

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Diversi tipi di
Convergenza per le
Serie di Fourier

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Noemi Galgani

Anno Accademico 2023/2024

*A mia madre,
che mi ricorda chi sono.*

Introduzione

Grazie alle sue applicazioni in numerosi ambiti, la teoria delle serie di Fourier costituisce uno dei pilastri fondamentali nel campo dell'Analisi Matematica. L'obiettivo di questa tesi è fornire una panoramica sul tema della convergenza delle serie di Fourier. La tesi è articolata in tre capitoli: nel primo, vengono introdotte le notazioni e le definizioni essenziali relative alle serie di Fourier: si presentano i polinomi trigonometrici, l'insieme $\mathbb{T}$, i coefficienti di Fourier e si discute il concetto di sviluppabilità in serie di Fourier. Vengono poi enunciati la Disuguaglianza di Bessel e il Lemma di Riemann-Lebesgue, dai quali segue un importante risultato sul comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier.

Il secondo capitolo esaminerà la convergenza delle serie di Fourier. Nello specifico, si analizzeranno dettagliatamente sia la convergenza puntuale sia quella uniforme. Si introducono i nuclei di Dirichlet e si discute il loro ruolo nel garantire la convergenza delle somme parziali. Successivamente, si dimostra il Principio di Localizzazione di Riemann, evidenziando che solo il comportamento locale di una funzione influisce sulla convergenza della sua serie di Fourier in un punto specifico. A questo risultato seguono altri due notevoli teoremi: il Teorema di Dini e il Teorema di Dirichlet, che forniscono condizioni sufficienti affinché tale serie converga. Si mostrano poi alcune applicazioni di questi due teoremi e alcuni risultati sulla convergenza uniforme.

Infine, nel terzo capitolo la tesi si concentrerà sulla sommabilità della serie di Fourier. Verranno presentati dei risultati che consentono di estendere la nozione di convergenza, permettendo così di trattare anche casi in cui la convergenza tradizionale non è garantita. Più precisamente, si definiscono i nuclei di Poisson e di Fejér, spiegando come possano essere utilizzati per assicurare la convergenza delle serie nel senso di Abel e di Cesàro, rispettivamente. Viene spiegata la relazione tra la convergenza secondo Abel e quella secondo Cesàro per una serie numerica. Inoltre, si dimostra che, sotto certe condizioni, le medie di Fejér associate a una funzione convergono uniformemente a tale funzione. Per concludere, grazie ad alcuni risultati di densità, si prova che due funzioni sommabili aventi gli stessi coefficienti di Fourier coincidono quasi ovunque.

Indice

Introduzione	i
1 Serie Trigonometriche di Fourier	1
1.1 Polinomi trigonometrici	1
1.2 Disuguaglianza di Bessel e Lemma di Riemann-Lebesgue	3
2 Convergenza puntuale e uniforme della Serie di Fourier	7
2.1 I nuclei di Dirichlet	7
2.2 Il Principio di Localizzazione di Riemann	9
2.3 Il Teorema di Dini	11
2.4 Il Teorema di Dirichlet	12
2.5 Convergenza uniforme	17
3 Sommabilità della Serie di Fourier	23
3.1 Nuclei di Poisson	23
3.2 Convergenza secondo Abel	24
3.3 I Nuclei di Fejér	29
3.4 Sommabilità secondo Cesàro	29
3.5 Un risultato di convergenza uniforme	35
Bibliografia	39

Capitolo 1

Serie Trigonometriche di Fourier

1.1 Polinomi trigonometrici

Lo scopo di questa sezione è definire la serie di Fourier associata ad una funzione f . Per fare ciò, occorre dare alcune definizioni.

Definizione 1.1. Si chiama *polinomio trigonometrico reale di grado n* ogni funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx), \quad (1.1)$$

ove a_k e $b_k \in \mathbb{R}$ per ogni k e a_n e b_n non contemporaneamente nulli. Nel caso in cui $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, la funzione

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}, \quad (1.2)$$

con $c_k \in \mathbb{C}$ per ogni k e $c_n \neq 0$, si dice *polinomio trigonometrico complesso di grado n* .

Per la Formula di Eulero $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$, si ha

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kx), \quad \forall k \geq 0.$$

Se poniamo

$$a_0 := 2c_0; \quad b_0 = 0; \quad a_k := c_k + c_{-k} \quad b_k := i(c_k - c_{-k}),$$

ricaviamo che la (1.2) diventa

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx). \quad (1.3)$$

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$, munito della seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \quad \text{se e solo se} \quad x - y = 2k\pi, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

In questo modo, possiamo identificare l'intervallo $\mathbb{T} = [-\pi, \pi[$ con il quoziente $\mathbb{R}/\sim$, ottenuto dalla precedente relazione. Lo spazio delle funzioni definite su $\mathbb{T}$ coincide quindi con lo spazio delle funzioni reali 2π -periodiche. In particolare, questa notazione ci permette di lavorare, per ogni f di periodo 2π , su un intervallo di ampiezza 2π , anziché considerarne tutto il dominio di definizione. Immediata conseguenza delle ultime due uguaglianze è l'unicità della scrittura (1.1). Un importante esempio di polinomio trigonometrico reale è il polinomio di Fourier di grado n .

Definizione 1.2. *Sia f una funzione 2π -periodica, sommabile su $\mathbb{T}$. Il polinomio trigonometrico*

$$S_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (1.4)$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(kt) dt, \quad \forall k \geq 0, \quad (1.5)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(kt) dt, \quad \forall k \geq 1, \quad (1.6)$$

si dice polinomio di Fourier di grado n associato a f . Le costanti a_k e b_k prendono il nome di coefficienti di Fourier.

Analogamente a quanto visto nel caso generale, anche questa scrittura ne ammette una complessa equivalente. Più precisamente,

$$S_n(f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad (1.7)$$

con

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt, \quad (1.8)$$

il k -esimo coefficiente di Fourier. La (1.7) è nota come *n -esima somma parziale di Fourier*.

Osservazione 1.3. Se f_1 e f_2 sono due funzioni che differiscono solo su un insieme di misura di Lebesgue nulla, allora, dalla (1.8) e dalle proprietà dell'integrale di Lebesgue, $\widehat{f}_1(k) = \widehat{f}_2(k)$, per ogni intero k .

Vogliamo studiare il comportamento di $S_n(f)$ quando $n \rightarrow \infty$. Occorre quindi dare le seguenti definizioni.

Definizione 1.4. *Data $f \in L^1(\mathbb{T})$ periodica di periodo 2π , la serie bilatera*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad (1.9)$$

con $\widehat{f}(k)$ definiti come nella (1.8), si chiama serie di Fourier associata a f .

Definizione 1.5. Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Se $S_n(f)(x_0)$ soddisfa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0) = f(x_0),$$

allora f si dice *svilupicabile in serie di Fourier nel punto* x_0 .

In altre parole, richiediamo che la successione $\{S_n(f)(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ abbia limite e che esso sia uguale a $f(x_0)$. Dall'Osservazione 1.3 deduciamo che, per stabilire se f è sviluppabile in serie di Fourier in $x_0 \in \mathbb{T}$, conviene innanzitutto vedere se $S_n(f)(x_0)$ ha limite, cercando condizioni sufficienti a garantire la convergenza, e poi se questo coincida con $f(x_0)$.

1.2 Disuguaglianza di Bessel e Lemma di Riemann-Lebesgue

In questa sezione lavoreremo con funzioni 2π -periodiche su $L^2(\mathbb{T})$. Esso è uno spazio di Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. In questo caso, scegliamo come base Hilbertiana il sistema ortonormale $\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dato che $\mathbb{T}$ ha misura di Lebesgue finita, $L^2(\mathbb{T})$ è contenuto in $L^1(\mathbb{T})$, per cui i coefficienti di Fourier sono ben posti.

Teorema 1.6. Per ogni $f \in L^2(\mathbb{T})$ 2π -periodica vale la seguente disuguaglianza:

$$\|f - p_n\|_{L^2} \geq \|f - S_n(f)\|_{L^2}, \quad (1.10)$$

per ogni p_n polinomio trigonometrico di grado minore o uguale a n .

In altre parole, il polinomio trigonometrico che meglio approssima la funzione f in norma L^2 su $\mathbb{T}$ è proprio il suo polinomio di Fourier di grado n .

Dimostrazione. Scriviamo p_n come in (1.2). Allora

$$\langle f, p_n \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{T}} f(t) \sum_{|k| \leq n} \overline{c_k} e^{ikt} dt = \sum_{|k| \leq n} \overline{c_k} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt \stackrel{(1.8)}{=} 2\pi \sum_{|k| \leq n} \overline{c_k} \widehat{f}(k).$$

Ricordiamo che, per l'ortogonalità del sistema $\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ogni $j, m \in \mathbb{Z}$ soddisfa

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ijt} e^{-imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{se } j = m; \\ 0 & \text{se } j \neq m. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\|p_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j,m} \int_{\mathbb{T}} c_j e^{ijt} \overline{c_m} e^{-imt} dt = \sum_{j,m} \int_{\mathbb{T}} c_j \overline{c_m} e^{i(j-m)t} dt = \sum_{j,m} c_j \overline{c_m} \int_{\mathbb{T}} e^{i(j-m)t} dt.$$

Per quanto osservato sopra, rimangono solo i termini con $j = m$, per cui

$$\|p_n\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{|j| \leq n} |c_j|^2.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt + 2\pi \sum_{|j| \leq n} |c_j|^2 - 2\pi \sum_{|j| \leq n} (\widehat{f}(j)\overline{c_j} + \overline{\widehat{f}(j)}c_j) \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\pi \sum_{|j| \leq n} |\widehat{f}(j)|^2 + 2\pi \sum_{|j| \leq n} |\widehat{f}(j) - c_j|^2 \\ &\geq \|f\|_{L^2}^2 - 2\pi \sum_{|j| \leq n} |\widehat{f}(j)|^2 = \|f - S_n(f)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Dall'ultima uguaglianza si deduce che il minimo è raggiunto quando $c_j = \widehat{f}(j)$, ossia nel caso in cui $p_n = S_n(f)$. $\square$

Teorema 1.7 (Disuguaglianza di Bessel). *Data una funzione f , di periodo 2π e a quadrato sommabile su $\mathbb{T}$, essa soddisfa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2. \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente si ha

$$0 \leq \|f - S_n(f)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - 2\pi \sum_{|j| \leq n} |\widehat{f}(j)|^2,$$

ossia

$$\sum_{|j| \leq n} |\widehat{f}(j)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2.$$

Poiché il primo membro coincide con $\|S_n(f)\|_{L^2}^2$, il risultato segue passando al limite per $n \rightarrow \infty$. $\square$

Per quanto mostrato, la successione dei coefficienti di Fourier $\{\widehat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ di una funzione a quadrato sommabile su $\mathbb{T}$ converge a zero. Ciò rimane vero anche con ipotesi meno restrittive, in particolare nel caso di f sommabile su $\mathbb{T}$, come si evince dal seguente lemma.

Lemma 1.8 (di Riemann-Lebesgue). *Per ogni f sommabile su $\mathbb{T}$ risulta*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(\lambda t) dt = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(\lambda t) dt. \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima uguaglianza; per la seconda si procede in modo analogo. Innanzitutto supponiamo $f = \chi_{(a,b)}$, con $(a, b) \subset \mathbb{T}$. Per la linearità dell'integrale, il risultato segue anche per ogni funzione semplice, ovvero della forma $\sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, con a_j costanti reali e A_j intervallo di $\mathbb{T}$. Si ha

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \chi_{(a,b)} \cos(\lambda t) dt \right| = \left| \int_a^b \cos(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{1}{\lambda} (\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a)) \right| \leq \left| \frac{2}{\lambda} \right|,$$

che tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$. Se f è una funzione misurabile e non negativa su $\mathbb{T}$, sappiamo che essa è approssimabile mediante funzioni a gradini. Più precisamente, le funzioni a gradini sono dense in $L^1(\mathbb{T})$. Dunque, preso $\varepsilon > 0$, è possibile scegliere $\phi = \phi_\varepsilon$ tale che

$$\|f - \phi\|_{L^1} = \int_{\mathbb{T}} |f(t) - \phi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre, essendo le funzioni a gradini un caso particolare di funzioni semplici, ϕ soddisfa

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \phi(t) \cos(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per λ sufficientemente grande. Perciò,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(\lambda t) dt \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - \phi(t)) \cos(\lambda t) dt + \int_{\mathbb{T}} \phi(t) \cos(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - \phi(t)) \cos(\lambda t) dt \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} \phi(t) \cos(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(t) - \phi(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, questo conclude la prova nel caso $f \geq 0$. Infine, se f è una generica funzione sommabile su $\mathbb{T}$, allora $f = f_+ + f_-$, rispettivamente parte positiva e parte negativa, e la tesi segue da quanto visto per le funzioni non negative. $\square$

Osservazione 1.9. Poiché la prova del precedente teorema usa solo che $\mathbb{T}$ è un intervallo limitato, si deduce che lo stesso risultato vale anche nel caso di $f \in L^1(I)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato.

Capitolo 2

Convergenza puntuale e uniforme della Serie di Fourier

Questo capitolo analizzerà anzitutto la convergenza puntuale della serie di Fourier associata ad una funzione f . Successivamente, verranno forniti criteri per stabilire la convergenza uniforme della stessa serie.

2.1 I nuclei di Dirichlet

Introduciamo dei particolari polinomi trigonometrici, noti come nuclei di Dirichlet, che torneranno utili nei prossimi risultati.

Definizione 2.1. *Fissato $n \in \mathbb{N}$, si dice nucleo di Dirichlet n -esimo il polinomio trigonometrico dato da*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}, \quad (2.1)$$

ove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la Formula di Eulero.

Osservazione 2.2. Dalla definizione segue immediatamente che D_n è una funzione pari e 2π -periodica, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.3. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e D_n nucleo di Dirichlet. Allora*

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(x) \, dx = 1. \quad (2.2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=1}^n \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} 1 dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{T}} \cos(kx) dx \\
 &= 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) dx = 1.
 \end{aligned}$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$\int_{\mathbb{T}} \cos(kx) dx = 2 \int_0^\pi \cos(kx) dx = 2 \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0,$$

in quanto funzione pari su un dominio simmetrico rispetto all'asse y . $\square$

Osservazione 2.4. Si può dimostrare che D_n soddisfa

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (2.3)$$

Inoltre il nucleo di Dirichlet permette di scrivere $S_n(f)$ sotto forma di convoluzione. Più precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione 2.5. *Siano f una funzione 2π -periodica, sommabile su $\mathbb{T}$ e D_n nucleo di Dirichlet n -esimo. Allora*

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi} (D_n * f). \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Vale il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
 S_n(f)(x) &= \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(x) e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ikx} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left[\frac{1}{2} \sum_{|k| \leq n} e^{-ikt} e^{ikx} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)}}{2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_n(x-t) dt.
 \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Osservazione 2.6. Sfruttando la commutatività della convoluzione e il cambio di variabile $u = -t$ sull'intervallo $[-\pi, 0]$, si ottiene che la (2.4) può scriversi anche come

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) D_n(t) dt. \quad (2.5)$$

Proposizione 2.7. *Sia f una funzione 2π -periodica, sommabile su $\mathbb{T}$, e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Allora la successione $\{S_n(f)(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un qualche valore $\lambda \in \mathbb{R}$ se e solo se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0. \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 2.2 e per la Proposizione 2.3 si ha

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lambda D_n(t) dt.$$

Inoltre,

$$S_n(f)(x_0) \stackrel{(2.5)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2} D_n(t) dt.$$

Di conseguenza, scrivendo D_n in forma chiusa,

$$S_n(f)(x_0) - \lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Per $n \rightarrow \infty$ si ottiene quanto cercato. $\square$

2.2 Il Principio di Localizzazione di Riemann

Il lemma di Riemann-Lebesgue permette di dimostrare che, sebbene i coefficienti di Fourier di f siano definiti integrando globalmente su $\mathbb{T}$, il comportamento della serie di Fourier in un punto di $\mathbb{T}$ dipende solo dal comportamento locale di f attorno a quel punto. Questo è il contenuto del seguente risultato, noto come Principio di Localizzazione di Riemann.

Teorema 2.8. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ una funzione 2π -periodica e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x_0) = \lambda,$$

se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{t} dt = 0, \quad (2.7)$$

per qualche $\delta > 0$.

Dimostrazione. Poniamo

$$r_f(x_0, t) := \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2},$$

e

$$g(t) := \frac{r_f(x_0, t) - \lambda}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Per ogni $\delta \in (0, \pi)$, la funzione $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ è continua, limitata e non nulla su $[\delta, \pi]$, quindi $g \in L^1([\delta, \pi])$. Pertanto, il limite nella (2.6) equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0, \quad (2.8)$$

grazie al Lemma di Riemann-Lebesgue. Se proviamo che sono equivalenti (2.8) e (2.7), la tesi segue dalla Proposizione 2.7. Consideriamo la funzione h così definita:

$$h(t) := \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{2}{t}.$$

Essa è sommabile nell'intervallo $(0, \delta)$, in quanto continua e limitata. Ne segue che anche la funzione $(r_f(x_0, t) - \lambda)h$ è sommabile sullo stesso intervallo. Ancora per il Lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (r_f(x_0, t) - \lambda)h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0,$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (r_f(x_0, t) - \lambda) \frac{2 \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{t} dt.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Corollario 2.9. *Siano $g, h \in L^1(\mathbb{T})$ funzioni periodiche, di periodo 2π . Se esse coincidono su un intorno $I = I(g, h, x_0) \subset \mathbb{T}$ di $x_0 \in \mathbb{T}$, si verifica uno e uno solo dei seguenti casi:*

- (i) *esistono $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(g)(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(h)(x_0)$ e coincidono;*
- (ii) *nessuna delle somme parziali in (i) ammette limite, per $n \rightarrow \infty$.*

Un'altra applicazione del Lemma di Riemann-Lebesgue mostra che la derivabilità di una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ in un punto di $\mathbb{T}$ ne assicura la sviluppabilità in serie di Fourier.

Teorema 2.10. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Se f è derivabile in x_0 , allora essa è sviluppabile in serie di Fourier in tale punto.*

Dimostrazione. Per le proprietà dei D_n , è possibile scrivere

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 + t) - f(x_0)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \frac{t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(nt + \frac{t}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Dato che f è derivabile in x_0 , la funzione

$$r(t) := \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

è limitata in un intorno I di 0. Inoltre, $r \in L^1(\mathbb{T} \setminus I)$ perché f è sommabile su questo insieme. Dunque, la tesi segue applicando il Lemma 1.8 a

$$g(t) := r(t) \frac{t}{2 \sin(\frac{t}{2})},$$

e osservando che il secondo fattore è una funzione integrabile e limitata su $\mathbb{T}$. $\square$

2.3 Il Teorema di Dini

Il Principio di Localizzazione di Riemann consente di ricavare alcuni criteri di convergenza. Il risultato più noto è contenuto nel Teorema di Dini.

Definizione 2.11. *Sia f sommabile su $\mathbb{T}$ e sia $x_* \in \mathbb{T}$. Si dice che f soddisfa la condizione di Dini nel punto x_* se*

$$l(x_*) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_* + t) + f(x_* - t)}{2}$$

esiste ed è finito e se la funzione $r(t)$ data da

$$r(t) := \frac{f(x_* + t) + f(x_* - t) - 2l(x_*)}{t} \quad (2.9)$$

è sommabile sull'intervallo $(0, \delta)$, per qualche $\delta \in (0, \pi)$.

Teorema 2.12 (di Dini). *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, che soddisfa la condizione di Dini in $x_* \in \mathbb{T}$, vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_*) = l(x_*).$$

Dimostrazione. Siano r e δ come nella definizione precedente. Poiché $r \in L^1(0, \delta)$ per ipotesi, il Lemma 1.8 implica che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta r(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2} dt = 0,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x_* + t) + f(x_* - t)}{2} - l(x_*) \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt = 0.$$

Per il Principio di Localizzazione di Riemann, ciò prova che $S_n(f)(x_*)$ converge puntualmente a $l(x_*)$. $\square$

Osservazione 2.13. Se $x_* \in \mathbb{T}$ è un punto in cui f è continua e soddisfa la condizione di Dini, $l(x_*) = f(x_*)$ per unicità del limite. Di conseguenza, f è sviluppabile in serie di Fourier in x_* .

Il Teorema di Dini si applica anche ad un'ampia classe di funzioni, chiamate funzioni α -Hölderiane. Nello specifico, permette di dimostrare che ogni funzione Hölderiana su $\mathbb{T}$ è sviluppabile in serie di Fourier in x , qualunque sia $x \in \mathbb{T}$.

Definizione 2.14. Una funzione $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice α -Hölderiana su $\mathbb{T}$ se esistono $\alpha \in (0, 1]$ e $L > 0$ tali che

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|^\alpha, \quad (2.10)$$

per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$. In particolare, se $\alpha = 1$, si dice che f è Lipschitziana su $\mathbb{T}$.

Proposizione 2.15. Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ è una funzione α -Hölderiana su $\mathbb{T}$, essa soddisfa la condizione di Dini in ogni punto del suo dominio.

Dimostrazione. Preso $x_* \in \mathbb{T}$ e osservando che ogni funzione α -Hölderiana è anche continua, si ha

$$l(x_*) = f(x_*),$$

per l'Osservazione 2.13. Quindi per ogni $\delta \in (0, \pi)$, risulta

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |r(t)| dt &\leq \int_0^\delta \left(\frac{|f(x_* + t) - f(x_*)|}{t} + \frac{|f(x_* - t) - f(x_*)|}{t} \right) dt \\ &\leq \int_0^\delta \left(\frac{L|x_* + t - x_*|^\alpha}{t} + \frac{L|x_* - t - x_*|^\alpha}{t} \right) dt \\ &= \int_0^\delta \left(L \frac{|t|^\alpha + |t|^\alpha}{t} \right) dt = 2L \int_0^\delta \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} \right) dt < +\infty, \end{aligned}$$

essendo $1 - \alpha \leq 1$ per ipotesi. □

2.4 Il Teorema di Dirichlet

In questa sezione mostreremo un altro risultato significativo relativo alla convergenza puntuale della serie di Fourier, il Teorema di Dirichlet. Da qui in avanti, dati $x_0 \in \mathbb{T}$ e $f \in L^1(\mathbb{T})$, indicheremo, dove esistono, con $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$, rispettivamente i limiti destro e sinistro di f in x_0 .

Definizione 2.16. Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, essa si dice monotona a tratti se esistono $t_0 < t_1 < \dots < t_m$, con $t_0 = a$ e $t_m = b$, tali che $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è monotona, per ogni $i = 0, \dots, m - 1$.

Dalla definizione si deduce che per ogni funzione monotona a tratti esistono i limiti destro e sinistro in ogni punto del suo dominio.

Teorema 2.17 (di Dirichlet). *Sia f limitata e monotona a tratti su $\mathbb{T}$. Allora, per ogni $x_0 \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}. \quad (2.11)$$

Osservazione 2.18. Se, oltre alle ipotesi di questo teorema, f è continua in x_0 , $f(x_0^+) = f(x_0) = f(x_0^-)$. Ne segue che f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto x_0 .

Prima di procedere con la dimostrazione, enunciamo due lemmi che torneranno utili nella prova.

Lemma 2.19 (di Bonnet). *Siano $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano*

(i) $g \geq 0$ e non decrescente su $[a, b]$;

(ii) h continua e avente un numero finito di cambi di segno su $[a, b]$.

Allora

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = g(b) \int_c^b h(t) dt,$$

per un certo $c \in (a, b)$.

Dimostrazione. Siano $(a_0, a_1), (a_1, a_2) \dots (a_{m-1}, a_m)$, con $a_0 = a$ e $a_m = b$, gli intervalli in cui h ha segno costante. Le ipotesi su g assicurano che per ogni $j = 0, 1, \dots, m$, esiste $\mu_j \in [g(a_{j-1}^+), g(a_j^-)]$ tale che

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(t)h(t) dt = \mu_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} h(t) dt.$$

Le ipotesi su g implicano che $\mu_j \geq 0$, per ogni $j = 0, 1, \dots, m$. Posto

$$H(x) := \int_x^b h(t) dt,$$

si ha

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} h(t) dt = H(a_{j-1}) - H(a_j).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)h(t) dt &= \sum_{j=1}^m \mu_j (H(a_{j-1}) - H(a_j)) = \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{m-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) H(a_j) \\ &\stackrel{(H(b)=0)}{=} \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{m-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) H(a_j) + (g(b) - \mu_m) H(b) \\ &= M \left(\mu_1 + \sum_{j=1}^{m-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) + g(b) - \mu_m \right), \end{aligned}$$

per un certo M tale che $\min_{[a,b]} H \leq M \leq \max_{[a,b]} H$, essendo $\mu_j \geq 0$ per ogni j . Poiché H è continua, per il Teorema dei Valori Intermedi esiste $c \in (a, b)$ tale che $H(c) = M$. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)h(t) dt &= H(c) \left(\mu_1 + \sum_{j=1}^{m-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) + g(b) - \mu_m \right) = H(c)g(b) \\ &= g(b) \int_c^b h(t) dt, \end{aligned}$$

come volevasi. □

Lemma 2.20. *Fissato $n \in \mathbb{N}$, il nucleo di Dirichlet D_n soddisfa*

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} D_n(t) dt \right| \leq M,$$

per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi)$ con $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e per una opportuna costante positiva M , indipendente da n e da α_1, α_2 .

Dimostrazione. Vale il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} D_n(t) dt &\stackrel{(2.3)}{=} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} dt \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)}{t} \right) dt + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)}{t} dt. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} D_n(t) dt \right| \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| \frac{1}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{1}{t} \right| dt + \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)}{t} dt \right| =: I_1 + I_2.$$

I_1 è l'integrale di una funzione continua e limitata su un intervallo limitato, dunque esiste una costante positiva B_1 , indipendente da n, α_1, α_2 , tale che $I_1 \leq B_1 < +\infty$. Grazie al cambio di variabile $(nt + \frac{t}{2}) = x$, è possibile riscrivere I_2 come

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin x}{x} dx \right|, \tag{2.12}$$

ove

$$A_1 := \frac{\alpha_1}{n + \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad A_2 := \frac{\alpha_2}{n + \frac{1}{2}}.$$

Per quanto visto per I_1 , è sufficiente maggiorare l'integrale in (2.12) in modo indipendente da n, α_1, α_2 . Se $A_2 \leq 1$, si ha che $\sin t \leq t$, per cui

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} 1 dt \right| = |A_2 - A_1| \leq 1.$$

Nel caso in cui $A_1 \geq 1$, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| &= \left| - \left[\frac{\cos t}{t} \right]_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \int_{A_1}^{A_2} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \int_{A_1}^{A_2} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \leq 2. \end{aligned}$$

Infine, se $A_1 < 1 < A_2$, stimiamo dall'alto gli integrali in $(A_1, 1)$ e in $(1, A_2)$, rispettivamente come nel primo e nel secondo caso. Riassumendo, abbiamo trovato una costante B_2 , non negativa e indipendente da n , tale che $I_2 \leq B_2$. Inoltre, B_2 è indipendente da A_1, A_2 , e quindi da α_1, α_2 . In conclusione, la tesi segue prendendo $M := B_1 + B_2$. $\square$

Dimostrazione del Teorema 2.17. Dalle proprietà di D_n segue che per ogni $x_0 \in (0, \pi)$,

$$\frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{\pi} \frac{\pi}{2} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x_0) D_n(t) dt.$$

Pertanto,

$$S_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0^+) - f(x_0^-)) D_n(t) dt.$$

Poniamo

$$g(t) := f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0^+) - f(x_0^-).$$

Poiché g è limitata, monotona a tratti e tale che $g(0^+) = 0$, basta provare che ogni funzione h avente le stesse proprietà di g su $(0, \pi)$ soddisfa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi h(t) D_n(t) dt = 0.$$

Siano $t_0, t_1, \dots, t_m$ come nella definizione precedente e M la costante del Lemma 2.20. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che h sia crescente nell'intervallo $(0, t_1]$. Questo assicura $h \geq 0$ su questo intervallo, dato che $h(0^+) = 0$. Preso $\varepsilon > 0$, sia $\alpha_1 = \alpha_1(\varepsilon) \in (0, t_1)$ tale che $h(\alpha_1) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Poiché D_n è continua e con un numero finito di cambi di segno su $(0, \pi)$, i due lemmi precedenti implicano

$$\left| \int_0^{\alpha_1} h(t) D_n(t) dt \right| = \left| h(\alpha_1) \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} D_n(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rimane da mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^\pi h(t) D_n(t) dt = 0. \quad (2.13)$$

Posto

$$B := \sup_{t \in [\alpha_1, \pi]} |h(t)|,$$

risulta

$$\int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{|h(t)|}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \leq \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{B}{2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} dt = \frac{B(\pi - \alpha_1)}{2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} < +\infty,$$

quindi la funzione $\frac{h(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ è sommabile. Ricordando la (2.3), la (2.13) è vera per il Lemma 1.8. Esiste dunque un certo $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tale per cui ogni D_n con $n \geq \bar{n}(\varepsilon)$ soddisfa

$$\int_{\alpha_1}^{\pi} h(t) D_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene la seguente stima

$$\left| S_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right| \leq \left| \int_0^{\alpha_1} g(t) D_n(t) dt \right| + \left| \int_{\alpha_1}^{\pi} g(t) D_n(t) dt \right| \leq \varepsilon,$$

definitivamente. Poiché questa condizione equivale alla (2.11), il risultato segue. $\square$

Il teorema appena mostrato si applica anche nel caso di funzioni a variazione limitata.

Definizione 2.21. Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_p = b\} \in \Omega_{[a, b]}$ una scomposizione di $[a, b]$. Si pone

$$v(f, \sigma) := \sum_{k=0}^{p-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|,$$

e si chiama *variazione di f associata a σ* . Poniamo inoltre

$$V_a^b(f) := \sup_{\sigma \in \Omega_{[a, b]}} v(f, \sigma),$$

detta *variazione totale di f* . Infine, se $V_a^b(f) < +\infty$, si dice che f è a *variazione limitata* su $[a, b]$. Indicheremo con $BV_{[a, b]}$ lo spazio delle funzioni a variazione limitata su questo intervallo.

Teorema 2.22 (di Jordan). Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, essa è a variazione limitata su $[a, b]$ se e solo se può scriversi come

$$f(x) = g_1(x) - g_2(x),$$

con g_1, g_2 monotone crescenti su $[a, b]$.

Da questo teorema segue che ogni funzione a variazione limitata su un intervallo compatto soddisfa le ipotesi del Teorema di Dirichlet. Possiamo quindi concludere che, anche in questo caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \quad \forall x_0 \in [a, b].$$

Abbiamo visto due principali risultati riguardo la convergenza puntuale della serie di Fourier: il Teorema di Dini e il Teorema di Dirichlet. I seguenti controesempi mostrano che nessuno dei due implica l'altro.

Esempio 2.23. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\log \left| \frac{x}{2\pi} \right|} & \text{se } x \in \mathbb{T} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, monotona a tratti e limitata da $f(\pi) < +\infty$, quindi verifica le ipotesi del Teorema di Dirichlet, mentre si può dimostrare che essa non soddisfa la condizione di Dini in $x_* = 0$.

Esempio 2.24. Per ogni $\alpha \in (0, 1)$, consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \left(\frac{1}{|x|} \right) & \text{se } x \in \mathbb{T} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Preso un intorno I dell'origine, possiamo supporre

$$I = \left(-\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{n\pi} \right),$$

per un certo $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$, siano poi

$$\xi_k := \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}.$$

Allora si ottiene la seguente stima dal basso per $V(f)$ su I :

$$V(f) \geq \sum_{k=n}^{+\infty} |f(\xi_k)| = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi\right)^\alpha} \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty,$$

essendo $0 < \alpha < 1$. Dunque, per tali valori di α , g non è a variazione limitata su $\mathbb{T}$, quindi dal Teorema 2.22 segue che il Teorema di Dirichlet non è applicabile. Tuttavia, con un po' di calcoli si verifica che g è α -Hölderiana su $\mathbb{T}$, dunque soddisfa le ipotesi del Teorema di Dini nel suo dominio.

2.5 Convergenza uniforme

Ricordiamo una condizione sufficiente alla convergenza uniforme di una serie di funzioni.

Teorema 2.25 (Weiestrass M-test). *Siano $f_n : (X, d_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$, con (X, d_X) spazio metrico e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazio metrico completo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo*

$$M_n := \sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_Y.$$

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converga totalmente, ossia che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Ebbene, sotto queste ipotesi la serie di funzioni $\sum_n f_n$ converge uniformemente su X . Brevemente, diremo che la convergenza totale implica la convergenza uniforme.

Osservazione 2.26. Poiché la convergenza uniforme di una serie preserva la continuità, se la funzione di partenza è discontinua, concludiamo subito che non è sviluppabile in serie di Fourier di una serie uniformemente convergente.

Diamo ora la definizione di funzione C^1 a tratti, che tornerà utile nei prossimi risultati.

Definizione 2.27. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, una funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice C^1 a tratti su A se esiste un insieme finito B tale che f è derivabile su $A \setminus B$, con derivata continua e limitata su questo insieme.

Teorema 2.28. Ogni funzione 2π -periodica, C^1 a tratti su $\mathbb{T}$ è tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = f,$$

uniformemente su $\mathbb{T}$.

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che per i coefficienti di Fourier di f vale la relazione:

$$\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Integrando per parti e sapendo che $f(\pi) = f(-\pi)$ per la periodicità,

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx = in\widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Ricordando che per ogni $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ vale

$$\xi_1 \xi_2 \leq \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}, \quad (2.15)$$

si ottiene

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{n} |n\widehat{f}(n)| \stackrel{(2.15)}{\leq} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right) \stackrel{(2.14)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + n^2 \frac{|\widehat{f}'(n)|^2}{n^2} \right).$$

È quindi soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}'(n)|^2 \right).$$

Per ipotesi, f è C^1 a tratti su $\mathbb{T}$, quindi $f' \in L^2(\mathbb{T})$ essendo continua e limitata su un intervallo limitato privato di un insieme finito. La Disuguaglianza di Bessel assicura che

$$\sum_n \left| \widehat{f'}(n) \right|^2 < +\infty.$$

Inoltre,

$$\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

poiché serie convergente. Concludiamo per il Teorema 2.25, dato che

$$\sum_n \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| \widehat{f}(n) e^{int} \right| = \sum_n \left| \widehat{f}(n) \right| < +\infty.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Nel contesto della convergenza uniforme, vale un risultato simile al Lemma 1.8.

Lemma 2.29. *Siano f e g due funzioni limitate su $\mathbb{T}$. Supponiamo inoltre che f sia integrabile e g sia monotona a tratti su $\mathbb{T}$. Allora*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(x+t)g(t) \sin(\lambda t) dt, \quad (2.16)$$

uniformemente rispetto a x .

Alla dimostrazione del lemma, premettiamo il seguente teorema.

Teorema 2.30 (della media integrale). *Date due funzioni $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con g monotona e h Riemann integrabile su $[a, b]$, esse soddisfano*

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = g(a^+) \int_a^c h(t) dt + g(b^-) \int_c^b h(t) dt,$$

per un opportuno $c \in (a, b)$.

Dimostrazione del Lemma 2.29. Mostriamo la prima uguaglianza; nello stesso modo si ottiene la seconda. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che f e g siano non negative. Per ipotesi esistono due costanti positive, M_f e M_g , tali che $|f| \leq M_f$ e $|g| \leq M_g$ su $\mathbb{T}$. Siccome f è approssimabile mediante funzioni a gradini, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste

$$s(x) := \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{I_k}(x),$$

con $\alpha_k \geq 0$ e I_k intervallo di $\mathbb{T}$, tale che $s \leq f$ e

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t) - s(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}.$$

Pertanto

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |(f(x+t) - s(x+t))g(t) \cos(\lambda t)| dt \\ + \left| \int_{\mathbb{T}} s(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt \right|.$$

Per il primo addendo si ha

$$\int_{\mathbb{T}} |(f(x+t) - s(x+t))g(t) \cos(\lambda t)| dt \leq M_g \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - s(x+t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mentre il secondo soddisfa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} s(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{\mathbb{T}} \chi_{I_k}(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{\mathbb{T}} \chi_{I_{k-x}}(t)g(t) \cos(\lambda t) dt \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{a_k-x}^{b_k-x} g(t) \cos(\lambda t) dt, \end{aligned}$$

ove, se $I_k = [a_k, b_k]$,

$$I_{k-x} := [a_k - x, b_k - x].$$

A meno di suddividere I_{k-x} in sottointervalli, possiamo supporre che $g(t)$ sia monotona su ciascun I_{k-x} . Quindi per ogni k risulta (grazie al Teorema 2.30)

$$\int_{a_k-x}^{b_k-x} g(t) \cos(\lambda t) dt = g(a_k - x) \int_{a_k-x}^{c_k} \cos(\lambda t) dt + g(b_k - x) \int_{c_k}^{b_k-x} \cos(\lambda t) dt.$$

Ne segue che

$$\left| \int_{a_k-x}^{b_k-x} g(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{M_g}{\lambda} |\sin(b_k - x) - \sin(a_k - x)| \leq \frac{2M_g}{\lambda}.$$

Riassumendo,

$$\left| \int_{\mathbb{T}} s(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq M_f \sum_{k=1}^N \frac{2M_g}{\lambda} = \frac{2NM_fM_g}{\lambda},$$

che tende a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$, ossia

$$\left| \int_{\mathbb{T}} s(x+t)g(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

definitivamente. Tutto è indipendente da x , perciò per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ottiene quanto cercato, uniformemente rispetto a x . $\square$

Il lemma precedente è utile per dimostrare una nuova versione del Principio di Localizzazione di Riemann nel caso della convergenza uniforme.

Teorema 2.31. *Sia f una funzione limitata, integrabile su $\mathbb{T}$ e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Supponiamo che f si annulli su un intorno $I = I(f, x_0)$ di x_0 . Sotto queste condizioni, $S_n(f)$ è uniformemente convergente a 0 su I .*

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$ il raggio di I . Definiamo

$$g(t) := \frac{\chi_{|t| \geq \delta}(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \lambda := n + \frac{1}{2}.$$

Poiché f si annulla su I , si ha

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} f(x_0 - t) D_n(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - t) D_n(t) \chi_{|t| \geq \delta}(t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - t) g(t) \sin(\lambda t) \, dt. \end{aligned}$$

Poiché f e g soddisfano le ipotesi del Lemma 2.29, il risultato segue. $\square$

Capitolo 3

Sommabilità della Serie di Fourier

In generale, diciamo che una serie è convergente nel senso di Cauchy se il limite delle sue somme parziali esiste ed è finito. Nel caso in cui ciò non si verifichi, è possibile studiare altri tipi di convergenza, tra cui la convergenza secondo Abel e la convergenza secondo Cesàro.

3.1 Nuclei di Poisson

Definizione 3.1. Fissato $r \in (0, 1)$, la funzione

$$P_r(x) := \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} r^{|k|}, \quad (3.1)$$

con $x \in \mathbb{T}$, prende il nome di nucleo di Poisson.

Proposizione 3.2. Per ogni $0 < r < 1$ e per ogni $x \in \mathbb{T}$, $P_r(x)$ si scrive in forma chiusa come

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos(x))}. \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Vale il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} r^{|k|} &= \sum_{k=-\infty}^0 e^{ikx} r^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikx} r^k - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ikx} r^k + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikx} r^k - 1 \\ &\stackrel{(r \in (0,1))}{=} \frac{1}{1 - r e^{-ix}} + \frac{1}{1 - r e^{ix}} - 1 = \frac{2 - 2r \cos(x)}{1 - 2r \cos(x) + r^2} - 1 \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(x)}. \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2}$ si ottiene quanto cercato. □

Osservazione 3.3. Dalla (3.2) si deduce che P_r è una funzione continua, limitata, a valori reali, pari e non negativa. Inoltre, per ogni $r \in (0, 1)$, essa è monotona decrescente su $[0, \pi]$, dato che $\cos(x)$ è decrescente su questo intervallo e $|r| < 1$. La seguente proposizione mostra altre proprietà di questa funzione.

Proposizione 3.4. *Per ogni $r \in (0, 1)$, il nucleo di Poisson P_r soddisfa le seguenti proprietà:*

$$(i) \int_{\mathbb{T}} P_r(t) dt = \pi;$$

$$(ii) \text{ per ogni } 0 < \delta < \pi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(x) = 0,$$

uniformemente per $x \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$.

Dimostrazione. Per il primo punto, proviamo anzitutto che la serie che definisce P_r converge uniformemente su $\mathbb{T}$ ad $r \in (0, 1)$ fissato. Grazie al Teorema 2.25, è sufficiente mostrare che converge totalmente su questo insieme. Si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sup_{t \in [0, \pi]} |e^{ikx} r^{|k|}| = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \stackrel{r \in (0, 1)}{=} \frac{2}{1-r} < +\infty,$$

quindi abbiamo mostrato che c'è convergenza totale. Di conseguenza, è anche lecito integrare termine a termine, ottenendo

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} dt = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} 1 dt = \pi.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, se $k \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = 0.$$

Per il secondo punto, per ogni $\delta \in (0, \pi)$ risulta (per la monotonia di P_r)

$$P_r(x) \leq P_r(\delta) = \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos(\delta) + r^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta).$$

Concludiamo dato che tale maggiorazione è indipendente da x e il secondo membro tende a 0, quando $r \rightarrow 1^-$. $\square$

3.2 Convergenza secondo Abel

Prima di dare la definizione di serie convergente secondo Abel, enunciamo un teorema che tornerà utile più avanti.

Teorema 3.5 (di Abel). ¹ Supponiamo che la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$

converga in un certo punto $z_* \neq z_0$. Ebbene, questa condizione è sufficiente a garantirne la convergenza uniforme sul segmento complesso $\{z_0 + t(z_* - z_0) \mid t \in [0, 1]\}$.

Definizione 3.6. Data una serie complessa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k, \quad (3.3)$$

diremo che essa converge nel senso di Abel a $S \in \mathbb{C}$ se esistono finiti

$$(i) \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k, \text{ per ogni } r \in (0, 1);$$

$$(ii) S := \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k.$$

In tal caso scriveremo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \stackrel{A}{=} S. \quad (3.4)$$

Osservazione 3.7. La definizione precedente è coerente, ovvero se la serie in (3.3) converge ad S nel senso di Cauchy, allora soddisfa la (3.4). Infatti, il Teorema di Abel assicura la convergenza uniforme su $(0, 1)$, dunque è lecito il seguente scambio di limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k r^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^n \alpha_k r^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \lim_{r \rightarrow 1^-} \alpha_k r^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k. \end{aligned}$$

Dal seguente controesempio si evince che in generale non vale il viceversa.

Esempio 3.8. La serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \quad (3.5)$$

non converge nel senso di Cauchy. Tuttavia, per ogni $r \in (0, 1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k r^k = \frac{1}{1+r},$$

¹E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2* Vol. I, Cap. 6, Teorema 4.3.

essendo una serie geometrica di ragione $r \in (-1, 0)$. Pertanto

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2},$$

da cui segue che la serie in (3.5) converge secondo Abel, ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \stackrel{A}{=} \frac{1}{2}.$$

Per studiare la convergenza secondo Abel nel caso delle serie di Fourier, tornerà utile scrivere la serie bilatera

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} r^{|k|}, \quad (3.6)$$

sotto forma di convoluzione.

Proposizione 3.9. *Fissati $x \in \mathbb{T}$ e $r \in (0, 1)$, ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, 2π -periodica, soddisfa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} r^{|k|} = \frac{1}{\pi} (P_r * f)(x). \quad (3.7)$$

Si noti che questa convoluzione ha senso perché $f \in L^1(\mathbb{T})$ e P_r è limitata su $\mathbb{T}$ per ogni $x \in (0, 1)$.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{T}$ e $r \in (0, 1)$. Consideriamo la serie di funzioni della variabile $t \in \mathbb{T}$ definita da

$$t \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(t),$$

ove

$$f_k(t) := f(t) e^{ik(x-t)} r^{|k|}.$$

Da un corollario del Teorema della Convergenza dominata, se vale

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty,$$

allora si può integrare per serie. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{T}} |f(t) e^{ik(x-t)} r^{|k|}| \, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| r^{|k|} \, dt \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} < +\infty. \end{aligned}$$

Dunque il seguente calcolo è lecito:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} r^{|k|} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ikx} r^{|k|} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{T}} f_k(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-t)} r^{|k|} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) P_r(x-t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} (P_r * f)(x).
 \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

In modo analogo a quanto visto per i nuclei di Dirichlet, si mostra la seguente uguaglianza, valida per ogni $x \in \mathbb{T}$:

$$\frac{1}{\pi} (P_r * f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_r(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt. \quad (3.8)$$

Teorema 3.10. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ una funzione 2π -periodica. Supponiamo che per un certo $x_0 \in \mathbb{T}$ esistano finiti $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$. Sotto queste ipotesi,*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} (P_r * f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}. \quad (3.9)$$

Corollario 3.11. *Nelle ipotesi del teorema precedente, grazie alla Proposizione 3.9, si ha*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx_0} \stackrel{A}{=} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

ossia la serie di Fourier di f in x_0 converge a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

nel senso di Abel.

Dimostrazione del Teorema 3.10. Poniamo

$$g_1(x_0, t) := f(x_0 + t) - f(x_0^+) \quad \text{e} \quad g_2(x_0, t) := f(x_0 - t) - f(x_0^-).$$

Per le ipotesi su f , g_1 e g_2 sono sommabili su $\mathbb{T}$. Dalle proprietà di P_r e dalla (3.8) segue

$$\begin{aligned}
 (P_r * f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_r(t) (g_1(x_0, t) + g_2(x_0, t)) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_r(t) g_1(x_0, t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_r(t) g_2(x_0, t) dt. \\
 &=: I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Osservando che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(x_0, t) = 0,$$

dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo che valga

$$\sup_{t \in (0, \delta)} |g_1(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Inoltre, essendo P_r non negativa, vale

$$\int_0^\delta P_r(t) dt \leq \int_0^\pi P_r(t) dt \leq \int_{\mathbb{T}} P_r(t) dt = \pi.$$

Come conseguenza, si ha

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta P_r(t) |g_1(x_0, t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi P_r(t) |g_1(x_0, t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in (0, \delta)} |g_1(x_0, t)| + \sup_{t \in [\delta, \pi]} P_r(t) \left(\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x_0 + t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x_0^+)| dt \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + B \sup_{t \in [\delta, \pi]} P_r(t), \end{aligned}$$

ove

$$B := \frac{1}{\pi} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x_0 + t)| dt + \pi |f(x_0^+)| \right),$$

che è finito per le ipotesi su f . Dopodiché, prendiamo r sufficientemente vicino a 1, tale che (si noti che tale r dipende da ε poiché δ dipende da ε)

$$\sup_{t \in [\delta, \pi]} P_r(t) < \frac{\varepsilon}{4B}.$$

Ciò è lecito perché $P_r(t)$ converge a 0 uniformemente su $[\delta, \pi]$. Pertanto, abbiamo ottenuto la seguente stima

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{4} + B \frac{\varepsilon}{4B} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con un procedimento analogo si ottiene la stessa maggiorazione nel caso di I_2 . Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left| (P_r * f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right| \leq |I_1| + |I_2| \leq \varepsilon,$$

definitivamente rispetto ad r , da cui segue la tesi. □

Osservazione 3.12. Nel caso in cui f è continua nel punto x_0 , la (3.9) si scrive come

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} (P_r * f)(x_0) = f(x_0),$$

ovvero f è sviluppabile in serie di Fourier nel senso di Abel in x_0 .

3.3 I Nuclei di Fejér

Definizione 3.13. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{T}$, si chiama *nucleo di Fejér n -esimo* la funzione così definita

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x), \quad (3.10)$$

ove D_k indica il k -esimo nucleo di Dirichlet. In altre parole, F_n rappresenta la media aritmetica dei primi n nuclei di Dirichlet.

Osservazione 3.14. Dalla definizione si deduce che ogni F_n soddisfa le stesse proprietà viste per D_n nell'Osservazione 2.2 e nella Proposizione 2.3.

Proposizione 3.15. Per ogni $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0, \quad (3.11)$$

uniformemente rispetto a $x \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$.

Dimostrazione. Alcuni semplici calcoli consentono di verificare che

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{2n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2.$$

Se $x \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)$, allora

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Si ottiene quindi la seguente stima, indipendente da x ,

$$F_n(x) \leq \frac{1}{2n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \quad (3.12)$$

che tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto ad x . $\square$

3.4 Sommabilità secondo Cesàro

Definizione 3.16. Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$ una serie numerica e sia S_k la sua somma parziale k -esima. Si chiama *media delle somme parziali* l'espressione

$$A_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k. \quad (3.13)$$

Definizione 3.17. Data una serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$, diciamo che essa converge secondo Cesàro con somma S se A_n soddisfa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = S. \quad (3.14)$$

In tal caso scriveremo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_k \stackrel{C}{=} S. \quad (3.15)$$

Similmente a quanto visto nel caso della convergenza secondo Abel, si può dimostrare che ogni serie convergente nel senso di Cauchy è convergente anche secondo Cesàro alla stessa somma. Il seguente esempio mostra che in generale non vale il viceversa.

Esempio 3.18. La serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \quad (3.16)$$

non converge nel senso di Cauchy, ma converge nel senso di Cesàro. Si verifica facilmente che

$$S_{2n} = 1 \quad \text{e} \quad S_{2n+1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$A_{2n} = \frac{1}{2n} (1 + 0 + 1 + \cdots + 0) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

e

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} (1 + 0 + 1 + \cdots + 1) = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n+1} = \frac{1}{2},$$

che è equivalente alla (3.14), ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \stackrel{C}{=} \frac{1}{2},$$

come volevasi.

Nel caso delle serie di Fourier, la (3.10) permette di scrivere la (3.13) sotto forma di convoluzione.

Proposizione 3.19. Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ una funzione 2π -periodica. Dato $x \in \mathbb{T}$, si pone

$$A_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x).$$

Allora

$$A_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} (f * F_n)(x). \quad (3.17)$$

Dimostrazione. Vale il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} A_n(f)(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_k(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x-t) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} (f * F_n)(x). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Teorema 3.20 (di Fejér). Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e sia $x_0 \in \mathbb{T}$. Supponiamo che esistano finiti $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$. Sotto queste ipotesi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}. \quad (3.18)$$

In altri termini, la serie di Fourier di f converge a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

nel senso di Cesàro.

Alla dimostrazione del teorema, premettiamo il seguente risultato.

Osservazione 3.21. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, F_n soddisfa

$$\int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = \pi. \quad (3.19)$$

Dimostrazione. Poiché F_n è la media aritmetica dei primi n nuclei di Dirichlet, risulta

$$\int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{T}} D_k(t) dt \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \pi = \frac{n\pi}{n} = \pi.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.20. Per l'Osservazione 3.21, vale

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^\pi F_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(t) dt.$$

Pertanto,

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{\pi} \int_0^\pi F_n(t) dt.$$

Per $A_n(f)(x)$ si ha

$$\begin{aligned} A_n(f)(x) &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) F_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-t) F_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt \\ &\stackrel{(u=-t)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) F_n(u) du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Poniamo

$$g_1(x_0, t) := f(x_0 + t) - f(x_0^+) \quad \text{e} \quad g_2(x_0, t) := f(x_0 - t) - f(x_0^-) .$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} A_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) - f(x_0^+) + f(x_0 - t) - f(x_0^-)) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_1(x_0, t) F_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_2(x_0, t) F_n(t) dt \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ragionando in modo analogo a quanto visto nella prova del Teorema 3.10, dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo che

$$\sup_{t \in (0, \delta)} |g_1(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} F_n(t) |g_1(x_0, t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) |g_1(x_0, t)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} F_n(t) dt + \sup_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) \left(\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x_0 + t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x_0^+)| dt \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + B \sup_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t), \end{aligned}$$

con

$$B := \frac{1}{\pi} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x_0 + t)| dt + \pi |f(x_0^+)| \right) < +\infty,$$

poiché f è sommabile su $\mathbb{T}$. Fissato δ , per la Proposizione 3.15 esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{4B}, \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Pertanto,

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{4} + B \frac{\varepsilon}{4B} = \frac{\varepsilon}{2},$$

definitivamente. Similmente si ottiene la stessa stima per I_2 . Riassumendo, abbiamo provato che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\left| A_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right| \leq |I_1| + |I_2| \leq \varepsilon,$$

per $n \geq \bar{n}$. Concludiamo dato che ciò equivale alla (3.18). $\square$

Osservazione 3.22. In maniera analoga a quanto visto nel Teorema 3.10, se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Fejér ed è continua in x_0 , concludiamo che, in tale punto, essa è sviluppabile in serie di Fourier secondo Cesàro.

Il seguente teorema mostra che una serie sommabile secondo Cesàro è anche sommabile secondo Abel alla stessa somma. Applicando questo risultato al caso delle serie di Fourier, concludiamo che ogni serie di Fourier convergente nel senso del Teorema di Fejér soddisfa la (3.9).

Teorema 3.23. *Consideriamo una serie numerica*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k.$$

Ebbene, se essa converge nel senso di Cesàro ad un certo valore limite S , allora converge anche nel senso di Abel ad S .

Dimostrazione. Poniamo

$$S_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k \quad \text{e} \quad A_{n+1} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k.$$

Allora per ogni $r \in (0, 1)$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N S_n r^n &= S_0 + \sum_{n=1}^N S_n r^n = A_1 + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^n S_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) r^n \\ &= A_1 + \sum_{n=1}^N ((n+1)A_{n+1} - nA_n) r^n. \end{aligned}$$

Per ogni n , A_n è limitata poiché convergente, per cui è ben posto il seguente limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N ((n+1)A_{n+1} - nA_n) r^n = \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)A_{n+1} - nA_n) r^n.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
 A_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)A_{n+1} - nA_n)r^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}r^n - \sum_{n=1}^{+\infty} nA_nr^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}r^n - \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)A_{k+1}r^{k+1} \\
 &= (1-r) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}r^n,
 \end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_nr^n = (1-r) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}r^n.$$

Grazie ai calcoli precedenti, risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_nr^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_nr^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1}r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{+\infty} S_nr^n = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}r^n.$$

Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi di Cesàro sommabilità, è possibile scegliere $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|A_{n+1} - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Da cui, osservando che per $0 < r < 1$ vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}, \quad (3.20)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_nr^n - S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_nr^n - \frac{1}{(1-r)^2} (1-r)^2 S \stackrel{(3.20)}{=} (1-r)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(A_{n+1} - S)r^n \\
 &= (1-r)^2 \left(\sum_{n=0}^{\bar{n}-1} (n+1)(A_{n+1} - S)r^n + \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} (n+1)(A_{n+1} - S)r^n \right) \\
 &=: \sigma_1 + \sigma_2.
 \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare e poiché $r < 1$, ricaviamo la seguente stima per σ_1 , valida per ogni $r \in (0, 1)$:

$$|\sigma_1| \leq (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} (n+1)|A_{n+1} - S|.$$

Mentre per σ_2 si ha

$$|\sigma_2| \leq (1-r)^2 \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} (n+1)|A_{n+1} - S|r^n \leq \varepsilon (1-r)^2 \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} (n+1)r^n \stackrel{(3.20)}{\leq} \varepsilon.$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto la seguente maggiorazione

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n - S \right| \leq (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} (n+1) |A_{n+1} - S| + \varepsilon,$$

che tende a ε quando $r \rightarrow 1^-$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. $\square$

3.5 Un risultato di convergenza uniforme

Il seguente teorema mostra un notevole risultato di convergenza uniforme delle medie di Fejér.

Teorema 3.24. *Per ogni f continua, 2π -periodica, vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(f)(x) = f(x), \quad \text{uniformemente per } x \in \mathbb{T}. \quad (3.21)$$

Dimostrazione. Per periodicità, è possibile estendere f ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, definendola in modo tale che $f(x + 2\pi) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, f è continua sull'intervallo compatto $[-\pi, \pi]$. Dal Teorema di Heine-Cantor segue che f è uniformemente continua su questo insieme e quindi su $\mathbb{R}$, essendo periodica. Perciò, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{tali che} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \quad (3.22)$$

Inoltre, il Teorema di Weierstrass garantisce la limitatezza di f su $[-\pi, \pi]$ (e quindi su $\mathbb{R}$, per la periodicità). Dunque, per tale δ , scegliamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ in modo che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia (notiamo che $\bar{n}$ dipende da ε poiché δ dipende da ε)

$$\frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.23)$$

Ciò è lecito poiché il primo membro converge a 0, per $n \rightarrow +\infty$, grazie alla limitatezza di f . Dato che f e F_n sono entrambe 2π -periodiche, con un cambio di variabile si ottiene

$$\begin{aligned} A_n(f)(x) &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(x-t) f(t) dt \stackrel{(\tau=x-t)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} F_n(\tau) f(x-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} F_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned}$$

Per ogni $x, t \in \mathbb{R}$, poniamo

$$h(x, t) := f(x-t) - f(x).$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} |A_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) f(x-t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) f(x) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) h(x, t) dt \right|. \end{aligned}$$

Ricordando che $F_n \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} |A_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) |h(x, t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| < \delta} F_n(t) |h(x, t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) |h(x, t)| dt \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Dalla (3.22), con $x_1 := x - t$ e $x_2 := x$, segue che

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| < \delta} F_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t| < \delta} F_n(t) dt \stackrel{(F_n \geq 0)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt \\ &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{\varepsilon}{2\pi} \pi = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Nel caso di I_2 , osservando che per ogni $x, t \in \mathbb{R}$ vale

$$|h(x, t)| \leq |f(x-t)| + |f(x)| \leq 2\|f\|_{\infty},$$

se $\bar{n} \geq n$ si ha

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2}{\pi} \|f\|_{\infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt \stackrel{(3.12)}{\leq} \frac{2}{\pi} \|f\|_{\infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{2n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} dt \\ &= \frac{\|f\|_{\infty}}{n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} 1 dt \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} 1 dt = \frac{2\|f\|_{\infty}}{n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \stackrel{(3.23)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dunque,

$$|A_n(f)(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile scegliere $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ in modo che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia, uniformemente rispetto a $x \in \mathbb{R}$,

$$|A_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ciò equivale alla (3.21). □

Per i prossimi risultati, indicheremo con $(K, \mathcal{T})$ uno spazio topologico compatto e con $C(K, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni reali definite su K , continue rispetto alla $\|\cdot\|_{\infty}$. Vogliamo dimostrare che lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso in $C(\mathbb{T})$ e in ciascun $L^p(\mathbb{T})$, con $1 \leq p < +\infty$.

Definizione 3.25. Diciamo che un sottospazio vettoriale $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ è un'algebra di funzioni su K se, per ogni $u, v \in \mathcal{A}$, si ha che $uv \in \mathcal{A}$.

Teorema 3.26.² Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di funzioni su K che soddisfa

(i) $1 \in \mathcal{A}$;

(ii) per ogni $t, t' \in T$, con $t \neq t'$, esiste $v \in \mathcal{A}$ tale che $v(t) \neq v(t')$.

Ebbene, sotto queste ipotesi, $\overline{\mathcal{A}} = C(K, \mathbb{R})$. In altre parole, $\mathcal{A}$ è denso in $C(K, \mathbb{R})$ con la norma uniforme.

Corollario 3.27.³ Se $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ è tale che $f(-\pi) = f(\pi)$, allora esiste una successione $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di polinomi trigonometrici uniformemente convergente a f su $[-\pi, \pi]$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\rho : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$\rho(t, t') = |e^{it} - e^{it'}|.$$

Si verifica facilmente che essa definisce una metrica su $\mathbb{T}$ e che $(\mathbb{T}, \rho)$ è compatto. Inoltre, le ipotesi su f garantiscono la continuità di $f|_{\mathbb{T}}$, rispetto alla metrica ρ . Sia poi

$$\mathcal{A} := \{P|_{\mathbb{T}} \mid P \text{ polinomio trigonometrico}\}.$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} \sin(kt) \cos(ht) &= \frac{1}{2} (\sin((k+h)t) + \sin((k-h)t)) \\ \sin(kt) \sin(ht) &= \frac{1}{2} (\cos((k-h)t) - \cos((k+h)t)) \\ \cos(kt) \cos(ht) &= \frac{1}{2} (\cos((k-h)t) + \cos((k+h)t)), \end{aligned}$$

per ogni $h, k \in \mathbb{N}$, si deduce che $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ed è un'algebra di funzioni. Inoltre, $1 \in \mathcal{A}$ e, per ogni $t, t' \in \mathbb{T}$ tali che $t \neq t'$, $\sin t \neq \sin t'$ oppure $\cos t \neq \cos t'$. Perciò $\mathcal{A}$ verifica le ipotesi del Teorema 3.26. Come conseguenza, $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, ovvero, per ogni $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, esiste una successione $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) = f(t),$$

uniformemente rispetto a $t \in \mathbb{T}$, come volevasi. $\square$

Osservazione 3.28. Abbiamo mostrato che il Corollario 3.27 da un risultato generale, il Teorema 3.26. Ebbene, noi abbiamo provato il Corollario 3.27 anche come diretta conseguenza del Teorema 3.24 perché gli $A_n(f)$ sono anch'essi polinomi trigonometrici.

²E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2* Vol. I, Cap. 1, Corollario 8.2

³E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2* Vol. I, Cap. 1, Esempio 8.4

Teorema 3.29. *Per ogni $p \in [1, +\infty)$, lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso in $L^p(\mathbb{T})$.*

Osservazione 3.30. Non c'è convergenza uniforme in L^∞ . Infatti, questo spazio è completo rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$, dunque la funzione iniziale dovrebbe necessariamente essere continua su $\mathbb{T}$. In altre parole, ciò significherebbe $L^\infty(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$, che è falso.

Dimostrazione del Teorema 3.29. Sia $p \geq 1$ e sia $f \in L^p(\mathbb{T})$. Poiché $C(\mathbb{T})$ è denso in $L^p(\mathbb{T})$, esiste $g = g_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$ tale che $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre, grazie al Corollario 3.27, per tale g esiste un polinomio trigonometrico q che soddisfa

$$\|g - q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{\frac{1}{p}}}.$$

Osserviamo che q dipende da ε , dato che g dipende da ε . Dato che per ogni $x \in \mathbb{T}$, $|g(x) - q(x)| \leq \|g - q\|_\infty$, si ha

$$\begin{aligned} \|g - q\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x) - q(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{T}} \|g - q\|_\infty^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\mathbb{T}} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene la seguente stima

$$\|f - q\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f - g + g - q\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g - q\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Riassumendo, abbiamo provato che, per ogni $p \in [1, +\infty)$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico $q = q_\varepsilon$ tale che $\|f - q\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$, e concludiamo poiché ciò è equivalente alla tesi. $\square$

Da quanto appena visto si deduce che due funzioni con gli stessi coefficienti di Fourier coincidono quasi dappertutto.

Corollario 3.31. *Se $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{T})$ sono due funzioni 2π -periodiche, tali che $\widehat{f}_1(k) = \widehat{f}_2(k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora $f_1(x) = f_2(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{T}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f_2 \equiv 0$, altrimenti consideriamo $f_1 - f_2$. Allora $\widehat{f}_1(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Per il Teorema 3.29, esiste una successione $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di polinomi trigonometrici che approssima f_1 in $L^1(\mathbb{T})$. Poiché $\widehat{f}_1(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, necessariamente $P_n \equiv 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che $f_1 \equiv 0 \equiv f_2$ quasi dappertutto. $\square$

Bibliografia

- [1] E. Lanconelli: *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1994.
- [2] E. Lanconelli: *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Vol. I, Pitagora Editrice Bologna, 2000.
- [3] E. Lanconelli: *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Vol. II, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [4] J. Canto Llorente: *Convergence of Fourier Series*, Final Degree Dissertation, Giugno 2016. Disponibile all'url https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/20123/TFG_CantoLlorenteJavier.pdf

Ringraziamenti

Un iniziale e doveroso ringraziamento va al mio relatore, per avermi seguita con gentilezza e disponibilità durante la stesura di questa tesi.

Ringrazio poi tutti i miei familiari, che camminano al mio fianco da una vita. Siete casa, seppur da lontano. Da sempre i miei punti cardinali, mi avete mostrato la meraviglia nascosta nei particolari. Ringrazio mio padre, che mi ha messa al primo posto e ha creduto in me prima ancora che iniziassi a farlo. Un ringraziamento speciale va poi a mia madre, che mi insegna a creare la vita che sogno e a sognare la vita che creo. Grazie, per essere stata la mia prima vera compagna di università.

Ringrazio chi non c'è più, chi ora sorregge il cielo e lo tinge di azzurro.

Ringrazio chi c'è da sempre, le amiche cresciute con me. Sono fiera di noi, delle bambine che eravamo quando ci siamo conosciute, delle adolescenti che ho lasciato quando mi sono trasferita a Bologna e delle donne che ho trovato tornando a casa. Soprattutto, grazie per essere rimaste, per aver dato un nome solo nostro al filo rosso che ci unisce.

Ringrazio anche chi è inciampato nella mia vita per caso e ha scelto di restare. Grazie, a chi c'è ogni giorno, a ricordarmi che non sono sola e che sono circondata di amore: i miei amici più distanti.

Grazie, a chi mi regala sorrisi inaspettati, abbracci sinceri, mostrandomi che non è mai troppo tardi per stupirsi e che la gentilezza trova sempre un terreno in cui fiorire.

A chi mi ricorda l'importanza di aspettare e di aspettarmi, ma senza aspettare che sia troppo tardi, che è anche chi mi insegna l'arte di correre e l'eleganza della lentezza.

A chi sa ascoltarmi con delicatezza, e con la stessa delicatezza ricama nuovi ricordi insieme a me.

A chi mi aiuta a trovare le parole giuste, sia nei cruciverba sia per esprimere le emozioni.

A chi preferisce danzare con me su questo pianeta che ruota, invece di rimanere fermo a guardare.

O ancora, grazie, a chi ha condiviso con me l'ansia prima di un esame, un aperitivo, un pranzo in università, il terzo caffè di un pomeriggio di studio e tutti quegli attimi che

talvolta scivolano via, nella fretta della routine.

A chi mi ha fatto spazio, donandomi un po' di tempo.

Soprattutto, grazie a chi è arrivato fino a qui credendo di non appartenere a queste righe: questo spazio è per te, che ti affanni per essere luogo, invece sei strada, e non ti accorgi dei fiori che crescono sulla tua via.

Ci tengo poi a ringraziare tutte le persone che ho incontrato durante questi anni di università e che hanno reso indimenticabile questo percorso. Se non sentirò la vostra mancanza, è solo perché questa parola indica, per definizione, una debolezza, un vuoto. Voi siete stati per me una presenza forte, non un vuoto da riempire. Direi piuttosto che soffrirò la nostalgia, il dolore del ritorno, anzi, dei tanti ritorni che seguiranno la fine di questo capitolo della mia vita. Il ritorno ad una quotidianità di cui non farete parte, il mio ritorno alle vostre lauree. O ancora, i momenti in cui ritornerò con la mente a quando non tenevo il conto dei fine settimana rimasti da passare assieme, perché sapevo che erano, semplicemente, tanti. Tra poche settimane salirò in macchina con tre anni e mezzo di vita racchiusi in poche valigie, ma non sarà quello il momento in cui la vostra assenza sarà più dolorosa. Magari tra qualche mese mangerò delle patatine e penserò che quelle che ci dividevamo noi erano più buone. Metterò in ordine la mia camera, troverò degli appunti copiati dai vostri, in un lunedì di novembre in cui il piumone era troppo caldo e io troppo assonnata per andare a lezione. Allora ripenserò a tutto l'affetto che mi avete trasmesso, senza farci caso. Quindi grazie, alle anime pure che siete. Vi aspetto, per conoscere le sfumature della vostra vita.

Infine, ringrazio me stessa, per essere ancora quella bambina curiosa che ha più domande che risposte e si immagina il mondo a modo suo.

A volte sentiamo il bisogno di allontanarci da casa, solo per scoprire casa nostra dov'è. La mia è in tutte le persone che spero possano ritrovarsi in questa manciata di righe. Grazie, di cuore.