00:22:08- 00:32:31	Differenze da un punto di vista algebrico tra l'equazione della circonferenza e quella della parabola	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per scrivere l'equazione della circonferenza nella forma $y = \dots$ (trattamento all'interno del registro algebrico)

	Il docente modera la discussione facendo domande mirate Significato geometrico della presenza di x^2 e y^2 nell'equazione della circonferenza: simmetria su quattro settori		Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente disegna alla lavagna una circonferenza mentre spiega a voce perché la circonferenza non è una funzione (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 1 00:32:31-end	Il docente offre una sintesi dei temi emersi nella discussione fino a quel punto Come trovare il centro e il raggio della circonferenza partendo dall'equazione in forma normale Condizione di realtà della circonferenza	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente scrive alla lavagna l'equazione centro-raggio di una circonferenza partendo dai dati scritti alla lavagna (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente esegue i passaggi algebrici necessari per giungere alla forma normale (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente spiega a voce come dalla forma normale si possano ricavare le coordinate del centro della circonferenza e lo scrive alla lavagna in linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente tramite alcuni passaggi algebrici ricava la formula per trovare il raggio della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 3 lezione 2 (1 ora)		Note: gli ultimi 3 minuti della registrazione "Docente3 lezione 2" sono senza audio		

Docente3 lezione 2 parte 1 00:00:00- 00:07:15	Il docente chiede alla classe di riassumere quanto emerso durante la prima lezione sulla circonferenza Il docente risponde ai dubbi degli studenti Attenzione: non bisogna confondere i coefficienti a e b dell'equazione in forma normale della circonferenza con le coordinate alpha e beta del centro	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza dettata da un alunno (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per il centro e il raggio della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna l'equazione per trovare il valore del coefficiente c sotto dettatura di un alunno (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta la formula appena scritta alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per ricavare r^2 (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente3 lezione 2 parte 1 00:07:15- 00:12:13	Ricaviamo il centro e il raggio di una circonferenza a partire dalla sua equazione in forma normale Il docente risponde ad alcuni dubbi degli studenti	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente ricava il centro della circonferenza in esame (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro della circonferenza in funzione dei parametri a e b (conversione da

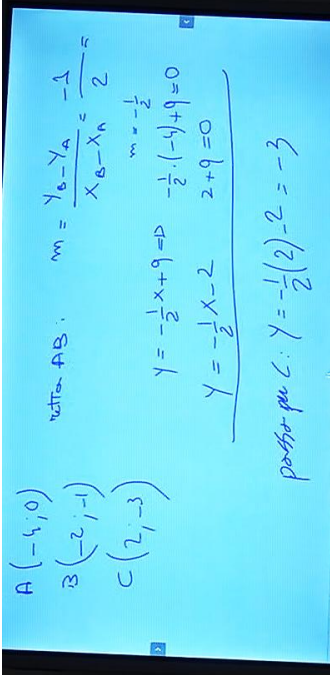
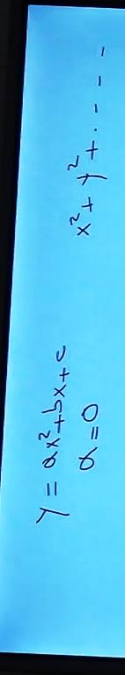
				registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta i due metodi di scrivere le coordinate del centro (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive l'equazione del raggio in funzione dei parametri a e b (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 2 parte 1 00:12:13-end	Facciamo un esercizio per chiarire quanto appena detto	Non è stato possibile analizzare questa parte del video perché priva di audio		
Docente3 lezione 2 parte 2 00:00:00-00:12:05	Continua l'esercizio iniziato nel segmento precedente Il docente risponde ai dubbi degli studenti Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: cosa succede se a=0 oppure b=0 nell'equazione in forma normale della circonferenza		Registrazione della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive un esempio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per portare in forma normale l'equazione della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente legge e commenta le equazioni scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive alla lavagna i valori di a, b e c dell'equazione della circonferenza in esame sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

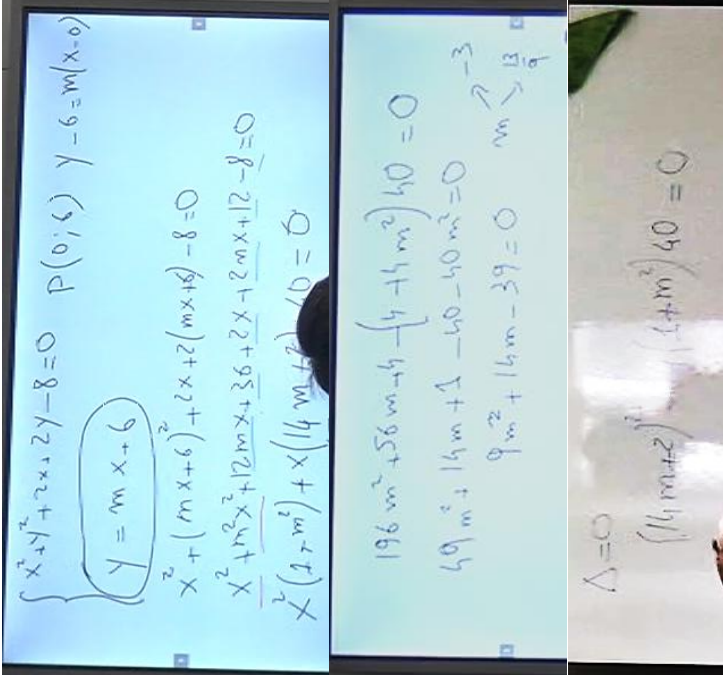
				Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per le coordinate del centro (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta le formule per le coordinate del centro per far notare cosa succede se $a=0$ oppure $b=0$ (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta l'equazione del raggio coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 2 parte 2 00:12:05- 00:21:00	Trovare l'equazione di una circonferenza dati il centro e il raggio: 2 metodi possibili Metodo 1: so che la circonferenza è un luogo geometrico e "rendo algebrica" questa informazione (imposto l'equazione centro-raggio e sviluppo i quadrati) Metodo 2: imposto un sistema 3x3 per trovare i coefficienti	LIM come lavagna bianca Lavagna bianca	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive i dati di un esercizio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione per risolvere l'esercizio nel primo modo (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente sostituisce i dati dell'esercizio nella formula (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla forma normale (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema per risolvere l'esercizio nel secondo modo

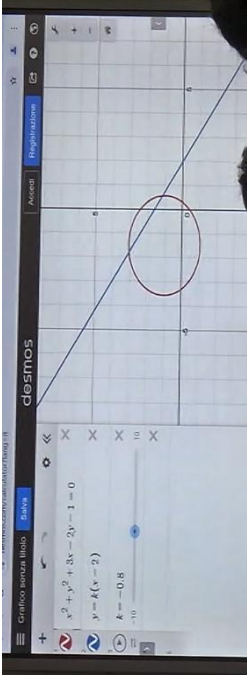
	a, b e c dell'equazione della circonferenza in forma normale Il docente risponde ai dubbi degli studenti			(conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive sulla lavagna bianca la formula del raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare il parametro c (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente3 lezione 2 parte 2 00:21:00- 00:29:10	Analisi di un caso in cui il radicando nella formula del raggio risulta negativo e discussione della condizione di realtà Il docente risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive una equazione alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente ricava le coordinate del centro (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la formula per trovare il raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente sostituisce nella formula i dati dell'esercizio (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto e scrive il commento sinteticamente alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)

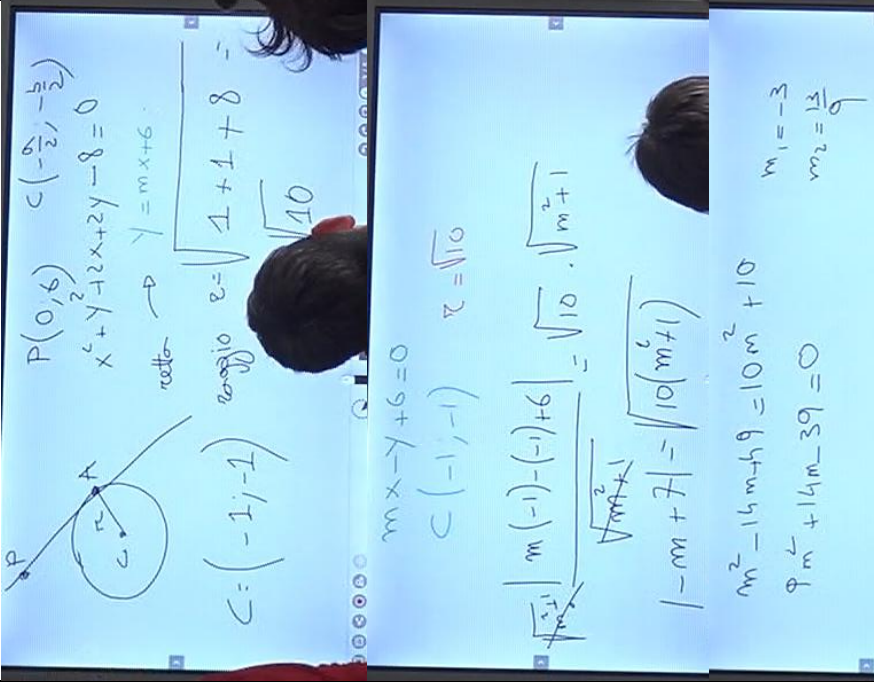
Docente3 lezione 2 parte 2 00:29:10-	Come determinare l'equazione di una circonferenza passante per 3 punti non allineati Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive le coordinate di 3 punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente 3 lezione 3 (1 ora)		Nota: nel segmento da 00:00:00 a 00:31:00 il docente si limita alla correzione degli esercizi assegnati per casa, senza introdurre nuovi contenuti. Pertanto, questa parte della lezione non verrà analizzata.		
Docente3 lezione 3 00:00:00- 00:31:00	In questo segmento, il docente corregge alcuni esercizi assegnati per casa, alternando spiegazioni orali e l'uso della LIM come lavagna bianca. Questa parte del video non viene analizzata poiché non vengono introdotti nuovi contenuti.			
Docente3 lezione 3 00:31:00- 00:42:30	Determinare l'equazione della circonferenza dati 3 punti non allineati Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente dà alcuni consigli su come gestire i sistemi 3x3 Il docente risponde alle domande degli studenti	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla il docente scrive le coordinate di 3 punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema che risolve l'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

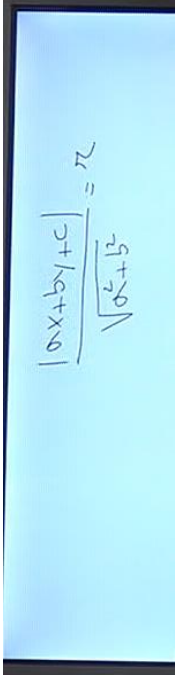
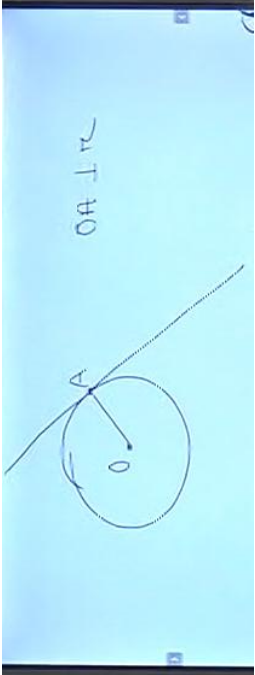
	Domanda per la classe: devo verificare se i parametri trovati definiscono effettivamente una circonferenza? Richiami ai concetti di geometria euclidea affrontati negli anni passati			Il docente commenta ad alta voce i passaggi che sta eseguendo (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla soluzione (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna per rispondere alla domanda di uno studente (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente3 lezione 3 00:42:30- 00:44:10	Domanda per la classe: preso un punto C sulla bisettrice dell'angolo formato da due rette che si intersecano, posso trovare una circonferenza tangente a entrambe le rette? Richiami ai concetti di geometria euclidea affrontati negli anni passati	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 3 00:44:10- 00:44:50	Domanda per la classe: per tre punti non allineati potrei anche trovare una parabola?		Registro della lingua comune	

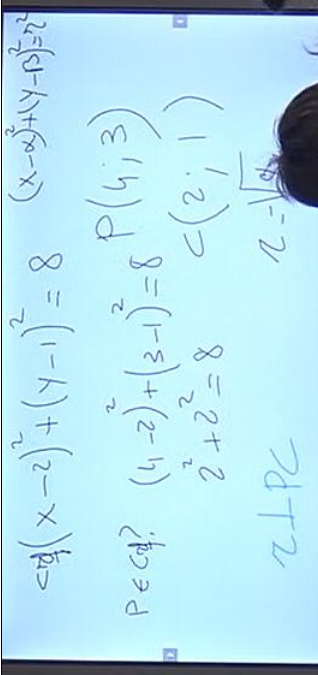
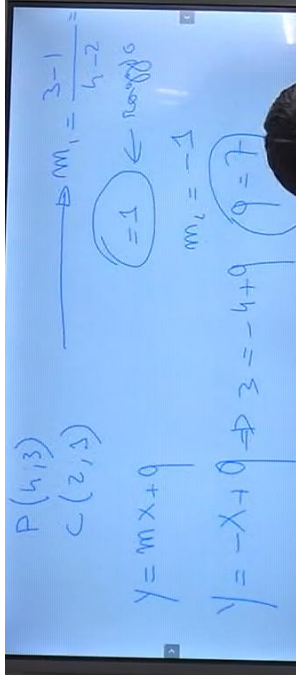
Docente3 lezione 3 00:44:50- 00:50:20	Domanda per la classe: come faccio a capire se 3 punti sono allineati?	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive le coordinate di 3 punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la formula per trovare il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare il coefficiente angolare della retta (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione di una retta in funzione del parametro q (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare q (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente sostituisce le coordinate del punto C nell'equazione della retta trovata e verifica l'appartenenza del punto alla retta (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente3 lezione 3 00:50:20- end	Domanda per la classe: se ho tre punti allineati e cerco una parabola passante per i tre punti, cosa trovo? E se cerco una circonferenza?	LIM come lavagna bianca 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione di una parabola in funzione dei parametri a, b e c alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione di una circonferenza alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

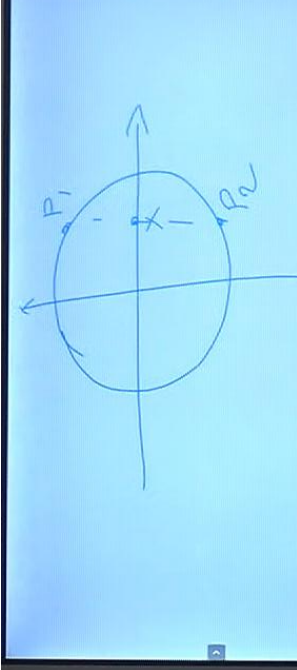
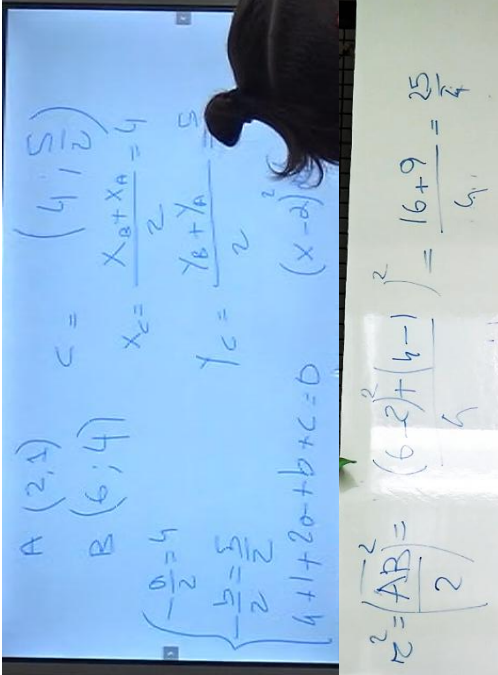
	Osservazione: nel caso della parabola si ha $a=0$, mentre nel caso della circonferenza il sistema risulta impossibile				
Docente 3 lezione 4 (2 ore)					
Docente3 lezione 4 parte 1 00:00:00- 00:12:10	Rette e circonferenze: ripartiamo dalle idee emerse durante il lavoro di gruppo Osservazione: il metodo del determinante $=0$ risulta poco pratico perché, a differenza del caso della parabola, anche la variabile y qui è elevata al quadrato Osservazione: in questo caso ho due valori del coefficiente angolare perché il punto è esterno alla circonferenza. Se il punto si fosse trovato sulla circonferenza, ci sarebbe stata un'unica tangente; se fosse	LIM come lavagna bianca Lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Nota: la lezione è stata preceduta da un lavoro di gruppo su rette e circonferenze	Mentre parla, il docente scrive le equazioni di una circonferenza e di una retta alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna alcune formule algebriche per rafforzare i concetti espressi verbalmente (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue i passaggi algebrici necessari (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta l'equazione "determinante=0" (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

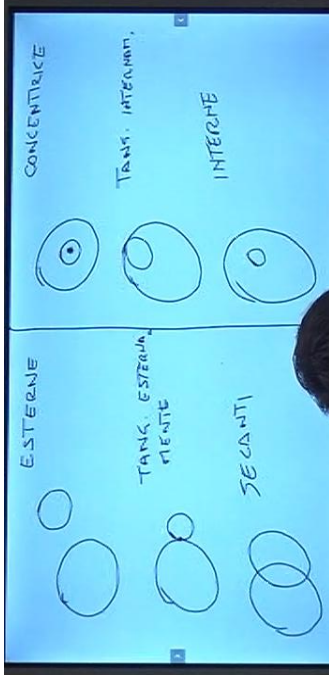
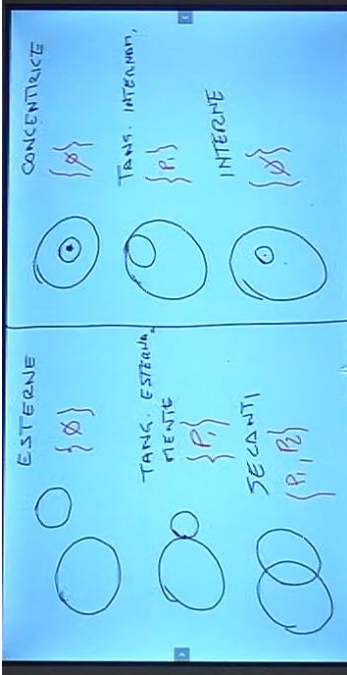
	stato interno, nessuna				
Docente3 lezione 4 parte 1 00:12:10- 00:18:35	Discutiamo insieme le caratteristiche di questo metodo: quali regole abbiamo utilizzato? Quelle dell'algebra. Il fatto che retta e circonferenza siano oggetti geometrici, in questo caso, è del tutto secondario Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM con Desmos 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente disegna una circonferenza e un fascio di rette su Desmos (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente mostra cosa succede al variare del parametro k da cui dipende il fascio (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico)	
Docente3 lezione 4 parte 1 00:18:35- 00:20:30	Che cosa succede se utilizziamo le proprietà delle tangenti viste in geometria? Un altro metodo per determinare le rette tangenti alla circonferenza consiste nel partire dalle proprietà geometriche e tradurle in linguaggio algebrico per fare un calcolo	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)	

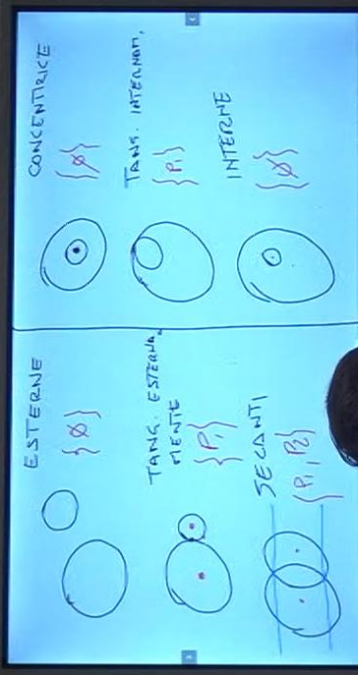
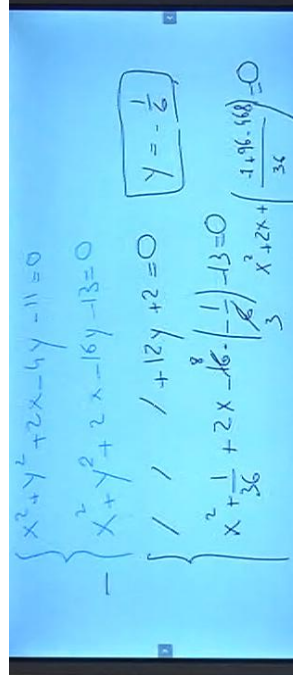
Docente3 lezione 4 parte 1 00:20:30- 00:32:50	Facciamo l'esercizio di prima utilizzando questo metodo Per impostare l'equazione risolvete, occorre tradurre in linguaggio algebrico l'espressione "la distanza punto-retta è uguale al raggio"	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente riscrive alla lavagna i dati dell'esercizio di prima (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per trovare le coordinate del centro della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive le coordinate del centro della circonferenza sotto dettatura di uno studente (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente imposta la formula per trovare il raggio della circonferenza sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per calcolare il raggio (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione del fascio di rette passante per il punto dato (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla forma implicita del fascio (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula della distanza punto retta utilizzando i dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
--	--	--	---	---

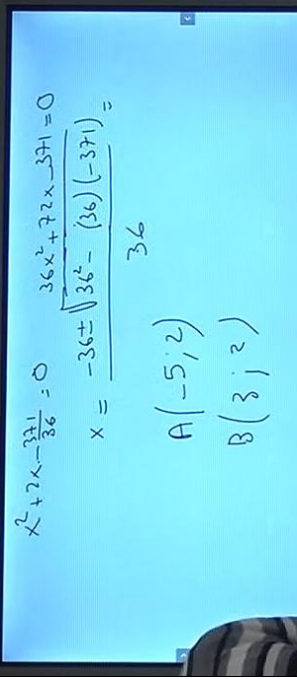
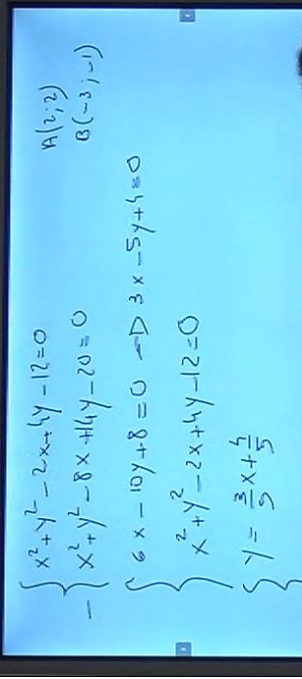
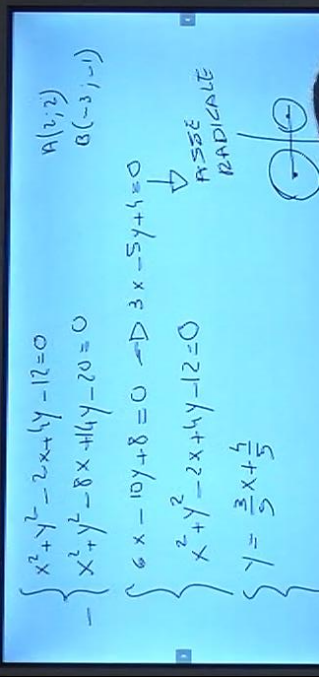
				Il docente commenta l'equazione ottenuta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente3 lezione 4 parte 1 00:32:50- 00:34:40	Osservazione: questo secondo metodo funziona sempre da un punto di vista geometrico? Sì	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la formula della distanza punto retta (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 4 parte 1 00:34:40- 00:38:10	Terzo metodo che sfrutta la proprietà secondo cui il raggio nel punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente Osservazione: questo metodo funziona solo se il punto appartiene alla circonferenza	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 4 parte 1 00:38:10-end	Facciamo un esempio pratico di questo terzo metodo	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna i dati di un esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente sostituisce le coordinate del punto nell'equazione della circonferenza per verificare l'appartenenza del punto

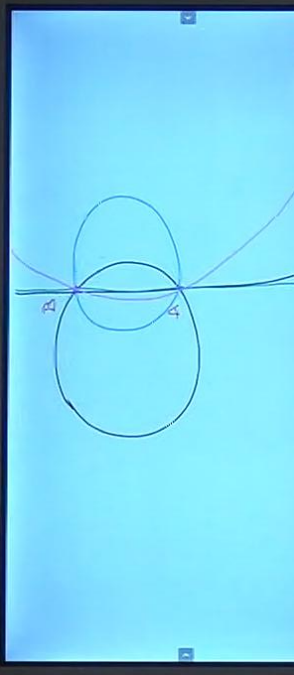
				alla circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro e quanto vale il raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione generica di una circonferenza in forma centro-raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 4 parte 2 00:00:00- 00:07:10	Ricapitoliamo insieme quanto fatto nell'ora precedente e riprendiamo da lì Osservazione: non mi serve la retta, mi basta il coefficiente angolare della retta passante per il centro e un punto della circonferenza Osservazione: questo metodo è molto rapido ma il punto per cui passa la tangente deve	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente imposta l'equazione per trovare il coefficiente angolare della retta per i punti P e C (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive l'equazione del fascio di rette perpendicolari alla retta passante per i punti P e C (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

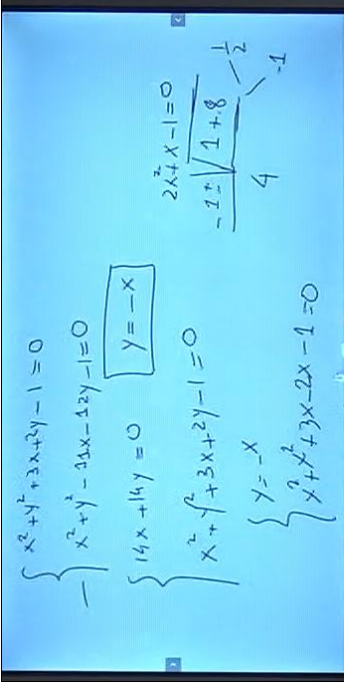
	appartenere alla circonferenza				
Docente3 lezione 4 parte 2 00:07:10- 00:11:20	Osservazione: in alcuni esercizi non viene dato esplicitamente il punto di tangenza ma bisogna ricavarlo dai dati Osservazione: il linguaggio utilizzato nel testo dell'esercizio fornisce indicazioni utili per capire quante tangenti cercare	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)	
Docente3 lezione 4 parte 2 00:11:20-end	Quante e quali condizioni mi servono per determinare l'equazione di una circonferenza? Facciamo alcuni esempi Osservazione: se conosco le coordinate degli estremi del diametro ho 3 informazioni Osservazione: se conosco le coordinate degli estremi del diametro ho 2 metodi	LIM come lavagna bianca Lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate di due punti del piano (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna le formule per trovare le coordinate del centro della circonferenza sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema che risolve l'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione centro-raggio (generica) di una	

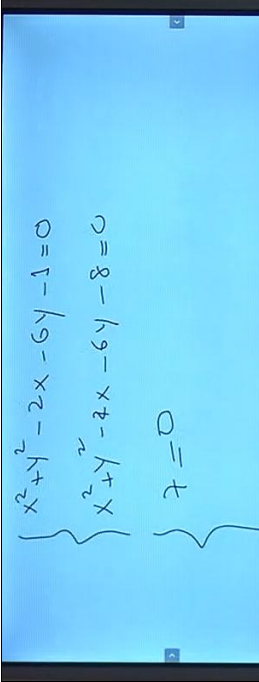
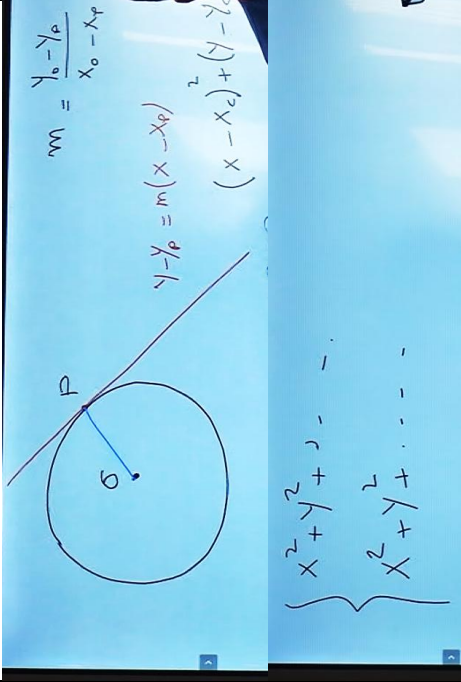
	per risolvere l'esercizio				circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente riscrive l'equazione inserendo i dati dell'esercizio e fa i conti (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 3 lezione 5 (1 ora)		Nota: gli ultimi 1 minuto e 26 secondi della registrazione "Docente3 lezione 5 parte 1" sono senza audio			
Docente3 lezione 5 parte 1 00:00:00-00:05:42	Posizione reciproca di due circonferenze Domanda per la classe: come possono essere due circonferenze?	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre gli studenti parlano, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente associa un nome a ciascun caso disegnato e lo scrive alla lavagna (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune + trattamento all'interno del registro della lingua comune)	
Docente3 lezione 5 parte 1 00:05:42-00:08:35	Osservazione: nel caso di due circonferenze esterne, la distanza tra i due centri è maggiore della somma dei raggi Domanda per la classe: cosa succede se metto a sistema l'equazione delle due circonferenze nei diversi casi? Osservazione: dal punto di vista	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive sinteticamente alla lavagna quello che dice utilizzando il linguaggio algebrico (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)	

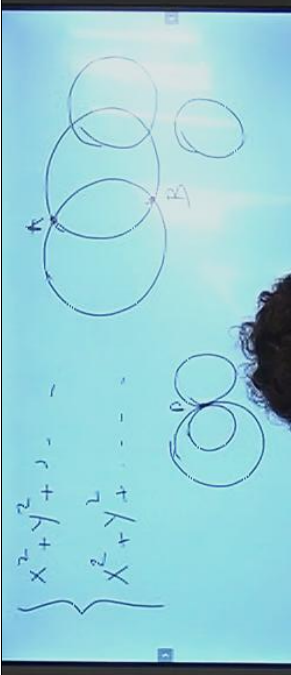
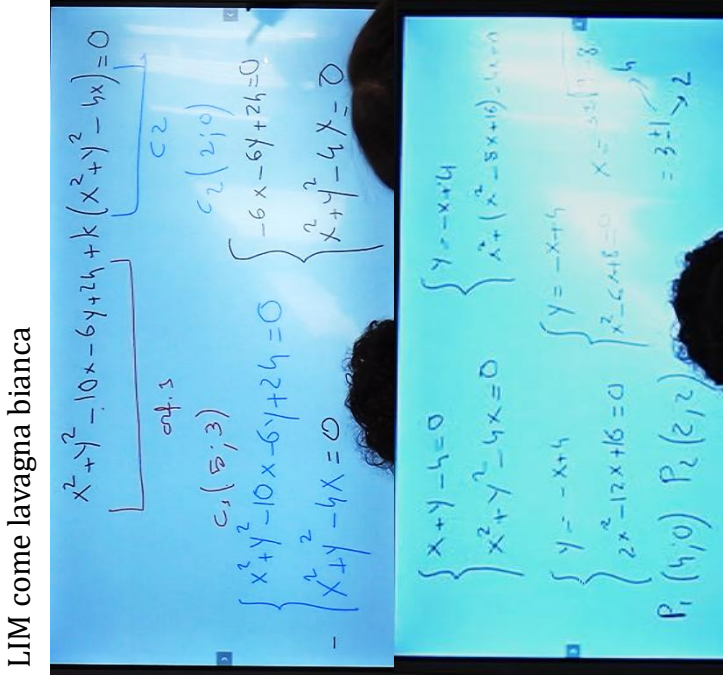
	algebrico, si presentano solo tre casi possibili: una soluzione, due soluzioni oppure nessuna soluzione				
Docente3 lezione 5 parte 1 00:08:35- 00:13:25	Osservazione: queste cose sono molto importanti anche dal punto di vista delle applicazioni Domanda per la classe: quando vi potrebbero interessare cose del genere? Per fare cosa? Esempio: la disposizione delle antenne per garantire la copertura del segnale telefonico o dei lampioni per ottimizzare l'illuminazione delle strade	LIM come lavagna bianca		Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa riferimento ai disegni sulla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 5 parte 1 00:13:25- 00:27:20	Torniamo all'algebra e facciamo un esempio Osservazione: in questi casi, ci troviamo di fronte a sistemi di quarto grado	LIM come lavagna bianca		Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive un sistema di due circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta il sistema appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

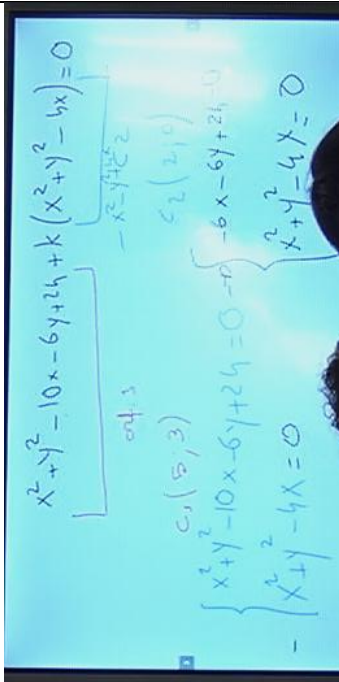
				Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive le soluzioni del sistema alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 5 parte 1 00:27:20- 00:30:05	Facciamo un altro esempio (calcoli svolti in parte, da concludere a casa)	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive un nuovo sistema di due circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive le soluzioni del sistema alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente3 lezione 5 parte 1 00:30:05- 00:32:55	Domanda per la classe: cos'è quell'equazione che ho trovato facendo il primo passaggio? È una retta che passa per il (o i) punto/i di intersezione delle due circonferenze se esistono e altrimenti è una retta che sta	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

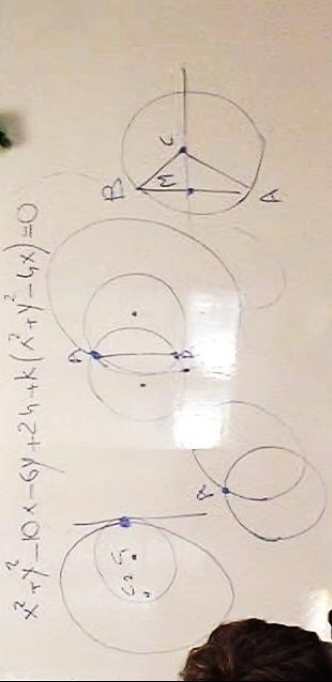
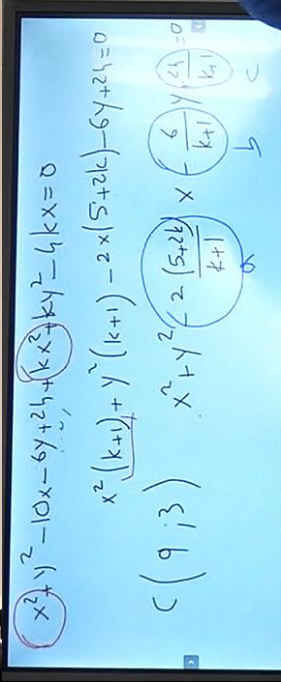
	tra le due circonferenze. Si chiama asse radicale Osservazione: se ho due circonferenze tangenti, sottraendo membro a membro le due equazioni trovo la retta tangente alle due circonferenze nel punto di tangenza Osservazione: in generale, l'asse radicale è una retta che è perpendicolare al segmento che congiunge i due centri			
Docente3 lezione 5 parte 1 00:32:55- 00:37:40	Introduzione ai fasci di circonferenze	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente3 lezione 5 parte 1	Facciamo un esempio	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente scrive un sistema di due circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

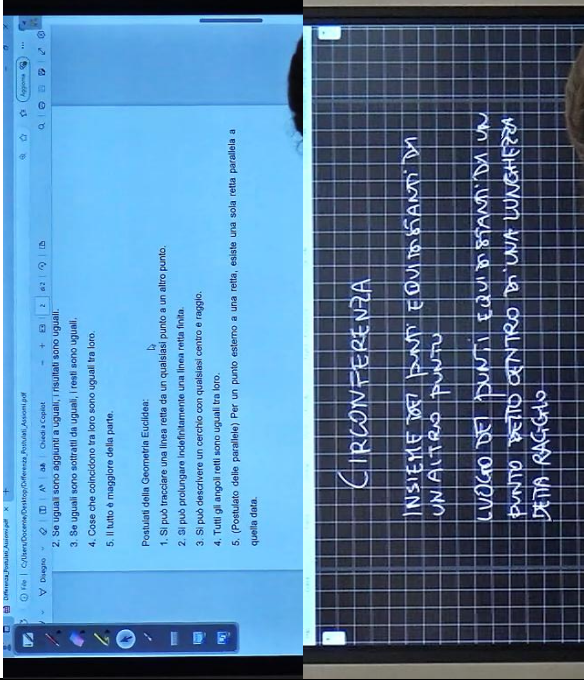
00:37:40-00:40:41 Docente3 lezione 5 parte 1 00:40:41-end NO AUDIO Docente3 lezione 5 parte 2 00:00:00-00:00:15		Registro algebrico	Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente3 lezione 5 parte 2 00:00:15-00:00:55	Osservazione: quel delta è l'elemento chiave che ci permette di stabilire quanti punti di intersezione ci sono Osservazione: per capire se due circonferenze sono interne o esterne devo confrontare la distanza tra i due centri col raggio	Registro della lingua comune	
Docente3 lezione 5 parte 2 00:00:55-00:05:00	Osservazione: se le due circonferenze a sistema sono concentriche, il sistema è impossibile	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente scrive un sistema di due circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

	Osservazione: nel caso di due circonferenze coincidenti, il sistema è indeterminato ossia ammette infinite soluzioni		Registro algebrico	Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente3 lezione 5 parte 2 00:05:00-end	Riepilogo della lezione odierna		Registro della lingua comune	
Docente 3 lezione 6 (1 ora)				
Docente3 lezione 6 00:00:00-00:10:20	Ripercorriamo insieme quanto fatto finora, così da avere una visione più chiara del percorso logico seguito	LIM come lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla il docente scrive alcune equazioni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente3 lezione 6	Fasci di circonferenze	LIM come lavagna bianca	Registro della lingua	Mentre parla, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

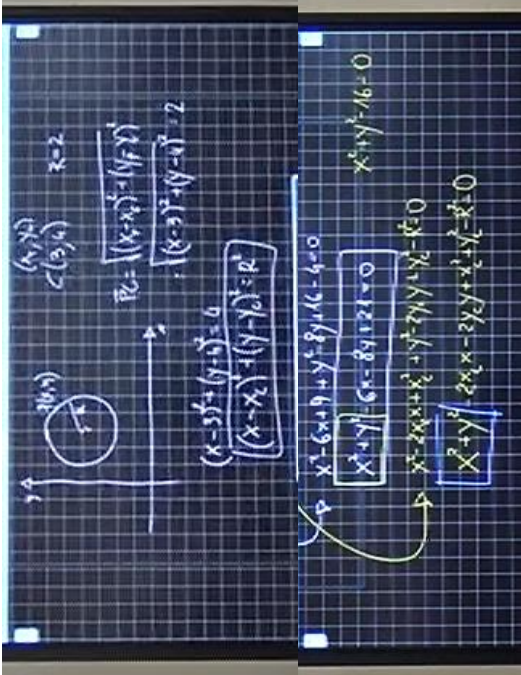
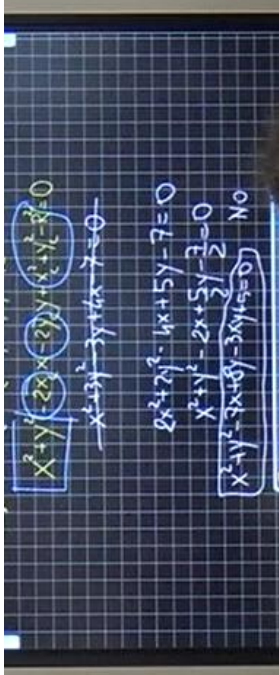
00:10:20-00:14:25			comune Registro figurale geome- trico	
Docente3 lezione 6 00:14:25-00:28:25	Come si trova l'equazione di un fascio di circonferenze? Come faccio a capire se le due circonferenze che generano il fascio sono concentriche? Come faccio a capire cosa hanno in comune le due circonferenze generatrici? Il docente risponde alle domande degli studenti Punti base del fascio		Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione di un fascio di circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive le coordinate del centro delle due circonferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema per trovare i punti di intersezione delle due circonferenze generatrici (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto per rispondere alle domande (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

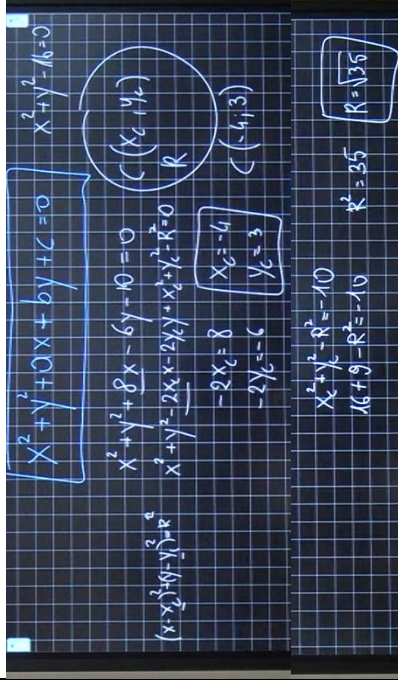
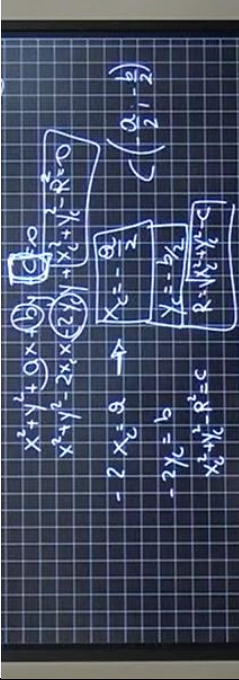
					Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni ulteriori passaggi algebrici e trova i punti base (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente3 lezione 6 00:28:25- 00:33:45	Cosa possiamo dire in questo caso dell'asse radicale? Ce n'è uno solo e anch'esso passa per i punti base Quale valore del parametro k devo sostituire nell'equazione del fascio per trovare l'asse radicale? Il valore di k deve essere tale da far sparire i termini di secondo grado Osservazione: il fascio può essere definito anche a partire da una circonferenza e dall'asse radicale	LIM come lavagna bianca Lavagna bianca 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa riferimento a quanto scritto alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)	
Docente3 lezione 6 00:33:45-end	Troviamo la circonferenza del fascio che ha determinate caratteristiche	Lavagna bianca LIM come lavagna bianca	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente riscrive sulla lavagna bianca l'equazione del fascio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)	

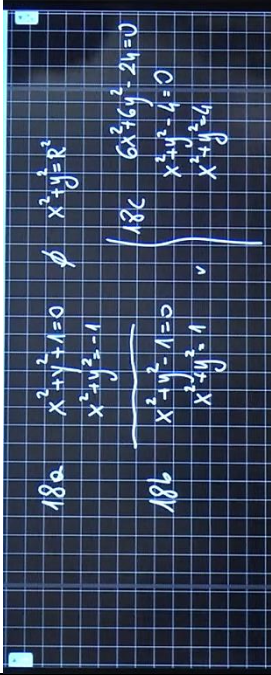
	Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: i centri di tutte le circonferenze del fascio sono allineati Relazione tra il centro della circonferenza e l'asse delle sue corde	 	Registro figurale geometrico Registro algebrico Mentre parla, il docente fa un disegno sulla lavagna bianca (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive le coordinate di un generico punto sulla LIM (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate di un punto (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
--	--	---	---

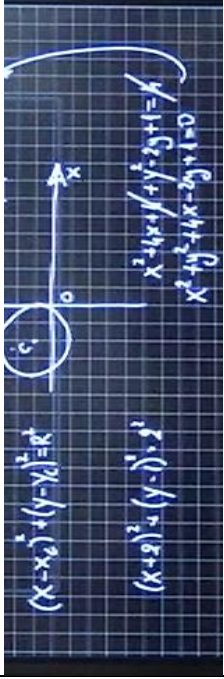
Docente 4				
Video/ minuti	Attività e strategie didattiche	Tipologia di supporto	Sistemi semiotici	Trasformazioni
Docente 4 lezione 1 (1 ora)				
Docente4 lezione 1 00:00:00- 00:10:30	Introduzione alla circonferenza richiamando gli assiomi e i postulati della geometria euclidea Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM con file PDF preparato dal docente LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune	Il docente legge il file proiettato sulla LIM ad alta voce e commenta (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente scrive alla lavagna quanto emerge dagli interventi degli studenti (trattamento all'interno della lingua comune)
Docente4 lezione 1 00:10:30- 00:13:08	Formalizzazione di quanto emerso nella discussione Commenti sulla definizione di circonferenza come luogo geometrico	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune	Il docente detta e scrive alla lavagna la definizione di circonferenza come luogo geometrico di punti del piano (trattamento all'interno della lingua comune)

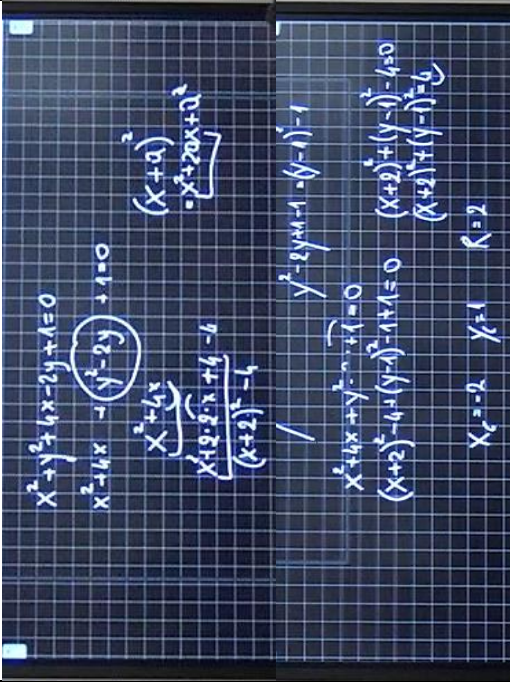
Docente4 lezione 1 00:13:08- 00:19:50	Troviamo l'equazione di una circonferenza centrata nell'origine traducendo la definizione di circonferenza come luogo geometrico Equazione generale di una circonferenza centrata nell'origine	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Il docente scrive e disegna alla lavagna quello che dice/quello che suggeriscono i ragazzi (trattamento all'interno del registro della lingua comune + conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico + conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente svolge alcuni passaggi algebrici per giungere all'equazione della circonferenza disegnata (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione generale di una circonferenza centrata nell'origine (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 1 00:19:50- 00:24:50	Osservazione: una equazione del tipo $x^2+y^2=k$ rappresenta sempre una circonferenza? Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione $x^2+y^2=k$ (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna l'equazione $x^2+y^2=0$ e la interpreta a parole (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive alla lavagna un esempio di equazione con $k<0$ e porta a sinistra dell'uguale il k (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente interpreta verbalmente il caso con $k<0$ (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

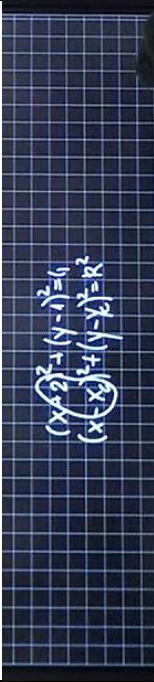
Docente4 lezione 1 00:24:50- 00:32:26	Troviamo l'equazione canonica di una circonferenza	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente disegna alla lavagna una circonferenza centrata in un punto del piano cartesiano diverso dall'origine (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive la formula della distanza tra due punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per giungere all'equazione centro-raggio della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente riscrive l'equazione trovata in funzione di x_c, y_c e R (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente sviluppa i quadrati delle due equazioni scritte alla lavagna (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente riordina i termini dell'equazione ottenuta (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 1 00:32:26- 00:37:40	Focus sulla forma dell'equazione	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente scrive alla lavagna e poi commenta a voce alcune equazioni di secondo grado in x e y (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa riferimento alle equazioni scritte sulla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

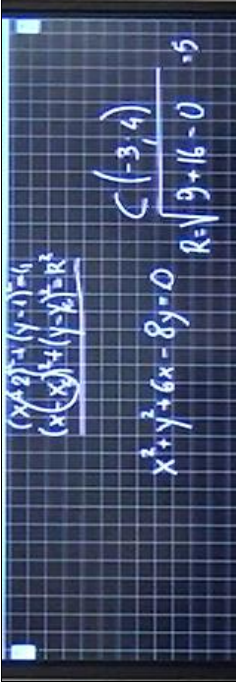
				Il docente scrive alla lavagna l'equazione generica di una circonferenza usando i parametri a, b e c e commenta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 1 00:37:40- 00:43:31	Determiniamo come è fatta una circonferenza a partire dalla sua equazione	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente detta a voce alcune formule e le scrive alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive le equazioni per trovare il centro e raggio della circonferenza sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare le coordinate del centro della circonferenza e il raggio (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 1 00:43:31- 00:46:00	Ricapitoliamo quanto fatto finora	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna nei due modi visti (in funzione di a, b, c e in funzione di x_c, y_c e R) l'equazione canonica di una circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente ricava le equazioni per trovare x_c, y_c e R in funzione di a, b, c (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 1 00:46:00-end	Domanda per la classe: un'equazione come quella scritta alla lavagna	LIM come lavagna di ardesia	Registro della lingua comune	Mentre parla, il docente fa riferimento a quanto scritto alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

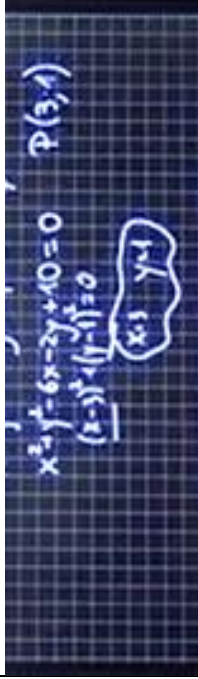
	rappresenta sempre una circonferenza?			
Docente 4 lezione 2 (2 ore)				
Docente 4 lezione 2 parte 1 00:00:00- 00:05:45	Riprendiamo da dove ci eravamo lasciati, rispondendo alla domanda della lezione scorsa e chiarendo i dubbi sugli esercizi assegnati	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna i dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione generica di una circonferenza centrata nell'origine (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente riassume brevemente quanto appena svolto facendo riferimento a ciò che è stato scritto alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente 4 lezione 2 parte 1 00:05:45- 00:09:55	Facciamo insieme un esercizio	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna i dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per trovare il centro e il raggio della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

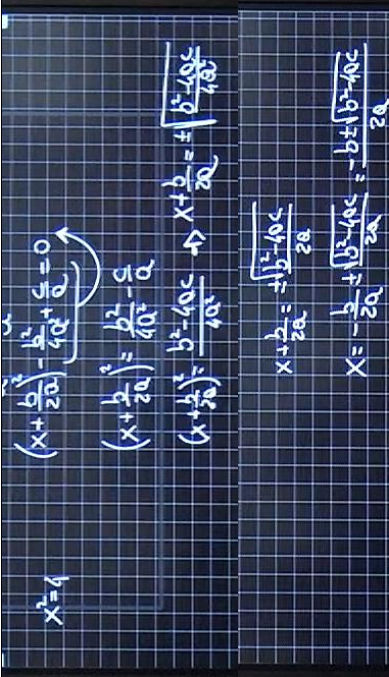
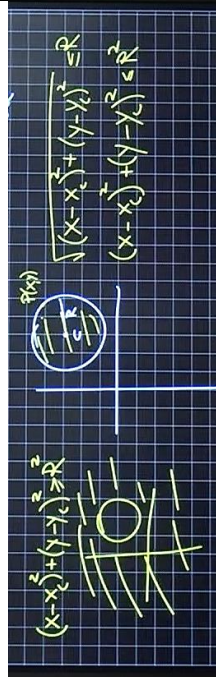
				Il docente sostituisce nella formula del raggio le generiche coordinate del centro x_c e y_c (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta le formule per trovare le coordinate del centro e il raggio coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:09:55- 00:11:15	Disegniamo la circonferenza sfruttando le informazioni ottenute	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:11:15- 00:14:05	Se avete il disegno di una circonferenza, come fate a ricavare la sua equazione?	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione centro-raggio (generica) di una circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta l'equazione centro-raggio coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

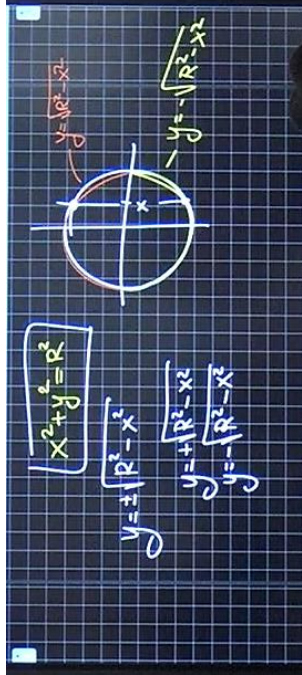
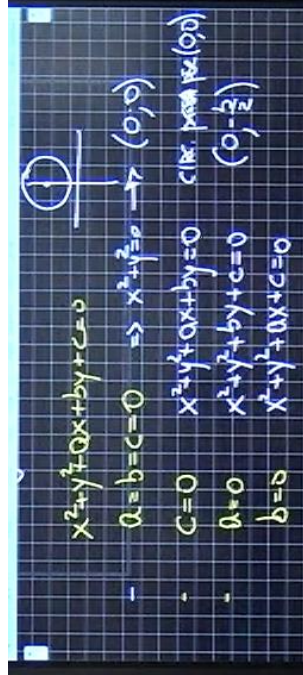
Docente4 lezione 2 parte 1 00:14:05- 00:23:25	Come si fa a passare dall'equazione canonica di una circonferenza all'equazione centro-raggio? Metodo del completamento del quadrato Il docente risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente riscrive l'equazione della circonferenza alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta l'equazione appena scritta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna lo sviluppo del quadrato (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive alla lavagna quello che gli suggeriscono gli alunni (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente riscrive l'equazione della circonferenza di partenza in forma normale (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive l'equazione della circonferenza utilizzando quanto trovato poco prima (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per arrivare alla forma centro raggio della circonferenza (trattamento all'interno del registro algebrico)
--	--	---	---	--

				Mentre parla, il docente scrive le coordinate del centro e il valore del raggio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:23:25- 00:25:50	Il docente risponde alla domanda di uno studente che non ha capito come determinare il centro e il raggio della circonferenza Osservazione: questa equazione è legata alla traslazione	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente riscrive l'equazione centro-raggio della circonferenza in esame e un'equazione centro-raggio generica (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:25:50- 00:27:35	Consideriamo un'altra equazione e proviamo a determinare il centro e il raggio della circonferenza utilizzando entrambi i metodi che conosciamo: le formule e il completamento del quadrato	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione in forma normale di una circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula per trovare il raggio coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 1	Provate a fare da soli il completamento	LIM come lavagna di ardesia	Registro della	Per rispondere ai dubbi, il docente fa riferimento all'equazione centro-raggio (generica)

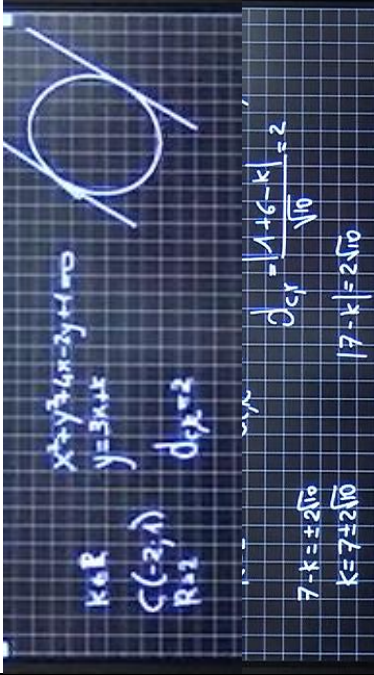
00:27:35-00:32:35	del quadrato mentre io passo tra i banchi Passando tra i banchi, il docente fornisce indicazioni su come svolgere l'esercizio e risponde ai dubbi degli studenti		lingua comune Registro algebrico	scritta alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:32:35-00:39:10	Il docente assegna un nuovo esercizio da svolgere in classe Osservazione: in questo caso c'è una difficoltà in più perché tutti i coefficienti numerici sono dispari Passando tra i banchi, il docente fornisce indicazioni su come svolgere l'esercizio e risponde ai dubbi degli studenti Condivisione orale delle soluzioni	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta l'equazione della circonferenza appena scritta alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 2 parte 1 00:39:10-00:42:21	Il docente assegna un nuovo esercizio da svolgere in classe utilizzando solo il completamento del quadrato	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione in forma normale di una circonferenza alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

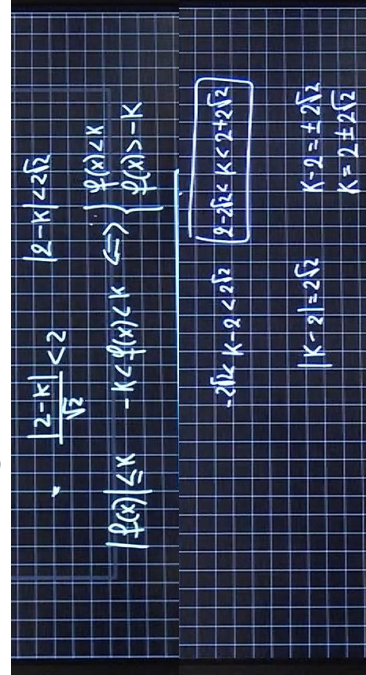
	Passando tra i ban- chi, il docente forni- sce indicazioni su come svolgere l'eser- cizio e risponde ai dubbi degli studenti			
Docente4 lezione 2 parte 1 00:42:21- end	Il docente assegna un nuovo esercizio da svolgere in classe Osservazione: in questo caso, l'equa- zione rappresenta semplicemente il punto (3;1) Osservazione: nel caso precedente, l'equazione rappre- sentava l'insieme vuoto	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione in forma normale di una circonferenza alla lava- gna (conversione da registro della lingua co- mune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del punto rappresentato dall'equa- zione (conversione da registro della lingua co- mune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione centro-raggio della circonferenza e le coordinate del centro (conversione da regi- stro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 2 00:00:00- 00:08:05	Vediamo un altro caso in cui si usa il completamento del quadrato: ricaviamo insieme la formula per risolvere l'equa- zione di secondo grado	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna un'equazione di secondo grado in funzione dei parametri a, b e c e la relativa formula risol- tiva (conversione da registro della lingua co- mune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lava- gna (conversione da registro algebrico a regi- stro della lingua comune)

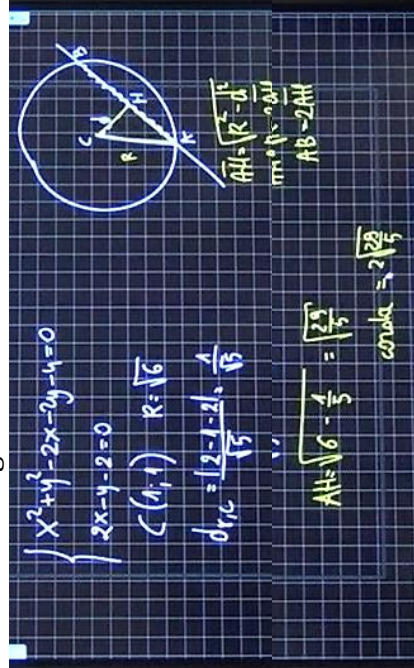
				Mentre parla, il docente scrive un esempio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa riferimento a quanto appena scritto (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alcune formule alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)	
Docente4 lezione 2 parte 2 00:08:05- 00:13:15	Osservazione: differenza tra circonferenza e cerchio Domanda per la classe: come si rappresenta in geometria analitica un cerchio? Con una disequazione Osservazione: se considero anche il segno di uguaglianza, includo anche la circonferenza	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la disequazione che descrive il cerchio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive alla lavagna una disequazione e dice cosa rappresenta (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente rappresenta graficamente la disequazione appena scritta alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente commenta le varie disequazioni scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)	Registro della
Docente4 lezione 2 parte 2	Come si calcola la lunghezza della	LIM come lavagna di ardesia	Registro della	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule per trovare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio (conversione da	

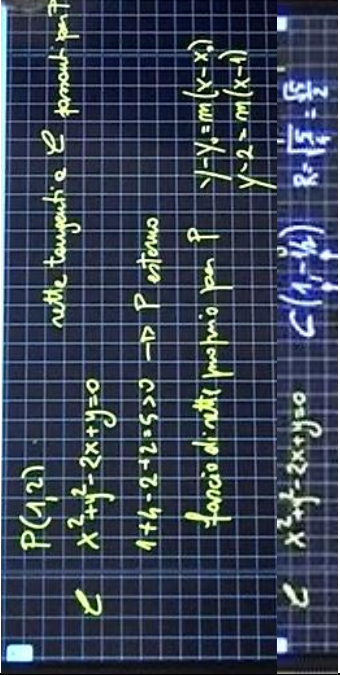
00:13:15-00:14:15	circonferenza? E l'area del cerchio?		lingua comune Registro algebrico	registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 2 00:14:15-00:19:00	Circonferenza e funzioni Il docente risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza centrata nell'origine di raggio R (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive sul disegno le funzioni corrispondenti alle due semicirconferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 2 00:19:00-00:29:50	Vediamo cosa succede quando i parametri a, b e c sono uguali a zero Osservazione: questo ci può aiutare a individuare l'equazione giusta	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione di una circonferenza in forma normale in funzione dei parametri a, b e c (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) In questo segmento, il docente ripete più volte la seguente sequenza di azioni: - Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

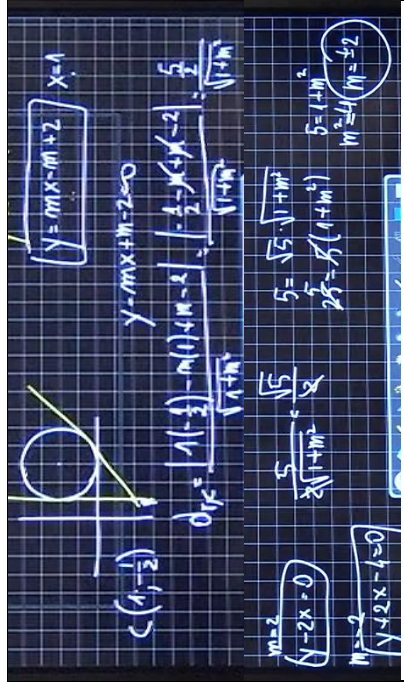
				- Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) - Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)	
Docente4 lezione 2 parte 2 00:29:50- 00:31:20	Quanti punti servono per individuare una circonferenza? 3 non allineati		Registro della lingua comune		
Docente4 lezione 2 parte 2 00:31:20- 00:40:05	Posizione reciproca circonferenza-retta Esercizio: come faccio a stabilire se una retta è tangente, secante o esterna a una circonferenza data? Calcoliamo la distanza del centro	LIM come lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le equazioni di una circonferenza e di una retta (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro e il valore del raggio	

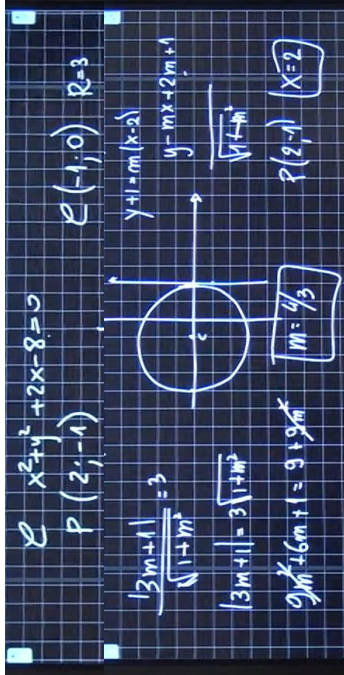
	della circonferenza dalla retta			della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta l'equazione della distanza punto-retta coi dati del esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 2 parte 2 00:40:05- 00:43:00	In questo segmento, uno studente alla lavagna con l'aiuto dei compagni cerca di stabilire se $\frac{9}{\sqrt{10}}$ sia maggiore o minore di 2. Poiché il docente non svolge alcuna azione, il segmento non verrà analizzato			
Docente4 lezione 2 parte 2 00:43:00- end	Esercizio: dato un fascio di rette improprio dipendente da un parametro k , determinare per quali valori di k ottengo rette tangenti alla circonferenza assegnata Osservazione: quante rette tangenti ci aspettiamo di trovare? Due	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente commenta le equazioni appena scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive le coordinate del centro e il valore del raggio della circonferenza alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione risolvente (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta l'equazione della distanza punto-retta coi dati del esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

				Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 4 lezione 3 (1 ora)				
Docente4 lezione 3 00:00:00- 00:02:05	Riepilogo delle cose viste l'ultima volta con l'aiuto degli studenti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico Registro algebrico	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza in funzione dei parametri a, b e c e l'equazione di una retta in funzione dei parametri m e q (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 3 00:02:05- 00:11:50	Esercizio: dato un fascio improprio di rette dipendente da un parametro k, determinare per quali valori di k ottengo rette tangenti alla circonferenza assegnata Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Richiamo alle disquazioni con valore assoluto	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza e quella di un fascio improprio di rette (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro della circonferenza e quanto vale il raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula della distanza punto-retta coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

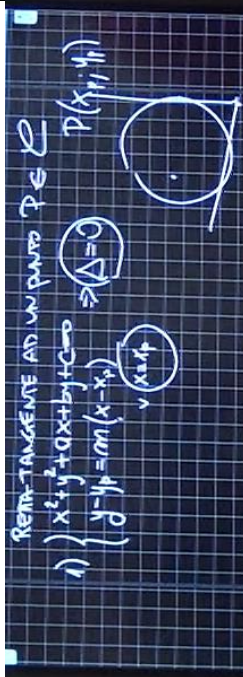
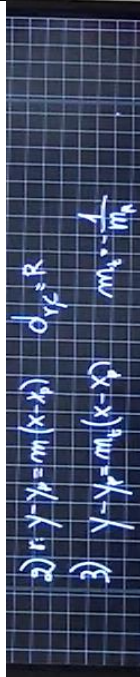
	Osservazione: $f(x) = -f(x)$ Osservazione: una volta trovati i valori di k per cui le rette risultano secanti e i valori di k per cui le rette risultano tangenti, per tutti gli altri valori di k le rette risulteranno esterne Il docente risponde ai dubbi degli studenti			Mentre parla, il docente imposta la disequazione che consente di trovare i valori di k per cui le rette risultano secanti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna il procedimento per risolvere una disequazione col modulo (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta l'equazione che consente di trovare il valore di k per cui le rette risultano tangenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 3 00:11:50- 00:18:10	Esercizio: verificare se la retta è tangente, esterna o secante + se è secante, calcoliamo la misura della corda Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza e quella di una retta (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro e il valore del raggio della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

				Mentre parla, il docente imposta l'equazione della distanza punto-retta coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente aggiunge elementi al disegno (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le formule che servono per risolvere l'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta le formule coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 3 00:18:10- 00:35:40	Esercizio: determinare le tangenti alla circonferenza passanti per un punto dato Domanda per la classe: dati una circonferenza e un punto del piano, quante rette tangenti abbiamo? La risposta varia in base alla posizione		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate di un punto e l'equazione di una circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la consegna dell'esercizio (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Il docente sostituisce le coordinate del punto nell'equazione della circonferenza ed esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

	del punto rispetto alla circonferenza Domanda per la classe: come possiamo determinare la posizione del punto rispetto alla circonferenza? Domanda per la classe: nel fascio trovato, ci sono tutte le rette passanti per P? No, manca quella parallela all'asse y Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: se ho già trovato due valori di m, allora la retta passante per P e parallela all'asse y non può essere tangente alla circonferenza		Mentre parla, il docente scrive alla lavagna un riassunto di quanto sta dicendo (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna la formula per trovare la retta passante per un punto di coefficiente angolare dato (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione della retta passante per P e parallela all'asse y (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro e il valore del raggio della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente riscrive l'equazione della retta in forma implicita sotto dettatura degli studenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
--	---	--	---

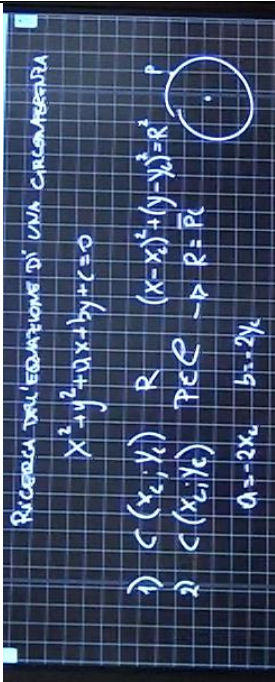
				Mentre parla, il docente imposta l'equazione della distanza punto-retta coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta l'equazione risolvente (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena trovato (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le equazioni delle due rette tangenti (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 3 00:35:40-end	Il docente assegna un nuovo esercizio da svolgere in classe Passando tra i banchi, il docente fornisce indicazioni su come svolgere l'esercizio e risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna di ardesia		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico

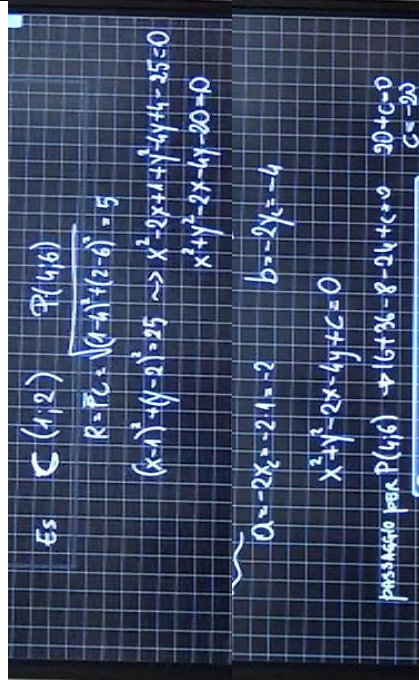
	Osservazione: il punto dato è esterno alla circonferenza, ma ho ottenuto un solo valore di m. La seconda tangente sarà quindi la retta parallela all'asse y e passante per il punto Il docente risponde ai dubbi degli studenti			registro algebrico a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alcune formule alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione risolvibile (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente disegna la retta tangente alla circonferenza passante per P e parallela all'asse y (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente commenta le formule scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente 4 lezione 4 (2 ore)	Note: - durante i primi 35 minuti della registrazione "Docente4 lezione 4 parte 1", il docente si limita a correggere alcuni esercizi su richiesta degli studenti - gli ultimi 17 secondi della registrazione "Docente4 lezione 4 parte 2" sono senza audio			
Docente4 lezione 4 parte 1 00:00:00-00:35:00	In questo segmento, il docente si limita a correggere alcuni esercizi su richiesta degli studenti. Di conseguenza, questa parte del video non verrà analizzata Nota: il docente propone sempre più di un metodo per risolvere gli esercizi, offrendo diverse strategie tra cui scegliere			

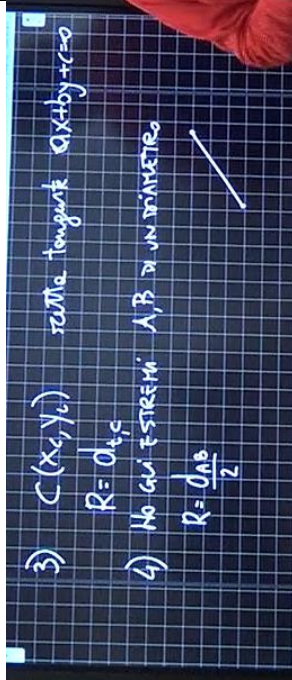
Docente4 lezione 4 parte 1 00:35:00- 00:42:50	Facciamo un rias- sunto dei modi per calcolare la retta tangente alla circon- ferenza quando il punto appartiene alla circonferenza: metodo 1 (delta=0) Il docente sottolinea le analogie con la pa- rabola Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Il docente risponde ai dubbi degli stu- denti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico Registro figurale geome- trico	Mentre parla, il docente scrive il titolo dell'atti- vità alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio al- gebrico quello che dice (conversione da regi- stro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lava- gna (conversione da registro della lingua co- mune a registro figurale geometrico) Il docente commenta le equazioni scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive un'equazione alla lavagna (conversione da registro della lin- gua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lava- gna (conversione da registro della lingua co- mune a registro figurale geometrico)
Docente4 lezione 4 parte 1 00:42:50- 00:44:40	Facciamo un rias- sunto dei modi per calcolare la retta tangente alla circon- ferenza quando il punto appartiene alla circonferenza: metodo 2 (distanza centro-retta=raggio) e metodo 3 (coeffi- ciente angolare della tangente=antireci- proco del coeffi- ciente angolare della	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive in linguaggio al- gebrico quello che dice (conversione da regi- stro della lingua comune a registro algebrico)

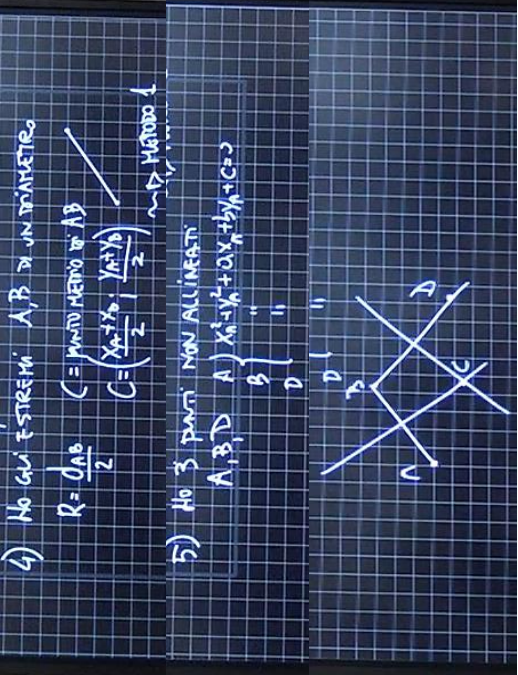
	retta a cui appartiene il raggio)				
Docente4 lezione 4 parte 1 00:44:40- 00:47:20	Facciamo un riasunto dei modi per calcolare la retta tangente alla circonferenza quando il punto appartiene alla circonferenza: metodo 4 (formule di sdoppiamento) Osservazione: potete usare questo metodo per controllare se il risultato ottenuto con un altro metodo è corretto	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)	
Docente4 lezione 4 parte 1 00:47:20- Docente4 lezione 4 parte 2 00:00:00- 00:07:45	Facciamo un esercizio utilizzando il metodo 3 Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: non dobbiamo calcolare la retta a cui appartiene il raggio, ci basta calcolare il suo coefficiente angolare	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione di una circonferenza e le coordinate di un punto alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente sostituisce le coordinate del punto nell'equazione della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro della circonferenza (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)	

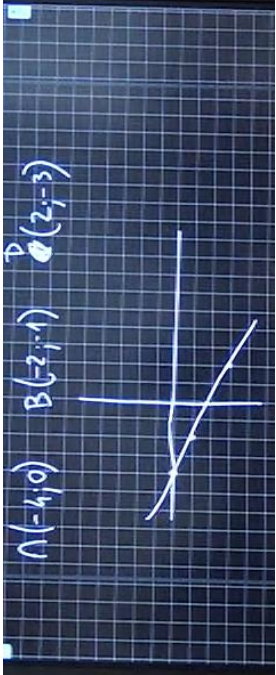
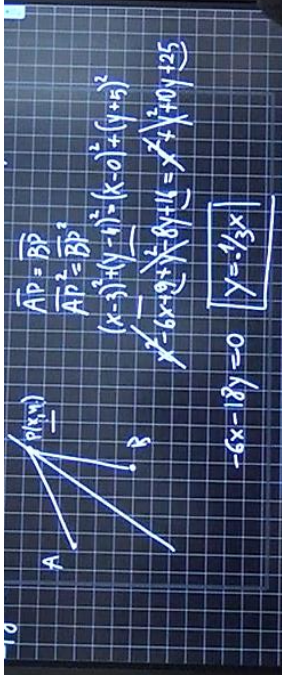
			Mentre parla, il docente imposta l'equazione della retta passante per il punto P di coefficiente angolare m utilizzando i dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta l'equazione per trovare il coefficiente angolare della retta contenente il raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente ricava il coefficiente angolare della retta tangente (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta la formula per trovare la retta tangente coi dati dell'esercizio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 4 parte 2 00:07:45- 00:14:25	Proviamo a svolgere l'esercizio utilizzando le formule di sdoppiamento	LIM come lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro algebrico

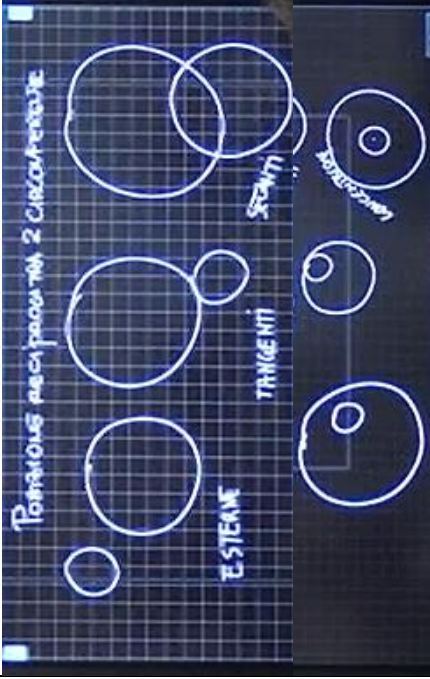
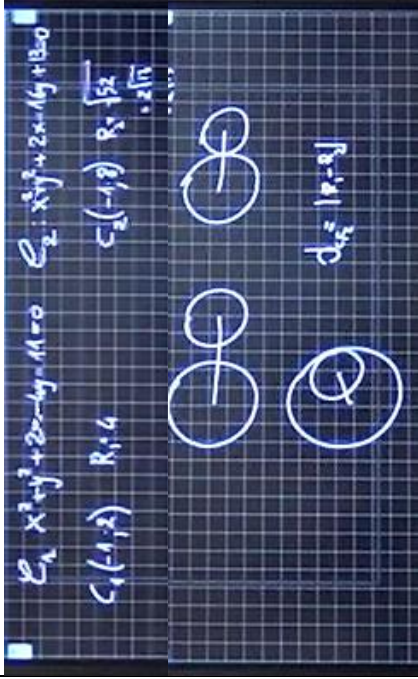
	Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: potete usare questo metodo per controllare se il risultato ottenuto con un altro metodo è corretto			(conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta l'equazione della retta tangente utilizzando quanto appena trovato (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 4 parte 2 00:14:25- 00:19:30	Ricerca dell'equazione di una circonferenza Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: nell'equazione generica di una circonferenza compaiono tre parametri, proprio come accadeva per la parabola; di conseguenza, sono necessarie tre condizioni per determinarne l'equazione		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive il titolo dell'attività alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di una circonferenza in funzione dei parametri a, b e c (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

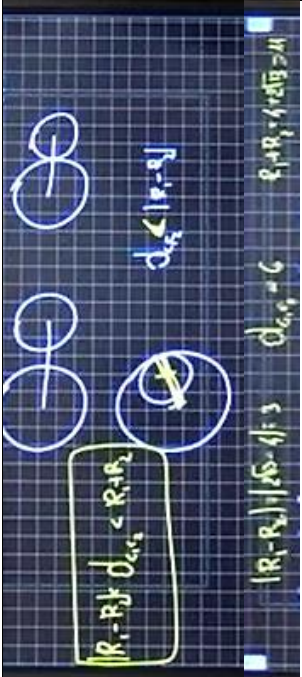
	Caso 1: conoscendo il centro e il raggio della circonferenza Caso 2: conoscendo il centro e un punto della circonferenza Osservazione: se conosco il centro e un punto appartenente alla circonferenza, ho diversi modi per determinarne l'equazione. Ad esempio, posso ricordarmi al caso 1			Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 4 parte 2 00:19:30-00:24:45	Troviamo l'equazione di una circonferenza conoscendo il centro e un suo punto sia utilizzando l'equazione centro-raggio che sfruttando le formule per x_c e y_c	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro della circonferenza e di un punto appartenente ad essa (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula per trovare il raggio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta le equazioni per trovare a e b (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

					Mentre parla, il docente riscrive l'equazione della circonferenza utilizzando le nuove informazioni e imponendo il passaggio per il punto P (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici per trovare c (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente4 lezione 4 parte 2 00:24:45- 00:27:11	Caso 3: conoscendo il centro della circonferenza e la retta tangente Osservazione: anche in questo caso, mi posso ricondurre al caso 1 calcolando la distanza centro-retta Caso 4: conoscendo gli estremi A e B di un diametro Osservazione: anche qui mi posso ricondurre al caso 1	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive a parole quanto appena detto (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)	
Docente4 lezione 4 parte 2 00:27:11-end	Non è stato possibile analizzare questa parte del video perché priva di audio Note: in questo segmento, il docente conclude la trattazione del caso 4				

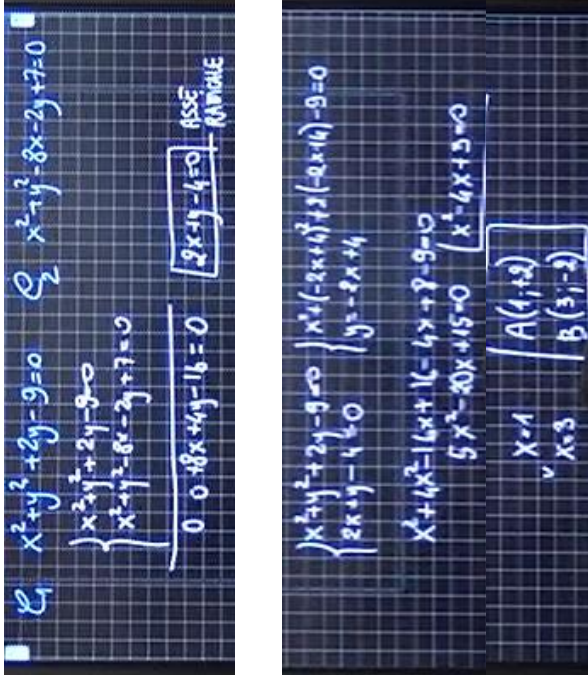
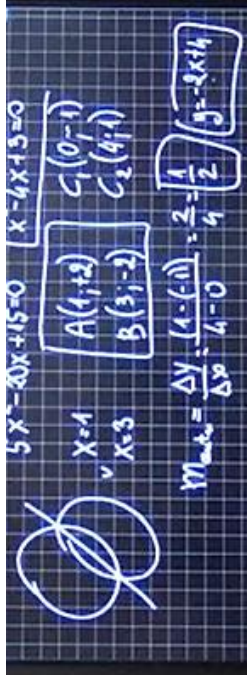
Docente4 lezione 4 parte 3 00:00:00- 00:06:50	Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: anche in questo caso, mi posso ricondurre al caso 1 Caso 5: conoscendo 3 punti non allineati Osservazione: per 3 punti allineati non passa nessuna circonferenza Osservazione: utilizzare il sistema è sempre fonte di errori Osservazione: il caso 5 è molto simile a quello della parabola Domanda per la classe: in questo caso, è possibile determinare l'equazione della circonferenza senza ricorrere a un sistema? Sì, riconducendoci al caso 1	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente commenta quanto appena scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente scrive alla lavagna a parole quanto sta dicendo (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente commenta il disegno appena fatto (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
---	---	---	---	---

Docente4 lezione 4 parte 3 00:06:50- 00:09:50	Esercizio Osservazione: ricor- datevi di verificare se i punti sono all'i- neati oppure no prima di lanciavi in calcoli complessi inutilmente	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro algebrico Registro figurale geome- trico	Mentre parla, il docente scrive le coordinate di 3 punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lava- gna (conversione da registro della lingua co- mune a registro figurale geometrico)
Docente4 lezione 4 parte 3 00:09:50- end	Esercizio Il docente risponde ai dubbi degli stu- denti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lin- gua co- mune Registro figurale geome- trico Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive le coordinate di 3 punti alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un dise- gno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio al- gebrico quello che dice (conversione da regi- stro della lingua comune a registro algebrico) Mentre, parla, il docente imposta le formule appena scritte coi dati dell'esercizio (conver- sione da registro della lingua comune a regi- stro algebrico) Il docente commenta quanto appena scritto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)
Docente 4 lezione 5 (1 ora)				

Docente4 lezione 5 00:00:00- 00:08:30	Ricapitoliamo brevemente quanto abbiamo visto finora sulla circonferenza Posizione reciproca tra 2 circonferenze: elenchiamo i casi possibili Il docente cerca di coinvolgere gli studenti ponendo domande mirate	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive il titolo dell'attività alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente4 lezione 5 00:08:30- 00:25:50	Facciamo un esercizio: determinare se le due circonferenze sono secanti, tangenti o esterne Osservazione: per determinare la posizione reciproca di due circonferenze, è necessario confrontare la distanza tra i loro centri con la somma e la differenza dei rispettivi raggi	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive l'equazione di due circonferenze alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Sotto dettatura degli studenti, il docente scrive alla lavagna le coordinate dei due centri e quanto valgono i due raggi (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa alcuni disegni alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

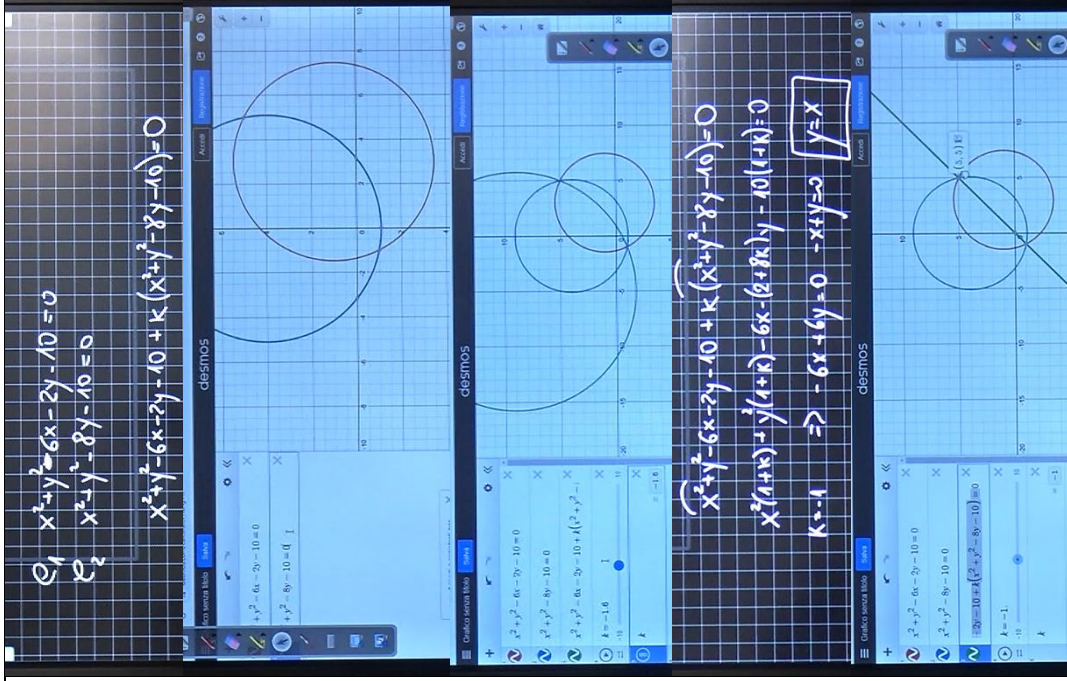
	Osservazione: in questo esercizio i due centri hanno la stessa ascissa, quindi è particolarmente semplice calcolare la distanza tra essi Il docente risponde ai dubbi degli studenti			Il docente commenta i disegni alla lavagna (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta le formule e i disegni scritti alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune + conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna quanto vale la somma e la differenza dei due raggi in questo caso (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta le formule scritte alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 5 00:25:50-00:37:00	Troviamo i punti di intersezione delle due circonferenze Osservazione: abbiamo un sistema di grado 4 Osservazione: dobbiamo ridurre il grado del sistema come abbiamo fatto in fisica nel caso dell'urto elastico		Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna il sistema per trovare i punti di intersezione delle due circonferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente segue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

	Osservazione: quando applicate il metodo di riduzione, quello che ottenete è una retta Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: la retta su cui si trovano i punti di intersezione (asse radicale) è sempre perpendicolare alla retta che congiunge i due centri (retta dei centri). In altre parole, la retta dei centri è l'asse del segmento che congiunge i punti di intersezione			Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate dei due punti di intersezione (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente disegna la retta che contiene i due punti di intersezione (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente disegna la retta che passa per i due centri (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
--	---	--	--	---

Docente4 lezione 5 00:37:00- 00:45:30	Facciamo un altro esercizio	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le equazioni di due circonferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta il sistema per trovare i punti di intersezione (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente imposta il sistema utilizzando una delle due circonferenze e il loro asse radicale (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive le coordinate dei punti di intersezione (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 5 00:45:30-end	Proviamo a verificare che la retta dei centri è perpendicolare all'asse radicale Il docente risponde ai dubbi degli studenti Osservazione: il sistema formato dalle	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale	Mentre parla, il docente scrive le coordinate dei due centri alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la formula per trovare il coefficiente angolare della retta dei centri (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)

	due circonferenze è equivalente a quello costituito da una delle due circonferenze e dal loro asse radicale, ma quest'ultimo risulta molto più semplice da risolvere		geometrico	Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente riscrive alla lavagna l'equazione dell'asse radicale (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)
Docente 4 lezione 6 (1 ora)				
Docente 4 lezione 6 00:00:00- 00:02:55	Ricapitoliamo brevemente quanto visto nella scorsa lezione: partendo da questi concetti, introduciamo ora i fasci di circonferenze Il docente cerca di coinvolgere la classe ponendo domande mirate Osservazione: un fascio di circonferenze può essere ottenuto a partire da due circonferenze generatrici mediante una combinazione	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna il titolo dell'attività (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna due equazioni generiche di circonferenze espresse in funzione di alcuni parametri (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente imposta la combinazione lineare delle due circonferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

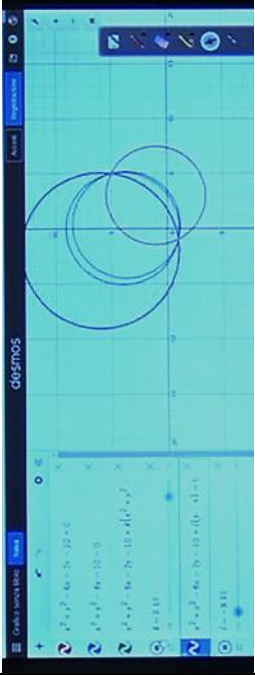
	lineare delle loro equazioni Osservazione: al variare del parametro k , si ottiene una famiglia di circonferenze che condividono alcune caratteristiche comuni			
Docente4 lezione 6 00:02:55- 00:16:10	Facciamo un esercizio Osservazione: tutte le circonferenze appartenenti al fascio passano per i medesimi due punti di intersezione (punti base del fascio) Osservazione: i punti base del fascio di circonferenze sono come il centro del fascio proprio di rette Osservazione: per un particolare valore del parametro k ottengo l'asse radicale Il docente risponde ai dubbi degli studenti	LIM come lavagna di ardesia LIM con Desmos	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione di due circonferenze (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna l'equazione del fascio (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente scrive su Desmos l'equazione delle due circonferenze e mostra il loro grafico (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente commenta i grafici ottenuti (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Il docente scrive su Desmos l'equazione del fascio e mostra cosa succede facendo variare k in maniera continua tra -10 e 10 (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico)

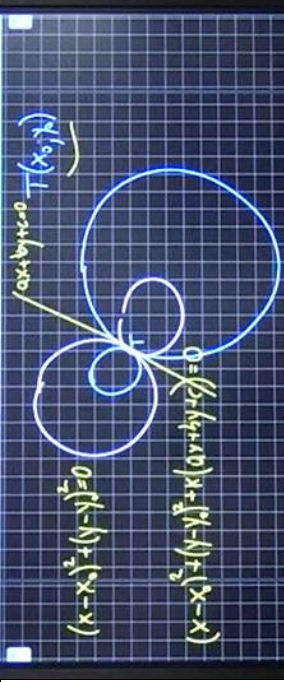
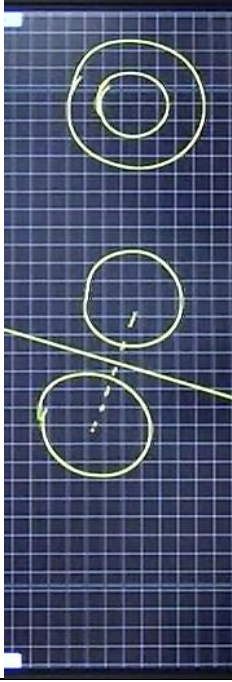


Il docente commenta quanto appena ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

Mentre parla, il docente mostra su Desmos il disegno delle due circonferenze e della retta $y=x$ (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

Docente4 lezione 6 00:16:10- 00:20:35	Determiniamo le caratteristiche di questo fascio di circonferenze: coordinate del centro in funzione del parametro k Il docente risponde alle domande degli studenti	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le coordinate del centro in funzione del parametro k (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente commenta quanto scritto alla lavagna (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 6 00:20:35- 00:30:10	Esercizio: troviamo le circonferenze generatrici del fascio Domanda per la classe: per quale valore del parametro k si ottiene la seconda circonferenza generatrice? Per nessun valore finito di k Facciamo come facciamo per le rette: dividiamo tutto per k e mandiamo k all'infinito per trovare la seconda generatrice	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro algebrico	Mentre parla, il docente scrive il titolo dell'attività alla lavagna (trattamento all'interno del registro della lingua comune) Mentre parla, il docente scrive l'equazione di un fascio alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Mentre parla, il docente scrive alla lavagna le equazioni delle due circonferenze generatrici (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico) Il docente esegue alcuni passaggi algebrici (trattamento all'interno del registro algebrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro algebrico a registro della lingua comune)

	Il docente risponde alle domande degli studenti Osservazione: sostituendo una delle equazioni con quella di un'altra qualsiasi circonferenza del fascio, il fascio generato rimane invariato			
Docente4 lezione 6 00:30:10- 00:34:45	Domanda per la classe: cos'altro posso sostituire al posto della seconda circonferenza per ottenere sempre lo stesso fascio? L'equazione dell'asse radicale Osservazione: sostituendo una delle due equazioni con un altro elemento del fascio ottengo sempre lo stesso fascio	LIM con Desmos 	Registro della lingua comune Registro algebrico Registro figurale geometrico	Il docente inserisce su Desmos la combinazione lineare tra una circonferenza del fascio e l'asse radicale e ne mostra il grafico alla classe (conversione da registro algebrico a registro figurale geometrico) Il docente commenta quanto ottenuto (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune)
Docente4 lezione 6 00:34:45- 00:40:50	Osservazione: può succedere che le due circonferenze base del fascio siano tangenti. In questo caso,	LIM come lavagna di ardesia	Registro della lingua comune Registro figurale	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

	avrò un unico punto base Osservazione: in questo caso, tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in un punto Osservazione: in questo caso, l'asse radicale è la retta tangente a tutte queste circonferenze nel punto base Domanda per la classe: se conosco l'equazione dell'asse radicale e le coordinate del punto base, posso ricavare l'equazione del fascio? Sì, perché posso scrivere il punto come una circonferenza di raggio zero		geometrico Registro algebrico	Il docente commenta il disegno (conversione da registro figurale geometrico a registro della lingua comune) Mentre parla, il docente disegna l'asse radicale (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico) Mentre parla, il docente scrive in linguaggio algebrico quello che dice (conversione da registro della lingua comune a registro algebrico)
Docente4 lezione 6 00:40:50- end	Vediamo ora gli ultimi due casi: quello in cui le circonferenze generatrici non si incontrano e quello in cui sono concentriche	LIM come lavagna di ardesia 	Registro della lingua comune Registro figurale	Mentre parla, il docente fa un disegno alla lavagna (conversione da registro della lingua comune a registro figurale geometrico)

	Osservazione: nel primo dei due casi esiste l'asse radicale Osservazione: si tratta di fasci senza punti base Domanda per la classe: quand'è che l'asse radicale non esiste? Se le circonferenze generatrici sono concentriche Il docente indica dove trovare nel libro di testo la teoria relativa ai fasci di circonferenze Osservazione: Studiare un fascio di circonferenze significa determinare: il centro e il raggio in funzione del parametro, le due circonferenze generatrici, gli eventuali punti base, l'asse radicale, l'asse dei centri e le circonferenze degeneri		geometrico	
--	---	--	------------	--

Appendice H

**Materiale utilizzato e condiviso
con la classe dal Docente 1**

Le equazioni della circonferenza e il metodo del completamento del quadrato

10 febbraio 2025

1 Le equazioni cartesiane della circonferenza, dato il centro e il raggio

Dati un punto $C(\alpha, \beta)$ nel piano cartesiano Oxy e la lunghezza r di un segmento, l'equazione cartesiana della **circonferenza di centro C e raggio r** si può trovare così: detto $P(x, y)$ il generico punto del piano, la lunghezza $\overline{PC}$ è uguale a $\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$, quindi la condizione che il punto P appartenga alla circonferenza, cioè $\overline{PC} = r$, si traduce nell'equazione:

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r$$

che è equivalente a quella ottenuta elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2} \quad (1)$$

Chiameremo questa forma dell'equazione l'**equazione centro-raggio**.

Esempio. Se il centro è il punto $C(3, -1)$ e il raggio è $r = 4$, allora l'equazione (1) diventa:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16.$$

Se sviluppiamo i quadrati dei due binomi nell'equazione (1) e riordiniamo i termini, otteniamo l'equazione della circonferenza **in forma normale**:

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \quad (2)$$

Esempio. Partendo dall'equazione centro-raggio:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 16 && \text{espandiamo i quadrati dei binomi} \\ (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) - 16 &= 0 && \text{riordiniamo i termini} \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 + 1 - 16 &= 0 && \text{raccolgiamo i termini costanti} \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 &= 0 && \text{e questa è l'equazione in forma normale.} \end{aligned}$$

2 Trovare centro e raggio, data l'equazione normale

Osserviamo che, se l'equazione di una circonferenza è data nella forma (1), risulta molto semplice trovare il centro e il raggio.

Esempio. Se l'equazione è

$$(x - 4)^2 + (y + 10)^2 = 12,$$

allora, confrontandola con l'equazione $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, si vede che

$$\alpha = 4; \quad \beta = -10 \quad r^2 = 12 \rightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

e quindi il centro è $C(4; -10)$ e il raggio è $r = 2\sqrt{3}$.

È meno semplice, data l'equazione di una circonferenza nella forma normale, trovare il centro e il raggio. Inoltre, un'equazione del tipo (2) potrebbe anche non essere l'equazione di una circonferenza!

Esempio. L'equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$$

assomiglia all'equazione di una circonferenza nella forma (2), ma in realtà non lo è. Se infatti riordiniamo i termini, separando $2 = 1 + 1$, otteniamo

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 1 = 0,$$

poi raccogliamo il quadrato $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ e portiamo il termine noto dall'altra parte del segno di uguale. L'equazione di partenza è equivalente a

$$(x - 1)^2 + y^2 = -1,$$

che chiaramente non ha soluzioni, perché i due quadrati sono maggiori di (o uguali a) zero, mentre a destra c'è un numero negativo.

Vediamo ora come è possibile, con due metodi diversi, data un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

- stabilire se essa è l'equazione di una circonferenza;
- in caso affermativo, come trovare il centro $C(\alpha, \beta)$ e il raggio r a partire dai coefficienti a, b, c .

2.1 Trovare il centro $C(\alpha, \beta)$ e il raggio r da a, b, c

Partiamo dall'equazione centro-raggio e svolgiamo i quadrati, portiamo tutti i termini a sinistra dell'uguale e riordiniamo i termini, mettendo in evidenza i coefficienti:

$$\begin{aligned}(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + (-2\alpha)x + (-2\beta)y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) &= 0.\end{aligned}$$

Se confrontiamo l'ultima riga con l'equazione in forma normale

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

le due equazioni sono equivalenti se e solo se i coefficienti di x , di y e i termini noti sono uguali, cioè se:

$$(\text{coefficienti di } x \text{ uguali}) \quad -2\alpha = a \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = -\frac{a}{2}}$$

$$(\text{coefficienti di } y \text{ uguali}) \quad -2\beta = b \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta = -\frac{b}{2}}$$

$$(\text{termini noti uguali}) \quad \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \quad \rightarrow \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c$$

$$\boxed{r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}}$$

Le tre uguaglianze evidenziate ci permettono di ritrovare il centro $C(\alpha, \beta)$ e il raggio r , nel caso che l'equazione in forma normale sia l'equazione di una circonferenza.

Osserviamo che però **se il radicando nell'ultima riga risulta negativo**, cioè se partendo da un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ troviamo

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0,$$

allora non ha senso calcolare la radice, e quindi **l'equazione non è l'equazione di una circonferenza**. Affiché lo sia, deve quindi essere soddisfatta la **condizione di realtà**:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0.$$

Esempio. Se riprendiamo l'equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0,$$

in cui $a = -6, b = 2, c = -6$, ritroviamo

$$\alpha = -\frac{(-6)}{2} = 3 \quad \beta = -\frac{2}{2} = -1 \quad r = \sqrt{3^2 + (-1)^2 - (-6)} = \sqrt{16} = 4.$$

(Sapevamo che era l'equazione di una circonferenza, quindi possiamo senz'altro calcolare sia il centro sia il raggio)

Se invece consideriamo l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0,$$

in cui $a = -2, b = 0, c = 2$, troviamo

$$\alpha = -\frac{(-2)}{2} = -1, \quad \beta = -\frac{0}{2} = 0, \quad \text{ma: } \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 0 - 2 = -1 < 0,$$

quindi la *condizione di realtà non è soddisfatta*: l'equazione **non** è l'equazione di una circonferenza.

2.2 Metodo del completamento del quadrato

In alternativa, è sempre possibile partire da un'equazione nella forma (2) e trasformarla in un'equazione del tipo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k, \quad (3)$$

con k un numero reale, più precisamente $k = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.

Basta riordinare i termini dell'equazione in forma normale, raggruppando i termini con le stesse lettere per poi “completare i quadrati”.

Per esempio, i termini $x^2 + ax$ si possono “completare a un quadrato” aggiungendo $(\frac{a}{2})^2$: il trinomio $x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2$ è in effetti il quadrato del binomio $x + \frac{a}{2}$:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

Naturalmente, per ottenere un'equazione equivalente a quella iniziale, i termini aggiunti a sinistra dell'uguale devono essere aggiunti anche a destra:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ x^2 + ax &+ y^2 + by &= -c \\ \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 &= k \\ \text{con } k &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c. \end{aligned}$$

Si possono distinguere tre casi per un'equazione di tipo (3):

- Se $k > 0$, l'equazione descrive **una circonferenza**;
- Se $k < 0$, l'equazione è impossibile, quindi descrive **l'insieme vuoto**;
- Se $k = 0$, l'equazione è verificata solo dalla coppia $C(\alpha; \beta) = C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ quindi descrive **il solo punto** C (che a volte viene chiamato “circonferenza degenera” o di raggio zero.)

Esempio. L'equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

si può trasformare in

$$\begin{array}{ll} x^2 - 6x & + y^2 + 2y = 6 & \text{abbiamo riordinato i termini} \\ x^2 - 6x + \mathbf{9} & + y^2 + 2y + \mathbf{1} = 6 + \mathbf{9} + \mathbf{1} & \text{abbiamo completato i quadrati} \\ (x - 3)^2 & + (y + 1)^2 = 16. & \text{e infine abbiamo raccolto i quadrati.} \end{array}$$

Concludiamo che, poiché $k = 16 > 0$, l'equazione rappresenta una circonferenza di raggio $r = \sqrt{16} = 4$ e centro $C(3; -1)$.

Bibliografia

- Albano, G., Coppola, C., Pacelli, T., Vecchio, L., et al. (2012). Processi cognitivi e rappresentazioni semiotiche: indagine preliminare. In Coppola, C., Gerla, G., and Pacelli, T., editors, *Logica, linguaggio e didattica della matematica*, pages 15–26. FrancoAngeli Editore.
- Ariza, R. P., García, A. R., and Del Pozo, R. M. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores i: teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 15(2):155–171.
- Averna, L., Baldassarre, M., Ulloa, A., Vitucci, F., et al. (2012). Lim: nuove frontiere della didattica. Intervento presentato a DIDAMATICA 2012.
- Baccaglioni Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G., et al. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori università.
- Bagni, G. T. et al. (2004). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*, 3:51–70.
- Beeland, W. D. J. (2002). Student engagement, visual learning and technology: can interactive whiteboards help? In *Annual conference of the association of information technology for teaching education*, Trinity College, Dublin.
- Bergamini, M., Trifone, A., and Barozzi, G. (2020). *Matematica.blu 2.0. Volume 3*. Zanichelli, Bologna.

- Bilý, J. and Miština, J. (2023). Using an interactive whiteboard to increase the effectiveness of teaching at secondary schools. *R&E source*, 10:38–49.
- Bolondi, G. and Pinilla, M. I. F. (2013). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Edises.
- Bonaiuti, G. (2009). *Didattica attiva con la LIM: metodologie, strumenti e materiali per la lavagna interattiva multimediale*, volume 3. Edizioni Erickson.
- Conenna, G. (2013). *La motivazione all'apprendimento e le tecnologie. Una ricerca condotta con allievi di 14-15 anni sull'uso della Lavagna Interattiva Multimediale-LIM*. PhD thesis, Università degli studi di Milano Bicocca.
- D'Amore, B. (2000). Concetti e oggetti in matematica. *Rivista di matematica dell'Università di Parma*, 6(3):143–151.
- D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. Interazioni costruttivistiche nell'apprendimento dei concetti matematici e ipotesi su alcuni fattori che inibiscono la devoluzione. *La matematica e la sua didattica*, 2:150–173.
- D'Amore, B. et al. (2004). Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, 4:4–30.
- D'Amore, B. and Fandiño Pinilla, M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*, 23(3):261–298.
- De Vita, M., Verschaffel, L., and Elen, J. (2014). Interactive whiteboards in mathematics teaching: a literature review. *Education research international*, 2014(1):401315.

- Dreher, A. and Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: the case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational studies in mathematics*, 88:89–114.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5:37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, volume 4. Peter Lang Berne.
- Duval, R. (1998). Section II. Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*, 5:37.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. *Proceedings of the 21st annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education*, 1:3–26.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61:103–131.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer.
- Ellerani, P. G., Barca, D., et al. (2011). *Andiamo alla lavagna! Integrare la LIM in classe*. Zanichelli.
- Erdener, K. (2021). Students' attitudes towards using interactive whiteboard in mathematics classrooms. *International journal of technology in teaching and learning*, 17(2):84–94.
- Faggiano, E. et al. (2012). Integrare le tecnologie nella didattica della matematica: un compito complesso. *Bricks*, 2(4):98–102.

- Grasha, A. F. (1994). A matter of style: The teacher as expert, formal authority, personal model, facilitator, and delegator. *College teaching*, 42(4):142–149.
- Gregorcic, B., Etkina, E., and Planinsic, G. (2018). A new way of using the interactive whiteboard in a high school physics classroom: a case study. *Research in science education*, 48:465–489.
- Greiffenhagen, C. (2019). Interactive whiteboards in mathematics education: possibilities and dangers. Loughborough University research repository via Figshare.
- Hennessy, S., Deane, R., Ruthven, K., and Winterbottom, M. (2007). Pedagogical strategies for using the interactive whiteboard to foster learner participation in school science. *Learning, media and technology*, 32(3):283–301.
- Higgins, S., Beauchamp, G., and Miller, D. (2007). Reviewing the literature on interactive whiteboards. *Learning, media and technology*, 32(3):213–225.
- Iori, M. (2023). Riflessioni e puntualizzazioni su alcuni concetti specifici e fondanti della teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Duval. *Caminhos da educação matemática em revista (Online)*, 13(2):102–112.
- Laboratorio di didattica della matematica (2006). *Bollettino dei docenti di matematica*, n. 52. Centro didattico cantonale.
- Lewin, C., Somekh, B., and Steadman, S. (2008). Embedding interactive whiteboards in teaching and learning: the process of change in pedagogic practice. *Education and information technologies*, 13:291–303.
- Magnaterra, T. (2010). La lim in classe: un catalogo possibile. *Form@re-open journal per la formazione in rete*, 10(71):20–26.

- Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International journal of education in mathematics, science and technology*, 9(1):1–21.
- MIUR (2010). Schema di regolamento recante “indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all’articolo 10, comma 3, del decreto del presidente della repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all’articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento”. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf. (consultato il 26 marzo 2025).
- Ostini, M. (2015). *L’efficacia del software Geogebra per la comprensione dell’oggetto matematico “funzioni” in una classe di quarta media corso attitudinale*. PhD thesis, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.
- Pacelli, T. (2021). Le rappresentazioni semiotiche: il loro ruolo nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. https://storagebiblioteca.indire.it/public/backend/experience_attachment/0001/02/be14699cdfb131a73ed9d6dd1dcd7d53e068ff56.pdf. (consultato il 20 marzo 2025).
- Pedersen, M. K., Bach, C. C., Gregersen, R. M., Højsted, I. H., and Jankvist, U. T. (2021). Mathematical representation competency in relation to use of digital technology and task design—a literature review. *Mathematics*, 9(4):444.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers’ beliefs and affect. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1:257–315.
- Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., and Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer Nature.

- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, 30(2):2–7.
- Samsonova, O. (2021). Educational technology in Abu Dhabi public schools: teaching with interactive whiteboards (IWBs). *International journal of technology enhanced Learning*, 13(1):60–77.
- Santagata, R., Zannoni, C., and Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of mathematics teacher education*, 10:123–140.
- Saussure, F. d. (1915). De 1973: Cours de linguistique générale, publié par ch. Bally et A. Sechehaye, avec la collaboration de A. Riedlinger, édition critique préparée par Tullio de Mauro, Paris.
- Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica*, 50:69–76.
- Tacconi, G. et al. (2009). Lavagne interattive multimediali (LIM): spunti per una riflessione didattica. *RASSEGNA CNOS*, 25(3):161–168.
- Türel, Y. K. and Johnson, T. E. (2012). Teachers' belief and use of interactive whiteboards for teaching and learning. *Journal of educational technology & society*, 15(1):381–394.
- Wood, R. and Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: a case study. *British journal of educational technology*, 39(1):84–96.
- Zambotti, F. (2009). *Didattica inclusiva con la LIM: strategie e materiali per l'individualizzazione con la lavagna interattiva multimediale*, volume 4. Edizioni Erickson.