Il ruolo del differenziale dal pensiero di Deleuze alle strutture sub-Riemanniane

Tesi di Laurea Triennale

Autore: Michele Priolo
Relatrice: Prof.ssa Giovanna Citti

Università degli Studi di Bologna
Anno Accademico 2023/2024

Usare il mondo secondo le sue particolari disponibilità
trasportare a forza il somaro musicale nel paesino
introdurre pezzi visivo-sonori condizionatori
offrire, poi, materiale di studio ai maniaci eletti;
muoversi nel fantastico muoversi nel reale è la stessa cosa
significa "ma non necessariamente" considerare nella foga creativa
il reale come immaginario,
vivere fuori da ogni schema che non sia
sistema universale musicale regolato dalla pazzia;
non avere né lasciare nostalgici spazi mentali.
Vivere esaurientemente collettivamente
l'immaginario e il reale vuol dire:
essere prodotti da un grosso trombone e
fare le capriole per terra.....

Marameo è un gesto di colore, di scherno,
condizionatore "capace di trovare modelli di vita fantastica"
che introdotto in quelle sole mie zone di comportamento
si instaura come misura socio-estetico-politico nell'ambiente
mirando di volta in volta a divenire metro
da cui lo spazio viene a trovarsi
in quantità proporzionale al modulo.
È un gesto, una parola valorizzata come misura fantastica del mondo.
È, infine, un esercizio musicale, costruttore,
innovatore del mondo, modulabile nel mondo;
è un po' l'equivalente del piffero,
risolve il paesaggio delirandolo.
Introdotto come prodotto estetico
fa della società della COCA COLA
la società musicale ed esaurendosi in casa
si definisce, si analizza, si documenta, si presenta.

Aldo Spoldi

Indice

1 Il divenire differenziale **5**

2 Varietà Differenziabili **8**
2.1 Elementi introduttivi alle varietà differenziabili 8
2.2 Campi di vettori e brackets 12
2.3 Gruppi di Lie 16

3 Varietà Riemanniane e sub-Riemanniane **27**
3.1 Varietà Riemanniane 27
3.2 Varietà sub-Riemanniane 31
3.3 Condizione di Hörmander 34

4 Varietà ed eterogenesi differenziale **36**
4.1 Varietà e molteplicità 36
4.2 Superfici Riemanniane ed attualizzazione 37
4.3 Superfici sub-Riemanniane e rizoma 38

Introduzione

Questo elaborato presenta alcuni aspetti delle tesi filosofiche di Deleuze e Guattari [1], [2], dandone un'interpretazione matematica basata principalmente sui lavori di Citti, Sarti e Piotrowski [3], in cui descrive un primo modello operatoriale di divenire differenziale eterogenico.

Nel capitolo 1 presentiamo il problema del divenire differenziale ed alcuni concetti deuleziani. Introduciamo la nozione di virtuale e la sua attualizzazione, che interpretiamo rispettivamente come vincoli differenziali che si attualizzano tramite processi d'integrazione. Già Deleuze fa riferimento esplicito alle varietà per descrivere il problema del divenire, segnalando però la necessità di superare alcune limitazioni imposte dalla geometria Riemanniana per descrivere alcuni problemi filosofici.

Per questo nel capitolo 2 presentiamo le varietà differenziabili, nel capitolo 3 le varietà riemanniane e le varietà sub-Riemanniane. La geometria di queste ultime è costituita da una terna (M, Δ, g) dove Δ è un sottofibrato del fibrato tangente, chiamato fibrato tangente ammissibile, e tutti gli oggetti differenziali dello spazio sono descritti in termini di campi vettoriali appartenenti a questo fibrato.

Infine, nel capitolo 4 mostriamo in che senso le varietà sub-Riemanniane consentono la descrizione di strutture eterogenee e la nozione di rizoma introdotte da Deleuze e Guattari [2].

Capitolo 1

Il divenire differenziale

Deleuze ha sviluppato un pensiero filosofico occupandosi di una vasta gamma di temi, dalla metafisica e l'ontologia alla teoria politica e la psicoanalisi. Tra le varie teorie, ha creato un modello per la descrizione delle idee e della percezione basato su concetti di differenza, divenire, molteplicità e creatività [1].

Egli propone una separazione tra un piano virtuale - intensivo e non percebibile - ed uno di attualizzazione - estensivo e percepibile. Il virtuale è intensivo nel senso che, sebbene non sia percepibile a priori, contiene in sé tutte le qualità necessarie al fine della propria costituzione, evoluzione ed attualizzazione - tra cui la propria percepibilità. Il piano virtuale è individuato da una distribuzione di operatori differenziali eterogenei. Ognuno di essi ha una natura propria e per questo motivo ciascuno è detto singolarità. I vincoli differenziali di cui è costituito sono dinamici, in continua evoluzione ed hanno inoltre la possibilità di ricombinarsi tra loro, creando così delle complesse strutture dette *assemblages*. Il processo di ricombinazione che costituice l'*assemblage* prende il nome di *agencement*; tale costruzione non è basata su una compatibillità logica delle diverse singolarità, ma sulla possibilità riorganizzativa dei vincoli differenziali stessi, dando così vita a nuovi possibili spazi e dinamiche. L'*agencement* è dunque un principio creativo.
Deleuze riprende il concetto di *individuation* di Simondon. Quest'ultimo identifica l'*individuation* [4] come il processo tramite cui un individuo emerge come unità distinta a partire da un campo di forze e relazioni preindividuali. Simondon sostiene che questo è un processo dinamico: non ha un'inizio ed una fine, piuttosto si presenta come una continua evoluzione ed il divenire delle forme consiste nel continuo passaggio da un piano preindividuale ad uno estensivo. Deleuze reinterpreta questo pensiero e lo contestualizza nel piano virtuale. Ispirandosi alla matematica, chiarisce in "Differenza e Ripetizione" [1] che l'individuazione ha un origine differenziale basata su differenze e contrasti. L'individuo emerge grazie ad un gioco di differenze d'intensità in un piano intensivo - il virtuale - e l'individuazione è il processo di sintesi di queste differenze. In Deleuze, i concetti di differenza e di differenziale vengono utilizzati nella loro accezione più vasta per descrivere l'evoluzione tramite problemi matematici, biologici, sociali, artistici, semiotici. Ognuno trova le proprie soluzioni tramite l'attualizzazione di vincoli differenziali in una maniera propria: «*un système de liaisons entre éléments différentiels, un système de rapports différentiels entre éléments génétiques. Si l'Idée est la différentielle de la pensée, il y a*

un calcul différentiel correspondant à chaque Idée, alphabet de ce que signifie penser »[5].
La forma è descritta come una struttura retificata intensiva, interconnessa, non gerarchica, composta da singolarità capaci d'interazione e influenza reciproca, vicendevolmente mutevoli e la cui manifestazione diventa *intensità sensibile* [1]. Il divenire viene interpretato come passaggio dal piano virtuale a quello di attualizzazione. In particolare è definito come la soluzione di un problema differenziale, la quale emerge tramite l'integrazione di una molteplicità di vincoli differenziali dando così vita alla sostanza, alle percezioni e più in generale alle morfologie estese.
In altre parole il divenire delle forme è l'attualizzazione di specifiche forme. Con eterogenesi differenziale si intende il processo di emergenza delle morfologie estese.

Per questi motivi lo spazio è privo di alcuna omogeneità, in continua mutazione, evoluzione. Vi è un superamento del dualismo tra *uno* e *molteplice*. Pensiamo, per fare un esempio empirico, alla configurazione del cervello: questo è creato da popolazioni neurali che presentano strutture diverse e sono descritte da operatori differenziali eterogenei. Queste popolazioni allo stesso tempo hanno un carattere comunicativo e riorganizzativo - *agencement* - capace di dare vita ad un nuovo uno - il cervello, l'*assemblage* - creando così possibilità che erano prima inconcepibili. Allo stesso tempo il cervello, come le popolazioni che lo compongono, è plastico nel senso che è in grado - e lo fa' continuamente - di rimodellare le proprie connessioni, generando a sua volta nuove forme; una riorganizzazione autonoma capace di far emergere nuove proprietà ed acquisire significato. L'*assemblages* crea quindi momento per momento il proprio spazio di esistenza ed espressione.

Come nella visione epistemologica fornita da Albert Lautman, la matematica è qui da considerarsi come linguaggio che è sempre relativo ad una specifica circostanza problematica e dove un suo importante obiettivo - se non il principale - è la formulazione del problema a cui volge lo sguardo.
Questa disciplina ha fin dall'origine seguito da vicino lo sviluppo del pensiero scientifico e filosofico, riuscendo sempre a fornire linguaggi e parole alle idee proposte da discipline diverse, sviluppando insieme concetti e parole. L'introduzione della nozione di limite e del calcolo differenziale risponde prima di tutto alla necessità di introdurre una nozione di infinito e infinitesimo che ha una sua curiosità puramente matematica, ma risponde anche al problema filosofico di distinguere l'infinito, dall'eterno, che la filosofia dei secoli precedenti faticava a distinguere. In parallelo con la fisica ha saputo superare la rigidità della geometria Euclidea, con l'introduzione della geometria Riemanniana, alla base dello spazio curvo e la relatività generale. A Deleuze non era sfuggita la dirompente novità di questa geometria, che ha messo al centro del suo progetto di descrizione delle idee. Tuttavia, ha anche tentato un superamento anche di queste strutture, cercando geometrie ancor più flessibili. Non stupisce che, negli stessi anni in cui il pensiero di Deleuze proponeva strutture sempre più flessibili, la matematica stesse continuando in autonomia la sua ricerca di astrazione, e di superamento dei vincoli differenziali. Matematici del calibro di Hörmander e Stein proposero un superamento della geometria Riemanniana, con l'introduzione della geometria sub-Riamanniana, in cui lo spazio tangente di dimensione fissa, è sostituito dallo spazio tangente ammissibile che può avere dimensione distinta da punto a punto, e che noi di seguito proponiamo come un primo strumento

per modellare l'idea di rizoma di Deleuze.

La creatività, la trasformazione, il movimento e l'influenza reciproca tra una serie di individui sono concetti fondamentali nel pensiero deleuziano. Questo scritto vuole, tra i vari propositi, evidenziare l'eterogenità dinamica dei processi vitali. Se assumessimo che «*dei vincoli fissi ed omogenei ben descrivano uno sciame di intelligenze o una folla di comportamenti, ridurremmo la dinamica a predeterminazione, il divenire ad automatismo, escludendo ogni possibile forma di aspetto creativo ed immaginativo* »(traduzione in italiano di [6]).

Capitolo 2

Varietà Differenziabili

2.1 Elementi introduttivi alle varietà differenziabili

Le varietà differenziabili sono una generalizzazione delle superfici regolari, ossia sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ dotati di una struttura differenziale. L'idea di una superficie astratta che non dipenda dallo spazio ambiente è già chiara in Gauss, più di un secolo e mezzo fa'. Per una sua formalizzazione matematica esaustiva però, ci è voluto un altro secolo; la ragione di questo ritardo è che, ai tempi di Gauss, il ruolo dei cambi di carte non era ancora stato ben compreso [7].

Diamo la definizione di varietà differenziale e riportiamo alcune sue proprietà, che ci saranno utili in seguito.

Definizione 2.1. Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\ k \geq 1$. Una **varietà differenziabile** di classe C^k e di dimensione n è un insieme M con da una famiglia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ dove $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to M$ una mappa iniettiva tali che:
i) $\bigcup_{\alpha \in J} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
ii) $\forall\ \alpha, \beta \in J$ tale che $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, gli insiemi $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$, $V_\beta = \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$ e la mappa $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha|_{\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)}$ è di classe C^k.
iii) La famiglia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathrm{x}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ è massimale rispetto le condizioni *i)* e *ii)*.
Se $k = +\infty,\ M$ viene detta varietà liscia.

Una varietà M di dimensione n verrà indicata con M^n, se vogliamo indicare esplicitamente la sua dimensione. Una famiglia $\{(U_\alpha, \mathrm{x}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ soddisfacente le condizioni *i)* e *ii)* è detta **struttura differenziale** o **atlante** su M. La coppia $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ con $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ è detta **parametrizzazione**, **carta** o sistema di coordinate di M in p. Le funzioni $\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}$, ove possibile comporle, sono dette funzioni di transizione o cambi di carta e la condizione *ii)* è detta compatibilità delle carte. $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ è detto **intorno di coordinate** in p e spesso lo indicheremo con V_α.
La condizione *iii)* significa che l'atlante di cui è dotato l'insieme M contiene tutte le carte possibili che soddisfano le condizioni *i)* e *ii)*. In ogni caso data una struttura differenziale $\mathcal{A}$ su M possiamo semplicemente completarla ad una massimale $\mathcal{A}_{\max}$ prendendo l'unione di $\mathcal{A}$ con tutte le paramtrizzazioni per cui continua a valere la condizione *ii)*. Questa condizione si richiede per ragioni concettuali e tecniche. Massimizzando un atlante assicuriamo che la struttura differenziale sia unica e che

questa non dipenda dalle carte date inizialmente: per esempio sulla sfera potremmo fornire diversi atlanti iniziali formati da proiezioni stereografiche rispetto diversi punti; considerare l'atlante massimale dei diversi atlanti ci assicura che la struttura differenziale ottenuta sarà la stessa (Theorem 1.29 di [8]). Inoltre permette l'uso di una qualsiasi carta compatibile con l'atlante iniziale, senza dover verificare necessariamente l'appartenenza allo stesso - si pensi alla traslazione di una carta - ed assicura la chiusura rispetto alcune operazioni naturali. Per maggiori dettagli si vedano [7], [8] e [9].
D'ora in poi diremo semplicemente che M è dotata di struttura differenziale, sottointendendo l'estensione a quella massimale. Inoltre per semplicità considereremo varietà lisce. Precisiamo subito che molte delle definizioni che daremo si possono adattare a varietà di classe C^k aggiustando opportunamente i gradi di regolarità richiesti.

Osservazione 2.1. Una struttura differenziale su un insieme M induce una topologia: $A \subseteq M$ è aperto $\iff \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap V_\alpha)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Osservare che con tale topologia $V_\alpha \subseteq M$ sono aperti e le parametrizzazioni sono funzioni continue.
Nel seguito supporremo sempre che siano verificate le seguenti due proprietà:
T2) M è spazio di Hausdorff.
N2) La topologia ha base numerabile.

Dalla proprietà T2) segue l'unicità del limite per successioni convergenti; da T2) e N2) segue che la connessione di una varietà è equivalente alla connessione per archi.

Definizione 2.2. Siano $M_1 = M_1^n$, $M_2 = M_2^m$ varietà differenziabili, $p \in M_1$ e $\varphi : M_1 \to M_2$ una funzione. φ si dice **differenziabile** in p se, presa una parametrizzazione $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^m \to M_2$, con $\varphi(p) \in \mathrm{y}(V)$, $\exists$ $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M_1$ una parametrizzazione intorno a p tale che $\mathbf{x} \circ \varphi \circ \mathbf{y}^{-1} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in p.
φ si dice differenziabile su un aperto di M_1 se lo è in ogni punto di tale aperto.

Allo stesso modo:

Definizione 2.3. Prese M_1, M_2 varietà differenziabili, una funzione $\varphi : M_1 \to M_2$ si dice di classe C^k in p se lo è vista in carte. φ si dice liscia se è C^∞.

Osservazione 2.2. Abbiamo assunto che le varietà considerate siano lisce. Se considerassimo varietà di classe C^k, $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ha senso parlare di regolarità di una funzione per gradi $j \leq k$.

Osservazione 2.3. Si dimostra facilmente che esiste una parametrizzazione $\mathbf{x}$ attorno a p tale per cui $\mathbf{x} \circ \varphi \circ \mathbf{y}^{-1}$ è differenziabile se e solo se per ogni parametrizzazione $\mathbf{z}$ attorno a p, $\mathbf{z} \circ \varphi \circ \mathbf{y}^{-1}$ è differenziabile. Dunque la definizione non dipende dalla scelta della parametrizzazione. Lo stesso vale per il grado di regolarità.

Inoltre continua a valere:

Proposizione 2.1. *Siano M, N varietà differenziabili e $\varphi : M \to N$ una funzione C^1 in $p \in M$. Allora φ è differenziabile in p.*

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia: quando leggiamo φ in carte, questa è una funzione di classe C^1 e dunque differenziabile in tal punto. □

Definizione 2.4. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e M una varietà differenziabile. Una mappa $\gamma : I \to M$ di classe C^1 è detta **curva parametrizzata** o, più semplicemente, **curva**.

Definizione 2.5. Una curva $\gamma : I \to M$, $[0,1] \subseteq I$ si dice C^1 a pezzi su $[0,1]$ se $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_h = 1$ tali che $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ è $C^1 \quad \forall\ i = 0, ..., h-1$.
La definizione si estende in modo ovvio su altri intervalli $[a,b]$.

Introduciamo ora la nozione di vettori tangenti alla varietà. Questi saranno indispensabili per la definizione di piani e fibrati tangenti, i quali ci permetteranno di riportare metodi di calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$ direttamente sulla varietà.

Partiamo dall'idea in $\mathbb{R}^n$: siano f una funzione differenziabile in un intorno di $q \in \mathbb{R}^n$, $I \coloneqq (-\epsilon, \epsilon)$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva differenziabile tale che $\gamma(0) = q$. Scritta $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ avremo $\gamma'(0) = (x_1'(0), ..., x_n'(0)) = v$. Possiamo restringere f alla curva γ ed esprimere la sua derivata direzionale lungo $v \in \mathbb{R}^n$ come

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{t=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_i)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) f$$

Quindi la derivata direzionale lungo v è un operatore sulle funzioni differenziabili dipendente esclusivamente da v. Passiamo ora al caso delle varietà.
A meno di precisazioni, considereremo sempre curve lisce.

Definizione 2.6. Sia $M = M^n$ una varietà differenziabile, $p \in M$. Prendiamo $\gamma : I \to M$ una curva parametrizzata tale che $\gamma(0) = p$ e poniamo
$\mathcal{L} = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f$ differenziabile in $p\}$. Il **vettore tangente** alla curva γ in $t = 0$ è la funzione

$$\begin{aligned} \gamma' : \mathcal{L} &\to \mathbb{R} \\ f &\overset{\gamma'(0)}{\longmapsto} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Un vettore tangente a M in p è un vettore tangente per qualche curva passante per p. L'insieme di tutti i vettori tangenti è detto **piano tangente** ad M in p ed è indicato da T_pM. Quest'ultimo ci fornisce un approssimazione lineare locale della varietà nel punto in cui è calcolato.

Se prendiamo una parametrizzazione $\mathbf{x}$: $U \to M$ intorno a p possiamo esprimere il vettore tangente $\gamma'(0)$ nella parametrizzazione $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} &q(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) = \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma(t), \quad f \circ \mathbf{x} = f(x_1, ..., x_n) \ \text{ e} \\ &\gamma'(0)f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x_1(t), ..., x_n(t))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) f \\ &\text{quindi} \ \ \gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \end{aligned}$$

L'ultima espressione ci mostra che il vettore tangente alla curva γ dipende solo dalle sue derivate espresse in un sistema di coordinate.

Osservare che $\frac{\partial}{\partial x_i}$ è il vettore tangente a p della curva coordinate $x_i \mapsto \mathbf{x}(0, ..., x_i, ..., 0)$. Segue pure che, con le usuali operazioni sulle funzioni $(+, \cdot)$, T_pM è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; la scelta di una parametrizzazione $\mathbf{x}$: $U \to M$ ne induce la base associata $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Si noti che $dim(T_pM) = n \quad \forall\, p \in M$.
Con queste nozioni, possiamo estendere il concetto di differenziale di una mappa. Riportiamo il seguente risultato, omettendone la dimostrazione la quale si può trovare nel capitolo 0 di "*Riemannian Geometry*" [7].

Lemma 2.1. *Siano $p \in M = M^m$, $N = N^n$ varietà differenziabili e $\varphi : M \to N$ una funzione differenziabile. Preso $v \in T_pM$, scelta α curva in M passante per p in $t = 0$ tale che $\alpha'(0) = v$ poniamo $\beta = \varphi \circ \alpha$. Allora la mappa $(\mathrm{d}\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ data da $(\mathrm{d}\varphi)_p[v] \coloneqq \beta'(0)$ è ben definita ed è lineare.*

Chiamiamo tale mappa **differenziale** di φ in p.

Osservazione 2.4. Possiamo creare la mappa $\mathrm{d}\varphi(p) = (\mathrm{d}\varphi)_p \in Hom(T_pM,\ T_{\varphi(p)}N)$. Spesso ometteremo la dipendenza dal punto $p \in M$ del differenziale.

Inoltre continua a valere il teorema di composizione dei differenziali:

Proposizione 2.2. *Se $f : M_1 \to M_2, \quad g : M_2 \to M_3,\ f(p) = q$ differenziabili allora $\mathrm{d}(g \circ f)_p = (\mathrm{d}g)_q(\mathrm{d}f)_p$*

Definizione 2.7. Una mappa $\varphi : M \to N$ invertibile, differenziabile e la cui inversa è anch'essa differenziabile è detta **diffeomorfismo**. In tal caso M e N si dicono diffeomorfe. φ si dice **diffeomorfismo locale** in $p \in M$ se lo è una sua restrizione su un'intorno di p (restringendo opportunamente anche l'immagine).

Definizione 2.8. Una mappa differenziabile $f : M \to N$ per cui il differenziale $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ è iniettivo $\forall\, p \in M$ è detta **immersione**. Inoltre se f è un omeomorfismo con $f(M) \subseteq N$ dotato della topologia di sottospazio allora si dice che f è un **incorporamento**.

Definizione 2.9. $M \subseteq N$ tale per cui l'inclusione $\iota : M \to N$ è un incorporamento è detta sottovarietà di N.

Anche in questo contesto, continuano a valere importanti risultati già visti in $\mathbb{R}^n$: il differenziale di un diffeomorfismo è un isomorfismo di spazi vettoriali (da cui segue che varietà diffeomorfe hanno la stessa dimensione) e vale ancora il teorema della funzione inversa per le varietà:

Teorema 2.1. *Se $\varphi : M \to N$ differenziabile e $p \in M$ tale che $\mathrm{d}\varphi_p$ è invertibile, allora φ è un isomorfismo locale.*

Osservazione 2.5. Un immersione è localmente iniettiva ma non è detto che lo sia globalmente.

2.2 Campi di vettori e brackets

Vogliamo ora introdurre il concetto di campo di vettori su una varietà ed alcune loro importanti caratteristiche. Abbozziamo per prima cosa l'idea di fibrato di una varietà.
Data una varietà $M = M^n$ con atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, possiamo considerare l'insieme

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M,\ v \in T_pM\}$$

e dotarlo della struttura differenziale $\{W_\alpha, \Phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dove $\forall \alpha \in I,\ W_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ e $\forall\ (q, v) \in W_\alpha,\ \Phi_\alpha(q, v) = (\varphi_\alpha(q),\ \mathrm{d}\varphi_\alpha[v])$. Con questo atlante TM assume la struttura di varietà $2n$-dimensionale ed è detto **fibrato tangente** di M. In pratica teniamo conto per ogni punto della varietà anche di tutti i suoi possibili vettori tangenti.

Definizione 2.10. Un campo di vettori X su una varietà differenziabile M è una mappa

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto (p, v) \end{aligned}$$

Il campo si dice differenziabile se tale mappa lo è. Analogamente diremo che X è di classe $C^k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ se la mappa lo è.

Considerata una parametrizzazione $\mathbf{x}$: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, possiamo scrivere

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove ogni $a_i : U \to \mathbb{R}$ è una funzione e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1,\dots,n}$ è la base associata a $\mathbf{x}$. Si ha che il campo è differenziabile o di classe C^k se e solo se lo sono le funzioni a_i. Ricordiamo che, se a_i sono di classe C^k per qualche parametrizzazione, la mantengono in ogni altra parametrizzazione.
Ricordando la definizione 2.6 di vettore tangente, possiamo associare ad ogni campo di vettori un operatore differenziale $X : \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ dove
$\mathcal{L} = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f$ differenziabile$\}$ e $\mathcal{F} = \{f : M \to \mathbb{R}$ funzione$\}$ definito nella seguente maniera:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

dove, con abuso di notazione, f indica l'espressione di f nella parametrizzazione $\mathbf{x}$. É facile mostrare che la funzione ottenuta Xf non dipende dalle carte. A volte useremo la notazione $X = v \cdot \nabla = (v_1, ..., v_n) \cdot (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$.

D'ora in avanti, a meno di specificazioni, considereremo campi di vettori e funzioni lisce, ossia di classe C^∞. Indicheremo con $\mathcal{D} = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$. Nonostante questa assunzione per la trattazione a seguire basta richiedere una regolarità inferiore (C^2) dei campi e delle funzioni considerate, aggiustando opportunamente i gradi di regolarità delle funzioni ottenute dopo l'applicazione dell'operatore.

In questo contesto è immediato che X è liscio se e solo se Xf è liscia $\forall f \in \mathcal{D}$ ossia se e solo se $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Durante il resto della trattazione, useremo sempre lo stesso simbolo per indicare i campi vettoriali e gli operatori associati con gli stessi coefficienti.
L'interpretazione di X come operatore ci permette inoltre di considerarne la sua iterazione e/o combinazione con un secondo campo Y. In generale non otteniamo un nuovo campo, perché il risultato ottenuto potrebbe includere derivate di ordine superiore al primo, ma vale l'affermazione seguente:

Proposizione 2.3. *Siano X, Y due campi vettoriali lisci su M. Allora $[X, Y] \coloneqq XY - YX$ è un campo di vettori liscio su M.*

Dimostrazione. Prendiamo $p \in M$ ed una parametrizzazione $\mathbf{x}$: $U \to M$ su un suo intorno. Scriviamo

$$X = \sum_{i=}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \quad Y = \sum_{i=}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{con} \quad a_i, b_i \in C^\infty(U)$$

siccome i campi sono lisci. Allora $\forall\ f \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}(XY - YX)f &= X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - Y\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_j},\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del teorema di Schwartz sulla commutatività delle derivate parziali per funzioni di classe C^2; inoltre tutti i coefficienti erano di classe C^∞, e conservano questa proprietà. Quindi nelle coordinate date da $\mathbf{x}$ si ha

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

□

Si noti che avremmo potuto richiedere che i campi vettoriali fossero $C^k,\ k \geq 2$ ottenendo un campo vettoriale di classe C^{k-1}.

Definizione 2.11. Il campo ottenuto $[X, Y]$ è detto **Lie bracket** o **commutatore**.

Osservazione 2.6. In questo caso T_pM ha la stessa dimensione di M ed abbiamo automaticamente che $[X, Y](p) = [X, Y](Id)|_p \in T_pM \quad \forall\ p \in M$. Tale fatto non sarà più vero nelle distribuzioni delle varietà sub-Riemanniane. In questo caso il bracket avrà un ruolo fondamentale nel creare "nuove possibili direzioni" di spostamento.

Prima di dare qualche interpretazione del bracket, vediamone alcune proprietà fondamentali:

Proposizione 2.4. $\forall\ X, Y, Z$ *campi di vettori su* M

i) Anticommutatività: $[X, Y] = -[Y, X]$

ii) Bilinearità: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

iii) Identità di Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$

Dimostrazione. La *i)* e *ii)* sono ovvie. Per la *iii)* osserviamo che

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \tag{1}$$

mentre

$$\begin{aligned}
&[[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] \overset{i)}{=} -\Big([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]]\Big) = \\
&= -(XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY) = \\
&= -XYZ - ZYX + YXZ + ZXY
\end{aligned} \tag{2}$$

ed otteniamo la *iii)* sommando le espressioni (1) e (2). Infine per la *iv)*

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= (fX(g)Y + fgXY) - (gY(f)X + gfYX) = \\
&= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
\end{aligned}$$

□

Per dare un'interpretazione del bracket abbiamo bisogno di qualche nozione sulle equazioni differenziali. Siccome le varietà sono localmente diffeomorfe a $\mathbb{R}^n$, vi si estende naturalmente il teorema di esistenza locale, unicità e dipendenza dai dati iniziali della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria (EDO).

Definizione 2.12. Una curva $\gamma \in C^1$ si dice **curva integrale** di un campo X se $\gamma' = X\gamma$.

Similmente definiamo:

Definizione 2.13. Presa $\gamma : [0, 1] \to M$ una curva C^1 a pezzi, diciamo che γ è una **curva integrale a pezzi** dei campi vettoriali $X_1, ..., X_m$ se $\exists\ 0 = t_0 < ... < t_h = 1$ tali che $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]} \in C^1$ ed $\exists\ a_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i(\gamma(t)), \quad \forall t \neq t_k$$

Indicheremo con (PC) il problema di Cauchy che consiste nel trovare la soluzione di un'equazione differenziale la quale soddisfi una condizione iniziale. Siccome un campo vettoriale X su M è un operatore differenziale al primo ordine, possiamo riscrivere il teorema come:

Teorema 2.2. *Sia X campo di classe C^1 su M, $p \in M$. Allora $\exists\ V \subseteq M$ intorno di p e una mappa C^1 $\psi : (-\delta, \delta) \times V \to M$ tale che $\forall\ q \in V$ la curva* $t \mapsto \psi(t, q)$ *è l'unica curva che soddisfa il (PC)* $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q)) \\ \varphi(0, q) = p \end{cases}$

Una curva che soddisfa il (PC) è detta **traiettoria** passante per p. La funzione $\psi(t, q)$ è detta **flusso locale** di X ed è solitamente indicata con $exp(tX)(q)$.

Daremo ora un'interpretazione differenziale della nozione di commutatore in termini di curve integrali dei campi. Presi due campi vettoriali lisci X, Y, il commutatore $[X, Y]$ può essere interpretato come la derivazione di Y lungo la traiettoria di X: immaginiamo di posizionarci in un punto $p \in M$ e di seguire la curva integrale di X e subito dopo muoverci lungo il flusso di Y; cerchiamo ora di tornare indietro seguendo questa volta il flusso di $-X$ seguito da quello di $-Y$. In generale questo percorso non è chiuso: il bracket ci dice esattamente quanto dovremmo muoverci per tornare al punto p, ossia indica quanto non sia commutativo lo spostamento lungo una traiettoria di X e di Y.

Quanto detto è motivato dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.5. *Siano X e Y due campi differenziabili su M. Sia poi $p \in M$ e $\psi_t(q) = exp(tX)(q)$ il flusso locale di X in un intorno $V \ni p$. Allora*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [Y - (\mathrm{d}\psi_t)Y](\psi_t(p))$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che, presa $h : (-\delta, \delta) \times V \to \mathbb{R}$ differenziabile con $h(0, q) = 0 \quad \forall q \in V$ allora $\exists\ g : (-\delta, \delta) \times V \to \mathbb{R}$ tale che $h(t, q) = tg(t, q)$. In particolare $\frac{\partial h}{\partial t}(t, q)\Big|_{t=0} = g(0, q)$. Basta prendere, fissato $t \in (-\delta, \delta)$,

$$g(t, q) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial (ts)}(ts, q)\ \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{t} \frac{\partial h}{\partial (ts)}(ts, q)\ \mathrm{d}(ts) =$$
$$= \frac{1}{t}\Big(h(t, q) - h(0, q)\Big) = \frac{1}{t}\ h(t, q)$$

Sia ora f differenziabile intorno a p e poniamo $h(t, q) = f(\psi_t(q)) - f(q)$.
$h(0, q) = 0 \quad \forall q \in V$, quindi prendiamo la $g(t, q)$ come sopra. Abbiamo che

$$f \circ \psi_t(q) = f(q) + tg(t, q) \ \text{ e } \ g(0, q) = Xf(q). \ \text{Inoltre}$$
$$(\mathrm{d}\psi_t Y) f(\psi_t(p)) = Y(f \circ \psi_t)(p) = Yf(p) + t(Yg(t, p)).$$

Quindi

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [Y - (\mathrm{d}\psi_t)Y] f(\psi_t(p)) = \lim_{t \to 0} \Big([\frac{Yf(\psi_t(p) - Yf(p)}{t} - Y(g(t, p))\Big) =$$
$$= X(Yf)(p) - Y(Xf)(p)$$

□

Esempio 2.1. Prendiamo i due campi differenziabili su $\mathbb{R}^2$ dati da

$$X = \partial_x, \quad Y = x\,\partial_y$$

Diamo una rappresentazione grafica dei campi $X, Y, [X, Y]$ e di due curve che si muovono lungo le linee di flusso dei campi X, Y:

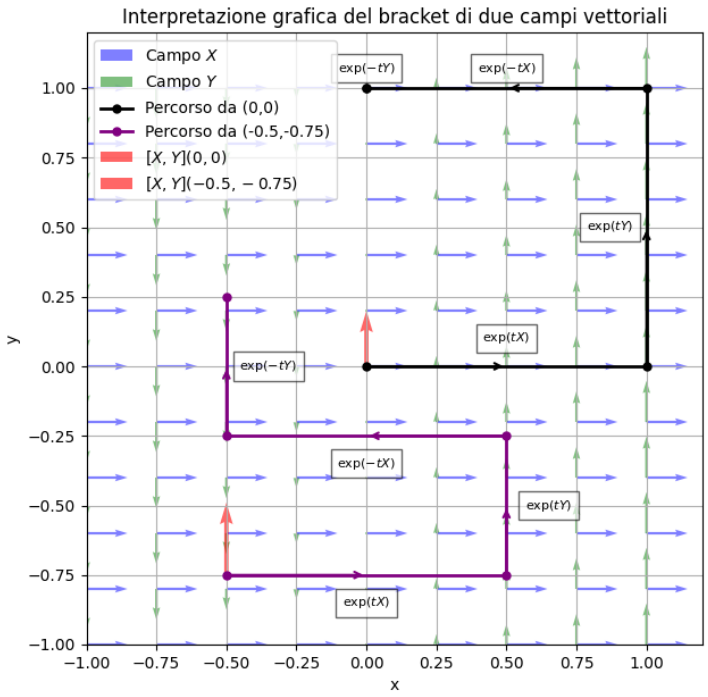

Figura 2.1: Il percorso nero parte da $(0, 0)$. Segue inizialmente la curva integrale di X fino a $(1, 0)$ per poi seguire il flusso di Y fino $(1, 1)$; poi segue il flusso di $-X$ fino $(0, 1)$ ed infine quello di $-Y$ che in $(0, 1)$ è la curva costante in quel punto. Allo stesso modo il percorso viola rappresenta lo spostamento da $(-0.5 - 0.75)$ muovendosi in primis lungo la curva integrale di X fino a $(0.5, -0.75)$, poi lungo il flusso di Y fino $(0.5, -0.25)$, dopodichè lungo $-X$ fino $(-0.5, -0.25)$ per arrivare a $(-0.5, 0.25)$ seguendo il flusso di $-Y$. Questi percorsi non sono chiusi.

2.3 Gruppi di Lie

In questa sezione analizzeremo un particolare tipo di varietà differenziabili, i gruppi di Lie. Come vedremo questa struttura matematica è estremamente rigida e non sarà quindi utile per la descrizione del divenire eterogenico. Vista però la sua importanza a livello matematico ne diamo comunque un accenno. Procediamo col dare la definizione di gruppo di Lie e studiarne alcune proprietà importanti.

Definizione 2.14. Un **gruppo di Lie** è un gruppo G che è anche una varietà differenziabile, ossia dotato di una struttura differenziale, tale per cui la mappa

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

è almeno C^1 ($G \times G$ è dotato della struttura differenziale prodotto).
In questo elaborato tratteremo gruppi di Lie in cui la funzione $(g,h) \mapsto gh^-1$ è C^∞.

Osservazione 2.7. Segue che le traslazioni sinistre e destre $L_g(h) = gh, R_g(h) = hg$ sono diffeomorfismi $\forall g \in G$: infatti $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$ e sono tutte C^1, quindi anche differenziabili.
Inoltre $\mathrm{d}L_g \circ \mathrm{d}L_h = \mathrm{d}L_{gh} \quad \forall g,h \in G$.

Essendo un gruppo di Lie una varietà differenziabile, possiamo calcolare in ogni punto $h \in G$ il relativo piano tangente T_hG.
Per il momento limitiamoci a fare qualche esempio.

Esempio 2.2. $(\mathbb{R}^n, +)$ *è un gruppo di Lie:* ha chiaramente la struttura di gruppo e pure quella di varietà differenziabile. Inoltre la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto x - y \quad \text{è } C^\infty. \end{aligned}$$

Osservazione 2.8. In questo caso $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad (\mathrm{d}L_x)_y = I_n$. Infatti presa $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \quad tc \quad \gamma(0) = y \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma'(0) = h \in T_y\mathbb{R}^n$ allora

$$(\mathrm{d}L_x)_y(h) \overset{def}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_x(\gamma(t)))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+\gamma(t))\Big|_{t=0} = \gamma'(0) = h$$

Lo stesso vale per R_x.

Esempio 2.3. Gruppo delle isometrie del piano
Mostriamo che il gruppo generato da rotazioni e traslazioni di $\mathbb{R}^2$ *rispetto l'operazione di composizione è un gruppo di Lie.*
Tale gruppo viene solitamente indicato con i simboli $Iso(\mathbb{R}^2)$ o $E(2)$ ed è chiamato gruppo delle isometrie del piano. In particolare $E(2)$ è generato dalle funzioni:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T_{(a,b)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi],\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Mostriamo per prima cosa che questo insieme possiede la struttura di gruppo rispetto alla composizione. Osserviamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} R_{\theta_1} \circ R_{\theta_0} &= R_{\theta_0+\theta_1} \quad \text{è ancora una rotazione} \\ T_{(a_1,b_1)} \circ T_{(a_0,b_0)} &= T_{(a_0+a_1,b_0+b_1)} \quad \text{è ancora una traslazione} \\ T_{(a_1,b_1)} \circ R_{\theta_1} \circ T_{(a_0,b_0)} \circ R_{\theta_0} &= T_{(a_2,b_2)} \circ R_{\theta_1+\theta_0} \quad \text{è ancora una rototraslazione} \end{aligned}$$

dove $(a_2,b_2) = (R_{\theta_1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix})^T$.
Dunque un generico elemento di questo gruppo si scriverà come $T_{(a,b)} \circ R_\theta$. Quindi valgono:
i) Associatività: la composizione di funzioni è banalmente associativa

ii) Elemento neutro: $e = id_{\mathbb{R}^2} = T_{(0,0)} = R_0 \in E(2)$
iii) Elemento inverso:

$$\begin{aligned}(R_\theta)^{-1} &= R_{-\theta} \in E(2)\\ (T_{(a,b)})^{-1} &= T_{-(a,b)} \in E(2)\\ (T_{(a,b)} \circ R_\theta)^{-1} &= R_\theta^{-1} \circ T_{(a,b)}^{-1} \in E(2)\end{aligned}$$

iv) Chiusura: ci basta osservare che

$$(T_{(a_1,b_1)} \circ R_{\theta_1})^{-1} \circ T_{(a_0,b_0)} \circ R_{\theta_0} = R_{-\theta_1} \circ T_{(a_0-a_1,b_0-b_1)} \circ R_{\theta_0} = T_{(a_2,b_2)} \circ R_{(\theta_0-\theta_1)} \in E(2)$$

dove $\quad (a_2, b_2) = R_{\theta_1} \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ b_0 - b_1 \end{pmatrix}$

Osservazione 2.9. Da quanto detto sopra si ha che $\langle T_{(a,b)} \rangle_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}, \langle R_\theta \rangle_{\theta\in\mathbb{R}} = SO(2)$ sono sottogruppi di $E(2)$. In particolare $\langle T_{(a,b)} \rangle_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ è normale.

Si noti che le funzioni $T_{(a,b)}, R_\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

$E(2)$ è un gruppo di Lie: assume infatti la struttura di varietà differenziabile di dimensione 3.
In particolare $E(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$. Intuitivamente possiamo pensare una generica funzione di traslzione $T_{(a,b)}$ come un elemento $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ mentre una rotazione R_θ come $e^{i\theta} \in S^1$. Con un po' d'abuso di notazione, identificheremo $\theta = e^{i\theta}$. Esplicitamente possiamo definire una carta locale: detto $v = (a, b)$, definiamo

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 \times S^1 &\to E(2)\\ (v, \theta) &\mapsto T_v \circ R_\theta\end{aligned}$$

Si mostra che con carte siffatte, facendo un po' di attenzione alla parametrizzazione di S^1, possiamo dotare $E(2)$ di un atlante formato da due carte. La legge di gruppo si trasporta quindi su $(\mathbb{R}^2 \times S^1, *)$ diventando:

$$\begin{aligned}&(v_1, \theta_1) * (v_0, \theta_0) \overset{\varphi}{\mapsto} (T_{v_1} \circ R_{\theta_1}) \circ (T_{v_0} \circ R_{\theta_0}) =\\ &= T_{R_{\theta_1}(v_0)+v_1} \circ R_{\theta_0+\theta_1} \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} (R_{\theta_1}(v_0) + v_1, \theta_0 + \theta_1)\end{aligned}$$

ossia

$$(v_1, \theta_1) * (v_0, \theta_0) = (R_{\theta_1}(v_0) + v_1, \theta_0 + \theta_1)$$

In particolare, usando le regole di composizione e inversione scritte sopra assieme alla linearità di R_θ si ottiene

$$(v_0, \theta_0)^{-1} = (R_{\theta_0}^{-1}(-v_0), -\theta_0) = (-R_{-\theta_0}(v_0), -\theta_0).$$

Dunque l'operazione $E(2) \times E(2) \to E(2)$ che associa $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ corrisponde, quando vista in carta, ad una funzione C^∞: infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times S^1 &\to \mathbb{R}^2 \times S^1\\ ((v_1, \theta_1), (v_0, \theta_0)) &\mapsto (v_1, \theta_1) * (v_0, \theta_0)^{-1}\end{aligned}$$

e per quanto detto sopra

$$(v_1, \theta_1) * (v_0, \theta_0)^{-1} = (v_1, \theta_1) * (-R_{-\theta_0}(v_0), -\theta_0) =$$
$$= (R_{\theta_1}(-R_{-\theta_0} + v_1), \theta_1 - \theta_0) = (-R_{\theta_1 - \theta_0}(v_0) + v_1, \theta_1 - \theta_0).$$

La regolarità di tale funzione è ovvia in quanto composizione di funzioni regolari, quali sono le rotazioni, traslazioni e le loro somme. Quindi $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ è $C^\infty \supseteq C^1$. Abbiamo dunque mostrato definitivamente che $E(2)$ possiede la struttura di gruppo di Lie e possiamo inoltre affermare (grazie all'osservazione 2.7) che le funzioni

$$L_g : E(2) \to E(2), \qquad R_g : E(2) \to E(2)$$
$$h \mapsto gh, \qquad h \mapsto hg$$

sono dei diffeomorfismi.

Passiamo ora alla definizione dei campi invarianti a sinistra. Come vedremo, questi rappresentano proprio i campi per cui la derivazione commuta con l'azione degli elementi del gruppo. Questo risultato gioca un ruolo fondamentale, specialmente in problemi legati alla convoluzione su gruppi di Lie, all'analisi armonica, e teoria delle rappresentazioni.

Definizione 2.15. Sia G un gruppo di Lie e $L_g : G \to G$ la traslazione a sinistra di g ossia $h \overset{L_g}{\longmapsto} gh$. Sia poi $X : G \to TG$ un campo di vettori su G. Diciamo che X è **invariante a sinistra** se

$$\mathrm{d}L_g X = X \quad \forall g \in G$$

Esplicitamente significa $\quad (\mathrm{d}L_g)_h X(h) = X(gh) \quad \forall g, h \in G \qquad (1)$

Volendo interpretare i campi di vettori differenziabili come operatori sullo spazio di funzioni $\mathcal{L} = \{f : G \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ è differenziabile}\}$, l'invarianza a sinistra significa

$$(\mathrm{d}L_g)_h X(f)\Big|_h = X(f)\Big|_{gh} \quad \forall g, h \in G \qquad (2)$$

Allo stesso modo si definisce **l'invarianza destra** per un campo di vettori, usando R_g al posto di L_g.
Un campo X che è invariante sia a destra che a sinistra si dice **bi-invariante**.

D'ora in poi, ci concentreremo sull'invarianza a sinistra. Una trattazione analoga può essere fatta per quella destra. A meno di precisazioni esplicite, G indicherà un gruppo di Lie, $e \in G$ il suo elemento neutro ed X, Y indicheranno generalmente dei campi di vettori su G.
Volendo esplicitare il significato dell'espressione (1) scritta sopra, prendiamo $\gamma : I \to G$ curva liscia tale che $\gamma(0) = h,\ \gamma'(0) = X(h) \in T_h G$. Allora si ha

$$(\mathrm{d}L_g)_h X(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_g(\gamma(t)))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

e la condizione di invarianza è quindi che quest'espressione sia uguale a $X(gh)$.
Per l'espressione (2) invece si ha

$$X(f)|_{gh} = (\mathrm{d}L_g)_h X(f)\Big|_h \overset{\text{def}}{=} X(f \circ L_g)\Big|_h$$

In pratica derivare f lungo X e calcolarla in gh è equivalente a derivare $f \circ L_g$ lungo X e poi calcolarla in $h \quad \forall g, h \in G$.

Osservazione 2.10. Quando $h = e \in G$ l'ultima espressione scritta diventa

$$Xf\Big|_g = X(f \circ L_g)\Big|_e \quad \forall g \in G$$

In termini geometrici l'invarianza a sinistra di un campo di vettori X ci dice che la sua direzione ed intensità non cambiano quando si applica una traslazione a sinistra. In pratica trasformando un qualsiasi punto $h \in G$ tramite una traslazione sinistra di g, il campo verrà traslato ma la sua struttura rimarrà sostanzialmente invariata, indicando quindi una simmetria del campo rispetto all'operazione di spostamento in G.

Esempio 2.4. Immaginiamo per esempio che $G = SO(3)$ e X un campo vettoriale su G invariante a sinistra (nel contesto della fisica X potrebbe rappresentare un campo di velocità rotazionale). L'invarianza a sinistra ci dice che la direzione del campo di velocità non cambia applicando una rotazione a sinistra di $g \in SO(3)$.

Osservazione 2.11. I campi di vettori invarianti a sinistra sono completamente determinati dai loro valori in un singolo punto di G. Infatti preso un campo di vettori X invariante a sinistra su G e $g \in G$ allora si ha

$$X(h) = X(hg^{-1}g) = (\mathrm{d}L_{hg^{-1}})_h X(g) \quad \forall h, g \in G$$

dove la seconda uguaglianza è data dalla definizione d'invarianza.

Quest'osservazione ci permette introdurre un'ulteriore struttura su G nella seguente maniera: ad ogni vettore tangente $X_e \in T_eG$ associamo il relativo campo invariante a sinistra dato da

$$X(g) \coloneqq (\mathrm{d}L_g)_e X_e.$$

Osservazione 2.12. Tutto è ben posto: $(\mathrm{d}L_g)_e : T_eG \to T_gG, \quad X_e \in T_eG,$
$G \ni g \overset{X}{\mapsto} (\mathrm{d}L_g)_e X_e \in T_gG$ e tale campo è effettivamente invariante a sinistra:

$$(\mathrm{d}L_g)_h X(h) \overset{\text{def}}{=} (dL_g)_h (\mathrm{d}L_h)_e X_e \overset{(1)}{=} (\mathrm{d}(L_g \circ L_h))_e X_e = (\mathrm{d}L_{gh})_e X_e \overset{\text{def}}{=} X(gh)$$

dove la $\overset{(1)}{=}$ è vera per il teorema di composizione dei differenziali. Viceversa preso X un campo di vettori invariante a sinistra allora

$$\forall g \in G \quad X(g) = (\mathrm{d}L_g)_e X(e)$$

Questo fatto ci permette di interpretare un campo di vettori X su G invariante a sinistra come differenziali di funzioni di traslazione, calcolati su uno specifico vettore $X_e \in T_eG$:

$$\begin{aligned} X = (\mathrm{d}L)_e X_e : G &\to T_gG \\ g &\mapsto X(g) = (\mathrm{d}L_g)_e X_e \end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Siano X, Y due campi di vettori lisci su G invarianti a sinistra. Allora il loro bracket $[X, Y]$ è ancora invariante a sinistra.*

Dimostrazione. Interpretiamo X, Y come operatori su $\mathcal{D}$ (nella solita notazione). Allora $\forall\ g \in G, \quad \forall\ f \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{d}L_g[X,Y]f = [X,Y](f \circ L_g) = (XY - YX)(f \circ L_g) =$$
$$= X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) = X(\mathrm{d}L_g Y(f)) - Y(\mathrm{d}L_g X(f)) \overset{\text{inv}}{=}$$
$$\overset{\text{inv}}{=} X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X,Y](f)$$

dove per brevità non abbiamo esplicitato le dipendenze dagli $h \in G$. □

Definizione 2.16. Presi $X_e, Y_e \in T_eG$ poniamo

$$[X_e, Y_e] \coloneqq [X,Y](e)$$

dove $[\cdot,\cdot]$ nel secondo termine è il commutatore degli operatori differenziali associati ai campi e X, Y sono relativamente i campi sinistra-invarianti tali che $X(e) = X_e, \quad Y(e) = Y_e$ che, per quanto detto nell'osservazione 2.12, sono unici.
$[\cdot,\cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ è detta **parentesi di Lie**.

Definizione 2.17. Sia G un gruppo di Lie. Chiamiamo **algebra di Lie** lo spazio vettoriale T_eG tangente a G nel suo elemento neutro e. L'algebra viene indicata con $\mathcal{G}$ ed è dotata della parentesi di Lie.
In altre parole $\mathcal{G}$ è lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G.

L'algebra di Lie è una linearizzazione del gruppo vicino all'identità. Più precisamente gli elementi di $\mathcal{G}$ sono le derivate direzionali di curve nel gruppo passanti per l'identità. Un generico elemento di $\mathcal{G}$ si ottiene prendendo una curva liscia $\gamma : I \to G$ passante per $\gamma(0) = e$ ed avremo $X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t))\Big|_{t=0} \in \mathcal{G}$.

Definizione 2.18. Sia G un gruppo di Lie che agisce su una varietà differenziabile M tramite

$$\Phi : G \times M \to M, \quad (g,x) \mapsto \Phi(g,x).$$

Una direzione $X \in T_xM$ si dice **compatibile con l'azione di** G se il differenziale dell'azione preserva X, ossia:

$$\mathrm{d}\Phi_g(X) \in T_{\Phi(g,x)}M, \quad \forall g \in G.$$

Ciò implica che la traiettoria generata da X si trasforma in modo naturale sotto l'azione del gruppo.
Preso un qualsiasi vettore $X_e \in \mathcal{G}$ possiamo definire il campo vettoriale su M

$$X^*(p) \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\Phi(exp(tX_e)(p)\Big)\Big|_{t=0}$$

X^* si dice **campo vettoriale fondamentale** ed in ogni punto $p \in M$ l'insieme delle direzioni individuate da questi campi è detto **spazio delle direzioni fondamentali**. In parole semplici $X^*(p)$ descrive come il punto $p \in M$ si muove infinitesimamente quando applichiamo il flusso generato da X^* nel gruppo.

Osservazione 2.13. Se $G = M$ ed agisce su sé stesso per traslazione a sinistra, allora i campi fondamentali sono semplicemente i campi invarianti a sinistra.

È possibile introdurre un diffeomorfismo locale fra il gruppo e l'algebra di Lie; tale mappa è detta mappa esponenziale. Possiamo quindi interpretare l'algebra di Lie come una versione locale del suo gruppo. I campi invarianti a sinistra rappresentano dunque le direzioni di trasformazione e ci permettono di individuare le direzioni fondamentali, ossia le direzioni per cui la derivazione di una qualsiasi funzione differenziabile su G è compatibile con l'azione del gruppo.

Spesso ometteremo la pesante notazione $X_e \in T_eG$ e con abuso di notazione useremo solo X.

Esempio 2.5. Consideriamo $(\mathbb{R}^n, +)$ di cui fissiamo una base $(x_1, ..., x_n)$ e sia X un campo di vettori invariante a sinistra su $\mathbb{R}^n$. In coordinate si ha

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Siano poi $x, y \in \mathbb{R}^n$ generici. Per l'invarianza a sinistra si deve avere

$$(\mathrm{d}L_x)_y X(y) = X(x + y)$$

Grazie all'osservazione 2.8, abbiamo che $(\mathrm{d}L_x)_y = I_n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ dunque il primo termine dell'equazione è

$$X(y) = \sum_{i=1}^{n} v_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Il secondo termine invece è

$$X(x + y) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x + y) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Quindi, affinché l'uguaglianza sia verificata, si deve avere

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i(y) - v_i(x + y)) \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ossia i coefficienti, e quindi il campo, devono essere costanti.
L'algebra di Lie è $\mathcal{G} \overset{(1)}{=} \{X \quad | X \quad \text{è campo vettoriale costante}\} \overset{(2)}{=} \mathbb{R}^n$.
$\overset{(1)}{=}$ è per la 2.17.
$\overset{(2)}{=}$ è data da $\mathcal{G} = T_0\mathbb{R}^n = \{\text{derivate direzionali di curve in } \mathbb{R}^n \text{ passanti per } 0\}$.

Osservazione 2.14. In questo caso il gruppo è abeliano, quindi $L_x = R_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ed X è invariante a sinistra $\iff$ X è invariante a destra $\iff$ X è bi-invariante. In effetti anche l'algebra di Lie è comuttativa: dal momento in cui i campi sinistra-invarianti sono i campi costanti, il loro operatore differenziale associato è una derivata direzionale costante. Quando calcoliamo il commutatore di due campi in $\mathcal{G}$ questo farà zero. Esplicitamente:

$$X = v \cdot \nabla, \quad Y = w \cdot \nabla, \quad v, w \quad \text{costanti}$$

$$[X, Y]f = (v \cdot \nabla)(w \cdot \nabla)f - (w \cdot \nabla)(v \cdot \nabla)f \overset{*}{=} 0 \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

dove $\overset{*}{=}$ è vera siccome le derivate parziali commutano $(v\cdot\nabla)(w\cdot\nabla)f = (w\cdot\nabla)(v\cdot\nabla)f$ grazie a Schwartz.
Quindi si ha $\forall\ X, Y \in \mathcal{G}, \quad XY - YX = 0$, che è la commutatività su $\mathcal{G}$.

Proposizione 2.6. *Sia G un gruppo di Lie e $[\cdot,\cdot]$ la parentesi di Lie definita su $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$. Allora $\forall X_e, Y_e, Z_e \in \mathcal{G},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad [\cdot,\cdot]$ soddisfa:*

i) Anticommutatività: $[X_e, Y_e] = -[Y_e, X_e]$

ii) Bilinearità: $[\alpha X_e + \beta Y_e, Z_e] = \alpha[X_e, Z_e] + \beta[Y_e, Z_e]$

iii) Identità di Jacobi: $[[X_e, Y_e], Z_e] + [[Z_e, X_e]Y_e] + [[Y_e, Z_e], X_e] = 0$

iv) Idempotenza: $[X_e, X_e] = 0$

Dimostrazione. Il risultato segue direttamente dalle proprietà del bracket (2.4) di campi vettoriali e dalla definizione della parentesi di Lie. □

Esaminiamo ulteriormente l'esempio 2.3 delle isometrie del piano.
$E(2)$ agisce su $\mathbb{R}^2$ tramite $\Phi : E(2)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(T_{(a,b)}\circ R_\theta, (x,y)) \overset{\Phi}{\mapsto} T_{(a,b)}\circ R_\theta(x,y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y + a, \cos(\theta)x + \sin(\theta)y + b)$$

Vogliamo individuare le direzioni fondamentali (o ammissibili); per farlo calcoliamo i campi invarianti a sinistra dell'algebra di Lie del gruppo $E(2)$, indicata con $\mathcal{E}(2)$. Sappiamo che $E(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$ è generato da $T_x \equiv T_{(x,0)} = ((x,0),0)$ traslazioni lungo le ascisse, $T_y \equiv T_{(0,y)} = ((0,y),0)$ traslazioni lungo le ordinate, le rotazioni $R_\theta \equiv ((0,0),\theta)$ e che $\mathcal{E}(2) = \{\gamma'(0) |\quad \gamma : I \to E(2), \gamma(0) = e = id_{\mathbb{R}^2}\}$.
In $\mathbb{R}^2\times S^1$, si ha $\gamma(t) = (v_t, \theta_t), \quad \gamma'(0) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_t)\Big|_{t=0}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta)\Big|_{t=0}), \quad v_t \in \mathbb{R}^2$. Calcoliamo quindi i generatori di $\mathcal{G}$.

- **Traslazione lungo x:** prendiamo

  $$\gamma_1(t) = ((t,0),0), \text{ questa agisce su un punto di } \mathbb{R}^2\ (x,y) \overset{\gamma_1(t)}{\longmapsto} (x+t, y)$$

  $$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_1(t))\Big|_{t=0} = ((1,0),0)$$

  che corrisponde all'operatore differenziale

  $$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

- **Traslazione lungo y:** prendiamo

  $$\gamma_2(t) = ((0,t),0), \text{ questa agisce su un punto di } \mathbb{R}^2\ (x,y) \overset{\gamma_2(t)}{\longmapsto} (x, y+t)$$

  $$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_2(t))\Big|_{t=0} = ((0,1),0)$$

  che corrisponde a

  $$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

- **Rotazione attorno all'origine**: prendiamo

$$\gamma_3(t) = ((0,0),t), \text{ questa agisce su un punto di } \mathbb{R}^2 \ (x,y) \xmapsto{\gamma_3(t)} R_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_3(t))\Big|_{t=0} = ((0,0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\Big|_{t=0}) \equiv$$
$$\equiv \begin{pmatrix} -\sin(t) & -cos(t) \\ cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

In pratica è la trasformazione che intorno all'origine manda

$$(x,y) \overset{J}{\mapsto} (-y,x)$$

che corrispode quindi a

$$X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Notiamo che X_1, X_2 e X_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathcal{E}(2) = Span(X_1, X_2, X_3)$ siccome $dim(\mathcal{E}(2)) = 3$.
Un qualsiasi altro elemento di $\mathcal{E}(2)$ sarà della forma

$$X = aX_1 + bX_2 + cX_3, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.15. Se vogliamo essere minuziosi, ricordando la legge di gruppo 2.3, possiamo osservare che una qualsiasi altra direzione su $\mathcal{E}(2)$ si può scrivere prendendo $\gamma(t) = (c\gamma_3 * b\gamma_2 * a\gamma_1)(t) = ((at,bt),ct)$ e calcolando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t))\Big|_{t=0} = ((a,b),c)$.
Il relativo operatore $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ agirà su una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$Xf = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\gamma_t)\Big|_{t=0}$$

Le direzioni individuate da X_1, X_2, X_3, oltre a generare l'algebra di Lie, rappresentano anche le direzioni fondamentali su $\mathbb{R}^2$: X_1, X_2 rappresentano rispettivamente delle traslazioni infinitesime lungo x e y. X_3 rappresenta l'azione di una rotazione infinitesima; in pratica X_3 ci dice che una rotazione infinitesima agisce attorno all'origine di $\mathbb{R}^2$ come una rotazione di $\pi/2$.
Mostriamo che queste direzioni sono effettivamente direzioni di derivazione compatibile con l'azione del gruppo. Ci basterà verificare che $\forall\ f$ differenziabile su $\mathbb{R}^2$

$$(X_i f)(\gamma_t(x,y))\Big|_{t=0} = X_i(f(\gamma_t(x,y)))\Big|_{t=0} \quad \forall\ \gamma_t \text{ curva in } G \text{ passante per } e$$

Poniamo $(x',y') = \Big(\cos(\theta_t)x - \sin(\theta_t)y + a_t,\ \sin(\theta_t)x + \cos(\theta_t)y + b_t\Big) = \gamma_t(x,\ y)$ dove $\theta_0 = a_0 = b_0 = 0$. Vale:

$$\partial_x(x') = \cos(\theta_t), \qquad \partial_x(y') = -\sin(\theta_t)$$
$$\partial_y(x') = \sin(\theta_t), \qquad \partial_y(y') = \cos(\theta_t)$$

- X_1:

  $(X_1 f)(x', y') = (\partial_x f)(x', y') = f_x(x', y')$

  e

  $$X_1\ f(x', y') = \partial_x(f(x', y')) = \partial_{x'} f\Big|_{(x',y')} \partial_x(x') \ + \ \partial_{y'} f\Big|_{(x',y')} \partial_x(y') = \\ = \cos(t) f_{x'}(x', y') + \sin(t) f_{y'}(x', y')$$

  dunque $\quad (X_1 f)(x', y')\Big|_{t=0} = f_x(x, y) = X_1\ f(x', y')\Big|_{t=0}$

- X_2:

  $(X_2 f)(x', y') = (\partial_y f)(x', y') = f_y(x', y')$

  e

  $$X_2\ f(x', y') = \partial_y(f(x', y')) = \partial_{x'} f\Big|_{(x',y')} \partial_y(x') \ + \ \partial_{y'} f\Big|_{(x',y')} \partial_y(y') = \\ = \sin(t) f_{x'}(x', y') + \cos(t) f_{y'}(x', y')$$

  dunque $\quad (X_2 f)(x', y')\Big|_{t=0} = f_y(x, y) = X_2\ f(x', y')\Big|_{t=0}$

- X_3:

  $$(X_3 f)(x', y') = (x\, \partial_y f - y\, \partial_x f)\Big|_{(x',y')} = x' f_y\Big|_{(x',y')} - y' f_x\Big|_{(x',y')}$$

  $$= (\cos(t)\, x - \sin(t)\, y) f_y\Big|_{(x',y')} - (\sin(t)\, x + \cos(t)\, y) f_x\Big|_{(x',y')}$$

  $$= x\Big(\cos(t)\, f_y\Big|_{(x',y')} - \sin(t)\, f_x\Big|_{(x',y')}\Big) \\ - y\Big(\cos(t)\, f_x\Big|_{(x',y')} + \sin(t)\, f_y\Big|_{(x',y')}\Big)$$

  e

  $$X_3 f(x', y') = (x\, \partial_y - y\, \partial_x) f(x', y') = x\, \partial_y f(x', y') - y\, \partial_x f(x', y')$$

  $$= x\Big(\partial_{x'} f\Big|_{(x',y')} \partial_y(x') + \partial_{y'} f\Big|_{(x',y')} \partial_y(y')\Big) \\ - y\Big(\partial_{x'} f\Big|_{(x',y')} \partial_x(x') + \partial_{y'} f\Big|_{(x',y')} \partial_x(y')\Big)$$

  $$= x\Big(-\sin(t)\, f_{x'}\Big|_{(x',y')} + \cos(t)\, f_{y'}\Big|_{(x',y')}\Big) \\ - y\Big(\cos(t)\, f_{x'}\Big|_{(x',y')} + \sin(t)\, f_{y'}\Big|_{(x',y')}\Big)$$

  e quindi anche qua $(X_3 f)(x', y')\Big|_{t=0} = x f_y(x, y) - y f_x(x, y) = X_3\ f(x', y')\Big|_{t=0}$

Osservazione 2.16. Calcoliamo le parentesi di Lie di questi operatori per osservare com'è fatta la struttura dell'algebra:

$$[X_1, X_2] = \partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x = 0 \quad \text{poiché commutano.}$$

In effetti le traslazioni formano un sottogruppo commutativo! Fare uno spostamento infinitesimo lungo le x e poi farne un altro lungo le y è analogo a fare il contrario.

$$\begin{aligned}[X_1, X_3] &= \partial_x(x\ \partial_y - y\ \partial_x) - (x\ \partial_y - y\ \partial_x)\partial_x = \\ &= (\partial_y + x\ \partial_x\partial_y - y\ \partial_x\partial_x) - (x\ \partial_y\partial_x - y\partial_x\partial_x) = \partial_y\end{aligned}$$

Questa relazione esprime il fatto che una traslazione infinitesima sulla x in un intorno di $(0, 0)$, poi ruotata infinitesimamente attorno all'origine diventa una traslazione sulle y. Analogamente

$$[X_2, X_3] = -X_1$$

Capitolo 3

Varietà Riemanniane e sub-Riemanniane

3.1 Varietà Riemanniane

Definizione 3.1. Una **metrica Riemanniana** o una **struttura Riemanniana** su una varietà differenziabile M è una corrispondenza che associa ad ogni punto $p \in M$ un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (che è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva) sul piano tangente T_pM che varia in modo regolare nel seguente senso: presa una parametrizzazione $\mathbf{x}$: $U \to M$ attorno a p, con $\mathbf{x}(x_1, ..., x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \mathrm{d}\mathbf{x}_q(0, ..., 1, ..., 0)$ allora

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{i,j}(x_1, ...x_n)$$

è una funzione almeno C^1 su U. Diremo che la metrica è di classe C^k, $1 \leq k \in \mathbb{N}$ quando presenta questo grado di regolarità. Diremo che è liscia se è C^∞.
In coordinate locali il prodotto interno su T_pM è definito da una matrice definita positiva $(g_{i,j})$ e

$$\forall\ v, u \in T_pM, \quad \langle v, u \rangle_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\ v_i u_j$$

Chiaramente questa definizione non dipende dalla parametrizzazione.

Osservazione 3.1. La definizione data è equivalente a richiedere che per ogni coppia di campi di vettori regolari X, Y su un intorno $V \subseteq M$ allora la funzione $\langle X, Y \rangle$ sia almeno C^1 su V.

Spesso è usuale tralasciare l'indice p nella funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ quando non c'è possibilità di confusione. Notare inoltre che, grazie alla simmetria, si ha $g_{i,j} = g_{j,i}$. Tale funzione è detta **rappresentazione locale** della metrica Riemanniana nel sistema di coordinate $\mathbf{x}$.
Da qua in avanti considereremo solo metriche lisce, ricordando però l'osservazione 2.2: se considerassimo varietà di classe C^k ha senso richiedere che le funzioni $g_{i,j}$ di rappresentazione locale della metrica siano di classe C^j, $1 \leq j \leq k-1$ e non avrebbe senso di parlare di gradi più alti di regolarità per via delle carte.

Osservazione 3.2. Data una struttura Riemanniana su M possiamo definire una norma su ogni piano tangente:

$$\|v\|_g^2 \coloneqq \langle v, v\rangle_p \quad \forall\, v \in T_pM,\ \forall\, p \in M$$

dove il pedice g vuole rimarcare la dipendenza dalla metrica su M. Se scritto in coordinate $v = (v_1, ..., v_n) = \sum_{i=0}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, diventa

$$\|v\|_g = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} \cdot v_i v_j} \quad \text{dove} \quad g_{i,j} \quad \text{è dato dalla rappresentazione locale.}$$

Presi $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ allora $\|e_i\|_g = \sqrt{g_{i,i}}$ mostra come modulare la norma lungo le varie direzioni. Pensiamo ad una carta geografica in cui vogliamo misurare la distanza di un percorso: la misura di un segmento sulla carta posizionato lungo la direzione di massimo pendio (ossia una direzione ortogonale alle linee di livello) dovrà "pesare" di più rispetto ad un segmento lungo una direzione che rimane in quota (tangente alle linee di livello).

Definizione 3.2. Una varietà differenziabile M dotata di una metrica Riemanniana è detta **superficie Riemanniana**. Indicheremo con (M, g) la superficie Riemanniana M dotata della metrica g.

Definizione 3.3. Siano M e N due superfici Riemanniane. Un diffeomorfismo $f : M \to N$ si dice **isometria** se

$$\langle v, u\rangle_p = \langle \mathrm{d}f_p v,\ \mathrm{d}f_p u\rangle_{f(p)} \quad \forall\, p \in M,\ \forall\, v, u \in T_pM \quad (1)$$

In tal caso diciamo che M e N sono **isometriche**.
$f : M \to N$ si dice **isometria locale** in p se è un diffeomorfismo locale in p per cui vale (1), ossia se esiste un intorno $V \subseteq M$ di p su cui $f|_V : V \to f(V)$ è un isometria.

Due superfici Riemanniane M e N per cui in ogni $p \in M$, $\exists\ f : M \to N$ un'isometria locale si dicono localmente isometriche.
Le isometrie delle superfici Riemanniane sono gli equivalenti dei diffeomorfismi per le varietà o gli isomorfismi di spazi vettoriali; ci dicono quindi quando due strutture sono fondamentalmente la stessa.

Esempio 3.1. $M = \mathbb{R}^n$ dove identifichiamo $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ e lo dotiamo della metrica $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ (prodotto scalare standard). $\mathbb{R}^n$ è detto spazio Euclideo e la sua geometria Riemanniana è quella Euclidea.

Osservazione 3.3. *Pull-back di una metrica:* sia N^{n+k} una superficie Riemanniana.; data $f : M^n \to N^{n+k}$ un'immersione (definizione 2.8) allora questa induce naturalmente una metrica Riemanniana su M^n definendo

$$\langle v, u\rangle_p = \langle \mathrm{d}f_p(v), \mathrm{d}f_p(v)\rangle_{f(p)} \quad \forall\, v, u \in T_pM^n$$

$\langle \cdot, \cdot\rangle_p$ è definita positiva siccome $\mathrm{d}f_p$ è iniettivo; è chiaramente simmetrica e bilineare. La regolarità della rappresentazione della metrica è automaticamente

verificata grazie alla regolarità della rappresenzazione metrica su N^{n+k}. Tale metrica è detta **metrica indotta** da f e quest'ultima è detta **immersione isometrica**.
Un caso particolarmente importante è quello in cui abbiamo una funzione liscia $h : M^{n+k} \to N^n$ e $q \in N$ valore regolare di h (ossia $\mathrm{d}h_p : T_pM^{n+k} \to T_{h(p)}N^n$ suriettivo $\forall\ p \in h^{-1}(q)$): in tal caso la fibra di q è una sottovarietà di M di dimensione $k = (n+k) - n$; considerandone l'inclusione $\iota : h^{-1}(q) \hookrightarrow M$ (che è un'immersione) possiamo quindi dotarla della metrica indotta.

Esempio 3.2. $\iota : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. Osservare che la metrica indotta dall'inclusione ι (la quale è un incorporamento) e quella definita su $\mathbb{R}^n$ nell'esempio 3.1 sono in realtà la stessa metrica.

Esempio 3.3. Consideriamo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i^2) - 1$.
0 è valore regolare di h e $S^{n-1} = h^{-1}(0)$. La metrica indotta nel modo spiegato in 3.3 è detta metrica canonica di S^{n-1}.

Esempio 3.4. $M = \mathbb{R}^2$. Consideriamo $\forall\ p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il prodotto scalare dato dalla matrice definita positiva $g = g(p) = \begin{pmatrix} 1 + x^4 + y^2 & 0 \\ 0 & 3 + x^2y^2 \end{pmatrix}$. Allora $\forall\ v = (v_x, v_y),\ u = (u_x, u_y) \in T_pM$ si ha

$$\langle v, u \rangle_p = (1 + x^4 + y^2)v_x u_x + (1 + x^2y^2)v_y u_y$$

Osservazione 3.4. *Metrica prodotto:* siano M, N due superfici Riemanniane e consideriamo il prodotto cartesiano $M \times N$ dotato della struttura differenziale prodotto. Siano poi $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$ le proiezioni naturali. Possiamo indurre naturalmente la metrica prodotto nella seguente maniera: $\forall\ (p, q) \in M \times N$, $\forall\ u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ definiamo

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} \coloneqq \langle \mathrm{d}\pi_1(u), \mathrm{d}\pi_1(v) \rangle_p + \langle \mathrm{d}\pi_2(u), \mathrm{d}\pi_2(v) \rangle_q$$

Non è complicato verificare che questa è effettivamente una metrica sul prodotto.

Esempio 3.5. Possiamo dotare il toro n-dimensionale $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ della struttura Riemanniana data dal prodotto delle metriche indotte su S^1 da $\mathbb{R}^2$. Con questa struttura T^n è detto toro piatto.

Mostriamo ora come una metrica Riemanniana permette di calcolare le lunghezze delle curve e la distanza tra due punti sulla varietà.

Definizione 3.4. La restrizione di una curva ad un intervallo chiuso $[a, b] \subseteq I$ è detto **segmento**.

Ricordiamo che presa una curva parametrizzata, sebbene sia liscia, questa può ammettere "spigoli" e autointersezioni. Per esempio la curva $t \mapsto (t^2, t^3)$ presenta uno "spigolo" in $t = 0$. Si noti che il punto $t = 0$ non è regolare.

Definizione 3.5. Un campo di vettori V lungo una curva liscia $\gamma : I \to M$ è una funzione liscia che associa $t \mapsto V(t) \in T_{\gamma(t)}M, \quad \forall\ t \in I$. Essere liscia significa che per ogni funzione f di classe C^∞ su M allora la funzione $t \mapsto V(t)f$ è C^∞ su I.

Il campo di vettori $\mathrm{d}\gamma(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$, denotato $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma'$, è detto campo di velocità di γ. Osservare che un campo di velocità non può necessariamente essere esteso su un aperto di M (per via degli spigoli ed autointersezioni).

Definizione 3.6. Sia (M, g) una superficie Riemanniana e γ una curva parametrizzata su M. Definiamo la lunghezza del segmento $\gamma|_{[a,b]} : [a, b] \to M$ rispetto la metrica g come

$$l_a^b(\gamma) \coloneqq \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, \mathrm{d}t$$

Osservazione 3.5. L'integrale è ben posto poiché sia γ' che $\| \cdot \|_g$ sono continue, la loro composizione lo è, indi per cui ne possiamo fare l'integrale. Inoltre si noti che $0 \leq l_a^b(\gamma) < +\infty$ per ogni segmento considerato poiché stiamo integrando una quantità non negativa e la funzione integranda è continua su un intervallo compatto. Per concludere la lunghezza di un segmento non dipende dalla parametrizzazione della curva ossia: presi $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma : I \to M$ una curva parametrizzata e $\varphi : J \to I$ un diffeomorfismo; allora $\forall\ [a, b] \subseteq I$, posti $a' = \varphi^{-1}(a)$, $b' = \varphi^{-1}(b)$ vale

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \|\gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\|_g \, \mathrm{d}s = l_{a'}^{b'}(\gamma \circ \varphi)$$

In particolare si noti che né il senso di percorrenza né la velocità di percorrimento del segmento modifica la sua lunghezza.
Infine si osservi che un qualsiasi segmento si può esprimere tramite l'intervallo $[0, 1]$ grazie al diffeomorfismo $t \mapsto (1 - t)a + tb \in [a, b]$. In generale useremo $[0, 1]$ come intervallo di riferimento rispetto un generico segmento.

Per il momento le curve considerate sono state prese C^∞. In realtà per definire la lunghezza di un percorso ci basta richiedere che la curva sia C^1 a pezzi (in modo che γ' sia continua quasi ovunque). In tal caso considerato un qualsiasi segmento $\gamma|_{[0,1]}$ su M, la condizione che γ sia C^1 a pezzi ci permette di definire la lunghezza del segmento come

$$l_0^1(\gamma) \coloneqq \sum_{i=0}^{h-1} l_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma) = \sum_{i=0}^{h-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\|_g \, \mathrm{d}t \right)$$

Notare che l'osservazione 3.5 continua a valere e tutto è ben posto.

Definizione 3.7. Sia (M, g) una superficie Riemanniana. Una curva $\gamma : I \to M$ si dice parametrizzata per lunghezza d'archi se $\|\gamma'(t)\|_g = 1 \quad \forall\ t \in I$.

Si noti che il tempo di percorrenza di un qualsiasi segmento di una curva parametrizzata per lunghezza d'archi è pari alla lunghezza dello stesso: $l_a^b(\gamma) = b - a$.

Consideriamo ora una superfice Riemannana (M, g) connessa.

Definizione 3.8. Presi $p, q \in M$ consideriamo
$\mathcal{H} = \{\gamma : I \to M \mid \gamma \in C^1 \text{ a pezzi},\ \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}$. Definiamo la **distanza** tra p e q nella metrica g come

$$d(p, q) \coloneqq \inf_{\gamma \in \mathcal{H}} \{l_0^1(\gamma)\} = \inf_{\gamma \in \mathcal{H}} \left\{ \sum_{i=0}^{h-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\|_g \, \mathrm{d}t \right) \right\}$$

dove i t_i sono i nodi di discontinuità presentati nella definizione 2.5.

L'esistenza di almeno una curva che connette i due punti è assicurata dall'ipotesi che M sia connessa: infatti considerando varietà che sono a base numerabile e spazi di Hausdorff la connessione per archi è equivalente alla connessione. Inoltre due punti in $\mathbb{R}^n$ sono sempre connettibili tramite curve C^1 a pezzi e possiamo dunque riportarle sulla varietà con questa regolarità. Quindi l'insieme di cui stiamo facendo l' inf è non vuoto. Nel caso in cui la superficie non sia connessa restringeremo questa definizione ai punti che appartengono alla stessa componente connessa. Ancora, tale valore è ben definito e non dipende dalla parametrizzazione di γ grazie all'osservazione 3.5. Si rimanda alla Proposizione 2.10 di [7] nella quale si dimostra che ogni varietà (di Hausdorff e a base numerabile) ammette una metrica Riemanniana.

3.2 Varietà sub-Riemanniane

Definizione 3.9. Sia M una varietà differenziabile. Chiamiamo **distribuzione** un sotto-fibrato Δ del fibrato tangente di M, ossia un insieme tale per cui
$\forall\, p \in M, \quad \Delta_p \subseteq T_pM$ è un sottospazio vettoriale.
Diremo che $AT_pM := \Delta_p$ è lo **spazio tangente ammissibile** in $p \in M$.

Se $M = M^n$ possiamo definitre una distribuzione Δ attraverso l'associazione di una base di $m \leq n$ vettori in $\mathbb{R}^n$ per ogni $p \in M$. AT_pM è lo spazio generato da questa base e rappresenta le direzioni di possibile movimento sulla varietà in p. Questo spazio è di dimensione variabile a seconda del punto $p \in M$.
Una metrica sub-Riemanniana g su (M, Δ) è definita in maniera analoga al caso Riemanniano, richiedendo però che i prodotti interni di cui dotiamo i piani tangenti siano definiti esclusivamente sugli spazi tangenti ammissibili:

Definizione 3.10. Una **metrica sub-Riemanniana** g su (M, Δ) è una corrispondenza $M \ni p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : AT_pM \to \mathbb{R}$ è un prodotto interno che varia in modo regolare, nel senso spiegato nella definizione 3.1.

Definizione 3.11. Una **superficie sub-Riemanniana** è una terna (M, Δ, g) dove M è una varietà differenziabile, Δ una distribuzione su M e g una metrica sub-Riemanniana su Δ. Allo stesso modo delle superfici Riemanniane, definiamo la norma indotta dalla metrica come

$$\|v\|_g^2 := \langle v, v \rangle_p, \quad \forall\, v \in AT_pM$$

Osservazione 3.6. Le superfici Riemanniane sono certamente sub-Riemanniane.
In più data una superficie Riemanniana possiamo ottenerne una sub-Riemanniana (in senso proprio e non triviale) restringendo alcuni spazi tangenti a sottospazi di dimensione inferiore ed ereditando la metrica già definita.

Come detto poco fa, fornire una distribuzione significa associare una base (o un sottospazio) ad ogni punto della nostra varietà. Equivalentemente significa associare $m \leq n$ campi vettoriali (linearmente indipendenti) ad ogni punto, ricordando l'associazione tra basi del tangente e campi vettoriali. In pratica sulla nostra varietà ammettiamo solo alcuni operatori differenziali del primo ordine.

Esempio 3.6. *Il caso Euclideo:* $\mathbb{R}^n$ e $X_1 = \partial_{x_1}, ..., X_m = \partial x_m,\ m \leq n$. Definiamo Δ data da $\Delta_p = Span\{X_1, ..., X_m\}$.
Per ogni punto dotiamo Δ_p del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}|_{\Delta_p \times \Delta_p}$. Così facendo abbiamo definito una metrica sub-Riemanniana su $(\mathbb{R}^n, \Delta)$.

Per questioni di brevità, quando diremo che $\{X_1, ..., X_m\}$ è una base della distribuzione Δ, sottointenderemo la dipendenza dai punti: $\{X_{1(p)}, ..., X_{m(p)}\}$ base di Δ_p. Siamo interessati a dare la definizione di distanza su una superficie sub-Riemanniana. Questa è praticamente analoga a quella già data: la differenza sostanziale è che non ammetteremo più tutte le curve C^1 a pezzi che connettono due punti.

Definizione 3.12. Sia (M, Δ, g) una superficie sub-Riemanniana dove $\{X_1, ..., X_m\}$ è una base di Δ. Chiamiamo **curva ammissibile** o **orzzontale** ogni curva C^1 a pezzi che è curva integrale a pezzi (2.13) dei campi $\{X_1, ..., X_m\}$.

In pratica stiamo richiedendo che nei punti in cui la curva è differenziabile si abbia $\gamma'(t) \in \Delta_p$. Infatti per definizione di curva integrale a pezzi si ha che se

$$\gamma(t) = p, \text{ allora } \quad \gamma'(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i(\gamma(t)) \in \Delta_p$$

Dunque se M è dotata di una metrica g possiamo calcolare $\|\gamma'(t)\|_g$.

Esempio 3.7. Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo i campi vettoriali

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$$

Definiamo la distribuzione Δ data da $\Delta_{(x,y)} = Span\{X_1, X_2\} \cong Span\{(1,0),(0,x)\}$.
Si noti che $\forall\ x \neq 0 \Rightarrow dim(\Delta_{(x,y)}) = 2, \quad$ mentre $dim(\Delta_{(0,y)}) = 1$ quindi $\Delta \subset T\ \mathbb{R}^2$ è effettivamente una distribuzione propria.
Possiamo dotare (M, Δ) della metrica data dal prodotto scalare standard $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$.
Consideriamo la curva $\gamma : [0, 6] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\begin{cases} \gamma(t) = (t, -2) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ \gamma(t) = 2 \cdot (1, t-3) & \text{se} \quad 2 \leq t \leq 4 \\ \gamma(t) = (-t, 4) & \text{se} \quad 4 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

[4pt] γ è curva integrale a pezzi dei campi X_1, X_2:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = (1,0) = (\partial_x)|_{\gamma(t)}(Id_{\mathbb{R}^2} \circ \gamma) = X_1\gamma(t) & \text{se} \quad 0 < t < 2 \\ \gamma'(t) = (0,2) = (x\partial_y)|_{\gamma(t)}(Id_{\mathbb{R}^2} \circ \gamma) = X_2\gamma(t) & \text{se} \quad 2 < t < 4 \\ \gamma'(t) = (-1,0) = -(\partial_x)|_{\gamma(t)}(Id_{\mathbb{R}^2} \circ \gamma) = -X_1\gamma(t) & \text{se} \quad 4 < t < 6 \end{cases}$$

Definizione 3.13. Presa una curva ammissibile γ in (M, Δ, g) definiamo la **lunghezza** del segmento $\gamma|_{[0.1]}$ nella metrica g come

$$l_0^1(\gamma) = \sum_{i=0}^{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\|_g \ \mathrm{d}t$$

Per leggerezza notazionale scriveremo semplicemente $l_0^1(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_g \ \mathrm{d}t$.

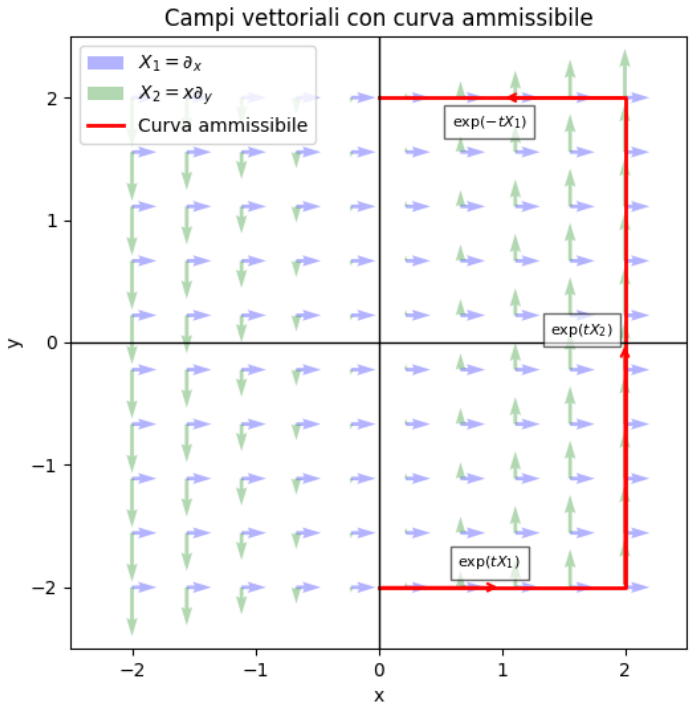

Figura 3.1: Campi X_1, X_2 rispettivamente in blu e verde. In rosso γ che parte da $(0,-2)$ e seguendo i flussi rispettivamente di X_1, X_2 e $-X_1$ si sposta fino a $(0,2)$.

Vogliamo dare la definizione di distanza tra due punti, rimane però un ultimo problema: la connessione per archi tramite curve ammissibili non è più scontata come nel caso Riemanniano. Infatti le nozioni topologiche ci assicurano che (in varietà a base numerabile e di Hausdorff) due punti sulla stessa componente connessa siano connettibili tramite una curva, ma non è detto che questa curva sia ammissibile nella distribuzione Δ. Mostreremo più avanti una condizione sufficiente alla connessione tramite curve ammissibili; per ora limitiamoci alla seguente definizione.

Definizione 3.14. Sia (M, Δ, g) una superficie sub-Riemanniana e $p, q \in M$. Posto $\mathcal{H} = \{\ \gamma : [0,1] \to M \ \text{ ammissibile} \mid \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\ \}$ definiamo la **distanza** tra p e q come segue:

$$d(p,q) := \inf_{\gamma \in \mathcal{H}} \{\ l_0^1(\gamma)\}, \qquad \text{se } \mathcal{H} \neq \emptyset$$
$$d(p,q) := +\infty, \qquad \text{se } \mathcal{H} = \emptyset$$

Nel caso $\mathcal{H} \neq \emptyset$ l'osservazione 3.5 sul cambio di parametrizzazione continua a valere.
Per concludere studiamo una condizione che assicura la connessione tramite curve ammissibili di due punti.

3.3 Condizione di Hörmander

Nel capitolo 2.2 abbiamo introdotto il commutatore di due campi vettoriali (2.11). Facciamo la stessa cosa nel caso sub-Riemanniano: presa (M, Δ, g) definiamo

$$\forall\ X, Y \in \Delta_p, \quad [X, Y] := XY - YX$$

Chiaramente $[X, Y]$ è un campo vettoriale su M e continuano a valere le proprietà mostrate nel secondo capitolo. Ciò che non è più scontato è la chiusura dello spazio tangente ammissibile rispetto quest'operazione. Infatti la proposizione 2.3 mostra che $[\ \cdot, \cdot\ ]$ è un operazione interna allo spazio vettoriale dei campi vettoriali su M; questo non assicura in alcun modo che $[X, Y] \in \Delta_p$.

Esempio 3.8. $\mathbb{R}^2$ con $\Delta_{(x,y)} = Span\{\partial_x,\ x\partial_y\}$. Abbiamo che $\forall\ y \in \mathbb{R}$ $\partial_y \notin \Delta_{(0,y)} = Span\{\partial_x\}$ eppure

$$[\partial_x, x\partial_y] = \partial_x(x)\partial_y - \partial_y(1)\partial_x = \partial_y \notin \Delta_{(0,y)}$$

Definizione 3.15. Siano $X_1, ..., X_m$ campi di vettori differenziabili su M.
Chiamiamo **algebra di Lie** generata da $X_1, ..., X_m$ la chiusura dello spazio vettoriale generato da questi m campi vettoriali rispetto la somma, il prodotto per uno scalare ed il Lie bracket. Denotiamo questo spazio con $\mathcal{L}ie\{X_1, ..., X_m\}$.

Attenzione a non confondere questa struttura con l'algebra definita nei gruppi di Lie. La varietà considerata non è necessariamente un gruppo di Lie!
Osservare che per definizione $\mathcal{L}ie\{X_1, ..., X_m\}$ è uno spazio vettoriale dotato di una terza operazione (il commutatore) e vale

$$\Delta_p = Span\{X_1, ..., X_m\} \subseteq \mathcal{L}ie\{X_1, ..., X_m\}.$$

Tramite l'associazione di questo spazio punto per punto, $(\mathcal{L}ie\{X_1, ..., X_m\})_{p\in M}$ forma un sottofibrato del fibrato tangente; in pratica è una nuova distribuzione su M. Per essere esaustivi esplicitiamo tale corrispondenza:

$$M \ni p \mapsto (\ p \times Span\{X_i(p),\ [X_i,\ X_j](p)\}_{i,j=1,...,m}) \subseteq TM$$

Esempio 3.9. $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ varietà 3-dimensionale connessa con la distribuzione data da $\forall\ p = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, $\Delta_p = Span\{X_1, X_2\}$ dove

$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y, \quad X_2 = \partial_\theta.$$

$dim(\Delta_p) = 2 \quad \forall\ p \in M$, mentre $[X_1, X_2] = -\sin(\theta)\partial_x + \cos(\theta)\partial_y \notin \Delta_p,\ \forall\ \theta \in [0, 2\pi]$ dunque si ha $dim(\mathcal{L}ie\{X_1, X_2\}) = 3$. Si noti inoltre che in questo caso l'algebra di Lie non è un sottofibrato proprio, bensì è tutto TM:

$$dim(\mathcal{L}ie\{X_1, X_2\}) = dim(M).$$

Mostriamo che presi due punti qualsiasi, questi sono connettibili tramite una curva ammissibile.
In effetti gli spostamenti lungo $(0, 0, \theta)$ sono sempre ammessi grazie a $X_2 = \partial_\theta$.

Se volessimo compiere un movimento lungo $(x, 0, 0)$ ci basta osservare che all'altezza $\theta = 0$ si ha $X_1|_{(x,y,0)} = \partial_x$. Dunque partendo da un generico punto (x_0, y_0, θ_0), per spostarsi lungo $(x, 0, 0)$ si può seguire inizialmente la curva integrale lungo $(0, 0, \theta)$, (ammessa da X_2), fino ad arrivare alla quota $\theta = 0$; dopodichè muoversi lungo $(x, 0, 0)$ grazie alle curve ammesse da $X_1|_{(x,y,0)}$ e per finire ritornare alla quota iniziale θ_0. In questo modo si è compiuto uno spostamento globale lungo $(x, 0, 0)$.
Analogamente per gli spostamenti lungo $(0, y, 0)$ basterà raggiungere la quota $\theta = \pi/2$ cosicché $X_2|_{(x_0,y_0,\pi/2)} = \partial_y$, a questo punto effettuare uno spostamento lungo $(0, y, 0)$ per poi tornare alla quota di partenza.
Dunque per un generico spostamento da (x_0, y_0, θ_0) a (x_1, y_1, θ_1) basterà combinare in modo opportuno gli spostamenti sopra descritti.

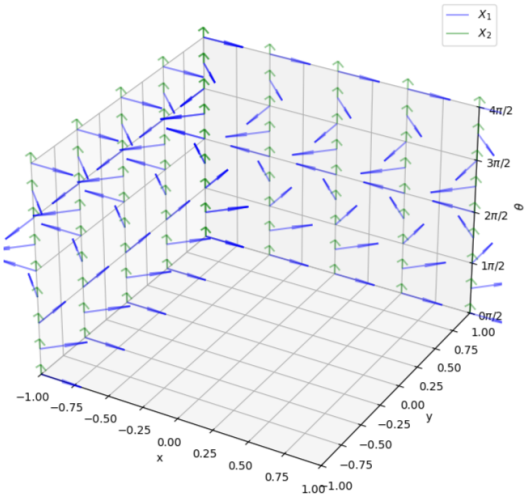

Figura 3.2: Campi vettoriali: X_1 in blu, X_2 in verde. Per chiarezza dell'immagine sono stati rappresentati sui piani $\{x = -1\}$ e $\{y = 1\}$. Si noti come il campo X_1 varia al variare di θ, mentre X_2 rimane costante.

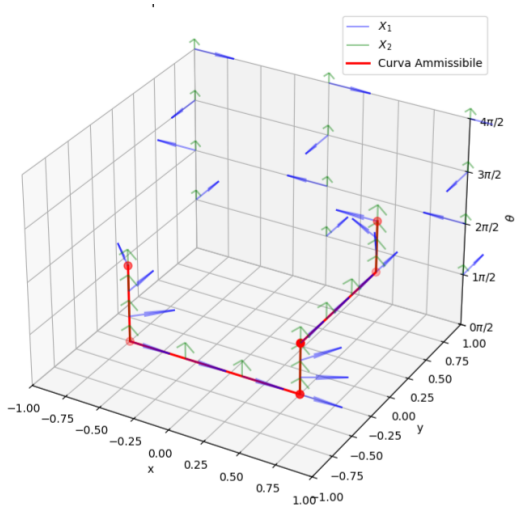

Figura 3.3: Curva ammissibile: parte da $(-0.75, -0.25, 3\pi/4)$; scende a quota $\theta = 0$ per poi muoversi lungo il flusso di X_1 fino $(0.5, -0.25, 0)$; risale lungo il flusso di X_2 per seguire il flusso di X_1 in direzione $(0, y, 0)$ alla quota $\theta = \pi/2$; arriva al punto $(0.5, 0.75, \pi/2)$ per poi salire fino a quota $\theta = \pi$.

Definizione 3.16. Sia (M, Δ, g) una superficie sub-Riemanniana dove $\Delta = Span\{X_1, ..., X_m\}$. Diciamo che $X_1, ...X_m$ soddisfano la **condizione di Hörmander** se

$$dim(\mathcal{L}ie\{X_1, ..., X_m\}) = dim(M)$$

La condizione di Hörmander ci dice che l'algebra di Lie di una varietà è proprio il fibrato tangente e non un suo sottofibrato proprio.

Teorema 3.1 (Chow)**.** *Sia (M, Δ, g) una superficie sub-Riemanniana, dove M è connessa e Δ soddisfa la condizione di Hörmander.*
Allora $\forall\ p, q \in M \quad \exists\ \gamma$ curva ammissibile tale che $\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q$.

Questo risultato è di vitale importanza per assicurare la connessione dei punti tramite curve ammissibili . Ciò implica che su una componente connessa della varietà la distanza fra una coppia di punti sia sempre finita.

Capitolo 4

Varietà ed eterogenesi differenziale

4.1 Varietà e molteplicità

Introducendo le varietà abbiamo fornito una prima struttura matematica differenziabile ed eterogenea. Lo spazio è una deformazione locale di quello Euclideo, con trasformazioni diverse da punto a punto.
Le varietà sono unioni di carte, e quindi possono essere identificate come unione di molteplici singolarità. Inoltre, è necessaria in generale più di una carta per ricoprire tutta la varietà, ma nessuna carta è indispensabile, perché ogni carta può essere sostituita da un'unione di altre carte. In questo modo, la varietà permette il superamento dell'opposizione tra uno e molteplice: «*La molteplicità resta del tutto indifferente ai tradizionali problemi del multiplo e dell'uno.* »[1].

Possiamo reinterpretare le varietà come il concetto deuleziano di forma: l'atlante può essere visto come una rete ideale astratta di dipendenze tra unità singolari. Essendo ideale, l'atlante non è percepibile empiricamente, eppure contiene tutti gli elementi necessari e sufficienti alla sua attualizzazione. La sua manifestazione è possibile tramite un processo locale di significazione, grazie alle singolarità che lo compongono. Ogni carta permette una manifestazione locale della varietà stessa, la rende tangibile, la significa.
Le connessioni tra le carte sono i cambi di carta. Questi relazionano le singolarità significanti, creando una simbiosi di elementi eterogenei - nonostante questa eterogenità abbia in questo caso le sue limitazioni. Le connessioni rappresentano a loro volta l'*agencement*. Infatti nei cambi di carta riconosciamo il processo creativo che relaziona diverse molteplicità, consentendo la generazione di nuove strutture, e una crescita di dimensione, nel senso che una varietà di dimensione n fissata può in generale essere immersa in spazi Euclidei di dimensione maggiore di n. Pensiamo ad una superficie in $\mathbb{R}^2$: localmente questa è una struttura 2-dimensionale, descritta da un aperto di $\mathbb{R}^2$ che è uno spazio piatto. Tramite il processo di *agencement* dato dal cambio di carte, formiamo una struttura più complessa - la superficie, l'*assemblage* - che si presenta come spazio curvo e la quale occupa uno spazio di dimensione maggiore o uguale a 3.
Inoltre non è presente una chiara e gerarchica organizzazione tra le diverse singolarità e le loro connessioni. Non ci sono delle carte più importanti di altre, piuttosto è proprio la loro interdipendenza non piramidale che permette la loro interazione

simbiotica. Nonostante ciò, tali modelli non sono privi di linee di solidità: Deleuze identifica dei gruppi di enti locali, i cosiddetti *plateaux*, i quali definiscono dei territori di significazione solidi e stabili, ossia al cui interno i concetti hanno un senso compiuto e non contradditorio. Si pensi ai sottoinsiemi di carte che presentano un'intersezione non nulla tra di loro; grazie alla loro interazione - il cambio di carta - è possibile definire degli oggetti coerenti - ad esempio la nozione di funzione differenziabile in un punto, che è indipedente dalla carta in cui viene vista.

Per questi motivi Deuleze identifica le varietà come primo «*oggetto matematico in grado di descrivere molteplicità eterogenee e per questo le usa come modello di idee; "le idee sono molteplicità: ogni idea è una molteplicità o una varietà"* »[1], [10].

4.2 Superfici Riemanniane ed attualizzazione

Nella geometria Riemanniana lo spazio ed le sue proprietà non sono più determinate da leggi globali e fisse, bensì locali ed eterogenee. Neppure il modo che abbiamo di misurare su tali spazi, per esempio una lunghezza, è omogeneo: viene determinato da leggi locali - i coefficienti $g_{i,j}$ della metrica - le quali sono in continua mutazione al variare dei punti dello spazio.

Secondo Deleuze il piano virtuale « *è una molteplicità di vincoli differenziali che sono gli elementi genetici intensivi di qualsiasi morfodinamica* »[10]. In effetti gli stessi strumenti della geometria differenziale - quale la metrica - sono costruiti tramite processi d'integrazione sul piano tangente. Come visto, presa una varietà M, T_pM fornisce un'approssimazione locale della varietà in $p \in M$. Non è la varietà stessa eppure racchiude in sé tutti gli spostamenti possibili su quest'ultima. Più precisamente T_pM è formato in ogni punto dall'insieme dei vettori tangenti a tutte le curve che giacciono sulla varietà e passano in quel punto. I campi di vettori rappresentano in questo contesto il passaggio continuo da un piano tangente all'altro.
La struttura di T_pM è più semplice di quella della varietà e per questo motivo siamo in grado di definire oggetti che vengono poi riportati sulla varietà. La norma sul tangente varia a seconda della direzione per modulare la velocità di propagazione in ogni direzione. Precisamente la modulazione delle velocità di propagazione è descritta in ogni punto dai coefficienti della matrice di rappresentazione locale $g(x) = g_{i,j}$ e dove, scritto in coordinate $T_pM \ni v = (v_1, ..., v_n)$, otteniamo $\|v\|_g = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} \cdot v_i v_j}$.
Per di più gli stessi coefficienti $g_{i,j} = g_{i,j}(x)$ sono variabili a seconda del punto, definendo norme diverse su diversi piani tangenti. La costruzione della distanza - la sua eterogenesi - è interpretabile come il processo di attualizzazione deuleziano: come abbiamo visto la lunghezza di un segmento è ottenuta tramite l'integrazione dei vincoli differenziali - le norme - sulla famiglia dei piani tangenti: $l(\gamma|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_g \, \mathrm{d}t$.
La lunghezza è l'attualizzazione dei vincoli formati dalle norme sui piani tangenti.

In questa prospettiva intravediamo il potenziale dell'eterogenesi differenziale: una molteplicità di elementi genetici intensivi - piano virtuale rappresentato dalla famiglia dei piani tangenti dotati dei loro vincoli - la cui attualizzazione genera un divenire che è morfodinamico ed eterogeneo - lo spazio e la sua metrica.
Tuttavia per il momento abbiamo continuato a fare alcune richieste piuttosto re-

strittive: in ogni punto le carte deformano tutte uno spazio Euclideo della stessa dimensione. I piani tangenti sono tra di loro equiregolari, nel senso che sono isomorfi avendo tutti la stessa dimensione.

4.3 Superfici sub-Riemanniane e rizoma

Nelle superfici sub-Riemanniane si indeboliscono i vincoli differenziali precedentemente imposti. Ora i piani tangenti non sono necessariamente equiregolari tra loro. Al contrario possono variare di dimensione da punto a punto, descrivendo le direzioni e le curve ammissibili dello spazio. Gli stessi operatori differenziali ammessi - i campi che individuano AT_pM - non sono omogenei, bensì eterogenei ed in continua mutazione da punto a punto. Pensando all'esempio 3.7, i campi considerati cambiano d'intensità a seconda del punto nello spazio, fino al possibile annullamento.

Deleuze disingue il concetto di piano virtuale da quello di spazio di possibilità in senso leibniziano[11]. Il concetto di possibilità in senso leibniziano prevede una gamma di alternative predeterminate [12]. Dipende da modelli trascendenti predefiniti e questo non aggiunge niente alla realtà: il possibile preesiste ed aspetta di essere realizzato. Il piano virtuale descritto da Deleuze è invece un concetto più ricco e dinamico; il divenire non è ridotto a conseguenza di una scelta tra possibilità già date. Piuttosto è l'estensione di nuovi campi di potenzialità emersi nel virtuale tramite l'individuazione. Quest'ultima è il processo di sintesi creativa delle nuove differenze e delle nuove ripetizioni emerse dalla ricombinazione del virtuale [1].
Su una generica superficie sub-Riemanniana (M, Δ, g) abbiamo definito l'algebra di Lie: una nuova struttura di dimensione maggiore di Δ ottenuta tramite la ricombinazione dei campi che definiscono i piani tangenti ammissibili. In particolare tale ricombinazione consiste nella definizione del commutatore $[X_i, X_j]$ dei campi vettoriali X_i, X_j ammessi nella distribuzione Δ. Come visto nell'esempio 3.8, $[X_i, X_j]$ individua nuove direzioni di movimento sulla varietà, le quali non appartengono alla distribuzione Δ ma all'algebra di Lie. Eppure, allo stesso tempo scopriamo che gli spostamenti sulla varietà nelle nuove direzioni individuate da $[X_i, X_j]$ sono già possibili - anche se non estese e previste in Δ - proprio tramite la ricombinazione degli spostamenti ammessi dai campi vettoriali di Δ. In quest'ultimo fatto individuiamo il carattere intensivo degli elementi di AT_pM ed all'interno della dinamica costruttiva dell'algebra di Lie riconosciamo il processo creativo di *agencement*.
Evidenziamo inoltre come il processo di individuazione avvenga tramite differenze e ripetizioni: il commutatore $[X_i, X_j]$ si ripete nel senso che è ancora un campo vettoriale come X_i, X_j, ma è differente nel senso che non è più ammesso in Δ. Analogamente l'algebra di Lie rimane un sottofibrato della varietà, ma si differenzia dalla distribuzione Δ avendo in generale dimensione maggiore.

L'idea del rizoma vegetale viene ripresa da Deleuze e trasportata nel campo gnoseologico, con cui metaforizza la descrizione dei processi vitali - tra cui la generazione delle idee. Il rizoma diventa una struttura retificata, priva di centro la cui progressione può essere del tutto inaspettata o caotica. La rete presenta una molteplicità simultanea di vitalità eterogenee. Gli elementi che compongono il rizoma non rispettano un ordine gerarchico prefissato. Al contrario il rizoma rispetta un principio di

connettibilità grazie al quale tutti gli elementi sono interconnessi tra loro e predisposti all'interazione, capaci di influenzarsi vicendevolmente. I campi regolari ne sono un esempio. La direzione e l'intensità di un vettore tangente $X(p)$ è mutuamente influenzata dai vettori tangenti che lo circondano per via della condizione di continuità. Quest'influenza reciproca origina un processo autorganizzativo, che può a sua volta dar vita a strutture di carattere organizzativo globale; vedesi per esempio il risultato topologico del "Teorema della palla pelosa": se $n \in \mathbb{N}$ è pari, non possono esistere campi vettoriali lisci su S^n che siano sempre non nulli.
La condizione di Hörmander assicura la connessione di una qualsiasi coppia di punti appartenente ad una varietà connessa tramite spostamenti lungo direzioni ammesse. Rivediamo dunque in questa condizione uno dei principi fondamentali - la connettibilità - di una struttura rizomatica: «*Il rizoma è un sistema acentrato, non gerarchico e non significante, definito unicamente da una circolazione di stati. [...] Un rizoma non si lascia ridurre né alla Uno né al molteplice. Esso non è fatto di unità, ma di dimensioni, o piuttosto di direzioni in movimento. [...] Non c'è un'unità che serva da punto di origine o da modello, ma un processo di connessione continua* »[2].
La struttura della conoscenza deuleziana non deriva quindi da semplici deduzioni logiche basate su un insieme di concetti primitivi, piuttosto si sviluppa simultaneamente in ogni campo, sotto l'influenza reciproca di osservazioni di natura diversa: «*Un rizoma non comincia e non finisce, è sempre nel mezzo, tra le cose, inter-essere, intermezzo. L'albero impone il verbo 'essere', ma il rizoma ha come tessuto la congiunzione 'e... e... e...'. In questa congiunzione c'è abbastanza forza per scuotere e sradicare il verbo essere. Dove ci sono molteplicità, non vi è né soggetto né oggetto, ma solo determinazioni, grandezze, dimensioni che non possono aumentare se non cambiando di natura.* »[2].

Modelli descrittivi di questo tipo permettono estrema adattabilità e solidità. Si pensi al cervello: «*sistemi cerebrali costituiscono il piano virtuale, differenziale, intensivo e generatore di qualsiasi piano cognitivo dinamico: un virtuale non solo eterogeneo ma anche incarnato*»[10].
Le morfologie del cervello dipendono da svariati fattori: ad esempio stimoli esterni, interni e vincoli meccanici in continua mutazione. Ciò che otteniamo è «*un'architettura neurale altamente eterogenea in cui un'ampia varietà di neurochimica è assemblata con diverse geometrie di connettività. [...] Si tratta di una materialità generativa, capace di creare singolarità estese a tutte le scale e in continua ricombinazione. Il flusso associato permette l'emergenza di percetti come attualizzazione dell'azione di operatori differenziali eterogenei costituiti dalle famiglie di cellule corticale, attraverso i processi di differenziazione degli operatori sul piano virtuale, e l'integrazione, che ne costituisce l'attualizzazione che ricostruisce il percetto* »[10].
Alcune strutture sub-Riemanniane si sono rivelate cruciali per la comprensione e descrizione di processi cognitivi.

Deleuze e Guattari sostengono una tesi antifondazionalista: la struttura conoscitiva generale evolve grazie l'influenza reciproca di modelli culturali diversificati. Una tale architettura - che prevede la continua rimodellazione di sé stessa - non è per questo instabile: all'interno vi troviamo delle organizzazioni fissate da gruppi o insiemi di concetti affini - i *plateaux* - nelle quali è possibile costruire teorie stabili e di conte-

nuto coerente. Lo sviluppo di una specifica disciplina non descrive la totalità della struttura indagata, ma ne svela semplicemente una parte secondo un determinato punto di vista. Per questo motivo, si invita allo sviluppo di una struttura conoscitiva diversificata ed interdisciplinare.
Un modello di conoscenza decentrato e rizomatico - oltre che ad essere plastico e quindi meglio capace di rappresentare la varietà della vita - è un metodo di opposizione e resistenza ad un'organizzazione gerarchica della conoscenza che traduce in termini epistemologici una struttura sociale oppressiva: «*La funzione dei modelli di pensiero dominanti è quella di catturare le differenze e ricondurle a un ordine prestabilito. È in questa riduzione che si esercita il potere*»[2].

Bibliografia

[1] G. Deleuze, *Différence et répétition*. Presses universitaires de France, 1968.

[2] G. Deleuze e F. Guattari, *A thousand plateaus. Capitalismand Schizophrenia, Vol. 2*. University of Minnesota Press, 1980.

[3] A. Sarti, G. Citti e D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis: Mutant Forms, Sensitive Bodies*. Springer, 16 lugilo 2023.

[4] G. Simondon, *L'individuation à la lumière des notions de forme et d'information*. Editions Jérôme Millon, 2005.

[5] A. Sarti, D. Piotrowski, F. Montanari e F. Galofaro, *Morphogenesis and Individuation*. Springer, 2015.

[6] A. Sarti, G. Citti e D. Piotrowski, «Differential heterogenesis and the emergence of semiotic function,» *?*, 10 febbraio 2018.

[7] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*. Birkhauser, 1992.

[8] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds, 2nd edition*. Springer, 2014.

[9] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*. Publish or Perish, 1999.

[10] G. Citti e A. Sarti, «Un modello operatoriale di eterogenesi differenziale,» *seminario?*, 2020?

[11] G. Deleuze, *Immanenza: una vita...* Mimesis Edizioni, 2012.

[12] G. W. Leibniz, *Saggi di Teodicea. Sulla bontà di Dio, la libertà dell'uomo e l'origine del male*. Bur, 1993.