Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

CALCOLO SENZA LIMITI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Albano

Presentata da:
Emily Gregorio

I Sessione
Anno Accademico 2024-2025

A mamma, papà
e Samuel

Indice

Abstract **1**

Introduzione **3**

I Parte I **7**

1 Calcolo differenziale senza limiti **9**

1.1 Definizione di derivata 9

1.1.1 Velocità istantanea 10

1.1.2 Definizione di derivata in un punto 12

1.1.3 Esempi 15

1.1.4 La nozione di punto di transizione 18

1.2 Analisi della definizione di derivata 20

1.2.1 Il metodo di esaustione 20

1.2.2 Il contributo di MacLaurin e Peano 22

1.3 Funzioni che si annullano rapidamente 24

1.3.1 Regole di derivazione 28

2 Calcolo integrale senza limiti **39**

2.1 Definizione di integrale definito 39

2.1.1 Proprietà dell'integrale definito 44

2.2 Rokhlin e l'approccio *ingenuamente assiomatico* 46

2.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale 51

II Parte II 55

3 Continuità senza limiti 57
3.1 Definizione di funzione continua 57
3.1.1 Continuità e derivabilità 61
3.2 Derivata della funzione composta 62
3.3 Teorema dei valori intermedi 64
3.4 Teorema di Weierstrass 66
3.4.1 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale 70
3.5 Integrabilità delle funzioni continue 72

4 Funzioni monotone 75
4.1 Funzioni crescenti e decrescenti 75
4.1.1 Minimi e massimi locali 77
4.1.2 Punti di flesso 79
4.2 Derivata della funzione inversa 82

A Regole di derivazione per funzioni trigonometriche ed esponenziali 87
A.1 Derivata delle funzioni trigonometriche 87
A.2 Derivata delle funzioni esponenziali 90
A.3 Derivata della funzione logaritmo 96

Bibliografia 97

Abstract

> *"[...] i limiti costituiscono la parte più difficile da capire e, cosa più interessante, assolutamente non necessaria."* [9]
>
> *(V. Rokhlin, 20 Novembre 1981)*

Con queste parole, nel 1981, Vladimir Rokhlin metteva in discussione, nella didattica rivolta a non aspiranti matematici, uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica. Il concetto di limite e la sua definizione sono tra gli argomenti più complessi per gli studenti di ogni grado. Inoltre, la storia dell'analisi mostra che molti risultati importanti hanno preceduto il concetto di limite e la sua formalizzazione (si pensi, ad esempio, ai *Philophae Naturalis Principia Mathematica* di Newton, a *Institutiones Calculi differentialis* di Eulero, ...). È quindi davvero indispensabile l'introduzione del concetto di limite in un primo approccio al calcolo differenziale e integrale? Nel 1980 Jerrold Marsden e Alan Weinstein pubblicano il testo *Calculus Unlimited*, in cui propongono un primo approccio al calcolo differenziale ed integrale senza ricorre ai limiti. In questa tesi si descrive e si analizza la proposta di Marsden e Weinstein.

Introduzione

Uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica è il concetto di limite. La storia del concetto di limite ha origini antiche e si può far risalire circa al IV secolo a.C., con la nascita nel metodo di esaustione. Nell'antichità, questo metodo, introdotto da Eudosso e perfezionato da Archimede, fu utilizzato per approssimare aree e volumi anticipando intuitivamente l'idea moderna di limite. Nel XVII secolo, il tentativo di risolvere il problema della quadratura delle curve portò allo sviluppo di un nuovo approccio: il metodo degli indivisibili. Per molti storici della matematica, il metodo proposto da Cavalieri è il primo vero tentativo di un'analisi infinitesimale. Successivamente, il problema della ricerca delle tangenti alle curve e il problema della determinazione della velocità di un corpo in moto portarono Newton e Leibniz all'invenzione del calcolo differenziale. Il calcolo differenziale di Leibniz e le flussioni di Newton erano basati sui concetti di infinitesimo e di limite utilizzati però in modo intuitivo e implicito, senza una formalizzazione rigorosa. Sia gli studi di Cavalieri che quelli di Newton e Leibniz furono ampiamente criticati da alcuni matematici a loro contemporanei proprio per la mancata formalizzazione rigorosa di alcuni concetti, tra i quali quello di infinitesimo. È nel XIX secolo che si avvertì la necessità di dare un fondamento rigoroso a queste idee a partire dal problema della definizione del concetto di continuità. Bolzano, probabilmente per primo, definì una funzione $f(x)$ continua in un intervallo quando, per qualsiasi valore di x nell'intervallo, il valore assoluto della differenza $f(x + \Delta x) - f(x)$ con Δx sufficientemente piccolo, rimane minore di una qualsiasi quantità data. Tale definizione non differisce da quella proposta da Cauchy nel 1821 in *Cours d'analyse.* Tuttavia, i lavori di Bolzano e di Cauchy sembravano non bastare ancora a garantire all'analisi il rigore necessario. I matematici dell'Università di Berlino, sotto la guida di Weierstrass, si fecero carico dell'arduo compito di cercare solide e rigorose basi per l'analisi matematica. Weierstrass non pubblicò nulla a riguardo, il suo lavoro si diffuse grazie ai suoi studenti. In alcuni scritti di Heine, sulle lezioni tenute da Weierstrass, compare la seguente definizione di limite (nota come definzione epsilon-delta):

"Se, data una grandezza qualsiasi epsilon, esiste un n_0 tale che per $0 < n < n_0$ la differenza $f(x_0 \pm n) - l$ è minore di epsilon in valore assoluto, allora l è il limite di $f(x)$ per $x = x_0$."

Grazie a matematici come Heine, Cantor e Dedekind, fu poi completata la teoria dei limiti, le definizioni di continuità e di numero reale. Questi concetti sono strettamente intrecciati tra loro. Potremmo dire che il concetto di limite è maturato gradualmente, attraverso secoli di intuizioni e applicazioni, e la sua formalizzazione ha rappresentato una delle sfide più difficili e delicate nella storia dell'analisi matematica.

L'insegnamento dell'analisi matematica nei curricula tradizionali si fonda proprio sul concetto di limite, per questo motivo il limite è una nozione fondamentale con la quale gli studenti si confrontano a partire dalla scuola secondaria di secondo grado. Tuttavia, l'apprendimento della teoria dei limiti non è immediato. Il concetto stesso di limite e la sua definizione epsilon-delta, per motivi intuibili e che non verranno approfonditi in questa trattazione, sono considerati tra gli argomenti più complicati per gli studenti di ogni grado. Eppure, come ricordato prima, buona parte dei risultati più importanti dell'analisi precedono il concetto di limite e la sua formalizzazione.

Nel 1980, Marsden e Weinstein pubblicano *Calculus Unlimited* [7], un testo in cui si propone il calcolo differenziale per funzioni di una variabile senza ricorrere al concetto di limite. Gli unici prerequisiti richiesti al lettore sono il concetto di funzione, l'algebra e la trigonometria. Nella prefazione, gli autori dichiarano di essere stati influenzati da *Geometry and the Imagination* di Hilbert e Cohn-Vossen (1952) [4], in particolare dalla definizione di cerchio di curvatura di una curva piana. Data una curva piana C e un suo punto P, il cerchio di curvatura è il cerchio tangente alla curva nel punto, quindi il cerchio che meglio approssima la curva nelle vicinanze nel punto. Nel testo di Hilbert e di Cohn-Vassen è proposto un metodo per la ricerca del cerchio di curvatura che non fa uso di limiti: consideriamo una curva C e tutti i cerchi passanti per un suo punto P, con i centri appartenenti alla normale alla curva nel punto. La curva divide il piano in due regioni che chiamiamo lati della curva. Tra i cerchi considerati, alcuni giacciono interamente da un lato della curva, altri giacciono, in parte o interamente, dall'altro lato. Per i cerchi che non si trovano interamente in una regione, è sempre possibile individuare un intorno del punto P in cui considerarli contenuti in uno solo dei due lati della curva. Si propone allora il seguente ragionamento:

"Ora, il cerchio di curvatura ha generalmente la proprietà di separare questi due tipi di cerchi, cosa che fa nel modo seguente: se r è il raggio del cerchio di curvatura, tutti i cerchi con raggio maggiore di r giacciono da un lato della curva vicino a P e tutti i cerchi con raggio minore di r giacciono nell'altro lato." [4]

Da questa argomentazione Marsden e Weinstein intuiscono che un ragionamento analogo può essere utilizzato per eliminare il limite dalla definizione di derivata. In particolare, è grazie a una modifica del metodo di esaustione che riescono a costruire il calcolo differenziale e integrale senza limiti. Secondo gli autori, questa prospettiva "unlimited" può essere presentata agli studenti prima della trattazione tradizionale. Infatti, in altri testi come *Calculus I* [8], gli stessi autori introducono gli argomenti senza fare ricorso ai limiti e, solo in un secondo momento, inseriscono il concetto di limite. In alternativa, questo approccio può essere proposto come approfondimento, da affiancare o da presentare in fase finale ai tradizionali corsi di analisi.

Nel 1981, in una conferenza presso la Leningrad Mathematical Society, anche Vladimir Abramovich Rokhlin affronta il tema dell'insegnamento della matematica e del concetto di limite, affermando:

> *"[...] i limiti costituiscono la parte più difficile da capire e, cosa più interessante, assolutamente non necessaria."* [9]

Come i colleghi americani anche il matematico sovietico affermava che il metodo di esaustione potesse essere uno strumento utile per eliminare la teoria dei limiti dal calcolo differenziale e integrale. Inoltre, Rokhlin sosteneva che il concetto di limite potesse essere assolutamente evitato per tutti quegli studenti non destinati a diventare matematici professionisti, quindi molti studenti delle scuole secondarie di secondo grado e di alcuni corsi universitari.

In questa tesi si propone un'analisi critica della proposta di Marsden e Weinstein. L'elaborato è suddiviso in due parti. Nella prima parte si definisce la derivata di una funzione in un punto senza usare la nozione di limite (si veda la definizione 1.1.1). Tale definizione è equivalente alla richiesta che la funzione nel punto differisca da una retta per una funzione che si annulla rapidamente (si veda il teorema 1.3.3). Da quest'ultimo risultato si deducono tutte le regole di derivazione. Inoltre, si affronta il tema del calcolo integrale senza limiti con un approfondimento dedicato alla proposta di Rokhlin. La seconda parte della tesi è dedicata alla dimostrazione dei principali risultati dell'analisi senza far ricorso al concetto di limite. In particolare, sono discussi i concetti di continuità e monotonia, assieme ai relativi risultati, con l'obiettivo di mostrare che l'approccio proposto è completo ed è coerente con la trattazione tradizionale.

Parte I

Capitolo 1

Calcolo differenziale senza limiti

In questo capitolo è data una prima definizione di derivata come proposta nel testo *Calculus Unlimited* di J. Marsden e A. Weinstein [7]. Tale definizione non usa il concetto di limite e può essere riformulata usando la nozione di punto di transizione. Il capitolo contiene anche un'analisi storica della nozione di derivata senza l'uso del concetto di limite. Infine, è presentata la classe delle funzioni che si annullano rapidamente e le regole di derivazione.

1.1 Definizione di derivata

In questa sezione si presenta il concetto di derivata a partire da un problema concreto: il calcolo della velocità istantanea. Questo approccio fornisce anche una motivazione per l'introduzione della nozione di derivata.

Successivamente, è data la definizione di derivata di una funzione in un punto e si mostra, in alcuni esempi, come possa essere applicata. Infine, si riformula la definizione di derivata tramite il concetto di punto di transizione.

1.1.1 Velocità istantanea

Si consideri un corpo in moto rettilineo. Se la posizione del corpo cambia linearmente con il tempo, questo si sta muovendo di moto rettilineo uniforme. In questo caso, la *velocità* può essere definita nel modo seguente: si considerano due istanti successivi $t_1 < t_2$ e le rispettive posizioni x_1, x_2 occupate dal corpo in moto, allora la velocità v è espressa dalla formula

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}}.$$

Molti dei moti che si osservano in natura non sono uniformi per questo, in riferimento al rapporto tra lo spostamento totale compiuto dal corpo e la differenza tra i due istanti di tempo, si parla di *velocità media* tra due istanti di tempo. La misura della velocità media non riflette però le variazioni di velocità durante il moto. Si immagini un'auto che parte da ferma, accelera e poi frena fino a fermarsi: la sua velocità media può essere relativamente bassa, ma ci potrebbero essere stati istanti in cui la velocità era molto alta e altri in cui era pari a zero.
Quando si osserva un corpo in movimento, è naturale chiedersi a che velocità stia andando in un determinato istante, soprattutto se il movimento non è uniforme. La *velocità istantanea* è la velocità del corpo in un istante di tempo. Per mostrare come si può stimare la velocità istantanea, si può immaginare di osservare la nostra auto che si muove di moto non uniforme nella corsia centrale di una strada a senso unico con tre corsie. Si supponga di avere le informazioni mostrate in figura 1.1: la nostra auto raggiunge alle ore 15:00 un'auto che si muove uniformemente alla velocità di 95 km/h. Un'altra auto, che si muove uniformemente alla velocità di 100 km/h, raggiunge la nostra sempre alle ore 15:00. Quanto vale la velocità v_0 della nostra auto alle ore 15:00?

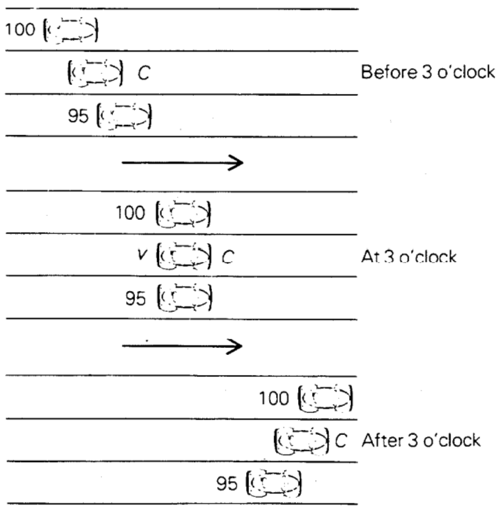

Figura 1.1: Moto dell'auto C [1].

Si può sicuramente concludere che la velocità v_0 è compresa tra 95 km/h e 100 km/h. Una stima più precisa si potrebbe ottenere se si potesse confrontare la velocità della nostra auto con quella di più auto che si muovono di moto uniforme.

Consideriamo ora il moto della nostra auto in un piano cartesiano. Sia y la distanza percorsa in chilometri e x il tempo in ore. Supponiamo che la posizione dell'auto in funzione del tempo sia rappresentata dalla funzione $f(x)$. Si vuole stimare la velocità v_0 all'istante x_0. Per quanto osservato prima, possiamo confrontare il moto dell'auto (rappresentato dalla funzione f) con i moti uniformi di diverse auto. Poiché il moto uniforme a velocità v è rappresentato, nel piano cartesiano, da una retta con pendenza pari a v, possiamo stimare la velocità v_0 osservando come il grafico della funzione $f(x)$ incrocia rette con diverse pendenze nel punto x_0.

[1] Figura 1-4, p.4 del testo *Calculus Unlimited* di J.Marsden, A.Weinstein [7].

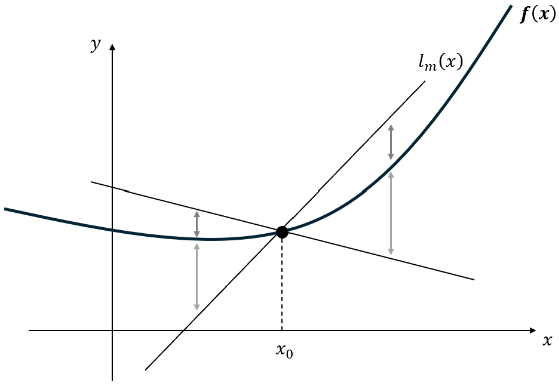

Figura 1.2: Grafico del moto dell'auto.

In altre parole, si stima la pendenza di una data funzione $f(x)$ in x_0 mettendo a confronto la funzione f con una retta $l_m(x)$ passante per $(x_0, f(x_0))$ di pendenza m, ovvero $l_m(x) = y_0 + m(x - x_0)$. Osserviamo che vicino al punto x_0, la retta potrebbe trovarsi al di sopra o al di sotto del grafico della funzione e di conseguenza il segno di $f(x) - l_m(x)$ cambia.
Tenendo presenti le osservazioni fatte sul moto e sulla velocità istantanea, possiamo dare la definizione di derivata.

1.1.2 Definizione di derivata in un punto

Nella definizione seguente, si dice che una retta si trova al di sotto o al di sopra di una funzione in riferimento ai grafici e considerando l'orientamento dell'asse y.

Definizione 1.1.1. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contenente x_0. Allora $m_0 \in \mathbb{R}$ è detta derivata di f nel punto x_0 se valgono le seguenti:*

1. *per ogni $m < m_0$ la retta $l_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ si trova al di sopra di f a sinistra di x_0, per x opportunamente vicino a x_0, e al di sotto*

di f a destra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0. Ovvero $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo nel punto x_0 [2]

2. *per ogni $m > m_0$ la retta $l_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ si trova al di sotto di f a sinistra di x_0, per x opportunamente vicino a x_0, e al di sopra di f a destra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0. Ovvero $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo nel punto x_0* [3]

Se tale numero m_0 esiste, si dice che la funzione f è derivabile nel punto x_0 e si scrive $f'(x_0) = m_0$. Se la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio, si dice che la funzione è derivabile.

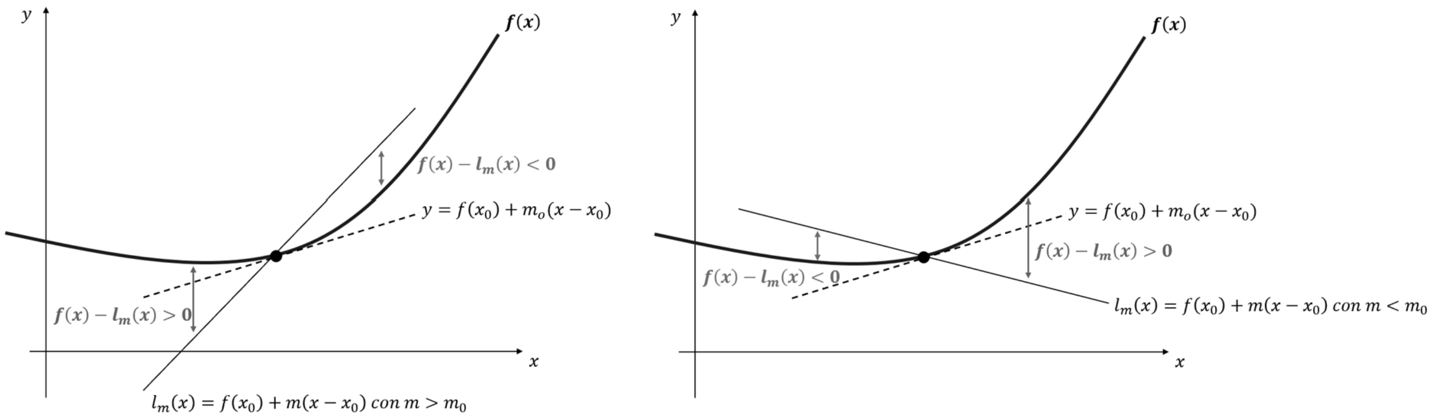

Figura 1.3: Definizione di derivata in un punto x_0

Qui e nel seguito, con "x opportunamente vicino a x_0" si intende che x appartiene ad un intervallo aperto, $]a, b[$, con $x_0 \in]a, b[$. Si userà spesso il termine *vicino* a x_0 per indicare un opportuno intervallo aperto contenente il punto x_0. Inoltre, quando si dirà che un certo cambiamento di segno avviene a sinistra o a destra di x_0, si intenderà sempre che tale cambiamento avviene in un intervallo aperto avente il punto come estremo destro o sinistro.

[2] $f(x) - l_m(x) < 0$ a sinistra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0, e $f(x) - l_m(x) > 0$ a destra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0.

[3] $f(x) - l_m(x) > 0$ a sinistra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0, e $f(x) - l_m(x) < 0$ a destra di x_0, per ogni x opportunamente vicino a x_0.

Osservazione 1. La definizione 1.1.1 determina in maniera univoca $f'(x_0)$: se la derivata di f nel punto x_0 esiste allora è unica. Infatti, supponiamo che m_0 e M_0, $m_0 \neq M_0$, soddisfino entrambi la definizione 1.1.1. Essendo $m_0 \neq M_0$, si supponga per esempio $m_0 < M_0$. Sia $m = \frac{m_0+M_0}{2}$, quindi $m_0 < m < M_0$. Per la prima condizione della definizione 1.1.1 si ha che, per $m < M_0$, $f(x) - [f(x_0 + m(x - x_0))]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Per la seconda condizione della definizione 1.1.1 si ha che, per $m > m_0$, $f(x) - [f(x_0 + m(x - x_0))]$ cambia segno da positivo a negativo in x_0. Si ha quindi un assurdo e si conclude che $m_0 = M_0$.

Osservazione 2. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti, come si vede in figura 1.4, valgono le seguenti:

i) se $m > 1$ allora $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo

ii) se $-1 < m < 1$ nessuna retta passante per $(0, 0)$ attraversa il grafico della funzione

iii) se $m < -1$ allora $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo

Quindi non esiste m_0 che soddisfa la definizione di derivata di f in $x_0 = 0$.

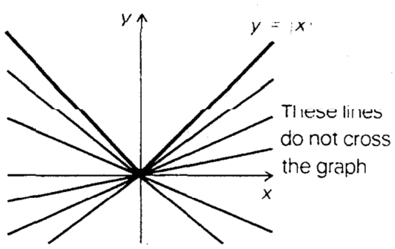

Figura 1.4: Grafico di $f(x) = |x|$ [4]

Osservazione 3. Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & se\ x \neq 0, \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

[4] Figura S-1-2, p.195 di [7].

Valutiamo la derivata in $x_0 = 0$ sfruttando la definizione 1.1.1. La funzione è compresa tra le parabole $y = x^2$ e $y = -x^2$. Per ogni $m < 0$ la retta $l_m(x) = mx$ si trova al di sopra di $y = x^2$ a sinistra di x_0, quindi al di sopra di f. Inoltre, $l_m(x) = mx$ si trova al di sotto di $y = -x^2$ a destra di $x_0 = 0$, quindi al di sotto di f. Analogamente si discute il caso con $m > 0$. Si conclude quindi che $f'(0) = 0$.

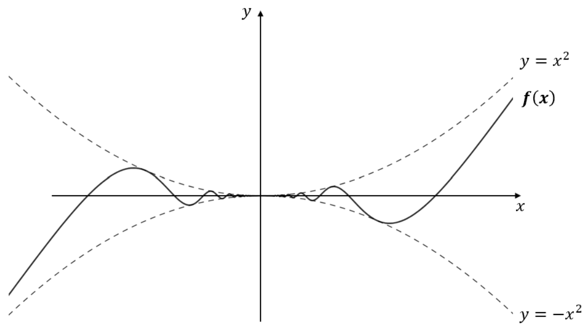

Figura 1.5: Grafico di f.

Riprendendo la discussione sull'approssimazione della velocità istantanea di un corpo in movimento, si può dire che se $f(x)$ rappresenta la posizione di un corpo al tempo x ed f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)$ è la velocità istantanea dell'oggetto al tempo x_0.

Definizione 1.1.2. *Sia f una funzione derivabile in x_0.*
La retta $y = f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$ passante per $(x_0, f(x_0))$ con pendenza $f'(x_0)$ si chiama retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

1.1.3 Esempi

Si procede ora utilizzando la definizione di derivata per mostrare come tale definizione consenta di determinare le derivate di alcune semplici funzioni in un punto assegnato.

Esempio 1: Si calcoli la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$.
Per mettere in evidenza il punto $x_0 = 3$, conviene scrivere

$$f(x) = (3 + (x - 3))^2.$$

Si deve valutare il cambio di segno di $f(x)-l_m(x) = f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]$ in $x_0 = 3$ al variare di m.

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = (3 + (x - 3))^2 - [9 + m(x - 3)] =$$

$$(9 + (x - 3)^2 + 6(x - 3)) - 9 - m(x - 3) =$$

$$= (x - 3)^2 + (x - 3)(6 - m)$$

- Se $6 - m > 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo in $x_0 = 3$.
- Se $6 - m < 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo in $x_0 = 3$.

Si conclude che la derivata di $f(x)$ in $x_0 = 3$ è $f'(x_0) = m_0 = 6$.

Esempio 2: Sia $c \in \mathbb{R}$, si calcoli la derivata di $f(x) = c$ in x_0.
Si deve valutare il cambio di segno di $f(x)-l_m(x) = f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]$ in x_0 al variare di m.

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = c - c - m(x - x_0) = -m(x - x_0)$$

- Se $m > 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0.
- Se $m < 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0.

Si conclude che $\forall x_0$ la derivata di $f(x)$ in x_0 è $f'(x_0) = m_0 = 0$.
Sostituendo x_0 con x, si può dire che la funzione $f'(x) = 0$ è la funzione derivata di f, nel senso che associa a ogni x la derivata di f in quel punto.

Esempio 3: Si calcoli la derivata di $f(x) = ax^2 + bx + c$ in x_0, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Per mettere in evidenza il punto x_0, conviene scrivere

$$f(x) = a(x_0 + (x - x_0))^2 + b(x_0 + (x - x_0)) + c.$$

Si deve valutare il cambio di segno di $f(x)-l_m(x) = f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]$ in x_0 al variare di m.

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = a(x_0 + (x - x_0))^2 + b(x_0 + (x - x_0)) + c+$$

$$-[ax_0^2 + bx_0 + c + m(x - x_0)] =$$

$$a(x_0^2+(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0))+bx_0+b(x-x_0)+c-ax_0^2-bx_0-c-m(x-x_0) =$$

$$= a(x - x_0)^2 + (x - x_0)(2ax_0 + b - m)$$

- Se $2ax_0 + b - m > 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0.
- Se $2ax_0 + b - m < 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0.

Si conclude che $\forall x_0$ la derivata di $f(x)$ in x_0 è $f'(x_0) = m_0 = 2ax_0 + b$. Sostituendo x_0 con x, si può dire che la funzione $f'(x) = 2ax+b$ è la funzione derivata di f.

Esempio 4: Si calcoli la derivata di $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
Per quanto visto nell'*Esempio 3*, la derivata di f in x_0 è $f'(x_0) = 2 \cdot 3x_0 - 2 = 6x_0 - 2$. Sostituendo x_0 con x si ottiene la funzione derivata $f'(x) = 6x - 2$.

Esempio 5: Si calcoli la derivata di $f(x) = bx + c$ in x_0, con $b, c \in \mathbb{R}$.
Per l'esempio precedente, con $a = 0$ si ottiene che $\forall x_0$ la derivata di $f(x)$ in x_0 è $f'(x_0) = m_0 = b$.
Sostituendo x_0 con x, si può dire che la funzione $f'(x) = b$ è la funzione derivata di f.

Esempio 6: Si calcoli la derivata di $f(x) = x^n$ in x_0, $\forall n \geq 1$.
Per mettere in evidenza il punto x_0, conviene scrivere $f(x) = (x_0+(x-x_0))^n$ che usando il binomio di Newton diventa $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k$.

Si deve valutare il cambio di segno di $f(x)-l_m(x) = f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]$ in x_0 al variare di m.

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k - [x_0^n + m(x - x_0)] =$$

$$= x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1}(x - x_0) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k - x_0^n - m(x - x_0) =$$

$$= nx_0^{n-1}(x - x_0) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k - m(x - x_0) =$$

$$= (nx_0^{n-1} - m)(x - x_0) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k$$

Considerando che, quando x è molto vicino a x_0, i termini $(x-x_0)^k$ d'ordine $k > 1$ sono trascurabili rispetto al termine lineare $(x - x_0)$, possiamo affermare che il cambio di segno di $f(x) - l_m(x)$ è determinato unicamente dal coefficiente $nx_0^{n-1} - m$.

- Se $nx_0^{n-1} - m > 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0.
- Se $nx_0^{n-1} - m < 0 \implies$ la funzione $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0.

Si conclude che $\forall x_0$ la derivata di $f(x)$ in x_0 è $f'(x_0) = m_0 = nx_0^{n-1}$. Sostituendo x_0 con x, si può dire che la funzione $f'(x) = nx^{n-1}$ è la funzione derivata di f.

1.1.4 La nozione di punto di transizione

In questa sezione, si riformula la definizione di derivata usando il concetto di punto di transizione. Nei capitoli successivi si utilizzerano entrambe le formulazioni. Inoltre, il concetto di punto di transizione si rivelerà di fondamentale importanza quando si tratterà il tema dell'integrazione.

Definizione 1.1.3. *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, x_0 è detto punto di transizione tra A e B se esiste un intervallo aperto I contenente x_0 tale che:*

1. *Se $x \in I$ e $x < x_0$ allora $x \in A$ e $x \notin B$*
2. *Se $x \in I$ e $x > x_0$ allora $x \in B$ e $x \notin A$*

Osservazione 4. Il punto x_0 potrebbe appartenere ad A oppure a B o non appartenere a nessuno dei due. Inoltre potrebbero esistere più punti di transizione per due insiemi A e B e in quel caso si può parlare di intervallo di transizione. La figura 1.6 di seguito riporta alcuni esempi.

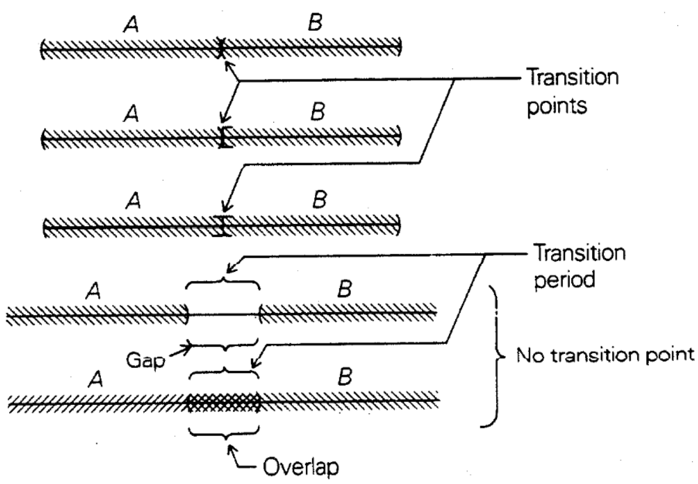

Figura 1.6: Punti di transizione [5]

Si riportano di seguito alcuni esempi di punti di transizione tra insiemi.
Esempio 1: Sia A l'insieme dei punti in cui una funzione f monotona crescente assume valori positivi e B l'insieme dei punti in cui f assume valori negativi. Sia x_0 il punto in cui $f(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di transizione tra A e B.
Esempio 2: L'area del cerchio si può considerare come punto di transizione tra l'insieme delle aree dei poligoni inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni circoscritti.

[5] Figura 2-1, p.18 di [7].

Definizione 1.1.4. *Sia f una funzione derivabile in x_0, indichiamo con A_f l'insieme dei numeri reali m tali per cui la funzione $f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Indichiamo con B_f l'insieme dei numeri reali m tali per cui la funzione $f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0.*

Definizione 1.1.5 (Derivata di una funzione in un punto). *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contenente x_0. Il punto di transizione tra gli insiemi A_f e B_f (se esiste) è la derivata della funzione f in x_0.*

1.2 Analisi della definizione di derivata

In questa sezione si analizza la definizione di derivata proposta da Marsden e Weinstein, mettendone in luce alcuni aspetti sia concettuali sia storici. L'approccio adottato dagli autori si discosta dalla formulazione classica basata sul concetto di limite del rapporto incrementale, recuperando invece un metodo di origine antica: il *metodo di esaustione*. Successivamente, si evidenzia come tale definizione fosse in realtà già presente negli scritti di Peano, il quale, a sua volta, faceva riferimento agli studi di MacLaurin.

1.2.1 Il metodo di esaustione

Nella definizione di derivata proposta da Marsden e Weinstein l'uso del concetto di limite è sostituito dal metodo di esaustione.
Il metodo di esaustione risale alla matematica dell'antica Grecia, la sua introduzione è attribuita ad Eudosso di Cnido (406-355 a.C.) e successivamente fu perfezionato da Archimede (287 circa-212 a.C.). Tale metodo fu usato per calcolare le aree e i volumi di alcune figure geometriche. L'idea fondamentale su cui si basa è quella di approssimare l'area o il volume di una figura costruendo una successione di figure che, per eccesso e per difetto, tendono ad avvicinarsi all'area o al volume da determinare. Questo metodo ha rappresentato un passo cruciale nella storia della matematica, gettando le basi

per lo sviluppo dei concetti di infinitesimo e limite. Osserviamo che si tratta di un'idea, legata all'operazione di misura, che appare in diversi contesti: i tagli di Dedekind (che possono essere interpretati come il tentativo di misurare una grandezza scalare), la misura interna ed esterna di un insieme, la somma integrale inferiore (e superiore), ...
Uno degli esempi più celebri di applicazione del metodo di esaustione è la quadratura del cerchio, ossia il calcolo dell'area del cerchio, effettuato da Archimede nella sua opera *Misura del cerchio*. Archimede approssimò l'area del cerchio inscrivendo e circoscrivendo poligoni regolari con un numero crescente di lati. Aumentando progressivamente il numero di lati, le aree dei poligoni si avvicinano sempre di più a quella del cerchio permettendo di ottenere una stima piuttosto precisa del valore di π. In particolare, Archimede ottenne questa stima utilizzando un poligono di 96 lati.
Sfruttando la definizione 1.1.3 (di punto di transizione), l'area del cerchio può essere considerata il punto di transizione tra l'insieme delle aree dei poligoni inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni circoscritti.

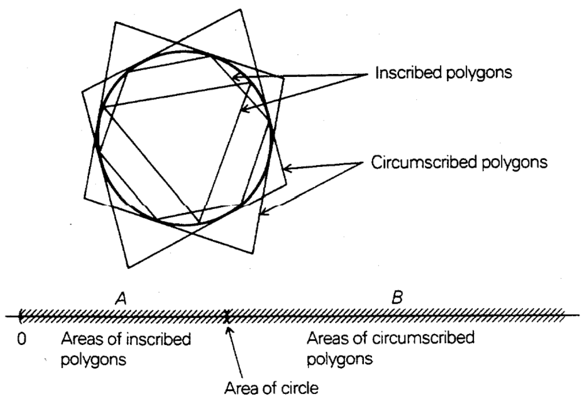

Figura 1.7: Area del cerchio[6]

Per la definizione 1.1.5, anche la derivata di una funzione in un punto è il punto di transizione tra due insiemi. Le rette con coefficiente angolare maggiore di quello della retta tangente alla funzione nel punto svolgono lo

[6]Figura 2-2, p.18 di [7].

stesso ruolo dei poligoni circoscritti nel problema di Archimede: approssimano per eccesso la derivata della funzione nel punto. Le rette con coefficiente angolare minore di quello della retta tangente svolgono lo stesso ruolo dei poligoni inscritti al cerchio.
Nell'introduzione al testo, Marsden e Weinstein dichiarano:

> *"To apply the method of exhaustion to differentiation, we replace the relation of inclusion between figures by the relation of overtaking."*[7]

Cioè il metodo di esaustione è applicato attraverso un'analogia: la relazione di inclusione tra figure geometriche è sostituita dalla relazione di "sorpasso" (o "overtaking") tra funzioni. È necessario precisare che per funzione f che sorpassa un'altra funzione g in un punto x_0 si intende che $f(x) - g(x)$ cambia segno da negativo a positivo nel punto x_0, ed è in questi termini che viene utilizzata dagli autori nella definizione 1.1.1 di derivata.
Il metodo di esaustione e il concetto di punto di transizione diventano elementi fondanti per la nuova proposta di calcolo differenziale. Per questo motivo, gli autori chiamano il loro approccio al calcolo differenziale *transition approach.*

1.2.2 Il contributo di MacLaurin e Peano

Uno dei celebri trattati italiani di analisi infinitesimale è il *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* [3] di Angelo Genocchi (1817-1889) e Giuseppe Peano (1858-1932), di cui Giuseppe Peano scrisse, tra l'altro (si veda [5]), *Prefazione* e *Annotazioni.* Nell'annotazione 32, Peano ricorda che MacLaurin, nel secondo libro del suo trattato sulle flussioni del 1742 [6], fornisce una definizione di derivata in termini puramente geometrici senza fare uso di limiti. Secondo MacLaurin la *flussione* (la *derivata*, in termini moderni) di una quantità rispetto ad un'altra quantità è: *"any measures of their respective rates of increase or decrease while they vary, or flow, together".*
Peano riproduce il ragionamento usato da MacLaurin e afferma:

[7] Preview For The Instructor, p. ix [7].

"Questo modo di concepire la derivata è perfettamente rigoroso; in esso non entra esplicitamente il concetto di limite." [8]

MacLaurin utilizza l'espressione: *"a quantity increases by differences that are always greater than the successive differences by which another quantity increases."*
Quindi siano $f(x)$ e $g(x)$ le quantità con $f(x_0) = g(x_0)$ e $h > 0$, allora si hanno:

i) $f(x_0 + h) - f(x_0) > g(x_0 + h) - g(x_0)$

ii) $f(x_0) - f(x_0 - h) > g(x_0) - g(x_0 - h)$

da cui segue $f(x_0 - h) - g(x_0 - h) < 0$ e $f(x_0 + h) - g(x_0 + h) > 0$.
Peano traduce la trattazione di MacLaurin dicendo che una funzione $f(x)$ cresce più rapidamente di un'altra funzione $g(x)$, o che $g(x)$ cresce meno rapidamente di $f(x)$, nel punto $x = x_0$ se la differenza $f(x) - g(x)$ è crescente in $x = x_0$. Notiamo che entrambe le formulazioni appena fornite, sia quella di MacLaurin che di Peano, sono equivalenti alla relazione di "overtaking" data da Marsden e Weinstein.
Peano prosegue definendo la derivata di una funzione in un punto come segue:

"Diremo che $f(x)$ ha, per $x = x_0$, per derivata $f'(x_0)$, se, per $x = x_0$, $f(x)$ cresce meno rapidamente d'ogni funzione lineare avente una derivata maggiore di $f'(x_0)$, e cresce più rapidamente d'ogni funzione lineare avente derivata minore di $f'(x_0)$." [9]

Questa definizione di Peano, che non è nient'altro che una riformulazione del procedimento di MacLaurin, equivale esattamente alla definizione di derivata fornita da Marsden e Weinstein.

[8] p. XII di *Annotazioni* di [3].
[9] p. XIII di *Annotazioni* di [3].

1.3 Funzioni che si annullano rapidamente

Calcolare la derivata di una funzione in un punto sfruttando la definizione 1.1.1 di derivata potrebbe essere abbastanza complicato. In questa sezione, si introducono le usuali regole di derivazione che permettono di semplificare il calcolo delle derivate. Per dimostrare tali regole si introduce una nuova classe di funzioni.

Definizione 1.3.1. *Un funzione $r(x)$ si annulla rapidamente in un punto x_0 se sia la funzione che la sua derivata prima si annullano nel punto, in simboli: $r(x_0) = 0$ e $r'(x_0) = 0$.*

Gli autori Marsden e Weinstein propongono il seguente teorema che caratterizza le funzioni che si annullano rapidamente.

Teorema 1.3.1. *Sia r una funzione tale che $r(x_0) = 0$ allora $r(x)$ si annulla rapidamente in x_0 se e solo se $\forall \epsilon > 0$ $\exists I$ intervallo aperto contenente x_0 tale che $\forall x \in I, x \neq x_0$ si ha $|r(x)| < \epsilon|x - x_0|$.*

Nel teorema appena enunciato si sta implicitamente usando il concetto di limite. Infatti la condizione, $\forall \epsilon > 0$ $\exists I$ intervallo aperto contenente x_0 tale che $\forall x \in I, x \neq x_0$ si ha $|r(x)| < \epsilon|x - x_0|$, equivale a dire che il rapporto $\frac{|r(x)|}{|x-x_0|}$ tende a 0 in un intorno di x_0. Gli autori utilizzano questo teorema per dimostrare i risultati che seguono sulle funzioni che si annullano rapidamente. Si prosegue la trattazione dimostrando gli stessi risultati senza utilizzare il teorema 1.3.1.

Verifichiamo che l'insieme delle funzioni che si annullano rapidamente in un punto è uno spazio vettoriale.

Teorema 1.3.2. *Siano $r(x)$, $r_1(x)$ e $r_2(x)$ funzioni che si annullano rapidamente in x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora valgono le seguenti:*

1. *Il prodotto di una costante per una funzione che si annulla rapidamente in un punto si annulla rapidamente in quel punto.*
   In simboli: $\alpha r(x)$ si annulla rapidamente in x_0

2. *La somma di due funzioni che si annullano rapidamente in un punto si annulla rapidamente in quel punto.*
   In simboli: $r_1(x) + r_2(x)$ *si annulla rapidamente in* x_0.

Dimostrazione. Verifichiamo che vale la (1): si ha che $\alpha r(x_0) = 0$.
Resta da verificare che $(\alpha r)'(x_0) = 0$. Supponiamo che

$$\alpha > 0.$$

Se $m > 0$, allora la retta di equazione

$$y = \frac{m}{\alpha}(x - x_0)$$

si trova al di sotto di r a sinistra di x_0 e al di sopra di r a destra di x_0, cioè

$$r(x) - \frac{m}{\alpha}(x - x_0)$$

cambia segno da positivo a negativo in un intorno I di x_0. Allora visto che α è positivo, lo stesso cambiamento di segno nello stesso intorno I avviene per $\alpha r(x) - m(x - x_0)$. Quindi, $(\alpha r)'(x_0) \leq 0$ (qualora esista).

Se $m < 0$, allora la retta di equazione

$$y = \frac{m}{\alpha}(x - x_0)$$

si trova al di sopra di r a sinistra di x_0 e al di sotto di r a destra di x_0, cioè

$$r(x) - \frac{m}{\alpha}(x - x_0)$$

cambia segno da negativo a positivo in un intorno I di x_0. Allora visto che α è positivo, lo stesso cambiamento di segno nello stesso intorno I avviene per $\alpha r(x) - m(x - x_0)$. Quindi, $(\alpha r)'(x_0) = 0$.
Il caso di $\alpha < 0$ si tratta in modo analogo tenendo conto di uno "scambio" di pendenze: se una retta $y = \frac{m}{\alpha}(x - x_0)$ si trova al sotto di r a sinistra di x_0 e al di sopra di r a destra di x_0, allora la retta $y = m(x - x_0)$ si trova al sopra di αr a sinistra di x_0 e al sotto di r a destra di x_0 (la moltiplicazione per $\alpha < 0$ cambia l'orientazione dell'asse delle y.)

Verifichiamo che vale la (2): visto che sia $r_1(x)$ sia $r_2(x)$ si annullano in x_0 si ha che anche $r_1(x) + r_2(x)$ si annulla in x_0. Sia $m > 0$ visto che $r_1'(x_0) = r_2'(x_0) = 0$ ed $m/2 > 0$, la retta di equazione

$$y = \frac{m}{2}(x - x_0)$$

si trova al di sotto di r_1 e r_2 a sinistra di x_0 e al di sopra di r_1 e r_2 a destra di x_0, cioè

$$r_k(x) - \frac{m}{2}(x - x_0), \qquad (k = 1, 2),$$

cambia segno da positivo a negativo in un intorno I_k di x_0. Allora anche la funzione

$$r_1(x) + r_2(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da positivo a negativo in $I_1 \cap I_2$. Quindi, $(r_1 + r_2)'(x_0) \leq 0$ (qualora esista).

Il caso $m < 0$ si tratta seguendo le stesse linee di ragionamento: la retta di equazione

$$y = \frac{m}{2}(x - x_0)$$

si trova al di sopra di r_1 e r_2 a sinistra di x_0 e al di sotto di r_1 e r_2 a destra di x_0, cioè

$$r_k(x) - \frac{m}{2}(x - x_0), \qquad (k = 1, 2),$$

cambia segno da negativo a positivo in un intorno I_k di x_0. Allora anche la funzione

$$r_1(x) + r_2(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da negativo a positivo in $I_1 \cap I_2$.
Quindi si conclude che $(r_1 + r_2)'(x_0) = 0$. $\square$

Consideriamo una funzione f derivabile in un punto x_0. Il comportamento della funzione in un intorno di x_0 può essere approssimato dalla retta tangente nel punto. Per valori di x vicini ad x_0, la funzione f è approssimata dalla retta $f(x_0) + m_0(x - x_0)$, dove $m_0 = f'(x_0)$. Tuttavia, se la funzione non è lineare, questa approssimazione non è perfetta e presenta sempre un piccolo errore. L'errore, che indichiamo con $r(x)$, non è nient'altro che la differenza tra f e la sua approssimazione lineare

$$r(x) = f(x) - [f(x_0) + m_0(x - x_0)]$$

Più ci si avvicina ad x_0 e più l'errore diventa trascurabile, rendendo l'approssimazione più accurata. Il seguente teorema afferma che una funzione è derivabile in x_0 se e solo se l'errore dell'approssimazione lineare è una funzione che si annulla rapidamente in x_0.

Teorema 1.3.3. *Una funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esiste m_0 tale che la funzione $r(x) = f(x) - [f(x_0) + m_0(x - x_0)]$ si annulla rapidamente in x_0 (per l'implicazione "$\Longrightarrow$" si sceglie $m_0 = f'(x_0)$).*

Osservazione 5. Il teorema 1.3.3 si può enunciare come segue: f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m_0$ se e solo se $f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) + r(x)$ dove $r(x)$ è una funzione che si annulla rapidamente in x_0.

Dimostrazione. (*dim* $\Rightarrow$) Sia f derivabile in x_0 e sia

$$r(x) := f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Si vuole mostrare che r si annulla rapidamente in x_0. Si ha che

$$r(x_0) = f(x_0) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)] = 0.$$

Resta da verificare che $r'(x_0) = 0$. Visto che, per ipotesi, f è derivabile in x_0, per ogni $m > 0$, si ha che

$$f(x) - [f(x_0) + (m + f'(x_0))(x - x_0)]$$

cambia segno da positivo a negativo in x_0, cioè

$$r(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da positivo a negativo in x_0, per ogni $m > 0$. Quindi, $r'(x_0) \leq 0$ (qualora esista).

Sia ora $m < 0$ dalla derivabilità di f, si ottiene che

$$f(x) - [f(x_0) + (m + f'(x_0))(x - x_0)]$$

cambia segno da negativo a positivo in x_0, cioè

$$r(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da negativo a positivo in x_0, per ogni $m < 0$. Si conclude quindi che $r'(x_0)$ esiste e $r'(x_0) = 0$, cioè la funzione r si annulla rapidamente.

($dim \Leftarrow$) Verifichiamo che se la funzione

$$r(x) = f(x) - [f(x_0) + m_0(x - x_0)]$$

si annulla rapidamente in x_0 allora la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0. Infatti, dal fatto che $r'(x_0) = 0$, si deduce che per ogni $m > 0$, la funzione $r(x) - [m(x - x_0)]$ cambia segno da positivo a negativo in x_0, cioè cambia segno da positivo a negativo la funzione

$$f(x) - [f(x_0) + (m + m_0)(x - x_0)]$$

per ogni $m > 0$, quindi $f'(x_0) \leq m_0$ (qualora esista). Analogamente, per ogni $m < 0$ la funzione $r(x) - [m(x - x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0, cioè cambia segno da negativo a positivo la funzione

$$f(x) - [f(x_0) + (m + m_0)(x - x_0)]$$

per ogni $m < 0$. Si conclude che $f'(x_0)$ esiste e $f'(x_0) = m_0$.

$\square$

1.3.1 Regole di derivazione

Le funzioni che si annullano rapidamente, il teorema 1.3.2 e il teorema 1.3.3 permettono di dimostrare le principali regole di derivazione.

Teorema 1.3.4 (Regola di derivazione della Somma). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x_0, allora anche $f(x)+g(x)$ è derivabile in x_0 e la sua derivata in x_0 è*

$$f'(x_0)+g'(x_0)$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.3

$$r_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

$$r_2(x)=g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)$$

si annullano rapidamente in x_0.
Per il teorema 1.3.2

$$r(x)=r_1(x)+r_2(x)=[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]-[f'(x_0)+g'(x_0)](x-x_0)$$

si annulla rapidamente in x_0 e per il teorema 1.3.3 $f(x)+g(x)$ è derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)+g'(x_0)$. □

Si è appena dimostrato che la funzione $f(x)+g(x)$ e la retta $f(x_0)+g(x_0)-[f'(x_0)+g'(x_0)](x-x_0)$, passante per $(x_0, f(x_0)+g(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)+g'(x_0)$, differiscono per una funzione r che si annulla rapidamente. Allo stesso modo si dimostrano le altre regole di derivazione.

Teorema 1.3.5 (Regola di derivazione prodotto per costante). *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora anche $\alpha f(x)$ è derivabile in x_0 e la sua derivata in x_0 è*

$$\alpha f'(x_0)$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.3 $r(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ si annulla rapidamente in x_0.
Per il teorema 1.3.2 $\alpha r(x)=\alpha f(x)-\alpha f(x_0)-\alpha f'(x_0)(x-x_0)$ si annulla rapidamente in x_0 e per il teorema 1.3.3 $\alpha f(x)$ è derivabile in x_0 con derivata $\alpha f'(x_0)$. □

Per dimostrare la regola di derivazione del prodotto è necessario il seguente lemma.

Lemma 1.3.6. *Il prodotto di una funzione derivabile in un punto con una funzione che si annulla rapidamente in quel punto si annulla rapidamente (in quel punto).*

Dimostrazione. Sia $r(x)$ la funzione che si annulla rapidamente in x_0 e $f(x)$ derivabile in x_0. Dimostriamo che il prodotto $r(x)f(x)$ si annulla rapidamente in x_0. Osserviamo che, per il teorema 1.3.3 si ha che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

con r_1 che si annulla rapidamente in x_0. Quindi, visto che la somma di funzioni che si annullano rapidamente in un punto si annulla rapidamente in un punto, basta verifica che

$$g(x) := r(x)(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \qquad \text{e} \qquad h(x) := r(x)r_1(x)$$

si annullano rapidamente in x_0. L'annullamento in x_0 è di verifica immediata. Verifichiamo che

$$g'(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad h'(x_0) = 0.$$

Consideriamo prima g. Si ha che

$$g(x) = \underbrace{f(x_0)r(x)}_{=:g_1(x)} + \underbrace{f'(x_0)r(x)(x - x_0)}_{=:g_2(x)}.$$

Osserviamo che la funzione g_1 si annulla rapidamente in x_0 (è il prodotto di una funzione che si annulla rapidamente con una costante) lo stesso vale per la funzione $f'(x_0)r(x)$. Resta quindi da verificare che il prodotto di $x - x_0$ con una funzione che si annulla rapidamente in x_0 si annulla rapidamente in x_0. Denotiamo una tale funzione che si annulla rapidamente ancora con la lettera r e sia

$$g_2(x) = r(x)(x - x_0).$$

Si ha che

$$g_2(x_0) = \underbrace{r(x_0)}_{=0}\underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0} = 0.$$

Verifichiamo che $g_2'(x_0)$ esiste e $g_2'(x_0) = 0$.

Sia $m > 0$ e consideriamo

$$g_2(x) - m(x - x_0) = (r(x) - m)(x - x_0)$$

visto che $x - x_0$ cambia segno da negativo a positivo in x_0, se $r(x) - m$ fosse negativo, si potrebbe concludere che

$$g_2(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da positivo a negativo in x_0, cioè $g_2'(x_0) \leq 0$ (qualora esista). Verifichiamo che $r(x) - m$ è negativo vicino ad x_0. Visto che $r'(x_0) = 0$, si ha

i) $r(x) - m[x - x_0]$ cambia segno da positivo a negativo in x_0,

ii) $r(x) + m[x - x_0]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0.

Allora, da (i) segue che, per $x > x_0$ vicino ad x_0,

$$r(x) < m\underbrace{[x - x_0]}_{>0} \implies r(x) - m < m(x - x_0) - m < 0 \iff x - x_0 < 1.$$

Inoltre, usando (ii), si ha che, per $x < x_0$,

$$r(x) < -m\underbrace{[x - x_0]}_{<0} \implies r(x) - m < -m[x - x_0] - m < 0 \iff x_0 - x < 1.$$

Quindi, vicino a x_0, $r(x) - m < 0$ e $g_2'(x_0) \leq 0$ (qualora esista).
Sia ora $m < 0$ e consideriamo

$$g_2(x) - m(x - x_0) = (r(x) - m)(x - x_0)$$

visto che $x - x_0$ cambia segno da negativo a positivo in x_0, se $r(x) - m$ fosse positivo, si potrebbe concludere che

$$g_2(x) - m(x - x_0)$$

cambia segno da negativo a positivo vicino ad x_0, cioè $g_2'(x_0)$ esisterebbe e sarebbe 0. Per completare la dimostrazione resta quindi da verificare che $r(x) - m > 0$ vicino ad x_0. Visto che $r'(x_0) = 0$, si ha

i) $r(x) - m[x - x_0]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0,

ii) $r(x) + m[x - x_0]$ cambia segno da positivo a negativo in x_0.

Allora, da (i) segue che, per $x > x_0$ vicino ad x_0,

$$r(x) > m\underbrace{[x - x_0]}_{>0} \implies r(x) - m > m(x - x_0) - m > 0 \iff x - x_0 < 1.$$

Inoltre, usando (ii), si ha che, per $x < x_0$,

$$r(x) > -m\underbrace{[x - x_0]}_{<0} \implies r(x) - m > -m[x - x_0] - m > 0 \iff x_0 - x < 1.$$

Quindi, vicino ad x_0, $r(x) - m > 0$ e $g'(x_0) = 0$.

Consideriamo ora $h(x) = r(x)r_1(x)$. Sia $m > 0$ e consideriamo

$$h(x) - m(x - x_0) = r(x)r_1(x) - m(x - x_0)$$

Visto che $r'(x_0) = 0$, si ha

i) $r(x) - m[x - x_0]$ cambia segno da positivo a negativo in x_0,

ii) $r(x) + m[x - x_0]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0.

Allora, da (i) segue che, per $x < x_0$ vicino ad x_0, se $r_1(x) \geq 0$

$$r(x)r_1(x) > m(x - x_0)r_1(x) \implies$$

$$r(x)r_1(x) - m(x - x_0) > m\underbrace{(x - x_0)}_{<0}(r_1(x) - 1) > 0 \iff 0 \leq r_1(x) < 1.$$

Inoltre, usando (ii), si ha che, per $x < x_0$ vicino ad x_0, se $r_1(x) \leq 0$

$$r(x)r_1(x) > -m(x - x_0)r_1(x) \implies$$

$$r(x)r_1(x) - m(x-x_0) > -m\underbrace{(x-x_0)}_{<0}(r_1(x)+1) > 0 \iff -1 < r_1(x) \leq 0.$$

Da (i) segue che, per $x > x_0$ vicino ad x_0, se $r_1(x) \geq 0$

$$r(x)r_1(x) < m(x-x_0)r_1(x) \implies$$

$$r(x)r_1(x) - m(x-x_0) < m\underbrace{(x-x_0)}_{>0}(r_1(x)-1) < 0 \iff 0 \leq r_1(x) < 1.$$

Inoltre, usando (ii), si ha che, per $x > x_0$ vicino ad x_0, se $r_1(x) \leq 0$

$$r(x)r_1(x) < -m(x-x_0)r_1(x) \implies$$

$$r(x)r_1(x) - m(x-x_0) < -m\underbrace{(x-x_0)}_{<0}(r_1(x)+1) < 0 \iff -1 < r_1(x) \leq 0.$$

Quindi, vicino ad x_0, $r(x)r_1(x) - m(x-x_0)$ cambia segno da positivo a negativo e $h'(x_0) \leq 0$ (qualora esista).
Da una analoga discussione se $m < 0$, segue che vicino ad x_0, $r(x)r_1(x) - m(x-x_0)$ cambia segno da negativo a positivo quindi $h'(x_0) = 0$. □

Teorema 1.3.7 (Regola di derivazione del prodotto). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x_0, allora anche $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e la sua derivata in x_0 è*

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Dimostrazione. Siano $r_1(x)$ e $r_2(x)$ funzioni che si annullano rapidamente in x_0 allora per il teorema 1.3.3

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_1(x)$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + r_2(x)$$

Da cui

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)](x-x_0) + \\ + f(x_0)r_2(x) + r_1(x)g(x_0) + f'(x_0)g'(x_0)(x-x_0)^2 + \\ + f'(x_0)(x-x_0)r_2(x) + r_1(x)g'(x_0)(x-x_0) + r_1(x)r_2(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Essendo $(x-x_0)^2$, $r_1(x)$ e $r_2(x)$ funzioni che si annullano rapidamente in x_0 allora per il teorema 1.3.2 ed il lemma 1.3.6 si hanno

i) $f(x_0)r_2(x) + r_1(x)g(x_0)$ si annulla rapidamente in x_0

ii) $f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0)^2$ si annulla rapidamente in x_0

iii) $f'(x_0)(x - x_0)r_2(x) + r_1(x)g'(x_0)(x - x_0)$ si annulla rapidamente in x_0

iv) $r_1(x)r_2(x)$ si annulla rapidamente in x_0

Per cui sia $r(x)$ che si annulla rapidamente in x_0 si ha

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)](x - x_0) + r(x)$$

Per il teorema 1.3.3 segue la tesi. □

Derivare un quoziente $f(x)/g(x)$ equivale a derivare il prodotto $f \cdot 1/g$. Tuttavia, è necessario conoscere la regola di derivazione del reciproco $1/g(x)$. Per questo motivo è utile dimostrare il seguente lemma.

Lemma 1.3.8. *Il prodotto di una funzione limitata con una funzione che si annulla rapidamente in un punto si annulla rapidamente in quel punto.*

Dimostrazione. Sia r una funzione che si annulla rapidamente in un punto x_0 e sia f una funzione limitata, cioè

$$|f(x)| \leq M$$

vicino a x_0 (per un qualche $M > 0$). Possiamo supporre $M = 1$, infatti

$$r(x)f(x) = \underbrace{Mr(x)}_{\text{si annulla rapid.}} \overbrace{\frac{f(x)}{M}}^{\in[-1,1]}.$$

Si ha

$$(rf)(x_0) = \underbrace{r(x_0)}_{=0} f(x_0) = 0.$$

Inoltre sia $m > 0$, allora

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) \leq |r(x)| \underbrace{|f(x)|}_{\leq 1} - m(x - x_0) \leq |r(x)| - m(x - x_0)$$

ma per $x > x_0$ vicino a x_0 si ha $r(x) < \epsilon(x - x_0)$ e $r(x) > -\epsilon(x - x_0)$, cioè

$$|r(x)| < \epsilon(x - x_0)$$

quindi, scelto $\epsilon < m$, si ottiene

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) \leq |r(x)| - m(x - x_0) < \underbrace{(\epsilon - m)}_{<0} \overbrace{(x - x_0)}^{>0} < 0.$$

Invece, per $x < x_0$ vicino a x_0 si ha

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) \geq -|r(x)| - m(x - x_0),$$

quindi scelto $\epsilon - m < 0$, si ha

$$-|r(x)| - m(x - x_0) \geq \epsilon(x - x_0) - m(x - x_0) = \underbrace{(\epsilon - m)}_{<0} \overbrace{(x - x_0)}^{<0} > 0,$$

cioè $r(x)f(x) - m(x - x_0)$ vicino a x_0 cambia segno da positivo a negativo (ossia, visto che $m > 0$ è scelto a piacere, si ha che $(rf)'(x_0) \leq 0$, qualora esista).

Sia ora $m < 0$, allora per $x > x_0$ (vicino a x_0) si ha

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) \geq |r(x)| - m(x - x_0) \geq (-\epsilon - m) \underbrace{(x - x_0)}_{>0},$$

quindi per $-\epsilon - m > 0$ si conclude che

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) > 0,$$

mentre, per $x < x_0$ (vicino a x_0), si ha che

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) \leq -\epsilon(x - x_0) - m(x - x_0) = (-m - \epsilon) \underbrace{(x - x_0)}_{<0}$$

che è negativo se $-m - \epsilon > 0$, cioè

$$r(x)f(x) - m(x - x_0) < 0,$$

per $x < x_0$ vicino a x_0. Quindi $(rf)'(x_0) = 0$. $\square$

Teorema 1.3.9 (Regola di derivazione del reciproco)**.** *Sia $g(x)$ derivabile in x_0 e $g(x_0) \neq 0$. Allora vicino a x_0, $g(x)$ non si annulla mai e $1/g$ è derivabile in x_0 con derivata*

$$\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Dimostrazione. Sia $g(x_0) > 0$ [10], e $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + r(x)$ con r funzione che si annulla rapidamente. Consideriamo

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = \frac{-g'(x_0)(x - x_0) - r(x)}{g(x)g(x_0)} = \tag{1.2}$$

$$= \frac{-g'(x_0)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} - \underbrace{\frac{r(x)}{g(x)g(x_0)}}_{:=r_1(x)} \tag{1.3}$$

Definiamo $r_1(x) := \frac{r(x)}{g(x)g(x_0)}$ e dimostriamo che si annulla rapidamente in x_0. Vicino a x_0 la funzione $g(x)$ risulta compresa tra la retta $y = g(x_0) + (g'(x_0) + 1)(x - x_0)$ e la retta $y = g(x_0) + (g'(x_0) - 1)(x - x_0)$. Quindi per $x > x_0$, vicino a x_0, si ha

$$g(x) \geq g(x_0) + (g'(x_0) - 1)(x - x_0) > g(x_0)/2$$

(basta infatti che sia $g(x_0)/2 + (g'(x_0) - 1)(x - x_0) > 0$, per la quale è sufficiente prendere x abbastanza vicino ad x_0).
Analogamente, per $x < x_0$, vicino a x_0 si ha

$$g(x) \geq g(x_0) + (g'(x_0) + 1) > g(x_0)/2.$$

(basta infatti che sia $g(x_0)/2 + (g'(x_0) + 1)(x - x_0) > 0$, per la quale è sufficiente prendere x abbastanza vicino ad x_0).
Allora, per ogni x vicino a x_0, si ha

$$0 < \frac{1}{2}g(x_0) < g(x) \implies 0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{g(x_0)}.$$

cioè la funzione $1/g(x)$ è limitata.
Allora per la limitatezza di $1/g(x)$, per il lemma 1.3.8 e il teorema 1.3.2 si

[10] Applicando analoga discussione alla funzione $-g$ si dimostra il teorema nel caso $g(x_0) < 0$.

ha che r_1 si annulla rapidamente in x_0.

Sommiamo e sottraiamo il termine $\frac{g'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)^2}$ in (1.3) ottenendo

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}=\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)}(x-x_0)\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right)-\frac{g'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)^2}-r_1(x)$$

da cui sfruttando la derivabilità di g si ottiene

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}=$$

$$=\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)}(x-x_0)\left(\frac{g(x_0)(x-x_0)+r(x)}{g(x)g(x_0)}\right)-\frac{g'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)^2}-r_1(x)=$$
$$=-\underbrace{\frac{1}{g(x)}\frac{g'(x_0)^2}{g(x_0)^2}(x-x_0)^2}_{:=r_2(x)}-\underbrace{\frac{1}{g(x)}\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}r(x)(x-x_0)}_{:=r_3(x)}-\frac{g'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)^2}-r_1(x)$$

Dato che $(x-x_0)$ e $(x-x_0)^2$ sono funzioni che si annullano rapidamente in x_0, allora per la limitatezza di $1/g(x)$, per il lemma 1.3.8 e il teorema 1.3.2 si ha che r_2 e r_3 si annullano rapidamente in x_0. Inoltre somma di funzioni che si annullano rapidamente si annulla rapidamente, quindi $R(x) := r_1(x)+r_2(x)+r_3(x)$ si annulla rapidamente in x_0 e

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}(x-x_0)+R(x)$$

da cui per il teorema 1.3.3 segue la tesi.

□

Corollario 1.3.10 (Regola di derivazione del quoziente). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x_0 e $g(x_0)\neq 0$ allora anche la funzione $f(x)/g(x)$ è derivabile in x_0 e la sua derivata in x_0 è*

$$\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dimostrazione. Applicando la regola di derivazione del prodotto, teorema 1.3.7, a

$$f\cdot\frac{1}{g}$$

si ottiene la tesi. □

Osservazione 6. Le regole di derivazione proposte si possono estendere a regole di derivazione per funzioni. Sostituendo x_0 con x nei precedenti risultati otteniamo le regole per la derivazione di somma, prodotto, prodotto per costante e quoziente di funzioni.

Capitolo 2

Calcolo integrale senza limiti

In questo capitolo si inroduce il concetto di integrale definito seguendo l'approccio proposto nel testo *Calculus Unlimited* di J. Marsden e A. Weinstein [7], ovvero sfruttando la nozione di punto di transizione tra due insiemi. Si dimostrano poi le proprietà fondamentali dell'integrale. Una sezione è dedicata alla proposta di V.A. Rokhlin per il calcolo differenziale senza l'uso del concetto di limite. Infine si affronta il teorema fondamentale del calcolo integrale. La dimostrazione di quest'ultimo risultato fa uso del teorema del valor medio dimostrato nel capitolo 3 della Parte II.

2.1 Definizione di integrale definito

Iniziamo definendo l'integrale di una funzione costante a tratti, ovvero di una funzione che assume valori costanti su ciascun intervallo di una partizione finita del dominio. Per partizione di un intervallo $[a, b]$ si intende una sequenza di punti $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ tali che $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Su ogni sottointervallo (t_{i-1}, t_i) una funzione costante a tratti assume valore costante, mentre agli estremi del sottointervallo può assumere qualsiasi valore.

Definizione 2.1.1 (**Definizione di integrale di funzione costante a tratti**). *Sia f una funzione costante a tratti sull'intervallo $[a, b]$ e sia $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$ tale che $f(t) = k_i$, $\forall t \in$*

(t_{i-1}, t_i). *La somma*

$$k_1(t_1 - t_0) + k_2(t_2 - t_1) + \cdots + k_n(t_n - t_{n-1})$$

si chiama integrale di f *su* $[a, b]$ *e si indica con* $\int_a^b f(t)dt$.
La funzione $f(t)$ *si dice funzione integranda, i punti* a *e* b *si dicono estremi di integrazione.*

Osservazione 7. L'integrale di una funzione costante a tratti è l'area compresa tra l'asse orizzontale ed il grafico, ovvero la somma di aree di rettangoli di dimensioni k_i e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i$$

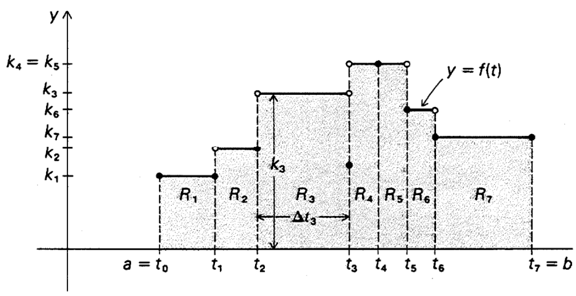

Figura 2.1: Integrale di una funzione costante a tratti [1]

Osserviamo che in corrispondenza di $k_i < 0$ si ha una misura dell'area negativa.

Il seguente risultato dimostra che la definizione di integrale appena fornita non dipende dalla partizione.

Teorema 2.1.1. *Sia* f *una funzione costante a tratti sull'intervallo* $[a, b]$ *e siano* $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ *e* $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$ *due partizioni dell'intervallo* $[a, b]$ *tali che* $f(t) = k_i$ $\forall t \in (t_{i-1}, t_i)$ *e* $f(t) = j_i$ $\forall t \in (s_{i-1}, s_i)$ *allora*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{m} j_i \Delta s_i$$

[1] Figura 11-4, p.150 di [7].

Dimostrazione. Si supponga che la partizione s sia ottenuta dalla partizione $t = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ aggiungendo un punto t_* tra t_l e t_{l+1}. Quindi $m = n + 1$ e $(s_0, s_1, \ldots, s_m) = (t_0, t_1, \ldots, t_l, t_*, t_{l+1}, \ldots, t_n)$.
Allora si ha

$$\sum_{i=1}^{m} j_i \Delta s_i = j_1(s_1 - s_0) + ... + j_{l+1}(s_{l+1} - s_l) + j_{l+2}(s_{l+2} - s_{l+1}) + ... + j_{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$

Considerando la somma nella nuova partizione t si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} j_i \Delta s_i = k_1(t_1 - t_0) + ... + k_l(t_* - t_l) + k_{l+1}(t_{l+1} - t_*) + ... + k_n(t_n - t_{n-1})$$

Notando che $k_l(t_* - t_l) + k_{l+1}(t_{l+1} - t_*) = k_{l+1}(t_* - t_l + t_{l+1} - t_*) = k_{l+1}(t_{l+1} - t_l)$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} j_i \Delta s_i = k_1(t_1 - t_0) + ... + k_{l+1}(t_{l+1} - t_l) + ... + k_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i$$

Nel caso generale siano $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ e $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$ due generiche partizioni dell'intervallo $[a, b]$, è possibile trovare una partizione $(u_0, u_1, \ldots, u_{n^*})$ che contiene tutti i punti $(t_0, t_1, \ldots, t_n, s_0, ...s_n)$ ordinati e senza ripetizioni. La partizione u è ottenuta dalla partizione t (o dalla partizione s) aggiungendo di volta in volta un punto. Nel caso particolare analizzato prima, è noto che

$$\sum_{i=1}^{m} j_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n^*} K_i \Delta u_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n^*} K_i \Delta u_i$$

da cui segue la tesi. □

Per estendere la definizione di integrale ad una generica funzione diamo le definizioni di *somma inferiore* e *superiore*.

Definizione 2.1.2 (Somma inferiore). *Sia f una funzione definita su $[a, b]$ e g una qualsiasi funzione costante a tratti su $[a, b]$ tale che $g(t) \leq f(t)$ $\forall t \in (a, b)$. Si definisce $\int_a^b g(t)dt$ somma inferiore di f su (a, b).*

Definizione 2.1.3 (Somma superiore). *Sia f una funzione definita su $[a,b]$ e h una qualsiasi funzione costante a tratti su $[a,b]$ tale che $h(t) \geq f(t)$ $\forall t \in (a,b)$. Si definisce $\int_a^b h(t)dt$ somma superiore di f su (a,b).*

Definizione 2.1.4 (Definizione di integrale definito). *Sia f una funzione definita in (a,b), e siano L_f e U_f insiemi rispettivamente delle somme inferiori e superiori per f. Se esiste un punto di transizione da L_f a U_f allora si dice che f è integrabile in $[a,b]$. Il punto di transizione si chiama integrale di f in $[a,b]$ e si denota con*

$$\int_a^b f(t)dt$$

La variabile t è detta variabile di integrazione ed i punti a e b si dicono estremi di integrazione.

Osservazione 8. Se tra gli insiemi L_f e U_f vi sono più punti di transizione, o nessun punto di transizione la funzione f non è integrabile. Nella figura 2.2 sono descritti tutti i casi possibili:

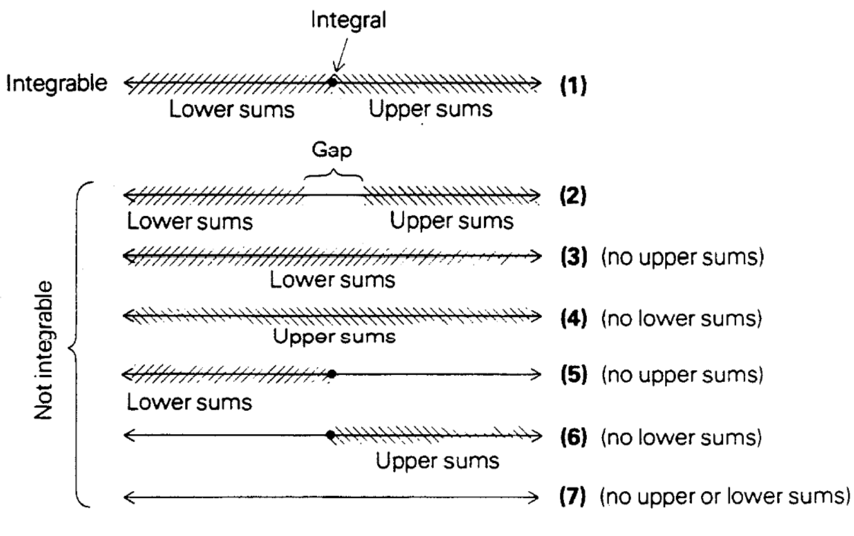

Figura 2.2: Integrale come punto di transizione [2]

[2]Figura 11-8, p.157 di [7].

Come nella definizione di derivata, anche nella definizione di integrale definito si usa il metodo di esaustione definendo esplicitamente l'integrale come punto di transizione tra due insiemi.

Osservazione 9. Valgono le seguenti:

1. Ogni somma inferiore di una funzione f è minore o uguale ad ogni somma superiore.

2. Ogni valore minore di una somma inferiore è una somma inferiore.

3. Ogni valore maggiore di una somma superiore è una somma superiore.

Dimostriamo il secondo punto, analogamente si dimostra anche il terzo punto. Sia $g(t) = k_1$ per ogni $t \in (a, b)$, con $k_1 \in \mathbb{R}$, tale che $\int_a^b g(t)dt = k_1(b-a)$ sia una somma inferiore della funzione $f(t)$ su $[a, b]$. Sia c_1 un qualsiasi valore reale positivo minore di $\int_a^b g(t)dt$. La funzione costante $h(t) = c_1/(b-a)$ per ogni $t \in (a, b)$ ha $\int_a^b h(t)dt = c$, quindi il valore c_1 è una somma inferiore. Sia invece (t_0, t_1, t_2) una partizione di $[a, b]$, siano $k_1, k_1 \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} k_1, & \text{se } t_0 < t < t_1 \\ k_2, & \text{se } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

e c_2 un valore reale positivo minore di $\int_a^b g(t)dt$. Allora la funzione

$$h(t) = \begin{cases} k_1 - \frac{1}{t_1-t_0}\left[\int_a^b g(t)dt - c_2\right], & \text{se } t_0 < t < t_1 \\ k_2, & \text{se } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

è tale che

$$\int_a^b h(t)dt = k_1(t_1 - t_0) - \int_a^b g(t)dt + c_2 + k_2(t_2 - t_1) = c_2,$$

quindi c_2 è una somma inferiore. Lo stesso procedimento si può estendere ad una partizione $(t_0, ..., t_n)$ dell'intervallo $[a, b]$.

2.1.1 Proprietà dell'integrale definito

Teorema 2.1.2. *Valgono le seguenti:*

1. *Se $a < b < c$ e f integrabile in $[a, b]$ e $[b, c]$, allora f integrabile in $[a, c]$ e vale*
$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$
2. *Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e $f(t) \leq h(t)$ $\forall t \in (a, b)$ allora*
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt$$
3. *Se $f(t) = k$ $\forall t \in (a, b)$ allora*
$$\int_a^b f(t)dt = k(b - a)$$

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = I$ è punto di transizione tra le somme inferiori e superiori di f in $[a, c]$ [3].
Sia $m < I$, allora consideriamo $m = m_1 + m_2$ con $m_1 < \int_a^b f(t)dt$ e $m_2 < \int_b^c f(t)dt$ da cui m_1, m_2 sono somme inferiori di f rispettivamente in $[a, b]$ e $[b, c]$. Allora esiste una funzione costante a tratti g_1 su $[a, b]$ con $g_1(t) < f(t)$ $\forall t \in (a, b)$ tale che $\int_a^b g_1(t)dt = m_1$, e una funzione costante a tratti g_2 su $[a, b]$ con $g_2(t) < f(t)$ $\forall t \in (b, c)$ tale che $\int_b^c g_2(t)dt = m_2$.
Si consideri ora la funzione $g(t)$
$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & \text{se } a \leq t < b \\ g_2(t), & \text{se } b < t \leq c \end{cases}$$
Si tratta di una funzione costante a tratti in $[a, c]$ con $g(t) < f(t)$ $\forall t \in (a, c)$, inoltre vale
$$\int_a^c g(t)dt = \int_a^b g_1(t)dt + \int_b^c g_2(t)dt = m_1 + m_2 = m$$

[3] Analogamente si dimostra il secondo punto. Sfruttando la definizione di funzione costante a tratti e di integrale si dimostra il terzo punto.

ovvero m è somma inferiore per f su $[a, b]$.
Analogamente si dimostra che ogni $M > I$ è somma superiore per f su $[a, b]$ da cui I è integrale di f su $[a, c]$.

$\square$

2.2 Rokhlin e l'approccio *ingenuamente assiomatico*

Vladimir Abramovich Rokhlin (1919-1984) fu un matematico sovietico noto per i suoi contributi alla teoria dei sistemi dinamici e alla topologia. Tuttavia, di suo interesse erano anche i problemi legati all'insegnamento della matematica. Il 20 novembre 1981, durante una conferenza tenuta alla Leningrad Mathematical Society, Rokhlin affrontò proprio il tema dell'insegnamento della matematica, concentrandosi in particolare sul concetto di limite. Della conferenza sono disponibili alcuni frammenti, tradotti e basati su registrazioni audio realizzate su nastro, mentre la parte iniziale della registrazione è andata perduta.
Nel suo intervento, il matematico osservava come agli studenti del suo tempo fossero forniti modelli, schemi ed esempi da imitare, senza coinvolgerli nella risoluzione di problemi. Inoltre, sottolineava il basso livello di conoscenza delle scienze esatte, come la matematica e la fisica, anche tra la popolazione adulta, accompagnato da una diffusa riluttanza verso lo studio delle discipline scientifiche. Questo problema, secondo Rokhlin, non era esclusivamente russo, ma di portata internazionale.
Uno dei punti centrali del suo seminario riguardava la didattica della matematica per i "non matematici", termine con cui si riferiva a coloro che non intendevano lavorare nel campo della matematica, ma che studiavano la disciplina per le sue applicazioni. In particolare, si riferiva agli studenti delle università tecniche, paragonabili agli attuali corsi di ingegneria, e agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado. Secondo il matematico sovietico, il principale difetto dei corsi di matematica di quel tempo era che nessuno di essi fosse stato realmente adattato ai non matematici. In particolare, si soffermava sul concetto di limite, evidenziando quanto rappresentasse un ostacolo per molti studenti. A tal proposito, affermava:

"[..] i limiti costituiscono la parte più difficile da capire e, cosa più

interessante, assolutamente non necessaria. Tutto il calcolo differenziale, tutto il calcolo integrale e, in generale, tutta la matematica classica, per non parlare della matematica finita, possono essere presentati perfettamente senza limiti. Non sono affatto necessari lì. Sono un fenomeno assolutamente estraneo, una materia estranea che è stata introdotta in quest'area da coloro che cercavano di costruire una base adeguata per l'analisi. [...] Dal punto di vista di una persona che non è un matematico professionista, tutte queste cose esistono, non richiedono una definizione, richiedono un calcolo e devono essere pronte per le applicazioni. Questo è ciò di cui c'è bisogno. [...] Voglio solo dire quanto segue: oggigiorno, la teoria dei limiti non funziona come uno strumento per introdurre le nozioni di base del calcolo, ma come una barriera molto alta e difficile che bisogna scavalcare per capire qualcosa." [9]

Il matematico sosteneva che il metodo di esaustione fosse uno strumento utile per eliminare la teoria dei limiti dal calcolo differenziale. A tale proposito proponeva la sostituzione della teoria dei limiti con il seguente assioma.

Assioma 0: Se un numero non negativo è minore di qualsiasi numero positivo allora è zero.

Probabilmente l'assioma appena enunciato può essere utilizzato per eliminare il concetto di limite dal calcolo differenziale. Tuttavia, durante la conferenza questo aspetto non è stato approfondito e, inoltre, non è stato lasciato nulla di scritto in merito. Nel corso del seminario, Rokhlin si soffermò invece sulla definizione di integrale e su come fosse possibile eliminare il concetto di limite dal calcolo integrale con un approccio che definiva *ingenuamente assiomatico*. Infatti, l'idea di base consisteva nel definire le nozioni di interesse tramite assiomi intuitivi, che difficilmente gli studenti avrebbero messo in discussione. L'insegnamento dell'integrale poteva quindi essere fondato sui seguenti assiomi riguardanti l'area:

1. Siano A e A' due figure tali che A è contenuta in A', allora l'area della figura A' non è maggiore dell'area della figura A.

2. Siano A e A' due figure, e A'' la figura ottenuta dall'unione di A e A' senza punti interni in comune, allora l'area di A'' è la somma delle aree di A e A'.

3. Sia A una figura, allora una qualsiasi rotazione, traslazione o riflessione nel piano lascia invariata l'area della figura.

4. L'area del quadrato di lato unitario è 1.

A partire da questi assiomi, si può definire l'integrale di una funzione come l'area sottesa dal suo grafico in un certo intervallo e poi proseguire enunciando i seguenti assiomi.
Assioma 1: L'integrale di una funzione costante è il prodotto della costante per la lunghezza dell'intervallo di integrazione.
Assioma 2: Siano f, g due funzioni con $f \leq g$ allora l'integrale di f non maggiore dell'integrale di g nell'intervallo di integrazione.
Assioma 3: Se si integra una funzione su un intervallo che è l'unione di due intervalli più piccoli non sovrapposti, allora l'integrale corrispondente sarà la somma degli integrali su queste parti più piccole.

Le proprietà dell'integrale possono essere proposte come assiomi e non necessitano di alcuna dimostrazione perchè considerate proprietà estremamente intuitive riguardanti il concetto di area. Successivamente, il matematico suggeriva di costruire le somme inferiori e superiori e di enunciare, sotto forma di proprietà, il fatto che l'integrale sia l'unico valore compreso tra tutte le somme inferiori e tutte le somme superiori. L'unicità dell'integrale può non essere dimostrata, sempre nell'ottica che l'unicità di un'area possa essere intuitivamente accettata. Infine, durante la conferenza, fu proposto il seguente ragionamento:

"Se vuoi dimostrare una certa identità, diciamo, tra due integrali o tra un integrale e un numero, noti semplicemente che entrambi i numeri che vuoi siano uguali sono racchiusi tra la somma superiore e quella inferiore. Quindi sono uguali, perchè la differenza tra la somma superiore e quella

inferiore può essere resa inferiore a qualsiasi numero positivo prendendo una partizione appropriata. Questa differenza è non negativa e quindi è zero [4]*.”* [9]

Quindi l'assioma 0 ha un ruolo centrale nella dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale, perchè ne permette la dimostrazione eliminando il concetto di limite. Questo tipo di approccio è lo stesso della dimostrazione proposta da Marsden e Weinstein che verrà presentata nella sezione successiva.
Nella maggior parte dei libri di testo, soprattutto quelli per la scuola secondaria di secondo grado, l'insegnamento dell'integrale segue un ordine preciso: si introduce inizialmente l'integrale indefinito, definendolo come un operatore di antiderivazione, per poi passare all'integrale definito e al suo significato geometrico di area sottesa al grafico della funzione. L'idea di Rokhlin, Marsden e Weinstein è invece quella di invertire questo ordine, e attraverso il teorema fondamentale del calcolo integrale mettere in evidenza che l'integrale indefinito è un operatore di antiderivazione. Tuttavia, rispetto alla trattazione di Weinstein e Marsden, Rokhlin propone un approccio più intuitivo, in cui le proprietà dell'integrale sono assunte come assiomi piuttosto che dimostrate formalmente.

Sulla base della conferenza di Rokhlin [9], di seguito si sviluppa in termini matematici la proposta riguardante la definizione di integrale definito.

Definizione 2.2.1 (**Definizione di integrale definito**). *Sia f una funzione definita in (a, b), si definisce integrale di f in (a, b) l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione nell'intervallo (a, b) e si indica con*

$$\int_a^b f(x)dx$$

La variabile x è detta variabile di integrazione e l'intervallo (a, b) intervallo di integrazione.

[4] Si riferisce all'assioma 0.

Osservazione 10. In questo contesto una funzione f è considerata integrabile in (a, b) se il grafico di f in (a, b) sottende un'area finita. Non è necessario specificare che l'area sia finita, poiché è assolutamente intuitivo concepire l'area come qualcosa di limitato e finito.

Per l'integrale appena definito valgono i seguenti assiomi.
Assioma 1: Se $f(x) = k$, per ogni $x \in (a, b)$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = k(b - a)$$

Assioma 2: Siano f, g due funzioni con $f(x) \leq h(x)$, per ogni $x \in (a, b)$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$$

Assioma 3: Sia f definita in (a, c) e $a < b < c$ allora

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Dagli assiomi 1 e 3 segue che l'integrale di una funzione f costante a tratti sull'intervallo (a, b) tale che $f(x) = k_i \ \forall x \in (t_{i-1}, t_i)$ e $(t_0, t_1, .., t_n)$ partizione di (a, b) è

$$\int_a^b f(x)dx = k_1(t_1 - t_0) + k_2(t_2 - t_1) + \cdots + k_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i$$

Definizione 2.2.2 (Somma inferiore). *Sia f una funzione definita su $[a, b]$ e g una qualsiasi funzione costante a tratti su $[a, b]$ tale che $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Si definisce $\int_a^b g(x)dx$ somma inferiore di f su (a, b).*

Definizione 2.2.3 (Somma superiore). *Sia f una funzione definita su $[a, b]$ e h una qualsiasi funzione costante a tratti su $[a, b]$ tale che $h(x) \geq f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Si definisce $\int_a^b h(x)dt$ somma superiore di f su (a, b).*

Proposizione 2.2.1. *L'integrale di una funzione f in (a, b) è l'unico valore compreso tra tutte le somme integrali inferiori e superiori.*

Osservazione 11. L'unicità dell'integrale segue dall'unicità dell'area di una figura. Non è necessario dimostrarne l'unicità, poiché anche in questo caso è assolutamente intuitivo concepire il valore dell'area di una figura come qualcosa di univocamente determinato.

Dimostrazione. Per ogni g funzione costante a tratti su $[a, b]$ tale che $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in (a, b)$, dall'assioma 2 segue che

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Per ogni h funzione costante a tratti su $[a, b]$ tale che $h(x) \geq f(x)\ \forall x \in (a, b)$, dall'assioma 2 segue che

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \tag{2.2}$$

Allora da (2.1) e (2.2) si ha

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$$

da cui la tesi. □

2.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Calcolare anche un semplice integrale come $\int_a^b tdt$ sfruttando la sola definizione di integrale potrebbe non essere immediato. Il teorema fondamentale del calcolo integrale risolve questo problema riducendo il problema dell'integrazione ad un problema di antiderivazione. Ricordiamo che la dimostrazione fa uso del teorema del valor medio 3.4.6, dimostrato nel capitolo 3 della Parte II.

Teorema 2.3.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia F una funzione derivabile in $[a, b]$ e F' integrabile in $[a, b]$ allora*

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

Osservazione 12. In altre parole se f è integrabile in $[a, b]$ e $F' = f$ ovvero F è un antiderivata di f allora

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Inoltre, F_1 e F_2, due antiderivate di f in $[a, b]$, differiscono per una costante, ovvero $F_1(t) = F_2(t) + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Allora si ha $F_1(b) - F_1(a) = [F_2(b) + C] - [F_2(a) + C] = F_2(b) - F_2(a)$.

Dimostrazione. Sia $f(x) = F'(x)$ e g una funzione costante a tratti in $[a, b]$ tale che $g(t) \leq f(t)$ $\forall t \in (a, b)$. Sia $(t_0, t_1, ..., t_n)$ una partizione di $[a, b]$ tale che $g(t) = k_i$ $\forall t \in (t_{i-1}, t_i)$ allora si ha

$$k_i = g(t) \leq f(t) = F'(t) \implies k_i \leq F'(t) \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i)$$

Per il teorema del valore medio si ha

$$k_i \leq \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \implies k_i \Delta t_i \leq F(t_i) - F(t_{i-1}) \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i)$$

Passando alle somme su i

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^{n} [F(t_i) - F(t_{i-1})] \implies \int_a^b g(t)dt \leq F(b) - F(a),$$

ovvero che per ogni L_f somma inferiore di f su $[a, b]$ vale

$$L_f \leq F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

In maniera del tutto analoga considerando una funzione $h(t)$ costante a tratti tale che $f(t) \leq h(t)$ $\forall t \in (a, b)$ si mostra

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b h(t)dt$$

ovvero che per ogni U_f somma superiore di f su $[a, b]$ vale

$$U_f \geq F(b) - F(a). \tag{2.4}$$

Da (2.3), (2.4) e dall'ipotesi di integrabilità di $f = F'$ segue la tesi. □

Osservazione 13. Assumendo che $L_f \leq F(b) - F(a) \leq U_f$ mostriamo che, argomentando come suggerito da Rokhlin, si può "dimostrare" il teorema fondamentale del calcolo integrale. Infatti, per la proposizione 2.2.1 si ha anche $L_f \leq \int_a^b f(x)dx \leq U_f$. Dato che la differenza tra somma superiore e inferiore è non negativa e può essere resa inferiore a qualsiasi numero positivo, per l'assioma 0 è zero. Quindi $F(b) - F(a)$ e $\int_a^b f(x)dx$ sono uguali.

Si procede ora con un esempio di applicazione diretta del teorema fondamentale del calcolo integrale.
Esempio: Si calcoli $\int_a^b t^2 dt$
Una antiderivata di t^2 è $F(t) = t^3/3$ quindi

$$\int_a^b t^2 dt = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Una versione alternativa del teorema fondamentale del calcolo integrale è data dal seguente teorema.

Teorema 2.3.2. *Sia f una funzione continua nell'intervallo I e sia $a \in I$. Sia F funzione definita sull'intervallo I come $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ allora*

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)ds = f(t)$$

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che la funzione

$$r(t) = F(t) - F(t_0) - f(t_0)(t - t_0) = \int_a^t f(s)ds - \int_a^{t_0} f(s)ds - f(t_0)(t - t_0)$$

si annulla rapidamente in t_0.
Banalmente $r(t_0) = 0$, dimostriamo che $r'(t_0) = 0$. Essendo f continua in t_0 allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un intervallo I contenente t_0 tale che

$$f(t_0) - \epsilon/2 < f(s) < f(t_0) + \epsilon/2 \quad \forall s \in I.$$

Per $t > t_0$ in I si hanno:

1. $r(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds - f(t_0)(t - t_0)$

2. $(f(t_0) - \frac{\epsilon}{2})(t - t_0) \le \int_{t_0}^{t} f(s)ds \le (f(t_0) + \frac{\epsilon}{2})(t - t_0)$

Sottraendo $f(t_0)(t - t_0)$ ad entrambi i membri in (2) si ottiene

$$-\frac{\epsilon}{2}(t - t_0) \le r(t) \le \frac{\epsilon}{2}(t - t_0). \tag{2.5}$$

Per $t < t_0$ in I si hanno:

1. $r(t) = -\int_{t}^{t_0} f(s)ds - f(t_0)(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds - f(t_0)(t - t_0)$

2. $(f(t_0) - \frac{\epsilon}{2})(t - t_0) \le \int_{t}^{t_0} f(s)ds \le (f(t_0) + \frac{\epsilon}{2})(t_0 - t)$

Sottraendo $f(t_0)(t_0 - t)$ ad entrambi i membri la (2) diventa

$$-\frac{\epsilon}{2}(t_0 - t) \le -r(t) \le \frac{\epsilon}{2}(t_0 - t). \tag{2.6}$$

Da (2.5) e (2.6) si ha che $\forall t \in I$ con $t \neq t_0$ vale

$$|r(t)| \le \frac{\epsilon}{2}|t - t_0| < \epsilon|t - t_0|,$$

da cui

i) $r(t) + \epsilon(t - t_0)$ cambia segno da negativo a positivo in t_0,

ii) $r(t) - \epsilon(t - t_0)$ cambia segno da positivo a negativo in t_0,

ovvero $r'(t_0) = 0$. $\square$

Osservazione 14. Nella dimostrazione del teorema si usa solo la continuità della funzione f in t_0 allora il teorema si può generalizzare come segue:
Teorema: *Sia f una funzione integrabile nell'intervallo I e continua in $t_0 \in (a, b)$. Sia $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ allora F derivabile in t_0 e $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Parte II

Capitolo 3

Continuità senza limiti

In questo capitolo si affronta il tema della continuità senza ricorrere al concetto di limite. Si espongono i teoremi fondamentali tra cui la relazione tra derivabilità e continuità, e il teorema dei valori intermedi. Per la dimostrazione di quest'ultimo si richiama l'assioma di completezza. Una sezione è poi dedicata al teorema di Weierstrass. Infine, si dimostra l'integrabilità delle funzioni continue.

3.1 Definizione di funzione continua

Spesso si introducono le funzioni continue come funzioni il cui grafico si traccia "senza staccare la penna dal foglio". Questa idea è piuttosto intuitiva e utile per introdurre l'argomento, ma va interpretata con cautela. Cominciamo dando la definizione di continuità in un punto.

Definizione 3.1.1 (Funzione continua in un punto). *Sia f una funzione con dominio D, si dice che f è continua in un punto x_0 del suo dominio se:*

1. *per ogni $c_1 \in \mathbb{R}$ con $c_1 < f(x_0)$ si ha $c_1 < f(x)$ per x vicino a x_0.*

2. *per ogni $c_2 \in \mathbb{R}$ con $c_2 > f(x_0)$ si ha $c_2 > f(x)$ per x vicino a x_0.*

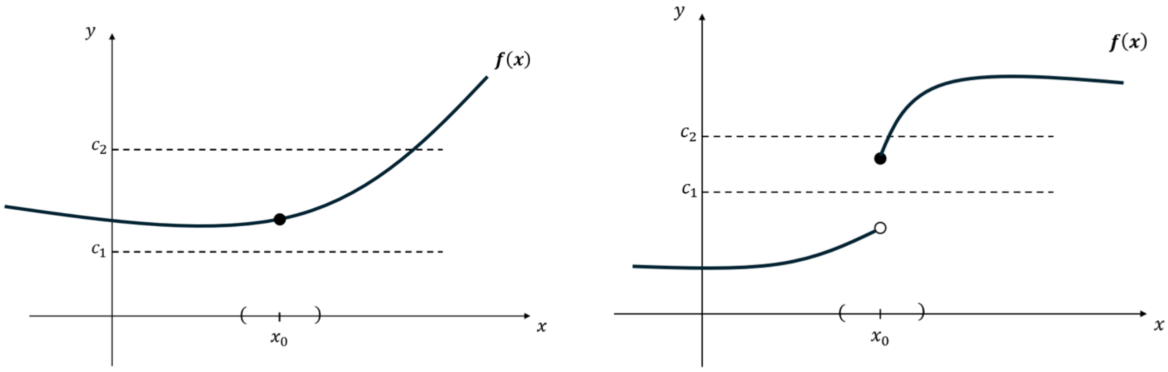

Figura 3.1: A destra una funzione continua in x_0, a sinistra una funzione discontinua in x_0

Osservazione 15. In altri termini una funzione è continua in x_0 se considerati qualsiasi c_1 e c_2 attorno a $f(x_0)$, il grafico della funzione f è contenuto nella regione delimitata dalle rette $y = c_1$ e $y = c_2$, per x vicino a x_0.

È evidente che la definizione 3.1.1 sia equivalente a quella classica di funzione continua in un punto, ma evita l'uso esplicito del limite. Si procede ora utilizzando la precedente definizione in alcuni esempi.
Esempio 1: Valutiamo la continuità della funzione $f(x)$ in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

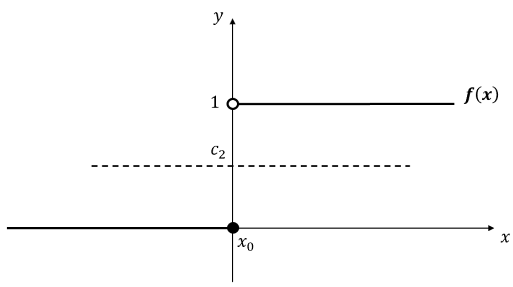

Figura 3.2: Grafico di f.

Sia $c_2 = 1/2$, allora per ogni $x > x_0$ vicino a x_0 si ha $f(x) = 1 > c_2$. Non è soddisfatta la seconda condizione della definizione 3.1.1, quindi $f(x)$ è discontinua in x_0.

Esempio 2: Valutiamo la continuità della funzione $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

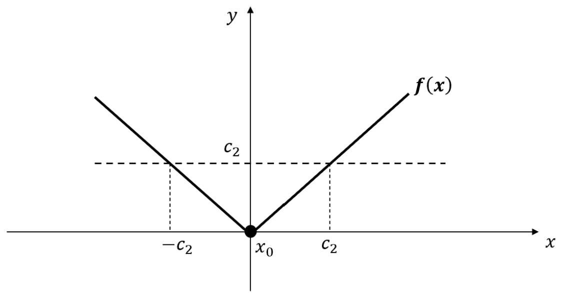

Figura 3.3: Grafico di f.

Per ogni $c_1 < f(x_0) = 0$ si ha $c_1 < f(x)$ in tutto il dominio. Per ogni $c_2 > f(x_0) = 0$, si ha $c_2 > f(x)$ per ogni $x \in (-c_2, c_2)$. Si conclude che la funzione è continua in $x_0 = 0$.

Definizione 3.1.2 (**Funzione continua**). *Se f è continua in ogni punto del suo dominio si dice che f è continua.*

La funzione dell'*Esempio 1* non è continua perchè presenta una discontinuità in $x_0 = 0$. La funzione dell'*Esempio 2* è continua perchè per ogni x_0, $\forall \epsilon > 0$ presi $c_1 = f(x_0) - \epsilon$ e $c_2 = f(x_0) + \epsilon$ la funzione è compresa tra le rette $y = c_1$ e $y = c_2$ vicino a x_0.

È importante sottolineare che nella definizione appena fornita si parla di continuità nei punti appartenenti al dominio di una funzione.
Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ il cui dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.
Per ogni punto $x_0 \in D$ è immediato verificare la continuità della funzione.
Per la definizione 3.1.2 non è necessario valutare la continuità in $x_0 = 0$, non appartenente al dominio, per concludere che la funzione è continua. Quindi

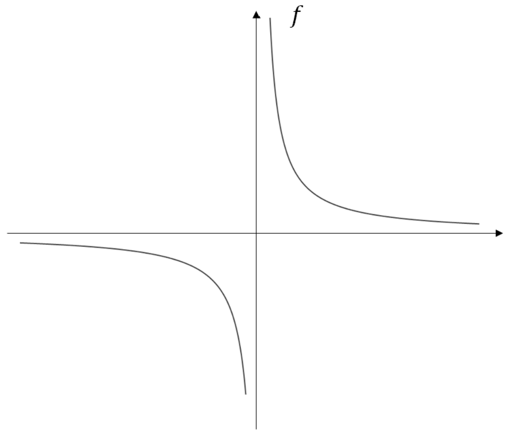

Figura 3.4: Grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$.

la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua, ma è evidente che non si possa tracciare il suo grafico senza staccare la penna dal foglio.
Questa idea intuitiva di funzione continua, non si presta a descrivere la continuità di funzioni definite su insiemi che non siano intervalli.
In accordo con la definizione 3.1.2 è più corretto affermare che una funzione è continua se non "salta" nel suo dominio.

Osservazione 16. Si verifica facilmente che le funzioni costanti, la funzione identità $f(x) = x$, le funzioni esponenziali b^x e le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono continue nel loro dominio $\mathbb{R}$.

Osservazione 17. Per semplificare la verifica della continuità di una funzione si possono dimostrare i seguenti risultati:

1. Se f e g sono funzioni continue in $x_0 \implies f + g$ è continua in x_0.
2. Se f è continua in x_0 e $a \in \mathbb{R} \implies af$ è continua in x_0.
3. Se f e g sono funzioni continue in $x_0 \implies fg$ è continua in x_0.
4. Se f e g sono funzioni continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0 \implies f/g$ è continua in x_0.

Le dimostrazioni si deducono avvalendosi della definizione 3.1.1.

3.1.1 Continuità e derivabilità

Il seguente teorema dimostra che la derivabilità è condizione sufficiente per la continuità di una funzione.

Teorema 3.1.1. *Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Sia $c_2 \in \mathbb{R}$ tale che $c_2 > f(x_0)$. Sia $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $-M < f'(x_0) < M$ e siano l_+, l_- le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$ con pendenze rispettivamente M e $-M$. La retta $l_+(x) = f(x_0)+M(x-x_0)$ interseca $y = c_2$ in

$$b_1 = \frac{c_2 - f(x_0)}{M} + x_0 > x_0$$

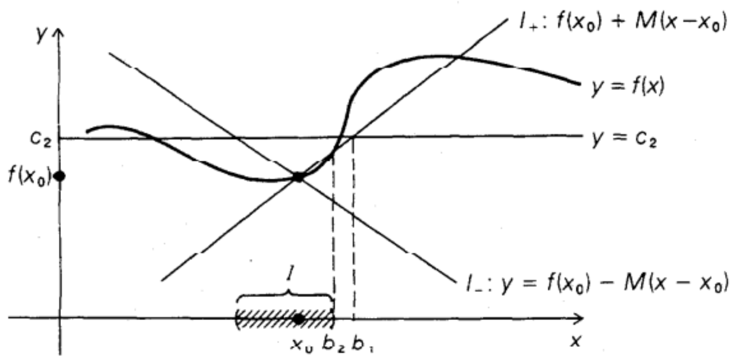

Figura 3.5: Grafico di f [1]

Sia (a_2, b_2) l'intorno di x_0 in cui $f(x) - l_+(x)$ cambia segno da negativo a positivo, allora $\forall x \in (x_0, b_2)$ si ha $f(x) < f(x_0) + M(x - x_0)$. Inoltre b_2 potrebbe essere maggiore o minore di b_1, sia allora b tale che $b < b_1$ e $b < b_2$ si ha quindi

$$\forall x \in (x_0, b) \quad f(x) < f(x_0) + M(x - x_0) < c_2 \tag{3.1}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento su l_- si può dire che $\exists a < x_0$ tale che

$$\forall x \in (a, x_0) \quad f(x) < f(x_0) - M(x - x_0) < c_2 \tag{3.2}$$

[1]Figura 5-3, p.57 di [7].

Sia $I = (a, b)$, per (3.1) e (3.2) si ha

$$f(x) < c_2 \quad \forall x \in I$$

ovvero risulta soddisfatta la seconda condizione della definizione 3.1.1. Analogamente considerando $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che $c_1 < f(x)$, e le rette l_- e l_+ si dimostra anche la prima condizione della definizione 3.1.1. $\square$

Osservazione 18. La derivabilità è condizione sufficiente, ma non necessaria, per la continuità. Una funzione potrebbe essere non derivabile in un punto, ma essere continua in quel punto. Un esempio è dato dalla funzione $f(x) = |x|$ che risulta essere non derivabile in $x_0 = 0$ (come visto nell'osservazione 2) ma, per quanto già visto, f è continua in $x_0 = 0$.

Osservazione 19. Il teorema 3.1.1 fornisce un metodo più semplice per verificare la continuità di una funzione in un punto x_0 rispetto alla Definizone 3.1.1. Si supponga per esempio di dover valutare la continuità della funzione $f(x) = (x-1)/3x^2$ in $x_0 = 4$. Per i noti teoremi sulle regole di derivazione, $x, x-1, x^2, 3x^2$ e $(x-1)/3x^2$ sono derivabili quando $x \neq 0$. Essendo $x_0 = 4 \neq 0$ per il teorema 3.1.1 si conclude che la funzione f è continua in $x_0 = 4$.

Corollario 3.1.2. *Valgono le seguenti:*

1. *Tutte le funzioni polinomiali sono continue*

2. *Il quoziente di due funzioni polinomiali è continuo in ogni punto in cui il denominatore è diverso da zero.*

3.2 Derivata della funzione composta

Si affronta ora la regola di derivazione per funzioni composte, nota anche come "regola della catena". Si utilizzano le funzioni che si annullano rapidamente e la continuità. A tale proposito è necessario il seguente lemma.

Lemma 3.2.1. *Sia $r(y)$ una funzione che si annulla rapidamente in y_0 e $g(x)$ derivabile in x_0 con $g(x_0) = y_0$, allora $r(g(x))$ si annulla rapidamente in x_0*

Dimostrazione. Essendo $r(y_0) = r(g(x_0)) = 0$ bisogna dimostrare che $[r(g(x))]'_{x_0} = 0$. La funzione $r(y)$ si annulla rapidamente in y_0, quindi $r'(y_0) = 0$, ovvero $\forall\epsilon > 0$ vicino a y_0 si hanno:

i) $r(y) + \epsilon(y - y_0)$ cambia segno da negativo a positivo in y_0

ii) $r(x) - \epsilon(y - y_0)$ cambia segno da positivo a negativo in y_0

La funzione g è derivabile in x_0 quindi continua in x_0. Inoltre $g(x_0) = y_0$ allora per continuità, per x sufficientemente vicino a x_0 si ha $g(x)$ vicino a y_0. Sia allora $y = g(x)$ si ha che $\forall\epsilon > 0$ vicino a x_0 si hanno:

i) $r(g(x)) + \epsilon(g(x) - y_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0

ii) $r(g(x)) - \epsilon(g(x) - y_0)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0

da cui la tesi. □

Teorema 3.2.2 (**Regola di derivazione di una funzione composta**). *Sia g funzione derivabile in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ derivabile in x_0 con derivata*

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Dimostrazione. Sia $y_0 = g(x_0)$ e $y = g(x)$ allora

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + r(g(x)) \tag{3.3}$$

con $r(g(x))$ che si annulla rapidamente in x_0 per il lemma 3.2.1. Prendendo la derivata calcolata in x_0 della funzione in (3.3) ed utilizzando le regole di derivazione, segue la tesi. □

La regola di derivazione della funzione composta si utilizza, ad esempio, per determinare la derivata delle funzioni trigonometriche ed esponenziali, come discusso nell'Appendice A.

3.3 Teorema dei valori intermedi

Nella trattazione classica, si dimostra il teorema di Bolzano (o teorema degli zeri) e lo si utilizza per dimostrare il teorema dei valori intermedi. Il teorema di Bolzano può essere dimostrato attraverso il metodo di bisezione, che implica l'uso dei limiti di successioni, oppure sfruttando i teoremi di permanenza del segno sui limiti di funzioni. In questo contesto, volendo eliminare il concetto di limite, si enuncia innanzitutto un lemma e poi lo si utilizza per dimostrare il teorema dei valori intermedi. A tal proposito, si ricorre all'assioma di completezza e alla definizione di insieme convesso.

L'idea intuitiva di funzione continua, intesa come una funzione che "non salta" nel suo dominio, suggerisce che ogni funzione continua soddisfi la *proprietà dei valori intermedi*: se f è continua e definita in $[a, b]$ allora assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Prima di affrontare il teorema, ricordiamo la definizione di sottoinsieme convesso della retta reale e l'assioma di completezza.

Definizione 3.3.1. *$A \subset \mathbb{R}$ è convesso se per ogni $x, y \in A$ e per ogni z, tra x ed y, $z \in A$.*

Assioma di completezza: Ogni $A \subset \mathbb{R}$ convesso è un intervallo.

Per affrontare la dimostrazione del teorema è necessario il seguente lemma.

Lemma 3.3.1. *Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ e $d \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti:*

1. *Se $f(a)$ è al di sopra della retta $y = d$ e il grafico di f non interseca la retta in $[a, b]$ allora anche $f(b)$ è al di sopra della retta.*

2. *Se $f(a)$ è al di sotto della retta $y = d$ e il grafico di f non interseca la retta in $[a, b]$ allora anche $f(b)$ è al di sotto della retta.*

Dimostrazione. Sia $f(a) < d$ [2] e sia

$$S = \{x \in [a,b] \mid f < d \text{ in } [a,x]\}.$$

Si vuole mostrare che S è un intervallo e che $S = [a,b]$. S è non vuoto (infatti $a \in S$ dato che $f(a) < d$ in $[a,a]$). S è convesso: se $x_1, x_2 \in S$ e $x_1 < y < x_2$ allora $y \in [a,b]$ (dato che $a \leq x_1 < y < x_2 \leq b$), e visto che $x_2 \in S$ si ha $f < d$ in $[a,x_2]$, ma $[a,y] \subset [a,x_2]$ quindi si ha $f < d$ in $[a,y]$ da cui $y \in S$. Quindi, per l'assioma di completezza, S è un intervallo e

$$S = [a,c) \qquad \text{oppure} \qquad S = [a,c],$$

per un certo $c \leq b$.

Caso 1: Supponiamo $S = [a,c)$.
Allora $f < d$ in $[a,c)$. Inoltre $c \notin S$ e per ipotesi $f(c) \neq d$ quindi $f(c) > d$. Per l'ipotesi di continuità di f in c si avrebbe $f > d$ vicino a c ma questo contraddice il fatto che $f < d$ in $[a,c)$. Si conclude quindi che $S \neq [a,c)$.

Caso 2: Supponiamo $S = [a,c]$ con $c < b$.
Allora $f < d$ in $[a,c]$. Per l'ipotesi di continuità di f in c e $f(c) < d$ si può considerare un intervallo (p,q) contentente c in cui $f < d$. Se $f < d$ in $[a,c]$ e in (p,q), con $a < p < c < q \leq b$, allora $f < d$ in $[a,q)$. Sia $y = \frac{1}{2}(c+q)$ allora $f < d$ in $[a,y]$ quindi $y \in S$, ma essendo $y > c$ questo contraddice $S = [a,c]$. Si conclude quindi che $S \neq [a,c]$.

L'unica possibilità rimanente è che $S = [a,b]$ da cui la tesi. $\square$

Teorema 3.3.2 (Teorema dei valori intermedi). *Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a,b]$ e sia $d \in \mathbb{R}$ (strettamente) compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Allora, esiste $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = d$.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che non esista $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = d$. Possiamo supporre $d < f(a)$ (altrimenti, si considera $-f$). Allora,

[2] Analogamente si tratta il caso $f(a) > d$.

da $f(x) \neq d$, per il lemma 3.3.1, si avrebbe $f(b) > d$ che contraddice l'ipotesi $f(b) < d$. $\square$

Osservazione 20. Non necessariamente una funzione che soddisfa la proprietà dei valori intermedi è continua.
Un esempio è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione è discontinua in 0, a causa delle oscillazioni attorno a 0, ma soddisfa la proprietà dei valori intermedi.

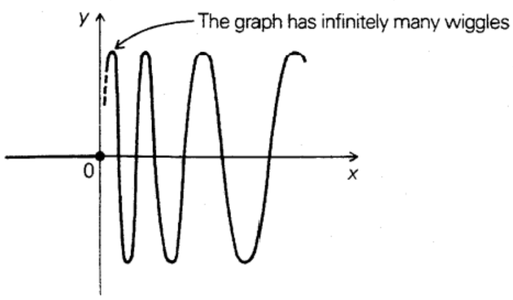

Figura 3.6: Grafico di f [3].

3.4 Teorema di Weierstrass

Nella trattazione classica, il teorema di Weierstrass è generalmente dimostrato utilizzando le successioni e quindi il concetto di limite. Un'alternativa si basa sul fatto che l'immagine continua di un compatto è compatta. In questa sezione adotteremo il secondo approccio, che si avvale di alcuni concetti fondamentali della topologia di $\mathbb{R}$. In particolare, non si utilizzerà il teorema di Heine-Borel ma sarà data la definizione di compatto in $\mathbb{R}$.
Ricordiamo alcune definizioni per gli intervalli reali.

[3] Figura 5-4, p.60 di [7].

Definizione 3.4.1. *Un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si dice:*

1. *superiormente limitato se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M$ $\forall x \in I$*

2. *inferiormente limitato se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq m$ $\forall x \in I$*

3. *limitato se superiormente e inferiormente limitato*

4. *limitato e chiuso se estremo superiore e inferiore appartengono all'intervallo*

Definizione 3.4.2. *Un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si dice compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Osservazione 21. L'intervallo $[a, b]$ è compatto.

Di seguito indichiamo con $f([a, b]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [a, b] \ f(x) = y\}$ l'immagine della funzione f su $[a, b]$.

Lemma 3.4.1. *Sia f continua in $[a, b]$ allora $f([a, b])$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che $f([a, b])$ è un insieme convesso.
Siano $y_1, y_2 \in f([a, b])$, $y_1 \neq y_2$, allora $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ per cui $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Sia y tale che $y_1 < y < y_2$ allora $f(x_1) < y < f(x_2)$, sia J l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2. Per il teorema dei valori intermedi applicato alla funzione f nell'intervallo J si ha $f(c) = y$ per un qualche $c \in J$.
Ma $c \in J \implies c \in [a, b]$ quindi $y \in f([a, b])$, cioè $f([a, b])$ convesso.
Per l'assioma di completezza $f([a, b])$ è un intervallo.

$\square$

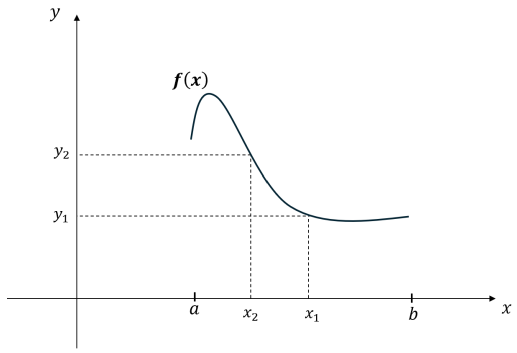

Figura 3.7: Grafico di f, in riferimento al lemma 3.4.1.

Lemma 3.4.2. *Sia f continua in $[a, b]$ allora $f([a, b])$ è limitato.*

Dimostrazione. Sia

$$S = \{x \in [a, b] \mid f \text{ superiormente limitata in } [a, x]\}.$$

S è non vuoto (infatti $a \in S$ dato che f è superiormente limitata in $[a, a]$ da $f(a)$). S è convesso: se $x_1, x_2 \in S$ e $x_1 < x < x_2$ allora $f([a, x_2])$ è superiormente limitato quindi anche $f([a, x])$ superiormente limitato, da cui $x \in [a, b]$. Quindi, per l'assioma di completezza, S è un intervallo e

$$S = [a, c) \qquad \text{oppure} \qquad S = [a, c],$$

per un certo $c \leq b$.

Caso 1: Supponiamo $S = [a, c)$.
Essendo f è continua in c allora per ogni $c_2 > f(c)$ si ha $c_2 > f$ vicino a c, ovvero f è superiormente limitata vicino a c. Sia $e \in [a, c)$ e $\epsilon > 0$, allora $f([e, c+\epsilon])$ superiormente limitato. Essendo $f([a, e])$ e $f([e, c])$ superiormente limitati si ha $f([a, c])$ superiormente limitato, da cui l'assurdo $c \in S$.

Caso 2: Supponiamo $S = [a, c]$ con $c < b$.
Con discussione analoga a quella appena fatta si ottiene una contraddizione ovvero che tutti i valori reali $d > c$ sono contenuti in S.

Si conclude quindi che $c = b$ e $S = [a, b]$, cioè $f([a, b])$ è un intervallo limitato.

$\square$

Lemma 3.4.3. *Sia f continua in $[a, b]$ allora $f([a, b])$ è chiuso.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.4.2 l'intervallo $f([a, b])$ è limitato, allora sia M l'estremo superiore. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $x \in [a, b]$

$$f(x) < M = \sup_{[a,b]} f. \tag{3.4}$$

Sia

$$S = \{z \in [a, b] \mid \sup_{[a,z]} f < M\}.$$

S è non vuoto (infatti $a \in S$). S è convesso: se $x_1, x_2 \in S$, con $x_1 < x_2$ e se $x_1 < y < x_2$ (quindi, in particolare, $y \in [a, b]$), visto che

$$\sup_{[a,y]} f < \sup_{[a,x_2]} f < M$$

allora $y \in S$. Quindi, per l'assioma di completezza, S è un intervallo e

$$S = [a, c) \qquad \text{oppure} \qquad S = [a, c],$$

per un certo $c \leq b$.

Caso 1: Supponiamo $S = [a, c)$.
Visto che per ipotesi $f(c) < M$, dalla continuità di f si dedurrebbe che $f < \frac{f(c)+M}{2}$ vicino a c, quindi si otterrebbe l'assurdo che S deve contenere punti di $[a, b]$ a destra di c.

Caso 2: Supponiamo $S = [a, c]$ con $c < b$.
Con discussione analoga a quella appena fatta si ottiene lo stesso assurdo.

Caso 3: Supponiamo $S = [a, b]$.
Si avrebbe l'assurdo

$$\sup_{[a,b]} f < M.$$

Si conclude quindi che $M \in f([a, b])$, cioè esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = M$. Per mostrare l'esistenza di un punto di minimo si ragiona in modo analogo, modificando opportunamente la definizione di S e usando inf invece di sup (o, più semplicemente, si considera l'estremo superiore di $-f([a, b])$). $\square$

Teorema 3.4.4 (**Teorema di Weierstrass**). *Sia f funzione continua in $[a, b]$ allora f possiede un massimo e un minimo in $[a, b]$, ovvero $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ $\forall x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.4.2 e il lemma 3.4.3, $f([a, b])$ è compatto da cui la tesi. $\square$

3.4.1 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Il teorema di Weierstrass permette di dimostrare il teorema di Rolle e il teorema del valore medio senza ricorrere al concetto di limite. Di conseguenza, anche il teorema di Cauchy e la formula di Taylor con resto di Lagrange risultano dimostrabili senza fare uso del limite.

Teorema 3.4.5 (**Teorema di Rolle**). *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), se $f(a) = f(b)$ allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{f}$ la funzione f traslata in modo che $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = 0$. La funzione $\tilde{f}$ è ancora continua in $[a, b]$, quindi per il teorema di Weierstrass possiede un massimo x_M e un minimo x_m. Essendo $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = 0$ e supponendo $\tilde{f} \neq 0$ [4] in $[a, b]$ allora almeno uno tra i punti x_m, x_M sta in (a, b). Sia x_0 tale punto, per esempio $x_0 = x_M$, si ha

$$\tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x_0) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]. \tag{3.5}$$

[4] Se $\tilde{f}(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$ il teorema vale per qualsiasi $x_0 \in [a, b]$.

Se $\tilde{f}'(x_0) > 0$, per definizione di derivata in x_0, per ogni $m < \tilde{f}'(x_0)$ si ha che $\tilde{f}(x) - [\tilde{f}(x_0) + m(x - x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Considerando $m = 0$, in accordo con l'ipotesi $\tilde{f}'(x_0) > 0$, si ha che $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0 che contraddice (3.5). Se $\tilde{f}'(x_0) < 0$, con ragionamento analogo, si avrebbe che $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0 che contraddice ancora (3.5). Si conclude quindi che $\tilde{f}'(x_0) = 0$ da cui segue $f'(x_0) = 0$. □

Teorema 3.4.6 (**Teorema del valore medio**). *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Osservazione 22. Il teorema afferma che nell'intervallo (a, b) esiste almeno un punto in cui la retta tangente è parallela alla retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Potrebbero esistere più punti in (a, b) che soddisfano il teorema, come osserviamo in figura 3.8.

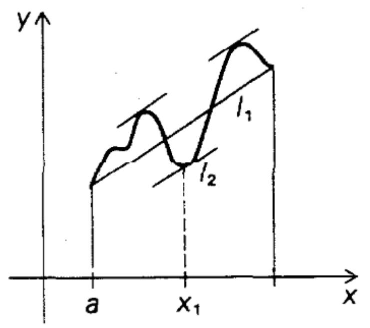

Figura 3.8: Teorema del valore medio [5]

Dimostrazione. Sia $g(x) = f(x) - f(a) + (a - x)\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$. La funzione g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) perchè somma di funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Inoltre $g(a) = g(b) = 0$ quindi per il teorema di

[5]Figura 7-1, p.93 di [7].

Rolle $\exists x_0 \in (a,b)$ in cui $g'(x_0) = 0$.
Per le note regole di derivazione si ha

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

da cui $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

3.5 Integrabilità delle funzioni continue

Nella trattazione classica l'integrabilità delle funzioni continue si dimostra sfruttando il teorema di Heine-Cantor, quindi l'uniforme continuità, che permette di trovare una partizione dell'intervallo di integrazione tale per cui la differenza tra somma inferiore e superiore tende a zero. In questo contesto si dimostra il teorema sfruttando l'assioma di completezza.

Teorema 3.5.1. *Se f è continua in $[a,b] \implies f$ è integrabile in $[a,b]$*

Dimostrazione. Essendo f continua in un intervallo chiuso $[a,b]$ allora per il teorema di Weierstrass è limitata, quindi esistono somma superiore e somma inferiore [6]. Sia $[a,x]$ un qualsiasi intervallo contenuto in $[a,b]$ e sia $\epsilon > 0$, diremo che f è ϵ-integrabile in $[a,x]$ se esistono g, h funzioni costanti a tratti in $[a,x]$ con $g(t) < f(t) < h(t)$ $\forall t \in (a,b)$ tali che

$$\int_a^x h(t)dt - \int_a^x g(t)dt < \epsilon.$$

Consideriamo l'insieme

$$S_\epsilon = \{x \in (a,b] \mid f \ \epsilon\text{-integrabile in } [a,x]\}.$$

Si vuole dimostrare che $S_\epsilon = [a,b]$ ovvero che f è ϵ-integrabile in $[a,b]$ per ogni ϵ, che equivale a mostrare che f è integrabile in $[a,b]$.

[6] Basta considerare funzioni costanti rispettivamente uguali al valore massimo e minimo di f in $[a,b]$.

Banalmente $a \in S_\epsilon$, quindi S_ϵ non vuoto. S_ϵ è convesso: se $x_1, x_2 \in S_\epsilon$ e $x_1 < x < x_2$ allora f è ϵ-integrabile in $[a, x_2]$, restringendo il suo dominio a $(a, x]$, per le proprietà dell'integrale definito si conclude che $x \in S_\epsilon$. Quindi per l'assioma di completezza S_ϵ è intervallo.

Si vuole ora dimostrare che S_ϵ contiene ogni $x_0 \in (a, c)$ per qualche $c > a$. Dato $\delta = \epsilon/[2(b-a)]$, si ha

$$f(a) - \delta < f(a) < f(a) + \delta,$$

per la continuità di f in a, esiste un intervallo $[a, c)$ tale che

$$f(a) - \delta < f(t) < f(a) + \delta \quad \forall t \in [a, c).$$

Sia $x_0 \in [a, c]$, consideriamo f in $[a, x_0]$ e due funzioni costanti $g(t) = f(a) - \delta$ e $h(t) = f(a) + \delta$ allora

$$\int_a^{x_0} h(t)dt - \int_a^{x_0} g(t)dt = (f(a) + \delta)(x_0 - a) - (f(a) - \delta)(x_0 - a) =$$

$$= 2\delta(x_0 - a) = 2\frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_0 - a) = \epsilon\frac{x_0 - a}{b - a} < \epsilon$$

Si è quindi mostrato che f è ϵ-integrabile in $[a, x_0]$, cioè $x_0 \in S_\epsilon$ per qualche $c > a$.

Si vuole ora dimostrare che se $x_0 \in S_\epsilon$ e $x_0 > a$ allora S_ϵ contiene ogni $x \in (x_0, c]$ per qualche $c > x_0$. Esistono g_0, h_0 funzioni costanti a tratti in $[a, x_0]$ con $g_0(t) \leq f(t) \leq h_0(t)$ $\forall t \in (a, x_0)$ e tali che $\delta = \int_a^{x_0} h_0(t)dt - \int_a^{x_0} g(t)dt < \epsilon$. Per la continuità di f in x_0, $\exists c > x_0$ tale che $\forall t \in [x_0, c)$ si ha

$$f(x_0) - \frac{\epsilon - \delta}{2(b-a)} < f(t) < f(x_0) + \frac{\epsilon - \delta}{2(b-a)}$$

Estendiamo ora le funzioni g_0, h_0 all'intervallo $[a, c]$ definendo le seguenti

$$g(t) = \begin{cases} g_0(t) & \text{se } a \leq t \leq x_0 \\ f(x_0) - \frac{\epsilon-\delta}{2(b-a)} & \text{se } x_0 < t \leq c \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} h_0(t) & \text{se } a \le t \le x_0 \\ f(x_0) + \frac{\epsilon-\delta}{2(b-a)} & \text{se } x_0 < t < c \end{cases}$$

In questo modo $g(t) \le f(t) \le h(t)$ $\forall t \in [a, c]$ e valgono

$$\int_a^c g(t)dt = \int_a^{x_0} g(t)dt + \left[f(x_0) - \frac{\epsilon-\delta}{2(b-a)}\right](c - x_0)$$

$$\int_a^c h(t)dt = \int_a^{x_0} h(t)dt + \left[f(x_0) + \frac{\epsilon-\delta}{2(b-a)}\right](c - x_0)$$

Da cui

$$\int_a^c h(t)dt - \int_a^c g(t)dt = \underbrace{\int_a^{x_0} h(t)dt - \int_a^{x_0} g(t)dt}_{=\delta} + (\epsilon - \delta)\underbrace{\frac{c - x_0}{b - a}}_{<1}$$

$$< \delta + \epsilon - \delta = \epsilon,$$

ovvero f ϵ-integrabile in $[a, c]$ quindi $c \in S_\epsilon$.
Essendo S_ϵ un intervallo, S_ϵ contiene ogni $x \in [a, c]$.

L'intervallo S_ϵ potrebbe essere $[a, b]$ oppure $[a, b)$. Dimostrando che $S_\epsilon = [a, b]$ si conclude che f è integrabile in $[a, b]$. Per la continuità di f in b esiste $c < b$ tale che

$$f(b) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} < f(t) < f(b) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \forall t \in [c, b].$$

Allora f è $\epsilon/2$-integrabile in $[a, c]$. Procedendo come fatto prima, considerando due funzioni costanti a tratti g_0, h_0 in $[a, c]$ ed estendendole con funzioni costanti del tipo $f(b) \pm \epsilon/2(b - a)$ in $(c, b]$ si dimostra che f è ϵ-integrabile in $[a, b]$ ovvero che $S_\epsilon = [a, b]$ da cui la tesi. □

Osservazione 23. Ogni funzione derivabile è continua, quindi, per il teorema 3.5.1, si può concludere che ogni funzione derivabile è integrabile.

Capitolo 4

Funzioni monotone

In questo capitolo si considerano le funzioni monotone e la relazione tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata prima. Lo studio della monotonia permette anche di approfondire il concetto di invertibilità di una funzione e di derivata della funzione inversa. Saranno inoltre affrontati alcuni teoremi fondamentali del calcolo differenziale senza fare uso del concetto di limite. A differenza dell'approccio proposto da Marsden e Weinstein, che definiscono la monotonia in un punto, si manterrà la definizione usuale di funzione monotona su un intervallo.

4.1 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 4.1.1. *Una funzione f definita in un intervallo I si dice:*

- *crescente se per ogni $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha*

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

- *strettamente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha*

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- *decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha*

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *strettamente decrescente se per ogni* $x_1, x_2 \in I$, *con* $x_1 < x_2$, *si ha*

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Se la funzione soddisfa una delle precedenti condizioni in I *si dice che* f *è monotona in* I.

Osservazione 24. La monotonia può essere localizzata in un intervallo oppure estendersi a tutto il dominio della funzione.

Vediamo ora la relazione tra la monotonia di una funzione e segno della derivata prima.

Teorema 4.1.1 (Criterio di monotonia). *Sia* f *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b), *valgono le seguenti:*

1. *se* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$ *allora* f *è crescente in* (a, b)
2. *se* $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$ *allora* f *è decrescente in* (a, b)

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto, analogamente si dimostra il secondo. Per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$, consideriamo $f|_{[x_1,x_2]}$ la funzione f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2]$. La funzione f è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2), quindi per il teorema del valore medio applicato ad $f|_{[x_1,x_2]}$

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{tale che} \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

da cui

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \quad \cdot \quad \underbrace{f'(c)}_{\geq 0 \text{ per ipotesi}} \quad ,$$

ovvero $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$. □

Corollario 4.1.2 (Criterio di stretta monotonia). *Sia* f *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b), *valgono le seguenti:*

1. *se* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$ *allora* f *è strettamente crescente in* (a, b)

2. se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è strettamente decrescente in (a, b)

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto, analogamente si dimostra il secondo. Per il teorema 4.1.1, f è crescente. Se per assurdo f non fosse strettamente crescente si avrebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Essendo f crescente, si avrebbe f costante in $[x_1, x_2]$ ovvero $f' = 0$ in $[x_1, x_2]$ che contraddice l'ipotesi. □

4.1.1 Minimi e massimi locali

Definizione 4.1.2. *Un punto x_0 è punto critico di una funzione f se la funzione è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.*

Teorema 4.1.3 (Teorema di Fermat). *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contenente x_0 e derivabile in x_0. Se x_0 è un punto di minimo o massimo locale per f allora $f'(x_0) = 0$, cioè x_0 è un punto critico.*

Dimostrazione. Sia x_0 punto di minimo locale per f [1], cioè $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x vicino ad x_0 ovvero

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{vicino ad } x_0. \tag{4.1}$$

Se $f'(x_0) > 0$, per definizione di derivata in x_0, per ogni $m < f'(x_0)$ si avrebbe $f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Considerando $m = 0$, in accordo con l'ipotesi $f'(x_0) > 0$, si ha che $f(x) - f(x_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0, ma questo contraddice (4.1). Se $f'(x_0) < 0$, con ragionamento analogo, si avrebbe che $f(x) - f(x_0)$ cambia segno da positivo a negativo in x_0 che contraddice ancora (4.1). Si conclude quindi che $f'(x_0) = 0$. □

Vediamo ora che lo studio del segno della derivata prima permette di valutare l'esistenza di massimi e minimi locali.

[1] Analogamente si dimostra il caso con x_0 punto di massimo locale

Teorema 4.1.4. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contenente x_0, continua e derivabile nell'intervallo, allora valgono le seguenti:*

1. *se f' cambia segno da negativo a positivo in x_0 allora x_0 è un punto di minimo locale per f*

2. *se f' cambia segno da positivo a negativo in x_0 allora x_0 è un punto di massimo locale per f*

Osservazione 25. Se f' è continua, un punto critico di f non è necessariamente un punto di minimo o massimo. Si veda il seguente esempio sul punto critico della funzione $f(x) = x^3$. Derivando la funzione si ottiene $f'(x) = 3x^2$. Il punto $x = 0$ è un punto critico di f, ma non è un punto di massimo o minimo locale perchè la derivata non cambia segno.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dai criteri di monotonia e stretta monotonia. □

La derivata seconda fornisce un modo per verificare se un punto critico è punto di minimo o di massimo locale. Se f è una funzione e f' la sua derivata allora si indica con f'' la derivata seconda.

Teorema 4.1.5. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contente x_0, derivabile nell'intervallo. Sia x_0 un punto critico di f e si supponga esista $f''(x_0)$, valgono le seguenti:*

1. *se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale per f*

2. *se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale per f*

Osservazione 26. Se $f''(x_0) = 0$ allora il punto potrebbe essere un punto di minimo locale, di massimo locale o un punto in cui la derivata seconda non cambia segno. Infatti le funzioni $x^4, -x^4$ e x^3 hanno tutte $f'(0) = f''(0) = 0$, ma 0 è punto di minimo locale per x^4, è punto di massimo locale per $-x^4$ e non è un punto di cambio segno per la derivata seconda di x^3. Il teorema 4.1.5 risulta inconcludente per $f''(x_0) = 0$, in questo caso è necessario studiare il segno della derivata prima.

Dimostrazione. Se $f''(x_0) > 0$ [2], per definizione di $f'(x_0)$, per ogni $m < f''(x_0)$ si ha che $f'(x) - [f'(x_0) + m(x - x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Considerando $m = 0$, in accordo con l'ipotesi $f''(x_0) > 0$, si ha $f'(x) - f'(x_0) = f'(x)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0, da cui per il teorema 4.1.4 x_0 è punto di minimo locale per f. □

4.1.2 Punti di flesso

La monotonia della derivata prima di una funzione e il segno della derivata seconda sono utili per una descrizione qualitativa del grafico di una funzione.

Definizione 4.1.3. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto contenente x_0 e derivabile in x_0. Si dice che f ha concavità verso l'alto (il basso) in x_0, quando il grafico di f vicino ad x_0 giace sopra (sotto) alla retta $l(x)$ tangente in $(x_0, f(x_0))$ ovvero $f(x) \geq l(x)$ $(f(x) \leq l(x))$ vicino ad x_0.*

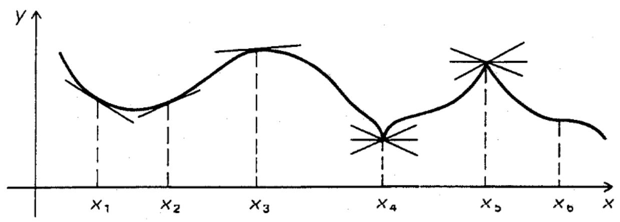

Figura 4.1: f ha concavità rivolta verso l'alto in x_1, x_2, verso il basso in x_3 e nessuna delle due in x_6 [3].

Teorema 4.1.6. *Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto contenente x_0, valgono le seguenti:*

1. *se f' è crescente in un intorno di x_0 allora f ha concavità verso l'alto nell'intorno*

[2]Analogamente si tratta il caso $f''(x_0) < 0$.
[3]Figura 6-4, p.79 di [7].

2. *se f' è decrescente in un intorno di x_0 allora f ha concavità verso il basso nell'intorno*

Dimostrazione. Sia $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ la retta tangente ad f in x_0 e $r(x) = f(x) - l(x)$, derivando le funzioni l e r si ottengono

$$l'(x) = f'(x_0) \qquad \text{e} \qquad r'(x) = f'(x) - l'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Si supponga $f'(x)$ crescente nell'intorno di x_0 [4], allora anche $r'(x)$ crescente perchè differisce da f' per la costante $f'(x_0)$. Essendo $r'(x_0) = 0$, r' cambia segno da negativo a positivo in x_0 ovvero, per il teorema 4.1.4, x_0 punto di minimo locale per r. Quindi per ogni x vicino a x_0 si ha

$$r(x) \geq r(x_0) = f(x_0) - l(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$\implies r(x) > 0 \implies f(x) - l(x) \geq 0$$

Quindi il grafico di f giace sopra alla retta tangente in $(x_0, f(x_0))$, cioè f ha concavità rivolta verso l'alto in x_0.

□

Corollario 4.1.7. *Sia f una funzione derivabile e si supponga esista $f''(x_0)$, valgono le seguenti:*

1. *se $f''(x_0) > 0$ allora f ha concavità verso l'alto in x_0*

2. *se $f''(x_0) < 0$ allora f ha concavità verso il basso in x_0*

Osservazione 27. Se $f''(x_0) = 0$ la funzione potrebbe presentare concavità rivolta verso l'alto, verso il basso o nessuna delle due in x_0. Infatti le funzioni $x^4, -x^4$ e x^3 hanno tutte $f'(0) = f''(0) = 0$, ma in 0 la funzione x^4 ha concavità rivolta verso l'alto, la funzione $-x^4$ ha concavità rivolta verso il basso. La funzione x^3 ha concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$ e concavità rivolta verso il basso per $x < 0$.

[4] Analogamente si tratta il caso con f' decrescente in x_0.

Dimostrazione. Se $f''(x_0) > 0$, per definizione di $f'(x_0)$, per ogni $m < f''(x_0)$ si ha che $f'(x) - [f''(x_0) + m(x - x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Considerando $m = 0$, in accordo con l'ipotesi $f''(x_0) > 0$, si ha $f'(x) - f''(x_0) = f'(x)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Si ha f' crescente in un intorno di x_0 allora per il teorema 4.1.6 f ha concavità verso l'alto in x_0. □

Definizione 4.1.4. *Un punto x_0 è punto di flesso per una funzione f se f' è ben definita e derivabile in x_0 e f'' cambia segno in x_0.*

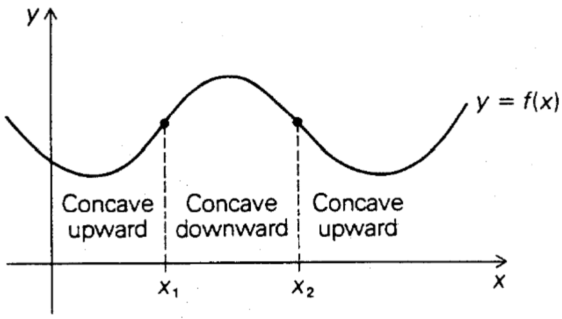

Figura 4.2: x_1 e x_2 sono punti di flesso [5]

Teorema 4.1.8. *Valgono le seguenti:*

1. *se x_0 è punto di flesso per f allora $f''(x_0) = 0$*

2. *se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora x_0 è un punto di flesso per f*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto: se x_0 è punto di flesso per f allora f'' cambia segno in x_0 ovvero f'' si annulla in x_0.
Dimostriamo il secondo punto. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora $f'''(x_0) > 0$ oppure $f'''(x_0) < 0$. Se $f'''(x_0) > 0$ allora, per il teorema 4.1.1, f'' è crescente in x_0 ovvero $f''(x) - f''(x_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0. Per ipotesi $f''(x_0) = 0$ quindi $f''(x)$ cambia segno da negativo a positivo. Analogamente se $f'''(x_0) < 0$ si ottiene che $f''(x)$ cambia segno da positivo a negativo. In entrambi i casi x_0 è punto di flesso. □

[4] Analogamente si tratta il caso $f''(x_0) < 0$.
[5] Figura 6-7, p.204 di [7].

4.2 Derivata della funzione inversa

Studiare il segno della derivata prima, quindi valutare quando una funzione è crescente o decrescente, è utile anche per valutare l'invertibilità di una funzione.

Teorema 4.2.1. *Sia f continua e strettamente monotona in $[a, b]$ allora f è invertibile in $[a, b]$ e la funzione inversa f^{-1} è definita nell'intervallo di estremi $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. La funzione f è iniettiva in $[a, b]$: per ogni x_1, x_2 con $x_1 < x_2$, essendo f strettamente monotona, si ha $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Quindi f è invertibile in $[a, b]$. Per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è un intervallo, da cui la funzione inversa f^{-1} è definita nell'intervallo di estremi $f(a)$ e $f(b)$. □

Teorema 4.2.2 (Derivata della funzione inversa). *Sia f una funzione invertibile in un intervallo aperto contentente x_0 e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Sia g la funzione inversa di f e $y_0 = f(x_0)$ allora vale*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Dimostrazione. Sia $f'(x) > 0$ [6] e $x = l(y) = my + b$ la retta passante per $(y_0, g(y_0)) = (y_0, x_0)$ con pendenza $m > 1/f'(x_0) > 0$. La retta $l(y)$ è invertibile per il teorema 4.2.1 e la sua inversa è

$$\bar{l}(x) = \frac{x}{m} - \frac{b}{m},$$

retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ con pendenza $1/m < f'(x_0)$.

[6] Analogamente considerando $-f'(x)$ si dimostra il caso $f'(x) < 0$.

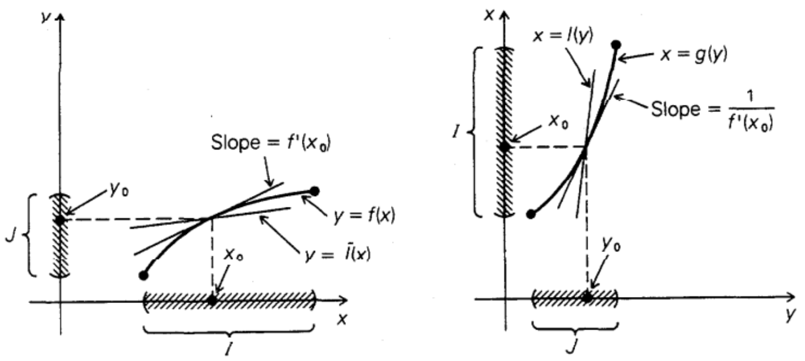

Figura 4.3: Teorema 4.2.8 [7]

Per definizione di derivata in x_0 si ha:

i) $f(x) > \bar{l}(x)$ per $x > x_0$ vicino a x_0

ii) $f(x) < \bar{l}(x)$ per $x < x_0$ vicino a x_0

Sia $y = f(x) > y_0$ tale che x sia vicino a x_0. Essendo $f'(x_0) > 0$ per il teorema 4.1.1 la funzione è crescente in x_0 quindi $x > x_0$ e vale

$$f(x) > \bar{l}(x) = \frac{x}{m} - \frac{b}{m} \iff y > \frac{g(y)}{m} - \frac{b}{m} \iff l(y) > g(y)$$

Sia $y = f(x) < y_0$ tale che x sia vicino a x_0, quindi $x < x_0$ allora vale

$$f(x) < \bar{l}(x) = \frac{x}{m} - \frac{b}{m} \iff y < \frac{g(y)}{m} - \frac{b}{m} \iff l(y) < g(y)$$

Si è appena mostrato che $l(y) - g(y)$ cambia segno da negativo a positivo in y_0. Una analoga discussione, considerando $x = l(y)$ retta passante per $(y_0, g(y_0)) = (y_0, x_0)$ con pendenza $m < 1/f'(x_0)$, dimostra che $l(y) - g(y)$ cambia segno da positivo a negativo in y_0.
Allora g derivabile in y_0 con derivata pari a $1/f'(x_0)$. $\square$

Si può utilizzare il teorema appena enunciato per calcolare le derivata delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche scegliendo con accortezza gli intervalli di invertibilità delle funzioni. È inoltre possibile calcolare la derivata della funzione logaritmo come discusso nell'Appendice A.

[7] Figura 8-7, p.107 di [7].

Conclusioni

A conclusione di questo lavoro proponiamo alcune considerazioni su quelli che, secondo l'opinione di chi scrive, sono i punti forti ed i punti deboli della proposta sullo sviluppo del calcolo senza l'uso del limite.

Per quanto riguarda il calcolo differenziale, le parti notevoli della proposta sono la definizione di derivata come punto di transizione (definizione 1.1.1) e la caratterizzazione della derivata in termini di scostamento da una retta a meno di un errore che si annulla rapidamente (teorema 1.3.3). Usando questi risultati e la definizione di funzione continua (definizione 3.1.1), come verificato anche in questa tesi, si possono dimostrare essenzialmente tutti i teoremi dell'Analisi 1 (tranne quelli che richiedono la nozione di andamento asintotico, come, ad esempio, la definizione di integrale improprio ed i risultati connessi). Osserviamo che il teorema 1.3.3 è formulato usando le funzioni che si annullano rapidamente. Tra gli aspetti positivi di questo approccio segnaliamo il fatto che le funzioni che si annullano rapidamente sostituiscono gli o-piccoli (concetto spesso ostico per la maggior parte degli studenti!). In quest'ottica, dal punto di vista algebrico, le regole di calcolo si riducono alla ricerca della parte lineare (rispetto all'incremento della variabile indipendente) dell'incremento della variabile dipendente.

Per quel che riguarda il calcolo integrale, sempre secondo chi scrive, la parte più interessante sono le idee espresse da Rokhlin. Infatti, la proposta di Marsden e Weinstein non appare molto diversa dall'usuale trattazione dell'integrale di Riemann (nei corsi universitari del primo anno l'integrabilità è definita come l'uguaglianza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore) e alcune dimostrazioni risultano piuttosto laboriose. Ad esempio, la dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue (teorema 3.5.1), seguendo l'approccio di Marsden e Weinstein, appare molto più lunga di quella classica (basata sul controllo uniforme delle oscillazioni di una funzione continua, definita su di un insieme compatto, sugli intervalli di una partizione).

In conclusione, l'approccio al calcolo senza limiti implicherebbe inevitabilmente un ripensamento del curriculum di matematica a seconda del grado di istruzione. Considerando che il concetto di limite costituisce un elemento fondamentale delle Indicazioni Nazionali per la scuola secondaria di secondo grado e dei corsi di Analisi Matematica, si potrebbe ipotizzare un'integrazione tra il percorso tradizionale e quello "senza limiti" al fine di sviluppare negli studenti una percezione geometrica dell'Analisi Matematica.

Appendice A

Regole di derivazione per funzioni trigonometriche ed esponenziali

A.1 Derivata delle funzioni trigonometriche

La derivazione di una funzione composta permette di trattare il problema della ricerca della derivata delle funzioni trigonometriche $sin(x), cos(x)$. Utilizzando la formula di addizione per il seno, $\forall \theta_0$ si ottiene

$$\sin\theta = \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)] = \sin\theta_0 \cos(\theta - \theta_0) + \cos\theta_0 \sin(\theta - \theta_0) \qquad \text{(A.1)}$$

È possibile applicare a (A.1) la regola di derivazione per funzioni composte ottenendo

$$\sin'(\theta_0) = \sin\theta_0 \cos'(0) + \cos\theta_0 \sin'(0)$$

Quindi per determinare la derivata di $\sin\theta$ in θ_0 è necessario trovare quanto vale $\sin'(0)$. Analogo ragionamento si estende al coseno, riconducendo la ricerca della sua derivata al calcolo di $\cos'(0)$. Per determinare $\sin'(0)$ e $\cos'(0)$ è necessario il seguente lemma.

Lemma A.1.1. *Per ogni $\theta \neq 0$ tale che $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ si ha*

$$1 - \frac{\theta^2}{2} < \cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < 1$$

Dimostrazione. In riferimento alla figura A.1 di seguito riportata, per $0 < \theta < \pi/2$ si hanno le seguenti:

1. $A_{\triangle OCB} = \frac{1}{2}|OC||AB| = \frac{1}{2}\sin\theta$
2. $A_{\triangle OCB} < A_{\text{settore OCB}} = \frac{r^2\pi\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\theta$ essendo $r = 1$
3. $A_{\text{settore OCB}} < A_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}|OC||CD| = \frac{1}{2}\tan\theta$

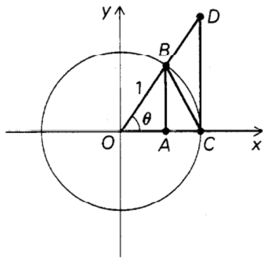

Figura A.1: Circonferenza trigonometrica [1]

Da cui $\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \implies \frac{\sin\theta}{\theta} < 1, \quad \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ quindi

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

L'ultima disuguaglianza vale anche per $\theta < 0$.
Usando l'identità $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ si ha $\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2}$ da cui segue la tesi. □

Proposizione A.1.2. *Valgono le seguenti:*

1. $\sin'(0) = 1$

2. $\cos'(0) = 0$

Dimostrazione. Sia $m \in \mathbb{R}, m > 1$ si ha $\frac{\sin\theta}{\theta} < 1 < m$ da cui:

i) $\sin\theta < m\theta$ per θ a destra di 0

[1] Figura 9-3, p. 115 del testo *Calculus Unlimited* di J.Marsden, A.Weinstein [7].

ii) $\sin\theta > m\theta$ per θ a sinistra di 0

Allora considerando il piano (θ, y), per $m > 1$ si ha $m\theta - \sin\theta$ cambia segno da negativo a positivo in $\theta = 0$.

Sia $m \in \mathbb{R}, m > 1$ si ha $1 - \frac{\theta^2}{2} > m$ per ogni θ vicino a 0, quindi:

i) $\sin\theta > m\theta$ per θ a destra di 0

ii) $\sin\theta < m\theta$ per θ a sinistra di 0

Allora considerando il piano (θ, y), per $m < 1$ si ha $m\theta - \sin\theta$ cambia segno da positivo a negativo in $\theta = 0$. Per la definizione di derivata si conclude che $sin'(0) = 1$.
Riscrivendo la disuguaglianza $1 - \frac{\theta^2}{2} < \cos(\theta) < 1$ in $-\frac{\theta^2}{2} < \cos\theta - 1 < 0$, con una discussione analoga si dimostra $cos'(0) = 0$. □

Teorema A.1.3 (**Derivate delle funzioni trigonometriche**). *Le funzioni* $\sin(\theta)$ *e* $\cos(\theta)$ *sono funzioni derivabili e valgono le seguenti:*

$$\sin'(\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$$

Dimostrazione. Per la formula di addizione del seno

$$\sin\theta = \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)] = \sin\theta_0\cos(\theta - \theta_0) + \cos\theta_0\sin(\theta - \theta_0) \qquad \text{(A.2)}$$

Per la regola di derivazione composta e il lemma precedente $\forall\theta_0$ si ha

$$\sin'(\theta_0) = \sin\theta_0\cos'(0) + \cos\theta_0\sin'(0) = \cos(\theta_0)$$

Analogamente si dimostra $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$. □

Corollario A.1.4. *Valgono le seguenti:*

1. $\tan'(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)^2}$

2. $\cot'(\theta) = -\csc(\theta)^2$

3. $\csc'(\theta) = -\cot(\theta)\csc(\theta)$

4. $\sec'(\theta) = \tan(\theta)\sec(\theta)$

Dimostrazione. Si ottengono utilizzando le regole di derivazione e il teorema A.1.3. □

A.2 Derivata delle funzioni esponenziali

Si tratta ora il problema della ricerca della derivata delle funzioni esponenziali b^x, con $b \in \mathbb{R}^+$. Per calcolare la derivata di $f(x) = b^x$ in x_0, possiamo mettere in evidenza il punto x_0 scrivendo

$$f(x) = b^{x-x_0}b^{x_0} = f(x-x_0)f(x_0) \tag{A.3}$$

Sfruttando le note regole di derivazione la (A.3) diventa

$$f'(x) = f'(x-x_0)f(x_0)$$

da cui $f'(x_0) = f'(0)f(x)$. Quindi il problema della ricerca della derivata si riconduce alla verifica dell'esistenza di $f'(0)$ e al calcolo di $f'(0)$.
Per affrontare la discussione senza l'uso del concetto di limite, si introducono innanzitutto le definizioni di *insieme convesso* e *funzione convessa*.

Definizione A.2.1. *Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice convesso se per ogni coppia di punti appartenenti a C il segmento che li congiunge è contenuto in C.*

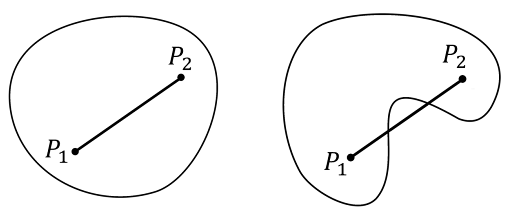

Figura A.2: A sinistra un insieme convesso, a destra un insieme non convesso.

Osservazione 28. Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ due punti appartenenti ad un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Ogni punto P appartenente al segmento $\overline{P_1P_2}$ si può scrivere come

$$P_t = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \quad \forall t \in [0, 1] \tag{A.4}$$

Quando $t = 0$ si ha $P_0 = (x_1, y_1) = P_1$, quando $t = 1$ si ha $P_1 = (x_2, y_2) = P_2$. Per i valori di t compresi tra 0 e 1, $P(t) \in \overline{P_1P_2}$. La (A.4) è chiamata forma parametrica del segmento $\overline{P_1P_2}$.
L'insieme C è convesso se $P_t = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \in C \ \forall t \in [0, 1]$.

Definizione A.2.2. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, si definisce epigrafico di f l'insieme dei punti del piano dato da*

$$E_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

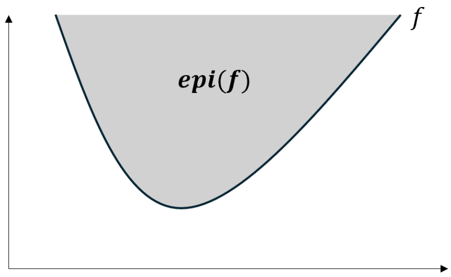

Figura A.3: Epigrafico di una funzione.

Osservazione 29. L'epigrafico di una funzione è l'insieme dei punti al di sopra del grafico della funzione e dei punti del grafico.

Definizione A.2.3. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, f si dice convessa se il suo epigrafico è un insieme convesso.*

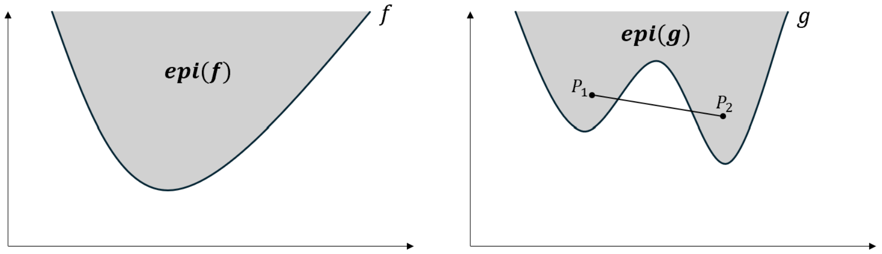

Figura A.4: f convessa, g non convessa.

Osservazione 30. Sono equivalenti le seguenti:

1. E_f convesso
2. il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è contenuto in E_f ovvero $f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in [0,1]$

Se E_f è convesso è ovviamente soddisfatta la seconda condizione.
Sia invece soddisfatta la seconda condizione e siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ appartenenti a E_f. Sia $t \in [0,1]$ e $P_t = ((1-t)x_1+tx_2, (1-t)y_1+ty_2))$ un generico punto del segmento $\overline{P_1P_2}$ allora

$$(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$$

da cui $P_t \in E_f$.
In altre parole, una funzione è convessa se per ogni coppia di punti appartenenti al grafico il segmento che li congiunge è contenuto in E_f.

Noto il grafico delle funzioni esponenziali b^x con $b \in \mathbb{R}^+$ è intuitivo pensare che si tratti di funzioni convesse. Procediamo verificando che sia soddisfatta la seconda condizione dell'osservazione 35. Innazitutto si può dimostrare che per $t = 1/2$ vale la condizione

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

ovvero $b^{(x_1+x_2)/2} < \frac{1}{2}(b^{x_1} + b^{x_2})$ che equivale $b^{(x_1+x_2)/2} - b^{x_1} < b^{x_2} - b^{(x_1+x_2)/2}$, che a sua volta, è equivalente

$$b^{x_1}(b^{(x_2-x_1)/2} - 1) < (b^{(x_2-x_1)/2} - 1)b^{(x_1+x_2)/2}$$

Quest'ultima disuguaglianza vale essendo $x_1 < (x_1 + x_2)/2$ quindi $b^{x_1} < b^{(x_1+x_2)/2}$.
Consideriamo ora $0 < t < 1/2$, vogliamo dimostrare

$$b^{(1-t)x_1+tx_2} < (1-t)b^{x_1} + tb^{x_2}$$

che aggiungendo il termine $tb^{(1-t)x_1+tx_2}$ ad entrambi i membri equivale a

$$tb^{(1-t)x_1+tx_2} - tb^{x_2} < (1-t)b^{x_1} - b^{(1-t)x_1+tx_2} + tb^{(1-t)x_1+tx_2},$$

ovvero

$$tb^{x_2}(b^{(1-t)(x_1-x_2)} - 1) < (1-t)b^{(1-t)x_2+tx_1}(b^{(1-t)(x_1-x_2)} - 1) \qquad \text{(A.5)}$$

Dato che $0 < t < 1/2$ allora $t < (1-t)$. Inoltre essendo $x_2 < tx_1 + (1-t)x_2$ allora $b^{x_2} < b^{tx_1+(1-t)x_2}$ da cui si verifica la (A.5). Sostituendo t con $1-t$ nel procedimento appena fatto si dimostra la convessità per $1/2 < t < 1$.

La convessità delle funzioni esponenziali ci permette di affrontare il problema della ricerca della derivata, in particolare di dimostrare l'esistenza di $f'(0)$.

Proposizione A.2.1. *Sia $b > 0$ allora $f(x) = b^x$ è derivabile in 0.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso $b > 1$ [2].
Sia $l_m(x) = 1 + mx$ la retta passante per $(0, 1)$.
Sia $A_f = (-\infty, \alpha]$ l'insieme dei coefficienti angolari $m \in \mathbb{R}$ di $l_m(x)$ tali per cui $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da negativo a positivo in $x = 0$.
Sia $B_f = [\beta, +\infty)$ l'insieme dei coefficienti angolari $m \in \mathbb{R}$ di $l_m(x)$ tali per cui $f(x) - l_m(x)$ cambia segno da positivo a negativo in $x = 0$.
Per definizione di derivata, tramite i punti di transizione, se $\alpha = \beta$ si avrebbe l'esistenza di un punto di transizione tra gli insiemi A_f e B_f, ovvero l'esistenza di $f'(0)$. Per costruzione $\alpha \leq \beta$, si vuole quindi dimostrare che $\alpha = \beta$.

Sia $x_2 > 0$ e $l_2(x) = 1 + \frac{f(x_2)-1}{x_2}x$ la retta passante per $(x_2, f(x_2))$ e $(0, 1)$.
Sia $x_1 < 0$ e $l_1(x) = 1 + \frac{f(x_1)-1}{x_1}x$ la retta passante per $(x_1, f(x_1))$ e $(0, 1)$.
Essendo f convessa valgono:

[2] Analogamente si dimostra il caso $0 < b < 1$.

i) $\forall x$, $0 < x < x_2$, si ha $l_1(x) < f(x) < l_2(x)$

ii) $\forall x$, $x_1 < x < 0$, si ha $l_2(x) < f(x) < l_1(x)$

Per definizione si ha $\beta \leq \frac{f(x_2)-1}{x_2}$ e $\frac{f(x_1)-1}{x_1} \leq \alpha$, imponendo $x_1 = -x_2 = -t$ con $t > 0$ si ottiene

$$\beta - \alpha \leq \frac{f(x_2)-1}{x_2} - \frac{f(x_1)-1}{x_1} = \frac{b^t - 1}{t} - \frac{b^{-t}-1}{-t} = \frac{b^{-t}}{t}(b^t - 1)^2 \quad \text{(A.6)}$$

Noto che $f(t) < l_2(t)$ per $0 < t < x_2$ si ha

$$b^t < 1 + \frac{b^{x_2}-1}{x_2} \implies \frac{b^t-1}{t} < \frac{b^{x_2}-1}{x_2}$$

Allora (A.6) diventa

$$\beta - \alpha < b^{-t}(b^t - 1)\frac{b^{x_2}-1}{x_2} \quad \text{(A.7)}$$

Sia $\beta - \alpha > 0$, sia $c = (\beta - \alpha)x_2/(b^{x_2} - 1)$ allora (A.7) diventa $g(t) = b^{-t}(b^t - 1) > c$.

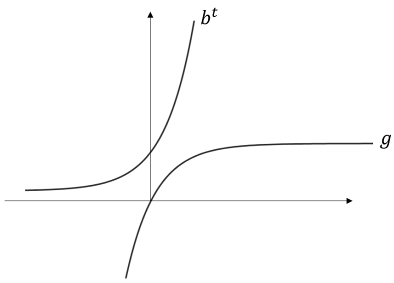

Figura A.5: Grafico di g.

Ma essendo $g(0) = 0$ e g continua, per t in un intorno di 0 si avrebbe anche $g(t) = b^{-t}(b^t - 1) < c$. Si ha un assurdo quindi si conclude che $\alpha = \beta$, da cui segue la tesi. □

Dimostrata la derivabilità delle funzioni esponenziali in $x_0 = 0$ si può enunciare il seguente teorema.

Teorema A.2.2. *Sia $b > 0$ allora $f(x) = b^x$ è derivabile e vale*

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = b^x$, $\forall x_0$ vale l'identità $f(x) = f(x - x_0)f(x_0)$ da cui per le note regole di derivazione $f'(x) = f'(x - x_0)f(x_0)$ e

$$f'(x_0) = f'(0)f(x_0)$$

□

Rimane da calcolare $f'(0)$ per ogni funzione esponenziale $f(x) = b^x$.
Di seguito si userà la notazione $exp_b(x)$ per indicare b^x.

Definizione A.2.4. *Il numero di Nepero e è il numero reale positivo per cui la funzione e^x ha come derivata sé stessa.*

Ad oggi sono note approssimazioni di e fino alla duemilionesima cifra decimale. Approssimativamente il suo valore è 2.7182818285.
Per il logaritmo in base e si utilizza la notazione ln.

Osservazione 31. Per il teorema A.2.2 abbiamo che la derivata della funzione $g(x) = e^x$ è $g'(x) = g'(0)g(x) = g'(0)e^x$, ma per definizione di e si ha che $g'(0) = exp'_e(0) = 1$.

Consideriamo ora il caso generale $f(x) = b^x$, con $b \neq e$.
Riscriviamo la funzione b^x come

$$b^x = e^{x \ln b} \tag{A.8}$$

Deriviamo entrambi i termini di (A.8), usando il teorema A.2.2 e la regola di derivazione della catena, e otteniamo

$$f'(0)b^x = exp'_e(x \ln b) \cdot e^{x \ln b} \cdot \ln b$$

che in $x = 0$ diventa

$$f'(0) = exp'_e(0) \cdot \ln b = \ln b$$

Osserviamo che nel caso di $f(x) = e^x$ continua a valere

$$f'(x) = f'(0)f(x) = \ln(e) \cdot e^x = 1 \cdot e^x = x^x$$

Si procede con il calcolo di derivate di alcune semplici funzioni.
Esempio 1: La derivata di $f(x) = 3^x$ è $f'(x) = ln(3) \cdot 3^x$.
Esempio 2: La derivata di $f(x) = \frac{1}{2}^x$ è $f'(x) = ln(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}^x = -\ln(2)\frac{1}{2}^x$.
Esempio 3: La derivata di $f(x) = 3^{4x^2}$ è $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^{4x^2} \cdot 8x$.
Esempio 4: La derivata di $f(x) = e^{4x^2}$ è $f'(x) = e^{4x^2} \cdot 8x$.

A.3 Derivata della funzione logaritmo

È possibile applicare il teorema 4.2.2 per calcolare la derivata della funzione $\ln(x)$. Siano $y = \ln(x)$, $x = e^y$ e x' la derivata di e^x rispetto ad y.
Si ottiene quindi

$$\ln'(x) = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Ricordando che $\ln(x) = \log_e(x) = \log_b(x) \cdot \ln(b)$ e sfruttando le note regole di derivazione otteniamo anche la seguente derivata

$$\log_b'(x) = \left(\frac{1}{\ln(b)}\ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(b)}\ln'(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

Bibliografia

[1] L. Biacino, *Atti del Convegno "Nona giornata nazionale di Analisi Non Standard nelle scuole superiori"*, Federazione italiana Mathesis gruppo di Verona (2019).

[2] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Pubblications, New York (1959).

[3] A. Genocchi, G. Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano*, Bocca, Torino (1884).

[4] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York (1952).

[5] H.C. Kennedy, *PEANO, Storia di un matematico*, Bollati Boringhieri (2020).

[6] C. Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*, Vol II, Ruddimans, Edinburgh (1742).

[7] J. Marsden, A. Weinstein, *Calculus Unlimited*, Benjamin-Cummings Publishing Co (1980).

[8] J. Marsden, A. Weinstein, *Calculus I*, Springer (1985).

[9] V.A. Rokhlin, Teaching mathematics to non-mathematicians, Fragments of a lecture to the Leningrad Mathematical Society, (20 Novembre, 1981).

Ringraziamenti

Doveroso per me ringraziare il professore Paolo Albano per il suo supporto, l'estrema disponibilità e i suoi preziosi consigli.

Ringrazio la mia famiglia per la costante presenza e Samuel per il supporto che mi dà ogni giorno. Questo piccolo traguardo è anche vostro.