ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Una versione continua
del paradosso di Banach-Tarski

Tesi di Laurea in Algebra e Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro D'Andrea

Presentata da:
Danilo Treglia

Anno Accademico 2023-2024

Introduzione

L'ormai noto paradosso di Banach-Tarski, nella sua forma più classica, asserisce la possibilità di scomporre la sfera piena unitaria in $\mathbb{R}^3$ in un numero finito di sottoinsiemi disgiunti, i quali, uniti dopo essere stati opportunamente ruotati e traslati, compongono due sfere piene unitarie.

Ci sono alcune questioni da considerare, una fra tutte quella riguardante l'assioma della scelta: i matematici Banach e Tarski, infatti, presentarono questo risultato (che utilizza l'assioma) come paradossale per evidenziarne i problemi. Per esempio, il paradosso mostra come una nozione di volume (si faccia riferimento ad esempio alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^3$) che sia additivo su insiemi disgiunti e che sia invariante per rotazioni e traslazioni non può essere applicata a tutti gli insiemi dello spazio.

Ci si trova dinanzi ad un bivio: è più naturale l'assioma della scelta e tutti i risultati che ne derivano in vari ambiti della matematica, o il fatto che ogni insieme dello spazio abbia un volume ben definito, invariante per movimenti rigidi dello spazio?

Lo scopo di questa tesi è dimostrare il paradosso, osservando in particolare che non c'è nulla di paradossale, ma si tratta di una semplice conseguenza dell'assioma della scelta. Successivamente, ne astrarremo una versione più generale, sostituendo al gruppo delle rotazioni e traslazioni di $\mathbb{R}^3$ un qualsiasi gruppo che agisce su un insieme X e introducendo la nozione di G -equiscomponibilità, concludendo che due qualsiasi insiemi limitati con parte interna non vuota in $\mathbb{R}^n$ sono G -equiscomponibili, rispetto a un gruppo G che verrà opportunamente scelto. Si proporrà infine un raffinamento con-

tinuo del paradosso, dimostrando che è possibile muovere in modo rigido e continuo i vari pezzi che forniscono la decomposizione paradossale, in modo che questi non si intersechino mai durante questo procedimento.

Sarà pertanto necessario studiare con attenzione la struttura dei gruppi che descrivono questi movimenti, nello spazio e in $\mathbb{R}^n$, dal punto di vista algebrico, topologico e dell'algebra lineare.

Indice

Introduzione	i
1 Il gruppo $SO_n(\mathbb{R})$	1
1.1 Prodotti scalari e isometrie	2
1.2 Rotazioni del piano e dello spazio: $SO_2(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{R})$	7
1.3 $SO_n(\mathbb{R})$	8
2 Il paradosso di Banach-Tarski	11
2.1 Rotazioni e quaternioni	11
2.2 Un sottogruppo libero di $SO_3(\mathbb{R})$	15
2.2.1 Gruppi liberi	15
2.2.2 Costruzione del sottogruppo	16
2.3 Il paradosso	18
3 Forma forte e generalizzazioni	23
3.1 G -equiscomponibilità	23
3.2 G -paradossalità	25
3.3 Il paradosso in $\mathbb{R}^n$	29
4 La versione continua	33
4.1 Connessione di $SO_n(\mathbb{R})$	33
4.2 G -equiscomponibilità continua	35
4.3 G -estricabilità	37
4.4 Il paradosso continuo	42

Bibliografia

45

Capitolo 1

Il gruppo $SO_n(\mathbb{R})$

L'obiettivo di questo capitolo è studiare le classi di similitudine del gruppo di matrici $SO_n(\mathbb{R})$. Si arriverà gradualmente alla definizione di quest'ultimo ripercorrendo alcune nozioni cruciali di algebra lineare.

Sia $\mathbb{R}[t]$ l'anello dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Indichiamo con $End(V)$ la $\mathbb{R}$ -algebra delle applicazioni lineari da V in sé, cioè degli endomorfismi lineari di V , e $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algebra delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Se V ha dimensione finita, $\dim V = n$, ricordiamo il noto isomorfismo (dipendente dalla scelta di una base di V):

$$\begin{aligned} End(V) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

che associa a ciascun endomorfismo l'unica matrice che lo descrive nella base scelta.

Indichiamo con $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ il gruppo delle matrici reali invertibili $n \times n$.

Il polinomio caratteristico $p_A(t) = \det(tI - A) \in \mathbb{R}[t]$ di $A \in M_n(\mathbb{R})$ è

invariante per similitudine:

$$\begin{aligned} p_{H^{-1}AH}(t) &= \det(tI - H^{-1}AH) \\ &= \det(tH^{-1}H - H^{-1}AH) \\ &= \det(H^{-1}(tI - A)H) \\ &= \frac{1}{\det H} p_A(t) \det H = p_A(t). \end{aligned}$$

Questo mostra che il polinomio caratteristico di $[T]_{\mathcal{B}}$ è invariante dalla scelta di $\mathcal{B}$. Lo indichiamo con $p_T(t)$; le sue radici, anche complesse, sono dette autovalori di T . Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di T , indichiamo con $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$.

Osservazione 1.0.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; allora $p_A(0) = \det A$. In particolare:*

$$p_A(t) = (-1)^n \det A + \dots + t^n.$$

Ricordiamo inoltre che l'applicazione:

$$\begin{aligned} \cdot^T : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T \end{aligned},$$

dove A^T indica la matrice trasposta di A , è un anti-automorfismo dell'algebra $M_n(\mathbb{R})$, cioè un isomorfismo lineare tale che $(AB)^T = B^T A^T$ per ogni $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, la cui inversa è se stessa. Come ben sappiamo, $\det(A^T) = \det A$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1.1 Prodotti scalari e isometrie

Definizione 1.1.1. *Un prodotto scalare sullo spazio vettoriale reale V di dimensione finita è una forma bilineare simmetrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definita positiva, cioè tale che $\langle v, v \rangle > 0$ per ogni $v \neq 0 \in V$.*

La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice allora spazio euclideo; i vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ si dicono ortonormali se $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ per ogni $i, j = 1, \dots, k$; la norma di $v \in V$ è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Tornerà utile ricordare anche il prodotto scalare standard complesso su $\mathbb{C}^n$: $(z, w) := z^T \bar{w}$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}^n$, che soddisfa:

- $(z, w) = \overline{(w, z)}$.
- $(\cdot, w)$ è lineare per ogni $w \in \mathbb{C}^n$.

Osservazione 1.1.1. *Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio euclideo, un insieme di vettori ortonormali è sempre linearmente indipendente. In particolare, se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_n \in V$ sono ortonormali, si ha che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , detta ortonormale.*

Dimostrazione. Si ha $\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_k, v_i \rangle = a_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Allora $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \iff 0 = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle = a_i$ per ogni i . $\square$

Un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio euclideo può sempre essere trasformato in un insieme di vettori ortonormali, ad esempio utilizzando il noto algoritmo di Gram-Schmidt. Questo garantisce in particolare l'esistenza di una base ortonormale di ogni spazio euclideo.

Ricordiamo che ad ogni prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ corrisponde una matrice quadrata $B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$, per ogni scelta di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V , per cui si ha:

$$\langle x, y \rangle = [x]_{\mathcal{B}}^T B [y]_{\mathcal{B}} \quad \forall x, y \in V.$$

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo; diciamo che due vettori $u, v \in V$ sono ortogonali, e si scrive $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$. Sia inoltre $U \subseteq V$ un sottospazio; indichiamo con $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$ l'ortogonale di U .

Osserviamo che se $U \subseteq V$ è un sottospazio, allora $U^\perp$ è ancora un sottospazio, poiché descritto da condizioni lineari, ed è facile vedere che $v \in U^\perp$ se e solo se v è ortogonale a un insieme di generatori di U .

Inoltre, V si decompone $V = U \oplus U^\perp$. Infatti, considerando una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_k\}$ di U e completandola ad una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V , si ha, per ogni $v \in U^\perp$:

$$0 = \langle v, u_i \rangle = \langle a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n, u_i \rangle = a_i \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

dunque $v = a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n$ in modo unico.

Definizione 1.1.2. Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo; $T \in \text{End}(V)$ si dice un'isometria lineare di $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

Osservazione 1.1.2. Se A è la matrice associata ad un'isometria lineare T , scritta rispetto ad una base ortonormale di $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, si ha:

$$[u]_{\mathcal{B}}^T A^T A [v]_{\mathcal{B}} = (A[u]_{\mathcal{B}})^T A [v]_{\mathcal{B}} = \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle = [u]_{\mathcal{B}}^T [v]_{\mathcal{B}}$$

per ogni $u, v \in V$, cioè $A^T A = I$.

Viceversa, se $A^T A = I$, allora:

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= (A[u]_{\mathcal{B}})^T A [v]_{\mathcal{B}} \\ &= [u]_{\mathcal{B}}^T A^T A [v]_{\mathcal{B}} \\ &= [u]_{\mathcal{B}}^T [v]_{\mathcal{B}} \\ &= \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

cioè T è un'isometria di $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, o equivalentemente di $\mathbb{R}^n$, rispetto al prodotto scalare standard. In particolare, ogni isometria lineare è invertibile, con inversa un'isometria lineare, e dunque un isomorfismo.

Osserviamo inoltre che Id è sempre un'isometria lineare e che se T, S sono isometrie lineari di V , allora $\langle T \circ S(u), T \circ S(v) \rangle = \langle S(u), S(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

Indichiamo allora con $O(V)$ il gruppo delle isometrie lineari di V , per ogni V spazio euclideo.

Lemma 1.1.1. Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo, $T \in O(V)$; se $U \subseteq V$ è un sottospazio T -invariante, allora $U^\perp$ è T -invariante.

Dimostrazione. Poichè T è isomorfismo, e U è T -invariante, $T|_U \in \text{End}(U)$ è isomorfismo. Sia ora $v \in U^\perp$; per ogni $u \in U$:

$$0 = \langle v, u \rangle = \langle T(v), T(u) \rangle.$$

Essendo $T|_U$ in particolare suriettiva, per l'arbitrarietà di u , abbiamo mostrato che $\langle T(v), u \rangle = 0$ per ogni $u \in U$, ovvero $T(v) \in U^\perp$. Dunque $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$. $\square$

Sia ora $O_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$; questo è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ poiché:

$$(AB^{-1})^T(AB^{-1}) = (AB^T)^T AB^T = BA^T AB^T = BB^T = I \quad \forall A, B \in O_n(\mathbb{R}).$$

Per quanto precedentemente osservato, $O_n(\mathbb{R})$ è il gruppo delle matrici associate, rispetto ad una base ortonormale, alle isometrie lineari di uno spazio euclideo n -dimensionale. Tali matrici sono dette ortogonali e $O_n(\mathbb{R})$ è appunto il gruppo ortogonale.

Osservazione 1.1.3. Se $A \in O_n(\mathbb{R})$, allora $A^T \in O_n(\mathbb{R})$; in particolare, se $A, X \in O_n(\mathbb{R})$, allora $XAX^T \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposizione 1.1.1. Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio euclideo con $\dim V = n$, $T \in \text{End}(V)$; sono equivalenti:

1. $T \in O(V)$.
2. T manda basi ortonormali in basi ortonormali.
3. T manda una base ortonormale in una base ortonormale.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2):

Siano $T \in O(V)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di V ; allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ è una base ortonormale poiché $\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Viceversa, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, allora $\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Questo è sufficiente per concludere che $T \in O(V)$ poiché,

comunque presi $u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
 \langle T(u), T(v) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i T(v_i), \sum_{j=1}^n b_j T(v_j) \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{i=1}^n b_i v_i \right\rangle \\
 &= \langle u, v \rangle.
 \end{aligned}$$

(2) $\implies$ (3):

Immediato.

(3) $\implies$ (1):

Questa dimostrazione è già contenuta in (1) $\implies$ (2). $\square$

Osservazione 1.1.4. *La proposizione precedente mostra che una matrice di cambiamento di base tra basi ortonormali è la matrice associata a un'isometria di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard, cioè una matrice ortogonale. In particolare, se $A \in O_n(\mathbb{R})$, le colonne di A sono ortonormali rispetto a tale prodotto scalare.*

Diremo che due matrici A, B sono ortogonalmente simili se $B = XAX^{-1}$, con $X \in O_n(\mathbb{R})$.

Sia ora $A \in O_n(\mathbb{R})$; se λ è autovalore per A (reale o complesso), e v è un autovettore in $\mathbb{C}^n$, allora:

$$(v, v) = v^T A^T A \bar{v} = (Av, Av) = (\lambda v, \lambda v) = |\lambda|^2 (v, v),$$

cioè $|\lambda| = 1$.

Inoltre, $1 = \det I = \det A^T A = \det(A^T) \det(A) = (\det A)^2$; dunque $\det A = \pm 1$. Definiamo $SO_n(\mathbb{R}) := \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

1.2 Rotazioni del piano e dello spazio: $SO_2(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{R})$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$; sappiamo che le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare standard. Allora $a^2 + c^2 = 1$ e possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$. Poiché $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, e $b^2 + d^2 = 1$, abbiamo due possibilità per A :

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, S_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si noti che S_θ è sempre diagonalizzabile essendo simmetrica reale e i suoi autovalori sono ± 1 . Invece R_θ è diagonalizzabile solo quando $\theta = 0, \pi$; in tal caso $R_0 = I$, $R_\pi = -I$. Inoltre, $\det R_\theta = 1$, $\det S_\theta = -1$. In particolare:

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Sia ora $A \in SO_3(\mathbb{R})$; osserviamo che $p_A(t)$ è un polinomio di grado 3 a coefficienti reali che assume valori positivi per $t \rightarrow +\infty$, e valori negativi per $t \rightarrow -\infty$. Per continuità, dunque, p_A ammette una radice reale $\lambda = \pm 1$. Possiamo quindi scrivere $\mathbb{R}^3 = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, con $V_\lambda^\perp$ L_A -invariante.

Se $\lambda = 1$, A è ortogonalmente simile alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & B \end{pmatrix},$$

con $B \in SO_2(\mathbb{R})$, e quindi alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}.$$

Se invece $\lambda = -1$, abbiamo $p_A(t) = (-t-1)(t^2+at+b)$. Osserviamo che il fattore di grado 2 non può essere irriducibile in $\mathbb{R}[t]$; infatti in tal caso avrebbe una radice $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ con $|\omega| = 1$ e quindi anche il suo coniugato sarebbe una radice, poiché il polinomio è a coefficienti reali. Allora il determinante di A sarebbe $-\omega\bar{\omega} = -|\omega|^2 < 0$.

$p_A(t)$ ha pertanto tutte le radici reali, e un numero pari di queste sono -1 , le altre 1. In conclusione A è ortogonalmente simile alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -\sin \pi \\ 0 & \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così mostrato che ogni $A \in SO_3(\mathbb{R})$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

L'intuizione dietro questo fatto è che ogni rotazione lineare in $\mathbb{R}^3$ è in realtà una rotazione attorno ad un asse fisso.

1.3 $SO_n(\mathbb{R})$

Generalizziamo quanto visto nel caso $n = 2, 3$, mostrando che ogni elemento di $SO_n(\mathbb{R})$ è composizione di al più $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rotazioni, dove con rotazione intendiamo una rotazione attorno, se così si può dire, ad un sottospazio $(n-2)$ -dimensionale fisso.

Teorema 1.3.1. *Sia $A \in O_n(\mathbb{R})$; allora esistono $j, k, l \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \dots, \theta_l \in (0, 2\pi)$ tali che A è ortogonalmente simile a:*

$$\begin{pmatrix} I_j & & & & \\ & -I_k & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & R_{\theta_l} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n .

Per $n = 1$, $A = \pm 1$. Per $n = 2$, sia λ autovalore di A ; se λ è reale, allora $\lambda = \pm 1$ e dunque A è ortogonalmente simile ad una tra le seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

che verificano il passo base. Se invece $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, allora $\bar{\lambda}$ è autovalore; dunque $\det A = \lambda \bar{\lambda} = 1$, cioè $A \in SO_2(\mathbb{R})$. Segue che $A = R_\theta$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

Per $n \geq 3$, sia λ autovalore di A ; se λ è reale, sia $v \in V_\lambda$, e $U := \text{Span}\{v\}$. U è chiaramente L_A -invariante e, per il Lemma 1.1.1, lo è anche $U^\perp$. Considerando la decomposizione $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ e scegliendo la base $\mathcal{B} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} \cup \mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$, dove $\mathcal{C}$ è una base ortonormale di $U^\perp$, otteniamo che A è ortogonalmente simile a:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & B \end{pmatrix}$$

con $B = [L_A |_{U^\perp}]_{\mathcal{C}} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$. Essendo $\lambda = \pm 1$, si conclude per ipotesi induttiva.

Se invece A non ha autovalori reali, sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ autovalore; in particolare, $|\lambda| = 1$. Sia allora $v \in \mathbb{C}^n$ autovettore complesso; si ha che $Av = \lambda v$ e $A\bar{v} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Ora, $v + \bar{v}, i(v - \bar{v}) \in \mathbb{R}^n$ e $U := \text{Span}_{\mathbb{R}}\{v + \bar{v}, i(v - \bar{v})\}$ è un sottospazio L_A -invariante di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 2, essendo $v, \bar{v}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Come prima, $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ con $U^\perp$ L_A -invariante. Scegliamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ ottenuta completando una base ortonormale $\mathcal{B}_2$ di $U^\perp$ con una base ortonormale $\mathcal{B}_1$ di U . Segue che $B := [L_A |_U]_{\mathcal{B}_1} \in O_2(\mathbb{R})$ con $\det B = \lambda \bar{\lambda} = 1$, e $C := [L_A |_{U^\perp}]_{\mathcal{B}_2} \in O_{n-2}(\mathbb{R})$.

A è dunque ortogonalmente simile alla matrice:

$$\begin{pmatrix} R_\theta & \\ & C \end{pmatrix},$$

e concludiamo nuovamente applicando l'ipotesi induttiva su C . □

Ora, se $A \in SO_n(\mathbb{R})$, poiché $\det A = 1$, k è pari, ed essendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi,$$

possiamo concludere che A è ortogonalmente simile a una matrice:

$$\begin{pmatrix} I_{n-2k} & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}.$$

Capitolo 2

Il paradosso di Banach-Tarski

In questo capitolo sfruttiamo quanto visto precedentemente per arrivare alla costruzione di una decomposizione paradossale di una sfera piena unitaria in $\mathbb{R}^3$, vale a dire una partizione finita di quest'ultima, i cui sottoinsiemi possono essere ruotati, e traslati, ottenendo infine due sfere piene.

I risultati presentati si basano sui lavori di Banach, Tarski e Hausdorff, a cui è attribuita la decomposizione paradossale di quasi tutta la sfera, che vedremo nelle prossime sezioni.

2.1 Rotazioni e quaternioni

Sebbene il prodotto righe per colonne sia facile da eseguire, esprimere il prodotto di due elementi di $SO_3(\mathbb{R})$ come rotazione di un angolo θ attorno ad una specifica retta può essere problematico. Ovviando a ciò con uno stratagemma che utilizza il corpo di Hamilton dei quaternioni reali.

Definizione 2.1.1. *Indichiamo con $\mathbb{H}$ lo spazio vettoriale reale una cui base è data da $\{1, i, j, k\}$ con il prodotto $\cdot$ ottenuto estendendo bilinearmente:*

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= x \cdot 1 = x, \\i \cdot j &= k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \\j \cdot i &= -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j.\end{aligned}$$

Un facile esercizio mostra che tale prodotto è associativo, e quindi $\mathbb{H}$ è un'algebra reale.

Sia $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$; indichiamo con $Re(q) = a$ e con $Im(q) = bi + cj + dk$ rispettivamente parte reale e immaginaria di q . Definiamo inoltre $q^* := a - bi - cj - dk$. Allora $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$ e $qq^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per ogni $q \in \mathbb{H}$.

q^* è detto il coniugato di q , e $\|q\| := \sqrt{qq^*}$ la norma di q . Segue che $\|q\| = 0$ se e soltanto se $q = 0$, e $q \frac{q^*}{\|q\|^2} = 1$ per ogni $q \neq 0 \in \mathbb{H}$. In particolare, se $\|q\| = 1$, allora $q^{-1} = q^*$.

Si verifica facilmente, inoltre, che $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ comunque presi $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

Indicheremo con $U := \{q \in \mathbb{H} \mid qq^* = 1\}$ il sottogruppo dei quaternioni unitari e con $\mathfrak{S} := Span_{\mathbb{R}}\{i, j, k\}$ il sottospazio dei quaternioni immaginari puri.

Osservazione 2.1.1. *Sia $v \in \mathfrak{S}$; allora $vi - iv, vj - jv, vk - kv \in \mathfrak{S}$ come segue da una semplice verifica.*

Sia ora $q = a + bi + cj + dk \in U$; allora $1 = qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, per cui possiamo scrivere:

$$\begin{cases} a = \cos \theta \\ \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = \sin \theta \end{cases},$$

per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

Se $\sin \theta = 0$, si ha $q = a = \pm 1$. Altrimenti:

$$q = \cos \theta + I \sin \theta,$$

con $I := \frac{a}{\sin \theta}i + \frac{b}{\sin \theta}j + \frac{c}{\sin \theta}k \in U \cap \mathfrak{S}$, poichè $I^*I = \frac{1}{\sin^2 \theta}(b^2 + c^2 + d^2) = 1$; in particolare, I è un quaternione immaginario puro, nonchè unitario.

Osservazione 2.1.2. *Sia $v \in \mathfrak{S} \cap U$; allora $v^2 = vv = v(-v)^* = -vv^* = -1$.*

Indaghiamo ora alcune importanti proprietà dell'azione per coniugio di U su $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow GL(\mathbb{H}) \\ q &\mapsto \phi_q \end{aligned},$$

dove con $GL(\mathbb{H})$ intendiamo il gruppo degli endomorfismi $\mathbb{R}$ -lineari invertibili di $\mathbb{H}$.

Osservazione 2.1.3. $\mathfrak{S}$ è ϕ -invariante, cioè è ϕ_q -invariante per ogni $q \in U$.

Dimostrazione. Sia $q \in U$; è sufficiente verificare che $\phi_q(i), \phi_q(j), \phi_q(k) \in \mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} \phi_q(i) &= qi q^* = (\cos \theta + I \sin \theta)i(\cos \theta - I \sin \theta) \\ &= (\cos \theta + I \sin \theta)(i \cos \theta - iI \sin \theta) \\ &= i \cos^2 \theta - iI \cos \theta \sin \theta + Ii \cos \theta \sin \theta + iII^* \sin^2 \theta \\ &= i + (Ii - iI) \cos \theta \sin \theta \in \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si ottiene $\phi_q(j) = j + (Ij - jI) \cos \theta \sin \theta \in \mathfrak{S}$ e $\phi_q(k) = k + (Ik - kI) \cos \theta \sin \theta \in \mathfrak{S}$. $\square$

L'azione di U su $\mathbb{H}$ si restringe allora al sottospazio invariante $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : U &\rightarrow GL(\mathfrak{S}) \\ q &\mapsto \phi_q|_{\mathfrak{S}} \end{aligned}.$$

Se $q_1, q_2 \in \mathfrak{S}$, $\langle q_1, q_2 \rangle := -\text{Re}(q_1 q_2)$ è bilineare, simmetrica e i vettori i, j, k definiscono una base ortonormale. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è pertanto un prodotto scalare che rende $\mathfrak{S}$ uno spazio euclideo.

Definiamo $q_1 \times q_2 := \text{Im}(q_1 q_2)$ comunque presi $q_1, q_2 \in \mathfrak{S}$. Ricapitolando:

$$q_1 q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \times q_2 \quad \forall q_1, q_2 \in \mathfrak{S}.$$

Osservazione 2.1.4. È facile notare che $\times$ coincide con il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ nella base standard $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

Proposizione 2.1.1. Ogni base ortonormale $\{q_1, q_2, q_3\}$ di $\mathfrak{S}$ soddisfa:

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -1, \quad q_1 q_2 q_3 = \pm 1.$$

Dimostrazione. Sia $\{q_1, q_2, q_3\}$ una base ortonormale di $\mathfrak{S}$; in particolare, $q_i \in \mathfrak{S} \cap U$ per $i = 1, 2, 3$, perciò $1 = q_i^* q_i = -q_i q_i$ ovvero $q_i^2 = -1$ per $i = 1, 2, 3$.

Inoltre $q_1 q_2 = q_1 \times q_2$, poiché sono ortogonali, dunque $q_1 q_2$ è un quaternion puro ortogonale a q_1 e q_2 ; deve quindi essere parallelo a q_3 . Allora:

$$q_1 q_2 = \lambda q_3 \in U \iff q_1 q_2 = \pm q_3 \implies q_1 q_2 q_3 = \pm 1.$$

□

Sia ora $q = \cos \theta + I \sin \theta \in U$; possiamo completare I ad una base ortonormale, $\mathcal{B} = \{I, J, K\}$, di $\mathfrak{S}$. Dunque:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_q(I) &= (\cos \theta + I \sin \theta) I (\cos \theta - I \sin \theta) \\ &= (\cos \theta + I \sin \theta) (I \cos \theta + \sin \theta) \\ &= I \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta + I \sin^2 \theta \\ &= I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_q(J) &= (\cos \theta + I \sin \theta) J (\cos \theta - I \sin \theta) \\ &= (\cos \theta + I \sin \theta) (J \cos \theta + K \sin \theta) \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) J + 2 \cos \theta \sin \theta K \\ &= \cos 2\theta J + \sin 2\theta K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_q(K) &= (\cos \theta + I \sin \theta) K (\cos \theta - I \sin \theta) \\ &= (\cos \theta + I \sin \theta) (K \cos \theta - J \sin \theta) \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) K - 2 \cos \theta \sin \theta J \\ &= \cos 2\theta K + \sin 2\theta J. \end{aligned}$$

In particolare:

$$[\bar{\phi}_q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}).$$

Per concludere la sezione, osserviamo che ogni $A \in SO_3(\mathbb{R})$, come mostrato nel capitolo precedente, ammette un autovettore $v^T = (a, b, c)^T$ relativo a 1, e possiamo supporre $v^T v = 1$. Si ha quindi che A descrive la rotazione di $Span\{v\}^\perp$ di un certo angolo θ attorno a $Span\{v\}$.

Segue che, il quaternione unitario $q = \cos \frac{\theta}{2} + I \sin \frac{\theta}{2}$, con $I = ai + bj + ck$, è tale che $[\bar{\phi}_q]_{\mathcal{B}} = A$ per un'opportuna base $\mathcal{B}$.

Osservazione 2.1.5. $\bar{\phi}$ è dunque suriettiva, ma non iniettiva. Tuttavia:

$$\bar{\phi}_u \equiv \bar{\phi}_q \iff u = \pm q.$$

2.2 Un sottogruppo libero di $SO_3(\mathbb{R})$

Il paradosso di Banach-Tarski richiede la costruzione di un sottogruppo libero su due generatori di $SO_3(\mathbb{R})$. Ci occupiamo di ciò in questa sezione.

2.2.1 Gruppi liberi

Definizione 2.2.1. Sia F un gruppo, S un insieme e $\iota : S \rightarrow F$. Si dice che F è libero su S rispetto ad ι se è soddisfatta la seguente proprietà universale: per ogni gruppo G e per ogni $f : S \rightarrow G$, esiste un unico omomorfismo di gruppi $\psi : F \rightarrow G$ tale che $f(s) = \psi(\iota(s))$ per ogni $s \in S$.

Proposizione 2.2.1. Sia S un insieme; allora esiste un gruppo F libero su S .

Dimostrazione. Sia $s \in S$; introduciamo il simbolo s^{-1} . Indichiamo con $F(S)$ l'insieme $\{t_1 \dots t_k \mid k \in \mathbb{N}, t_i = s_i^{\pm 1} \text{ con } s_i \in S\}$ delle parole in S . L'operazione di concatenazione: $(t_1 \dots t_k) * (r_1 \dots r_l) := t_1 \dots t_k r_1 \dots r_l$ è chiaramente associativa.

Indichiamo con $\sim$ la relazione d'equivalenza ottenuta chiudendo simmetricamente e transitivamente:

$$a \sim b \iff b \text{ si ottiene da } a \text{ rimuovendo una sottoparola della forma } s^{-1}s \text{ o } ss^{-1}.$$

Sia ora $F_S := F(S)/\sim$. È immediato osservare che:

$$\begin{aligned} F_S \times F_S &\rightarrow F_S \\ ([a], [b]) &\mapsto [a * b] \end{aligned}$$

definisce una struttura di gruppo su F_S .

Mostriamo che questo è un gruppo cercato, cioè F_S è libero su S . Per tale scopo è sufficiente considerare $\iota(s) := [s]$ per ogni $s \in S$. Allora si ha che $\iota(S)$ è un insieme di generatori per F_S .

Inoltre, per ogni gruppo G e per ogni $f : S \rightarrow G$, $\psi([s]) := f(s)$ per ogni $s \in S$ è banalmente l'unico omomorfismo che soddisfa questa proprietà. $\square$

Osserviamo che per la proposizione precedente, se F è libero su S , allora $F \cong F_S$ in modo unico, nel senso che, sfruttando le proprietà universali, i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\exists! \phi} & F_S, \\ \iota \uparrow & \nearrow [\cdot] & \\ S & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_S & \xrightarrow{\exists! \psi} & F \\ [\cdot] \uparrow & \nearrow \iota & \\ S & & \end{array}$$

sono commutativi e perciò $[s] = \phi(\iota(s)) = \phi(\psi([s]))$ e $\iota(s) = \psi([s]) = \psi(\phi(\iota(s)))$, cioè ϕ è l'unico isomorfismo che realizza $F \cong F_S$.

Indichiamo, a meno di isomorfismi, $\mathbb{F}_n$ il gruppo libero su n generatori.

Osservazione 2.2.1. *Sia ora F libero su S , con S opportunamente identificato con un insieme di generatori per F ; allora ogni $g \in F$ si scrive in modo unico come prodotto di elementi in S e dei suoi inversi, senza prodotti banali ss^{-1} o $s^{-1}s$, cioè come un'unica parola ridotta in S .*

In particolare, ogni parola ridotta non banale (cioè che non è l'identità) in S non è l'identità. Segue che, se F è un gruppo e $S \subseteq F$, allora F è libero su S se e solo se ogni parola ridotta non banale in S non è l'identità.

2.2.2 Costruzione del sottogruppo

Nella nuova notazione, stiamo quindi cercando $\mathbb{F}_2 \cong \Gamma \leq SO_3(\mathbb{R})$. Consideriamo $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} + i)$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} + k)$; in particolare $\omega, \rho \in U$.

Sia ora q una parola ridotta non banale in $\{\omega, \rho, \omega^*, \rho^*\}$; mostriamo che $q \neq \pm 1$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che q termini con ρ oppure ρ^* , a meno di sostituire q con $\rho q \rho^*$ oppure $\rho^* q \rho$.

Lemma 2.2.1. *Sia q una parola come sopra; allora $qiq^* = \frac{1}{3^l}(ai + b\sqrt{2}j + ck)$ per qualche $l \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $b \not\equiv 0 \pmod{3}$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla lunghezza di q .

Se è composta da un solo fattore, allora abbiamo $q = \rho$ oppure ρ^* :

$$qiq^* = \rho i \rho^* = \frac{1}{3}(i + 2\sqrt{2}j).$$

Sia ora q con almeno 2 fattori e supponiamo l'enunciato vero per ogni parola con meno fattori di q .

Di certo, q inizia con w, w^* oppure ρ, ρ^* . In entrambi i casi, (consideriamo solo w, ρ , i casi con w^*, ρ^* saranno analoghi) per ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} qiq^* &= \omega q' i q'^* \omega^* \\ &= \omega \frac{1}{3^l} (ai + b\sqrt{2}j + ck) \omega^* \\ &= \frac{1}{3^l} (ai + b\sqrt{2}\omega j \omega^* + c\omega k \omega^*) \\ &= \frac{1}{3^l} (ai + b\sqrt{2}(\frac{1}{3}j + 2\frac{\sqrt{2}}{3}k) + c(\frac{1}{3}k - 2\frac{\sqrt{2}}{3}j)) \\ &= \frac{1}{3^{l+1}} (3ai + \sqrt{2}(b - 2c)j + (4b + c)k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} qiq^* &= \rho q' i q'^* \rho^* \\ &= \rho \frac{1}{3^l} (ai + b\sqrt{2}j + ck) \rho^* \\ &= \frac{1}{3^l} (a\rho i \rho^* + b\sqrt{2}\rho j \rho^* + ck) \\ &= \frac{1}{3^l} (a\frac{1}{3}(i + 2\sqrt{2}j) + b\sqrt{2}(\frac{1}{3}j - 2\frac{\sqrt{2}}{3}i) + ck) \\ &= \frac{1}{3^{l+1}} ((a - 4b)i + \sqrt{2}(2a + b)j + 3ck). \end{aligned}$$

In particolare i nuovi coefficienti di interesse sono ancora interi, e resta da mostrare che $b - 2c, 2a + b \not\equiv 0 \pmod{3}$. Studiamo come sono fatti a, c , guardando quindi al secondo fattore di q . Se questo è distinto dal primo, i conti precedenti mostrano che quando si ottiene $b - 2c$, $c \equiv 0 \pmod{3}$, e quando si ottiene $2a + b$, $a \equiv 0 \pmod{3}$.

Se il fattore è invece lo stesso (svolgiamo solo con ω):

$$\begin{aligned}\omega^2 q'' i q'' \omega^{2*} &= \frac{1}{3^{v'}}(a'i + \sqrt{2}b'\omega^2 j \omega^{2*} + c'\omega^2 k \omega^{2*}) \\ &= \frac{1}{3^{v'}}(a'i + \sqrt{2}b'\frac{1}{9}(-7j + 4\sqrt{2}k) + c'\frac{1}{9}(-7k - 4\sqrt{2}j)) \\ &= \frac{1}{3^{v'+2}}(9a'i + \sqrt{2}(-7b' - 4c')j + (8b' - 7c')k)\end{aligned}$$

per cui $b - 2c \equiv b - 2(4b' + c') \equiv b - 8b' - 2c' \equiv b - 9b' + b' - 2c' \equiv 2b \not\equiv 0 \pmod{3}$. $\square$

Si ottiene allora che $qiq^* \neq i$ poiché $qiq^* = i$ implica che $b = 0$, che è assurdo per il lemma precedente. Dunque $q \neq \pm 1$.

In altre parole, abbiamo contemporaneamente trovato che i sottogruppi $\langle \omega, \rho \rangle \leq U$ e $\langle \omega \cdot \omega^*, \rho \cdot \rho^* \rangle \leq SO_3(\mathbb{R})$ sono liberi. Questo non è sorprendente, alla luce della discussione della sezione precedente.

2.3 Il paradosso

Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ individuato dal prodotto scalare standard, che induce la norma $\|\cdot\|$. Allora $S_{P,r} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - P\| = r\}$ e $B_{P,r} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - P\| \leq r\}$ sono le sfere e le palle centrate in P di raggio $r > 0$. Indichiamo con S^{n-1} e B^n rispettivamente la sfera e la palla di raggio 1 centrate nell'origine.

Da qui alla fine del capitolo si farà riferimento soltanto a sfere e palle unitarie, ma non si userà mai il fatto che queste abbiano raggio 1. In particolare, ogni risultato che vedremo è applicabile a sfere e palle di raggio qualsiasi centrate nell'origine.

Osservazione 2.3.1. *Sia G un gruppo che agisce su un insieme X , e sia $x \notin \text{Fix}(G \setminus \{e\}) := \{x \in X \mid \exists g \in G \setminus \{e\} \text{ t.c. } g(x) = x\}$ l'insieme dei punti fissi non banali rispetto all'azione considerata; allora $gx \notin \text{Fix}(G \setminus \{e\})$ per ogni $g \in G \setminus \{e\}$. Infatti, se per assurdo esistesse $h \in G \setminus \{e\}$ tale che $hg(x) = g(x)$, si avrebbe:*

$$g^{-1}hg(x) = x \iff g^{-1}hg = e \iff h = e.$$

In particolare, G agisce anche su $X \setminus \text{Fix}(G \setminus \{e\})$.

Consideriamo l'azione di Γ su $\mathbb{R}^3$ introdotta nel capitolo precedente. Poiché Γ agisce per isometrie, la sfera S^2 è invariante per l'azione. Sia $D \subseteq S^2$ l'insieme dei punti fissi non banali rispetto a tale azione; per l'osservazione precedente, Γ agisce su $S^2 \setminus D$. Indichiamo con $\mathcal{O}(x) := \{qxq^* \mid q \in \Gamma\}$ l'orbita di x rispetto all'azione di Γ .

Usando l'assioma della scelta, scegliamo un elemento di ciascun orbita e indichiamo con E l'insieme di tali scelte. Sia ora $\alpha \in \{\omega, \rho, \omega^*, \rho^*\}$; definiamo $\Gamma_\alpha := \{q \in \Gamma \mid q = \alpha q'\}$ e $\Gamma_\alpha(E)\Gamma_{\alpha^*} := \{yyq^* \mid y \in E, q \in \Gamma_\alpha\}$.

Siano ora $A_1 := \Gamma_\omega(E)\Gamma_{\omega^*}$, $A_2 := \Gamma_\rho(E)\Gamma_{\rho^*}$, $A_3 := \Gamma_{\omega^*}(E)\Gamma_\omega$, $A_4 := \Gamma_{\rho^*}(E)\Gamma_\rho$, $A_5 := E$.

Teorema 2.3.1. *Gli insiemi A_i sono a due a due disgiunti e partizionano $S^2 \setminus D$. Inoltre, $S^2 \setminus D = A_1 \cup \omega(A_3)\omega^* = A_2 \cup \rho(A_4)\rho^*$.*

In altre parole, $S^2 \setminus D$ ammette una decomposizione paradossale per rotazioni.

Dimostrazione. Per comodità indichiamo $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} := \{\omega, \rho, \omega^*, \rho^*\}$ e con q_i una parola ridotta e non banale che inizia per α_i .

Sia $x \in S^2 \setminus D$; poiché le orbite forniscono una partizione di $S^2 \setminus D$, è chiaro che $S^2 \setminus D \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$. Viceversa, $E \subseteq S^2 \setminus D$ e, se $x \in A_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$, allora $x = q_i y q_i^*$. Poiché $y \in S^2 \setminus D$, $x \in S^2 \setminus D$ per l'osservazione.

Supponiamo ora $x \in A_i \cap A_j$, con $i \neq j$; allora $x = q_i y q_i^* = q_j z q_j^*$, con $y, z \in E$. Si ha dunque che y e z appartengono alla stessa orbita, e questo

è possibile, per come abbiamo definito E , se e solo se $y = z$. Allora $q_i = q_j$, che è assurdo poiché $i \neq j$.

Per quanto appena visto, ogni $x \in S^2 \setminus D$ si scrive in modo unico come $x = yyq^*$ con $q \in \Gamma$, $y \in E$. Fissato quindi $y \in E$, si ottiene ogni punto di $S^2 \setminus D$ nell'orbita di x facendo variare $q \in \Gamma$, e al variare di y si ottiene esattamente $S^2 \setminus D$. Segue da quest'osservazione che è sufficiente decomporre Γ , e si ha la tesi osservando che:

$$\Gamma = \Gamma_\omega \cup \omega\Gamma_{\omega^*} = \Gamma_\rho \cup \rho\Gamma_{\rho^*}.$$

□

In particolare, dagli stessi pezzi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 che compongono l'insieme, posso ottenere due copie dell'insieme stesso: una ruotando A_3 mediante ω e unendolo ad A_1 , l'altra ruotando A_4 mediante ρ e unendolo ad A_2 .

Lemma 2.3.1. *È possibile decomporre $S^2 \setminus D$ in due sottoinsiemi, e ottenere S^2 dagli stessi dopo un'opportuna rotazione.*

Dimostrazione. D è numerabile, dunque esiste una coppia di punti antipodali che non appartengono a D . In particolare, questi individuano una retta passante per l'origine; sia $I \in \mathfrak{S} \cap U$ uno dei due vettori corrispondenti a tale retta. Sia ora $R_I := \{q = \cos \theta + I \sin \theta \in U \mid \exists d \in D, n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } q^n d q^{*n} \in D\}$. Essendo D numerabile lo è anche R , al contrario di U : esiste allora $q_0 \in U \setminus R_I$. Sia $A := \bigcup_{n \geq 0} q_0^n(D)q_0^{*n} = D \cup \bigcup_{n \geq 1} q_0^n(D)q_0^{*n}$; segue che $q_0(A)q_0^* = A \setminus D$.

È sufficiente a questo punto decomporre $S^2 \setminus D = (A \setminus D) \cup (S^2 \setminus A)$. Lasciando fisso $S^2 \setminus A$ e ruotando $A \setminus D$ mediante q_0^* :

$$q_0^*(A \setminus D)q_0 \cup (S^2 \setminus A) = A \cup (S^2 \setminus A) = S^2.$$

□

Ricapitolando, finora abbiamo mostrato che $S^2 \setminus D$ ammette una decomposizione paradossale, e che da $S^2 \setminus D$ si ricostruisce S^2 mediante una rotazione.

Unendo questi due fatti:

Proposizione 2.3.1. *S^2 ammette una decomposizione paradossale per rotazioni.*

Dimostrazione. Consideriamo $S^2 \setminus D = A_1 \cup \dots \cup A_5$ come dal teorema 2.3.1 e $S^2 \setminus D = (A \setminus D) \cup (S^2 \setminus A)$ come dal lemma 2.3.1. Siano $X := A_1 \cup A_3$, $Y := A_2 \cup A_4$; X, Y sono dunque i sottoinsiemi da cui si ricavano le due copie di $S^2 \setminus D$.

Siano ora $X' := (q_0^*(X)q_0 \cap A) \cup (X \cap (S^2 \setminus A))$, $Y' := (q_0^*(Y)q_0 \cap A) \cup (Y \cap (S^2 \setminus A))$. Questi sono in particolare sottoinsiemi disgiunti della sfera e mostriamo che sia da X' che da Y' si ricompono S^2 . Ragioniamo su X' : ruotando mediante q_0 l'insieme $q_0^*(X)q_0 \cap A$ e lasciando fisso $X \cap (S^2 \setminus A)$, otteniamo $A_1 \cup A_3$, da cui si ottiene $S^2 \setminus D$ ruotando A_3 con ω , per il teorema precedente. Applicando il Lemma 2.3.1, abbiamo ricomposto S^2 .

Analogamente, si ottiene S^2 a partire da Y' seguendo lo stesso schema, sostituendo ρ a ω .

□

Mostrato che la sfera ammette una decomposizione paradossale, possiamo facilmente estendere il risultato alla palla e concludere il capitolo con il paradosso di Banach-Tarski classico.

Teorema 2.3.2 (paradosso di Banach-Tarski). *B^3 ammette una decomposizione paradossale per rotazioni e traslazioni.*

Dimostrazione. Consideriamo una decomposizione paradossale di S^2 , garantita dalla Proposizione 2.3.1, diciamo $S^2 = X_1 \cup \dots \cup X_m$. Allora, gli insiemi $Y_i := \{\alpha x \mid \alpha \in (0, 1], x \in X_i\}$, per ogni $i = 1, \dots, m$, forniscono una decomposizione paradossale di $B^3 \setminus \{0\}$. A questo punto, è sufficiente mostrare che è possibile ricomporre B^3 da $B^3 \setminus \{0\}$.

Sia τ un'opportuna traslazione in modo che $\tau(B^3) = B_{x,1}$ con $x = (\epsilon, 0, \dots, 0)$, $\epsilon < \frac{1}{2}$. Consideriamo ora $R_i := \{q = \cos \theta + i \sin \theta \in U \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } q^n x q^{*n} = x\}$; questo è numerabile, dunque esiste $q_0 \in U \setminus R_i$.

Sia $A := \bigcup_{n \geq 0} \{q_0^n x q_0^{*n}\}$; qui la scelta dell' ϵ garantisce che $A \subseteq B_{x,1}$, e la scelta di q_0 garantisce che $q_0(A)q_0^* = A \setminus \{x\}$ e che si abbiano le partizioni:

$$B_{x,1} = A \cup (B_{x,1} \setminus A), \quad B_{x,1} \setminus \{x\} = (A \setminus \{x\}) \cup (B_{x,1} \setminus A),$$

che possiamo usare per ricomporre $B_{x,1}$ da $B_{x,1} \setminus \{x\}$ applicando q_0^* su $A \setminus \{x\}$.

Si conclude applicando τ^{-1} su $B_{x,1}$ e su $B_{x,1} \setminus \{x\}$. □

Capitolo 3

Forma forte e generalizzazioni

L'obiettivo di questo capitolo è individuare la terminologia giusta per riformulare, in un contesto più generale, il paradosso di Banach-Tarski. Successivamente, saremo in grado di enunciare e dimostrare una sua forma forte, e di estenderla in dimensione più alta. Le nozioni fondamentali presentate sono dovute a Banach e Tarski; [1] è il principale riferimento utilizzato, in questo capitolo, per una versione più moderna.

3.1 G -equiscomponibilità

Sostituiamo ora al gruppo U che agisce su $\mathbb{R}^3$ un qualsiasi gruppo G che agisce su un insieme X . Formalizziamo innanzitutto l'idea di scomporre un oggetto e ricomporne un altro muovendo i pezzi.

Definizione 3.1.1. *Sia G un gruppo che agisce su un insieme X . Due sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ si dicono G -equiscomponibili, e si scrive $A \sim_G B$, se esistono partizioni finite $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_i\}_{i=1}^m$, rispettivamente di A e B , e $g_1, \dots, g_m \in G$ tali che $g_i(A_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$.*

Un primo fatto non sorprendente:

Proposizione 3.1.1. *Sia G un gruppo che agisce su un insieme X ; allora $\sim_G$ è una relazione d'equivalenza su $\mathcal{P}(X)$, l'insieme delle parti di X .*

Dimostrazione. Per ogni insieme $A \subseteq X$, si ha banalmente $A \sim_G A$ usando l'identità $e(A) = A$.

Se $g_1, \dots, g_m$ realizzano $A \sim_G B$ per opportune partizioni, allora $g_1^{-1}, \dots, g_m^{-1}$ realizzano $B \sim_G A$ con le stesse partizioni. Vediamo ora la transitività: supponiamo $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_i\}_{i=1}^m$ partizioni di A, B , $\{B'_i\}_{i=1}^n, \{C_i\}_{i=1}^n$ partizioni di B, C e $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tali che:

$$g_i(A_i) = B_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad h_i(B'_i) = C_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Consideriamo $A_{ij} := A_i \cap g_i^{-1}(B'_j)$ e $C_{ij} := h_j(B_i) \cap C_j \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Mostriamo che $\{A_{ij}\}_{ij}$ e $\{C_{ij}\}_{ij}$ sono partizioni rispettivamente di A e C . Infatti, $A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset$ per ogni $(i, j) \neq (k, l)$ e questo si può vedere distinguendo i casi $i \neq k$, per cui è chiaro che siano disgiunti essendole A_i e A_k , e $i = k$, per cui $j \neq l$ ed è perciò sufficiente applicare g_i .

Analogamente si verifica per i C_{ij} , considerando i casi $j \neq l$, e $j = l$ applicando h_j^{-1} . Inoltre:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i,j} A_i \cap g_i^{-1}(B'_j) &= \bigcup_i \bigcup_j A_i \cap g_i^{-1}(B'_j) \\ &= \bigcup_i A_i \cap g_i^{-1}\left(\bigcup_j B'_j\right) \\ &= \bigcup_i A_i \cap g_i^{-1}(B). \end{aligned}$$

A questo punto, se $x \in A$, esiste un unico i tale che $x \in A_i$, cioè $g_i(x) \in B_i \subseteq B$; dunque $x \in A_i \cap g_i^{-1}(B)$. Il ragionamento è analogo per mostrare che $\bigcup_{i,j} h_j(B_i) \cap C_j = C$. Infine, gli elementi $h_j g_i \in G$ realizzano $A \sim_G C$:

$$h_j g_i(A_i \cap g_i^{-1}(B'_j)) = h_j(B_i \cap B'_j) = h_j(B_i) \cap C_j \quad \forall i, j.$$

□

Osservazione 3.1.1. *Supponiamo $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ con $A_i \sim_G B_i$; allora $A \sim_G B$.*

3.2 G -paradossalità

Definizione 3.2.1. Sia G gruppo che agisce su un insieme X ; $A \subseteq X$ si dice G -paradossale se esistono $A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_m \subseteq A$ disgiunti e $g_1, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_m \in G$ tali che:

$$\bigcup_{i=1}^k g_i(A_i) = A = \bigcup_{i=k+1}^m g_i(A_i).$$

Osservazione 3.2.1. A è G -paradossale se e solo se esistono $B, C \subseteq A$ disgiunti e tali che $B \sim_G A \sim_G C$.

Con questa nuova terminologia abbiamo dimostrato, nel capitolo precedente, che $S^2 \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2 \setminus D$ e che $S^2 \setminus D$ è $SO_3(\mathbb{R})$ -paradossale, concludendo che S^2 è $SO_3(\mathbb{R})$ -paradossale. Vediamo che questo è vero in generale:

Proposizione 3.2.1. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e $A, B \subseteq X$ con A G -paradossale; allora B è G -paradossale.

Dimostrazione. Supponiamo che le partizioni $\{X_i\}_{i=1}^k, \{Y_i\}_{i=1}^k$, rispettivamente di A, B , con gli elementi $g_1, \dots, g_k \in G$, realizzino $A \sim_G B$; essendo A G -paradossale, esistono $A_1, A_2 \subseteq A$ disgiunti tali che $A_1 \sim_G A \sim_G A_2$. Osservando che $g_i(A_1 \cap X_i) = g_i(A_i) \cap Y_i$ e $g_i(A_2 \cap X_i) = g_i(A_2) \cap Y_i$, con $\bigcup_{i=1}^k A_1 \cap X_i = A_1$ e $\bigcup_{i=1}^k A_2 \cap X_i = A_2$, si ha che:

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^k g_i(A_1) \cap Y_i, \quad B_2 = \bigcup_{i=1}^k g_i(A_2) \cap Y_i$$

sono 2 sottoinsiemi disgiunti di B tali che $B_1 \sim_G A_1 \sim_G A \sim_G B$, e $B_2 \sim_G A_2 \sim_G A \sim_G B$, dunque B è G -paradossale. $\square$

In particolare, comunque preso A G -paradossale, $g(A)$ è G -paradossale.

Definizione 3.2.2. Sia G gruppo che agisce su in insieme X e $A, B \subseteq X$. Scriveremo $A \preceq_G B$ se $A \sim_G C$, per qualche $C \subseteq B$.

Osservazione 3.2.2. Sia $A \subseteq B$; banalmente $e(A) = A \subseteq B$, per cui $A \preceq_G B$.

Vogliamo ora mostrare che se $A \preceq_G B$ e $B \preceq_G A$, allora $A \sim_G B$. Questo semplifica di molto la ricerca di insiemi G -equiscomponibili.

Lemma 3.2.1. *Sia X un insieme non vuoto e $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un'applicazione che preserva l'ordine, vale a dire che $F(A) \subseteq F(B)$ comunque presi $A \subseteq B$; allora F ammette un punto fisso.*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid B \subseteq F(B)\}$.

Mostriamo che $A := \bigcup_{B \in \mathcal{D}} B$ è un punto fisso. Si ha infatti che:

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{D}} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{D}} F(B) = F(A),$$

perciò $F(A) \subseteq F(F(A))$, poiché F preserva l'ordine; dunque $F(A) \in \mathcal{D} \implies F(A) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{D}} B = A$. Concludiamo che $F(A) = A$. $\square$

Teorema 3.2.1. *Siano X, Y insiemi non vuoti e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ applicazioni iniettive; allora esistono partizioni $A_1 \cup A_2 = X$, $B_1 \cup B_2 = Y$ tali che $f(A_1) = B_1$, $g(B_2) = A_2$.*

Dimostrazione. Sia $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tale che $F(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$; osserviamo che F preserva l'ordine. Infatti, se $C \subseteq D \subseteq X$, allora $f(C) \subseteq f(D)$, e dunque $g(Y \setminus f(D)) \subseteq g(Y \setminus f(C))$. Segue che:

$$F(C) = X \setminus g(Y \setminus f(C)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(D)) = F(D),$$

e per la proposizione precedente esiste $A_1 \subseteq X$ tale che $A_1 = X \setminus g(Y \setminus f(A_1))$. Si ha quindi che le partizioni:

$$X = A_1 \cup g(Y \setminus f(A_1)) \text{ e } Y = f(A_1) \cup Y \setminus f(A_1)$$

soddisfano la richiesta. $\square$

Possiamo ora dimostrare il risultato cercato:

Teorema 3.2.2 (Schröder-Bernstein-Banach). *Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e $A, B \subseteq X$ tali che $A \preceq_G B$ e $B \preceq_G A$; allora $A \sim_G B$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono partizioni $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $B = B_1 \cup \dots \cup B_l$ e $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l \in G$ che realizzano $A \sim_G B' \subseteq B$ e $B \sim_G A' \subseteq A$. Siano f e g le applicazioni definite come $f|_{A_i} := g_i|_{A_i}$ e $g|_{B_i} := h_i|_{B_i}$; queste sono in particolare iniettive. Allora, per il teorema precedente, esistono partizioni $A = C_1 \cup C_2$ e $B = D_1 \cup D_2$ con $f(C_1) = D_1$ e $g(D_2) = C_2$. Osservando che $D_1 = f(C_1) \subseteq f(A)$ e $C_2 = g(D_2) \subseteq g(B)$, le partizioni:

$$C_1 = (C_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (C_1 \cap A_k) \text{ e } D_2 = (D_2 \cap B_1) \cup \dots \cup (D_2 \cap B_k)$$

sono tali che:

$$\begin{aligned} g_i(C_1 \cap A_i) &= f(C_1 \cap A_i) \\ &= f(C_1) \cap f(A_i) \\ &= D_1 \cap g_i(A_i) \quad \forall i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i(D_2 \cap B_i) &= g(D_2 \cap B_i) \\ &= g(D_2) \cap g(B_i) \\ &= C_2 \cap h_i(B_i) \quad \forall i = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

con $\bigcup_{i=1}^k D_1 \cap g_i(A_i) = D_1 \cap f(A) = D_1$ e $\bigcup_{i=1}^l C_2 \cap h_i(B_i) = C_2 \cap g(B) = C_2$. In altre parole, $C_1 \sim_G D_1$ e $D_2 \sim_G C_2$ e possiamo concludere che $A \sim_G B$ essendo $C_1 \cap C_2 = D_1 \cap D_2 = \emptyset$. $\square$

Sia $Iso(\mathbb{R}^n) := \{T_{A,b}(x) = Ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \mid A \in O_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\}$ il gruppo delle isometrie affini di $\mathbb{R}^n$ e $Iso^+(\mathbb{R}^n) := \{T_{A,b} \in Iso(\mathbb{R}^n) \mid A \in SO_n(\mathbb{R})\}$.

È stato dimostrato, nel capitolo precedente, che B^3 è $Iso^+(\mathbb{R}^3)$ -paradossale; in particolare, esistono due sottoinsiemi disgiunti di B^3 , entrambi $Iso^+(\mathbb{R}^3)$ -equiscomponibili con la palla stessa. Segue dal teorema di Schröder-Bernstein-Banach che $B^3 \sim_{Iso^+(\mathbb{R}^3)} B^3 \cup \tau(B^3)$, scegliendo un'opportuna traslazione $\tau = T_{I,b}$ in modo che $B^3 \cap \tau(B^3) = \emptyset$. In altre parole, è possibile duplicare una palla di raggio qualsiasi centrata nell'origine, e iterando il procedimento si

possono ottenere N palle per ogni $N \in \mathbb{N}$. Inoltre, $\tau(B^3)$ è ancora $Iso^+(\mathbb{R}^3)$ -paradossale comunque presa τ una traslazione, dunque la discussione appena fatta si estende ad ogni palla.

Una sfera $S_{P,r}$, invece, è paradossale rispetto al gruppo $\{T_{I,P} \circ T_{A,0} \circ T_{I,-P} \mid A \in SO_3(\mathbb{R})\} \cong SO_3(\mathbb{R})$. Scriveremo semplicemente che ogni sfera è $SO_3(\mathbb{R})$ -paradossale.

Il prossimo teorema, noto come forma forte del paradosso di Banach-Tarski, mostra che la paradossalità delle palle è sufficiente a scomporre un qualsiasi insieme limitato con parte interna non vuota, e ricomporre i pezzi ottenendo un qualsiasi altro insieme con la stessa proprietà, utilizzando solo $Iso^+(\mathbb{R}^3)$.

Teorema 3.2.3 (forma forte del paradosso di Banach-Tarski). *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ insiemi limitati e con parte interna non vuota; allora $A \sim_{Iso^+(\mathbb{R}^3)} B$.*

Dimostrazione. Sia $G := Iso^+(\mathbb{R}^3)$; dimostriamo che $A \preceq_G B$. Questo è sufficiente poichè la stessa dimostrazione è valida anche per mostrare che $B \preceq_G A$, e dunque $A \sim_G B$.

A è limitato, per cui esiste una palla $K \supseteq A$. B ha parte interna non vuota, perciò esiste una palla $L \subseteq B$. Sia ora $N \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande da ricoprire K con N copie di L , che indichiamo con S_i per $i = 1, \dots, N$, e sia $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$.

Per il paradosso di Banach-Tarski, $L \sim_G \bigcup_{i=1}^N L_i$, dove L_i sono opportune traslazioni di L in modo che l'unione sia disgiunta. A questo punto, definiamo $\hat{S}_1 := S_1$; se S_2 interseca $\hat{S}_1$, definiamo $\hat{S}_2 := S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)$, altrimenti $\hat{S}_2 := S_2$. Procediamo induttivamente definendo $\hat{S}_k := S_k \setminus \bigcup_{i < k} (S_k \cap \hat{S}_i)$.

In questo modo, gli $\hat{S}_i$ sono disgiunti e $K \subseteq \hat{S} := \bigcup_{i=1}^N \hat{S}_i$, con $\hat{S} \preceq_G \bigcup_{i=1}^N L_i$: è sufficiente infatti traslare ogni spicchio $\hat{S}_i$ in modo che sia contenuto in una e una sola copia L_i . Concludiamo quindi che:

$$A \subseteq K \subseteq \hat{S} \preceq_G \bigcup_{i=1}^N L_i \sim_G L \subseteq B,$$

vale a dire $A \preceq_G B$. □

3.3 Il paradosso in $\mathbb{R}^n$

Concludiamo questo capitolo con l'estensione del paradosso in dimensioni più alte.

Lemma 3.3.1. *Ogni circonferenza tolto un suo sottoinsieme numerabile è $SO_2(\mathbb{R})$ -equiscomponibile alla circonferenza stessa.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrarlo per S^1 . Sia $E \subseteq S^1$ numerabile e mostriamo che $S^1 \setminus E \sim_{SO_2(\mathbb{R})} S^1$.

Sia ora $R := \{\theta \in [0, 2\pi) \mid \exists x \in E, n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } R_\theta^n(x) \in E\}$; E è numerabile, dunque $R \subseteq [0, 2\pi)$ lo è. In particolare, esiste $\theta_0 \in [0, 2\pi) \setminus R$; sia $A := \bigcup_{n \geq 0} R_{\theta_0}^n(E)$. Le partizioni:

$$S^1 \setminus E = (A \setminus E) \cup (S^1 \setminus A), \quad S^1 = A \cup (S^1 \setminus A),$$

con gli elementi R_{θ_0}, I realizzano $S^1 \sim_{SO_2(\mathbb{R})} S^1 \setminus E$, infatti:

$$R_{\theta_0}(A) = A \setminus E.$$

□

Lemma 3.3.2. *Sia $n \geq 3$; $S_{P,r} \setminus \{N, S\} \sim_{SO_n(\mathbb{R})} S_{P,r}$, dove $N = (P_1, \dots, P_{n-1}, P_n + 1)^T$ e $S = (P_1, \dots, P_{n-1}, P_n - 1)^T$ sono rispettivamente il polo nord e sud della sfera.*

Dimostrazione. È sufficiente verificarlo per S^{n-1} . Sia $C := \{(0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1\} \subseteq S^{n-1}$ la circonferenza passante per N, S individuata dalle ultime due coordinate. Per il Lemma 3.3.1, questa è $SO_2(\mathbb{R})$ -equiscomponibile con $C \setminus \{N, S\}$. Dunque, con le partizioni:

$$S^{n-1} = C \cup (S^{n-1} \setminus C), \quad S^{n-1} \setminus \{N, S\} = (C \setminus \{N, S\}) \cup (S^{n-1} \setminus C),$$

si ha la tesi per l'Osservazione 3.1.1. □

Teorema 3.3.1. *Sia $n \geq 3$; allora:*

- *Ogni sfera in $\mathbb{R}^n$ è $SO_n(\mathbb{R})$ -paradossale.*

- Ogni palla in $\mathbb{R}^n$ è $Iso^+(\mathbb{R}^n)$ -paradossale.
- Due qualsiasi insiemi limitati con parte interna non vuota in $\mathbb{R}^n$ sono $Iso^+(\mathbb{R}^n)$ -equiscomponibili.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, se la prima e la seconda affermazione sono vere, allora la dimostrazione della terza è identica a quella del Teorema 3.1.3; dimostriamo quindi le prime due. Per la prima parte, procediamo per induzione su n , notando che il passo base $n = 3$ è già stato verificato.

Sia quindi $n > 3$ e supponiamo l'enunciato vero per $n - 1$; consideriamo la sfera individuata dalle prime $n - 1$ coordinate, ovvero $A = \{(x, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid \|x\| = 1\}$. Per ipotesi induttiva, questa è $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ -paradossale, perciò esistono $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subseteq A$ a due a due disgiunti, $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in SO_{n-1}(\mathbb{R})$ tali che $A = \bigcup_{i=1}^m g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^n h_j(B_j)$. Poniamo $\bar{A}_i = \{(x, x_n) \in S^{n-1} \setminus \{N, S\} \mid \frac{x}{\|x\|} \in A_i\}$ e $\bar{B}_j = \{(x, x_n) \in S^{n-1} \setminus \{N, S\} \mid \frac{x}{\|x\|} \in B_j\}$ per ogni i, j , con N, S il polo nord e sud. Si ha quindi che questi insiemi sono ancora a due a due disgiunti, e realizzano la paradossalità di $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$, considerando le rotazioni:

$$\bar{g}_i = \begin{pmatrix} g_i & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{h}_j = \begin{pmatrix} h_j & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, se $(x, x_n) \in S^{n-1} \setminus \{N, S\}$, allora $\frac{x}{\|x\|} \in A$; esiste perciò un unico i tale che $\frac{x}{\|x\|} = g_i(y)$, con $y \in A_i$. Segue che $x = g_i(\|x\|y)$, dunque $(x, x_n) = \bar{g}_i(\|x\|y, x_n)$ con $(\|x\|y, x_n) \in \bar{A}_i$, e questo mostra che $S^{n-1} \setminus \{N, S\} = \bigcup_{i=1}^m \bar{g}_i(\bar{A}_i)$. In maniera del tutto analoga, si ottiene anche che $S^{n-1} \setminus \{N, S\} = \bigcup_{j=1}^n \bar{h}_j(\bar{B}_j)$, cioè $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ è $SO_n(\mathbb{R})$ -paradossale. Segue dal Lemma 3.3.1 che S^{n-1} è $SO_n(\mathbb{R})$ -paradossale.

Per la seconda parte, se $\{A_i\}_{i=1}^n$ e $\{B_j\}_{j=1}^m$ realizzano una decomposizione paradossale di S^{n-1} , allora gli insiemi $A'_i = \{\alpha x \mid x \in A_i, \alpha \in (0, 1]\}$ e B'_j definiti analogamente per ogni i, j , realizzano una decomposizione paradossale di $B^n \setminus \{0\}$ con gli stessi elementi. Concludiamo osservando che $B^n \setminus \{0\}$

e B^n sono $Is^+(\mathbb{R}^n)$ -equiscomponibili, che si dimostra in maniera del tutto analoga al caso $n = 3$ presentato nel Teorema 2.3.2. $\square$

Capitolo 4

La versione continua

In questo capitolo vediamo un possibile raffinamento della forma forte del paradosso di Banach-Tarski. L'obiettivo è quello di mostrare che le decomposizioni paradossali precedentemente viste, possono essere realizzate muovendo i pezzi istante per istante e in modo che non si incrocino mai. I risultati presentati costituiscono una rielaborazione di parte di un articolo di Trevor M. Wilson [5].

L'idea è quella di sostituire ad un singolo elemento del gruppo, un cammino continuo che lo raggiunga partendo dall'identità; è pertanto necessaria una breve parentesi topologica.

4.1 Connessione di $SO_n(\mathbb{R})$

Sia X uno spazio topologico; chiameremo *cammino in X* ogni applicazione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Ricordiamo che se α, β sono cammini in X , l'applicazione:

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è chiaramente continua, e dunque un cammino in X .

Nel capitolo precedente, abbiamo introdotto $Iso(\mathbb{R}^n)$; osserviamo che questo è isomorfo al gruppo Ω delle matrici $(n + 1) \times (n + 1)$ della forma:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0^T & 1 \end{pmatrix},$$

che agiscono su $\mathbb{R}^n \leftrightarrow \{(x, 1)^T \mid x \in \mathbb{R}^n\}$:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, una semplice verifica mostra che:

$$\begin{aligned} \eta : Iso(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \Omega \\ T_{A,b} &\mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è isomorfismo di gruppi.

In particolare, identificando $Iso(\mathbb{R}^n)$ con Ω , si osserva che:

$$Iso(\mathbb{R}^n) \subseteq GL_{n+1}(\mathbb{R}) \subseteq M_{n+1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n+1)^2},$$

dunque equipaggiamo $M_{n+1}(\mathbb{R})$ della topologia euclidea e ogni suo sottoinsieme della topologia di sottospazio.

In particolare, un'applicazione $f : J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, è continua se e solo se lo è in ogni componente.

Osservazione 4.1.1. $\det : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è polinomiale, e perciò continua in questa topologia.

In particolare, $O_n(\mathbb{R})$ non è connesso, infatti $O_n(\mathbb{R}) = (\det^{-1}(0, +\infty) \cap O_n(\mathbb{R})) \cup (\det^{-1}(-\infty, 0) \cap O_n(\mathbb{R}))$, cioè è unione di due aperti disgiunti.

Al contrario:

Proposizione 4.1.1. $SO_n(\mathbb{R})$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Sia $A \in SO_n(\mathbb{R})$; per il Teorema 1.3.1, esiste $H \in O_n(\mathbb{R})$ tale che:

$$HAH^T = \begin{pmatrix} I_{n-2k} & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}.$$

Sia allora:

$$R(t) := \begin{pmatrix} I_{n-2k} & & & \\ & R_{t\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{t\theta_k} \end{pmatrix}.$$

Si ha che l'applicazione $\gamma : [0, 1] \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ definita come $\gamma(t) = H^T R(t) H$ è continua, con $\gamma(0) = H^T I H = I$, $\gamma(1) = H^T R H = A$.

In particolare, se $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$, e γ, δ sono cammini che connettono I rispettivamente ad A e B , allora il cammino $\gamma^{-1} * \delta$ connette A e B . $\square$

Corollario 4.1.1. $Iso^+(\mathbb{R}^n)$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Siano $\phi_1(x) = A_1 x + b_1$, $\phi_2(x) = A_2 x + b_2 \in Iso^+(\mathbb{R}^n)$ e γ un cammino in $SO_n(\mathbb{R})$ che connetta A_1 e A_2 . Allora:

$$\begin{aligned} \delta : [0, 1] &\rightarrow Iso^+(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \gamma(t) & (1-t)b_1 + tb_2 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è un cammino in $Iso^+(\mathbb{R}^n)$ tale che $\delta(0) = \phi_1$, $\delta(1) = \phi_2$. $\square$

4.2 G -equiscomponibilità continua

Formalizziamo ora l'idea presentata all'inizio del capitolo. Se γ è un cammino in $Iso(\mathbb{R}^n)$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, indichiamo $\gamma_t(A) := (\gamma(t))(A)$. Inoltre, se $A \subseteq \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n$, poniamo $A + u := \{a + u \mid a \in A\}$. In particolare, se $\tau = T_{I,u} \in Iso(\mathbb{R}^n)$ è una traslazione, $\tau(A) = A + u$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 4.2.1. Sia $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$; $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ si dicono G -equiscomponibili in modo continuo, e si scrive $A \cong_G B$, se esistono $\{A_i\}_{i=1}^m$ e $\{B_i\}_{i=1}^m$, partizioni rispettivamente di A e B , e $\{\gamma^i\}_{i=1}^m$ cammini in G tali che:

- $\gamma_0^i = Id \quad \forall i = 1, \dots, m.$
- $\gamma_1^i(A_i) = B_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$

- $\gamma_i^t(A_i) \cap \gamma_j^t(A_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \forall t \in [0, 1]$.

Vediamo che anche in questo caso:

Proposizione 4.2.1. *Sia $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$; allora $\cong_G$ è una relazione d'equivalenza su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. È chiara la riflessività, scegliendo la partizione banale e il cammino costante $\gamma_t = Id$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Per la simmetria, supponiamo che $A \cong_G B$ sia realizzata dalle partizioni $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_i\}_{i=1}^m$ e dai cammini $\{\gamma_i^i\}_{i=1}^m$; allora le stesse partizioni e i cammini $\delta^i = \gamma_{1-t}^i \cdot (\gamma_1^i)^{-1}$ realizzano $B \cong_G A$:

- $\delta_0^i = Id$.
- $\delta_1^i(B_i) = \gamma_0^i(\gamma_1^i)^{-1}(B_i) = \gamma_0^i(A_i) = A_i$.
- $\delta_t^i(B_i) \cap \delta_t^j(B_j) = \gamma_{1-t}^i(A_i) \cap \gamma_{1-t}^j(A_j) = \emptyset \quad \forall t \in [0, 1]$.

Supponiamo ora che le partizioni $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_i\}_{i=1}^m$ e i cammini $\{\gamma_i^i\}_{i=1}^m$ realizzino $A \cong_G B$, e che le partizioni $\{B'_j\}_{j=1}^l, \{C_j\}_{j=1}^l$ e i cammini $\{\delta_j^j\}_{j=1}^l$ realizzino $B \cong_G C$; allora, le partizioni $\{A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)\}_{i,j}, \{C_j \cap \delta_1^j(B_i)\}_{i,j}$ e i cammini $\{\gamma^i * (\delta^j \gamma_1^i)\}_{i,j}$ realizzano $A \cong_G C$. Si osserva facilmente, infatti, che $(\gamma^i * (\delta^j \gamma_1^i))_0 = \gamma_0^i = Id$ e che:

$$\begin{aligned} (\gamma^i * (\delta^j \gamma_1^i))_1(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)) &= \delta_1^j \gamma_1^i(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)) \\ &= \delta_1^j(B_i \cap B'_j) \\ &= \delta_1^j(B_i) \cap C_j. \end{aligned}$$

Inoltre, sia $(i, j) \neq (k, l)$; allora per $t \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &(\gamma^i * (\delta^j \gamma_1^i))_t(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)) \cap (\gamma^k * (\delta^l \gamma_1^k))_t(A_k \cap (\gamma_1^k)^{-1}(B'_l)) \\ &= (\delta^j \gamma_1^i)_{2t-1}(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)) \cap (\delta^l \gamma_1^k)_{2t-1}(A_k \cap (\gamma_1^k)^{-1}(B'_l)) \\ &= \delta_{2t-1}^j(B_i) \cap C_j \cap \delta_{2t-1}^l(B_k) \cap C_l, \end{aligned}$$

che è vuoto poiché, se $j \neq l$, si ha $C_j \cap C_l = \emptyset$, mentre se $j = l$ allora $i \neq k$ e dunque $\delta_{2t-1}^j(B_i) \cap \delta_{2t-1}^j(B_k) = \delta_{2t-1}^j(B_i \cap B_k) = \emptyset$.

Per $t < \frac{1}{2}$, si ha invece:

$$\gamma_{2t}^i(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j)) \cap \gamma_{2t}^k(A_k \cap (\gamma_1^k)^{-1}(B'_l)).$$

Se $i \neq k$, osserviamo che questo è contenuto in $\gamma_{2t}^i(A_i) \cap \gamma_{2t}^k(A_k) = \emptyset$, altrimenti $i = k$ e dunque $j \neq l$ e possiamo scriverlo come $\gamma_{2t}^i(A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}(B'_j \cap B'_l))$, con $B'_j \cap B'_l = \emptyset$. Segue che $A \cong_G C$ e la dimostrazione è pertanto conclusa. $\square$

4.3 G -estricabilità

Sia $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 3$; vogliamo dimostrare, in questo capitolo, che se due insiemi di $\mathbb{R}^n$ sono G -equiscomponibili, allora sono G -equiscomponibili in modo continuo, con qualche ipotesi su G . Si introduce, in questa sezione, una classe di famiglie finite di insiemi, che semplifica tale obiettivo.

Poichè vogliamo mostrare il paradosso, tenendo a mente il Teorema 3.1.4, è naturale restringere l'attenzione ai sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$, la cui collezione sarà indicata con $\mathcal{B}^n$.

Poniamo inoltre $[A]_G := \{B \in \mathcal{B}^n \mid B \cong_G A\}$ la classe di G -equiscomponibilità continua di A . Definiamo l'operazione su $\mathcal{B}^n / \cong_G$:

$$[A]_G + [B]_G := [(A + u) \cup (B + v)]_G,$$

dove $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u_i = v_i = 0$ per ogni $i \geq 3$ e sono tali che $B + v$ sia "strettamente a destra" di $A + u$, nel senso che $a_1 + u_1 < b_1 + v_1$ comunque presi $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in A$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in B$.

Proposizione 4.3.1. *Sia $n \geq 3$, $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ che contenga tutte le traslazioni nelle prime due coordinate; allora l'operazione precedente è ben definita, associativa e commutativa.*

Dimostrazione. Siano $A, B \in \mathcal{B}^n$; osserviamo per prima cosa che l'operazione non dipende dalla scelta del vettore. Cioè se u, v, u', v' sono tali che $a_1 + u_1 <$

$b_1 + v_1$ e $a_1 + u'_1 < b_1 + v'_1 \forall a \in A, b \in B$, allora $[(A + u) \cup (B + v)]_G = [(A + u') \cup (B + v')]_G$.

Scegliendo infatti i cammini $\gamma_t(x) = x + t(u' - u)$ e $\delta_t(x) = x + t(v' - v)$ per ogni $t \in [0, 1]$ si ha che:

- $\gamma_0 = \delta_0 = Id$.
- $\gamma_1(A + u) = A + u', \delta_1(B + v) = B + v'$.

Inoltre, se esistesse $x \in \gamma_t(A + u) \cap \gamma_t(B + v)$, si avrebbe:

$$a_1 + u_1 + t(u'_1 - u_1) = b_1 + v_1 + t(v'_1 - v_1)$$

e quindi $a_1 - b_1 = t(v' - u') + (1 - t)(v - u) = t(v'_1 - u'_1) + (1 - t)(v_1 - u_1)$ che è assurdo poiché $a_1 - b_1$ è strettamente minore di entrambi $v'_1 - u'_1$ e $v_1 - u_1$, per ogni $a \in A, b \in B$.

Non dipende inoltre dalla scelta dei rappresentanti, infatti se $[A]_G = [A']_G$ e $[B]_G = [B']_G$ allora $[A']_G + [B']_G = [A]_G + [B]_G$.

Consideriamo $\{A_i\}_{i=1}^k, \{A'_i\}_{i=1}^k$ con $\{\gamma^i\}_{i=1}^k$, e $\{B'_j\}_{j=1}^l, \{B_j\}_{j=1}^l$ con $\{\delta^j\}_{j=1}^l$ partizioni e cammini che realizzano rispettivamente $A' \cong_G A, B' \cong_G B$.

Supponiamo ora:

$$\begin{aligned} [A']_G + [B']_G &= [(A' + u') \cup (B' + v')]_G, \\ [A]_G + [B]_G &= [(A + u) \cup (B + v)]_G. \end{aligned}$$

Allora le partizioni:

$$\begin{aligned} A' \cup B' &= (A'_1 + u') \cup \dots \cup (A'_k + u') \cup (B'_1 + v') \cup \dots \cup (B'_l + v'), \\ A \cup B &= (A_1 + u) \cup \dots \cup (A_k + u) \cup (B_1 + v) \cup \dots \cup (B_l + v), \end{aligned}$$

con i cammini $\alpha_t^i(x) = \gamma_t^i(x - u') + u$ e $\beta_t^j(x) = \delta_t^j(x - v') + v$ realizzano chiaramente $(A' + u') \cup (B' + v') \cong_G (A + u) \cup (B + v)$.

Per l'associatività, notiamo che:

$$\begin{aligned}
 [A]_G + ([B]_G + [C]_G) &= [A]_G + [(B + v) \cup (C + w)]_G \\
 &= [(A + u) \cup (B + v + z) \cup (C + w + z)]_G \\
 &= [(A + u) \cup (B + v + z)]_G + [C]_G \\
 &= ([A]_G + [B]_G) + [C]_G
 \end{aligned}$$

Per la commutatività, osserviamo che $[A]_G + [B]_G = [A \cup (B + u)]_G$, dove è possibile scegliere $u = (r, 0, \dots, 0)^T$ con $r > \text{diam}(A \cup B)$. Mostriamo quindi che $A \cup (B + u) \cong_G A \cup (B - u)$; questo è sufficiente poiché $[B]_G + [A]_G = [A \cup (B - u)]_G$. Si lasci fisso A , e si scelga il cammino $\gamma_t(x) := x + r(\cos \pi t, \sin \pi t, 0, \dots, 0)^T - u$ per ogni $t \in [0, 1]$, che soddisfa:

- $\gamma_0(x) = x + u - u = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\gamma_1(b + u) = b + u - u - u = b - u \ \forall b \in B$.
- $\gamma_t(B + u) \cap A = \emptyset$

□

D'ora in poi, G sarà sempre un sottogruppo di $Iso(\mathbb{R}^n)$ che contiene tutte le traslazioni nelle prime due coordinate.

Siamo interessati agli insiemi che soddisfano la relazione:

$$[A]_G + [B]_G = [A \cup B]_G.$$

Infatti, se due insiemi disgiunti e limitati soddisfano questa proprietà, questi possono essere scomposti in modo tale da muovere i pezzi in modo continuo, fino a risistemare gli insiemi uno a destra dell'altro. Chiamiamo una tale coppia G -estricabile.

Più in generale:

Definizione 4.3.1. Una famiglia finita $\{A_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{B}^n$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, si dice G -estricabile se $\sum_{i=1}^m [A_i]_G = [\bigcup_{i=1}^m A_i]_G$. Indichiamo con $\mathcal{E}_G^n := \{A \in \mathcal{B}^n \mid [B]_G + [C]_G = [B \cup C]_G \ \forall B, C \subseteq A \text{ con } B \cap C = \emptyset\}$ la

collezione degli insiemi limitati tali che ogni coppia di sottoinsiemi disgiunti è G -estricabile.

Osservazione 4.3.1. Sia $\{A_i\}_{i=1}^m$ G -estricabile e $A'_i \subseteq A_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$; si osserva facilmente che gli stessi cammini che estricano $\{A_i\}_{i=1}^m$, cioè i cammini che realizzano $\bigcup_{i=1}^m A_i \cong_G \bigcup_{i=1}^m (A_i + v_i)$ per opportuni v_i tali che $[\bigcup_{i=1}^m (A_i + v_i)] = \sum_{i=1}^m [A_i]$, estricano anche $\{A'_i\}_{i=1}^m$.

Proposizione 4.3.2. Sia $\{A_i\}_{i=1}^m$ G -estricabile; allora $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{E}_G^n$.

Dimostrazione. Siano $B_1, B_2 \subseteq A$ disgiunti:

$$\begin{aligned} [B_1]_G + [B_2]_G &= \left[\bigcup_i A_i \cap B_1 \right]_G + \left[\bigcup_i A_i \cap B_2 \right]_G \\ &= \sum_i [A_i \cap B_1]_G + \sum_i [A_i \cap B_2]_G \\ &= \sum_i [(A_i \cap B_1) \cup (A_i \cap B_2)]_G \\ &= [B_1 \cup B_2]_G, \end{aligned}$$

dove la seconda e la quarta uguaglianza, seguono direttamente dall'osservazione precedente. $\square$

Il fatto cruciale su cui si basa la possibilità di estendere il paradosso, è proprio che ogni insieme limitato è di questa forma, cioè $\mathcal{B}^n = \mathcal{E}_G^n$.

Lemma 4.3.1. Esiste una partizione $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R} \setminus \Delta S_i$, per $i = 1, 2$, è denso, dove $\Delta S_i := \{a - b \in \mathbb{R} \mid a, b \in S_i\}$.

Dimostrazione. Consideriamo i sottogruppi additivi di $\mathbb{R}$: $K := \bigcup_n \frac{1}{3^n} \mathbb{Z}$ e $H := \frac{1}{2} \mathbb{Z} + K$. Usiamo l'assioma della scelta per scegliere un rappresentante r_α per ogni classe laterale di $\mathbb{R}/H$.

Siano $S_1 = \bigcup_\alpha (r_\alpha + K)$ e $S_2 = S_1 + \frac{1}{2}$: mostriamo che questi soddisfano le richieste.

Osserviamo che $S_1 \cap S_2 = \emptyset$: se per assurdo esistesse $s \in S_1 \cap S_2$, allora esisterebbero $k_1, k_2 \in K$, α, β tali che $r_\alpha + k_1 = r_\beta + k_2 + \frac{1}{2}$, cioè $r_\alpha - r_\beta \in H$,

che implica $r_\alpha = r_\beta$. In particolare, $k_2 = k_1 + \frac{1}{2}$, dunque esistono $n, m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{1}{3^n}k = \frac{1}{3^m}l + \frac{1}{2}$. Supponiamo senza perdita di generalità $n \geq m$; allora $\frac{k-3^{n-m}l}{3^n} = \frac{1}{2}$, cioè $2(k - 3^{n-m}l) = 3^n$, con $k - 3^{n-m}l \in \mathbb{Z}$. Questo è chiaramente assurdo poiché si avrebbe che 2 divide 3^n .

Inoltre, $\mathbb{R} = S_1 \cup S_2$. Infatti, sia $x \in \mathbb{R}$; se x è uno degli r_α , allora $x \in S_1$. Altrimenti, esiste un unico α e un unico $h \in H$ tale che $x = r_\alpha + h = r_\alpha + (h - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \in S_2$.

Vediamo ora la densità; osserviamo che per ogni $a, b \in S_i$ tali che $a - b \in H$, si ha che $a - b \in K$. Infatti, se $a - b = r_\alpha - r_\beta + k_1 - k_2 \in H$, allora esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $r_\alpha - r_\beta = \frac{1}{2}m + k \in H$, che implica $r_\alpha = r_\beta$. Allora $a - b \in K$. Questo fatto assicura che $\Delta S_i \cap (H \setminus K) = \emptyset$, dunque $H \setminus K \subseteq \mathbb{R} \setminus \Delta S_i$: concludiamo per densità di $H \setminus K = K + \frac{1}{2}$.

□

Teorema 4.3.1. $\mathcal{E}_G^n = \mathcal{B}^n$.

Dimostrazione. Identifichiamo, per semplificare la notazione, il sottogruppo di $Iso(\mathbb{R}^n)$ delle traslazioni nelle prime due coordinate con $\mathbb{R}^2$. Sia $A \in \mathcal{B}^n$, $A_1, A_2 \subseteq A$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Mostriamo che $[A_1]_G + [A_2]_G = [A_1 \cup A_2]_G$. Poniamo $A := A_1 \cup A_2$. Consideriamo $A_{ij} = A \cap (S_i \times S_j \times \mathbb{R}^{n-2})$ dove S_1, S_2 sono due insiemi con la proprietà del lemma 4.3.2. Si ha allora che gli A_{ij} formano una partizione estricabile di A . Infatti, è sufficiente considerare i cammini, scegliendo $r > \text{diam}(A)$:

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} (0, 2irt) & \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ ((2i+j)r(2t-1), ir) & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Si verifica con tecniche già utilizzate che questi realizzano:

$$[\bigcup_{i,j} A_{ij}]_G = [\bigcup_{i,j} (A_{ij} + u_{ij})]_G = \sum_{i,j} [A_{ij}]_G.$$

Allora, per la Proposizione 4.3.2, è sufficiente ora mostrare che $A_{ij} \in \mathcal{E}_G^n$ per ogni i, j .

Dati $B_1, B_2 \subseteq A_{ij}$, con B_1, B_2 , consideriamo $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 0}$ successioni in $\mathbb{R} \setminus \Delta S_i$ e $\mathbb{R} \setminus \Delta S_j$ rispettivamente, che tendono a 0.

Definendo $v_0 := (r, b_0)$, $v_{2k+1} := (a_k, b_k)$ e $v_{2k+2} := (a_k, b_{k+1})$, si ha che il cammino:

$$\begin{aligned}\gamma|_{[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]}(t) &:= tv_k + (1-t)v_{k+1} \quad \forall k \geq 0 \\ \gamma(0) &:= 0\end{aligned}$$

estrica B_1 e B_2 .

Per dimostrarlo, osserviamo che $\gamma_1(B_2) = B_2 + (r, b_0, 0, \dots, 0)$, che si trova strettamente a destra di B_1 per la scelta di r , e $\gamma_t(B_2) \cap B_1 = \emptyset$ per ogni $t \in [0, 1]$, poiché ogni punto in $\gamma_t(B_2)$ ha almeno una componente in uno tra S_i e S_j , e non può, di conseguenza, intersecare A_{ij} .

Si ha quindi che $[B_1 \cup B_2]_G = [B_1 \cup \gamma_1(B_2)]_G = [B_1]_G + [B_2]_G$ e la prova è conclusa. □

Si vede in particolare un utilizzo interessante, e diverso dal caso classico del paradosso, dell'assioma della scelta. Infatti, se nel capitolo precedente lo abbiamo utilizzato solo per costruire una decomposizione paradossale, qui ci ha anche permesso di costruire un "movimento" paradossale.

4.4 Il paradosso continuo

A questo punto, è facile trarre le conclusioni. In particolare:

Teorema 4.4.1. *Sia $n \geq 3$, $G \leq Iso(\mathbb{R}^n)$ connesso per archi e contenente tutte le traslazioni nelle prime due coordinate. Allora, comunque presi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ G -equiscomponibili, questi sono G -equiscomponibili in modo continuo.*

Dimostrazione. Se le partizioni $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ rispettivamente di A e B , con $g_1, \dots, g_m \in G$, realizzano $A \sim_G B$, possiamo scegliere cammini in G da e in g_i . Si ha quindi: $[A] = [\bigcup_i A_i] = \sum_i [A_i] = \sum_i [B_i] = [\bigcup_i B_i] = [B]$. □

E concludiamo con il paradosso continuo, ricordando che $Iso^+(\mathbb{R}^n)$ soddisfa le ipotesi del Teorema 4.4.1.

Teorema 4.4.2. *Due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitati e con parte interna non vuota sono $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^n)$ -equiscomponibili in modo continuo.*

Bibliografia

- [1] Wagon Stan, Tomkowicz Grzegorz, *The Banach-Tarski Paradox*, Encyclopedia of mathematics and its applications, 1985.
- [2] Capomagi Gemma, *Il Paradosso di Banach-Tarski e i gruppi amenabili*, Bologna, 2018.
- [3] Wang Xuan, *Dividing the Indivisible: A Comprehensive Analysis of the Banach-Tarski Paradox*, 2024.
- [4] Kaseorg Anders, *The Banach-Tarski Paradox*, 2007.
- [5] Wilson Trevor M., *A Continuous Movement Version of the Banach-Tarski Paradox: A Solution to de Groot's Problem*, Association for Symbolic Logic, 2005.