Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

(CO)OMOLOGIA DI GRUPPI ED IL TEOREMA DI SCHUR-ZASSENHAUS

Tesi di Laurea in teoria dei gruppi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MOCI

Presentata da:
JACOPO ELEFANTE

Correlatore:
Chiar.ma Dott.
MARTINA COSTA CESARI

Anno Accademico 2023-2024

A mia madre,
grazie di tutto.

Indice

Introduzione

La coomologia dei gruppi è uno strumento fondamentale nella matematica moderna, con applicazioni che spaziano dalla topologia alla teoria dei numeri, passando per la geometria algebrica e la teoria delle rappresentazioni. Essa fornisce un ponte tra l'algebra e la topologia, permettendo di studiare proprietà algebriche di gruppi attraverso metodi topologici e viceversa. La coomologia dei gruppi, in particolare, è stata utilizzata per risolvere problemi profondi nella teoria dei gruppi, come la classificazione delle estensioni di gruppi e lo studio delle azioni di gruppi su moduli.

La storia della coomologia dei gruppi affonda le sue radici nei lavori pionieristici di **Issai Schur** e **Reinhold Baer**. Nel 1904, col suo articolo [Sch04], Schur introdusse il **moltiplicatore di Schur**, un gruppo che oggi sappiamo essere isomorfo al secondo gruppo di omologia di G a coefficienti in $\mathbb{Z}$, cioè $H_2(G, \mathbb{Z})$. Questo lavoro fu uno dei primi a collegare la teoria dei gruppi con l'omologia, aprendo la strada a una comprensione più profonda delle estensioni di gruppi e delle loro proprietà algebriche. Schur dimostrò che il moltiplicatore di Schur è un invariante importante per lo studio delle estensioni centrali di gruppi, ovvero quelle estensioni il cui nucleo è centrale.

Nel 1934, col suo articolo [Bae34], **Reinhold Baer** approfondì ulteriormente lo studio delle estensioni di gruppi, introducendo una classificazione delle estensioni di un gruppo G mediante un modulo $A_\star$. Baer dimostrò che le classi di equivalenza delle estensioni di G con nucleo A ed azione fissata $G \overset{\star}{\curvearrowright} A$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del gruppo di coomologia $H^2(G, A_\star)$. Questo risultato, noto come **teorema di Baer** 3.1.8, dimostrò la potenza della coomologia di gruppi nella classificazione di strutture algebriche complesse. Baer, inoltre, introdusse il concetto di **somma di Baer** 3.2.1, un'operazione che permette di combinare due estensioni di gruppi per ottenerne una nuova in cui, mostrò che questa operazione è ben definita sulle classi di isomorfismo delle estensioni e che si comporta bene con la corrispondenza che aveva costruito tra $H^2(G, A)$ e le estensioni, cioè

$$\sigma(E_1 +_{Baer} E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2).$$

Il lavoro di Schur e Baer ha gettato le basi per lo sviluppo della coomologia dei gruppi come disciplina autonoma. Negli anni '40, **Samuel Eilenberg** e **Saunders MacLane**, in una serie di articoli [EM45], [EM47], [EM53], formalizzarono ulteriormente questi concetti, introducendo una definizione algebrica generale della coomologia dei gruppi mediante i funtori **Ext** e **Tor**. Questo approccio algebrico permise di generalizzare i risultati di Schur e Baer, estendendoli a contesti più ampi e fornendo uno strumento potente per lo studio delle proprietà omologiche dei gruppi.

In questo elaborato, ci proponiamo di esplorare la coomologia dei gruppi attraverso un approccio algebrico, partendo dalle basi dell'algebra omologica per arrivare ai risultati di Baer e una loro applicazione alla teoria dei gruppi: il **teorema di Schur-Zassenhaus** 4.1.1, un risultato fondamentale nella teoria dei gruppi che stabilisce condizioni sufficienti per l'esistenza di complementi in un'estensione di gruppi. Questo teorema, che unisce i

contributi di Schur e Zassenhaus, è un esempio emblematico di come la coomologia dei gruppi possa essere utilizzata per risolvere problemi concreti nella teoria dei gruppi. Di seguito riportiamo una versione del teorema di Schur-Zassenhaus enunciata senza l'uso della coomologia.

Teorema (Teorema di Schur-Zassenhaus)**.** *Sia G un gruppo finito e sia N un sottogruppo normale di G tale che $(|N|, |G/N|) = 1$. Allora:*

1. *Esiste un sottogruppo H di G tale che $G = N \rtimes H$ (dove $\rtimes$ indica il prodotto semidiretto);*
2. *Tutti i complementi di N in G sono coniugati, ovvero se H_1 e H_2 sono due sottogruppi di G tali che $G = N \rtimes H_1$ e $G = N \rtimes H_2$, allora esiste un elemento $n \in N$ tale che $H_2 = nH_1n^{-1}$.*

Appendice A: Risultati Preliminari Nell'appendice presenteremo alcuni strumenti preliminari necessari per lo sviluppo della teoria. In particolare, tratteremo le successioni esatte, i funtori esatti, i moduli proiettivi, i moduli piatti e i moduli finitamente generati. si fa riferimento a [Wei94, Cp. 1] per le successioni esatte e a [Rot02, Cp. 7] per i moduli proiettivi.

Capitolo 1: Algebra Omologica Nel primo capitolo vedremo le basi dell'algebra omologica, introducendo i complessi di catene e di cocatene, le risoluzioni proiettive e i funtori derivati. Definiremo i concetti di omologia e coomologia, e dimostreremo alcune risultati fondamentali. Per la trattazione di questi argomenti ho seguito [Wei94, Cp. 1, 2, 3], [Rot02, Cp. 10] e [Rot08].

Capitolo 2: (Co)Omologia di Gruppi Nel secondo capitolo applicheremo i concetti dell'algebra omologica alla teoria dei gruppi, definendo l'omologia e la coomologia di gruppi attraverso i funtori Tor e Ext. Faremo riferimento a [GS06, Cp. 3] e a [Rot02, Cp. 10] per la trattazione dell'omologia e coomologia di gruppi. Introdurremo la risoluzione standard per caratterizzare i gruppi di coomologia di grado piccolo e calcoleremo tutti i gruppi di coomologia per gruppi ciclici. Inoltre, esploreremo le operazioni di restrizione e transfer, che ci permetteranno di studiare le relazioni tra sottogruppi e i loro gruppi di coomologia.

Capitolo 3: Estensioni Nel terzo capitolo investigheremo le estensioni di gruppi, con particolare attenzione alle estensioni con nucleo abeliano. Faremo riferimento a [Rot08, Cp. 9] per lo studio delle estensioni e a [Jac09, Cp. 6] per le relazioni tra H^1, H^2 e le estensioni. Dimostreremo come i gruppi di coomologia H^1 e H^2 siano strettamente legati alla classificazione delle estensioni di gruppi, utilizzando il teorema di Baer. Inoltre, introdurremo la somma di Baer, un'operazione che combina estensioni di gruppi e che rispetta la struttura di H^2.

Capitolo 4: Applicazioni Nel quarto capitolo applicheremo i risultati teorici ottenuti nei capitoli precedenti per dimostrare il teorema di Schur-Zassenhaus, un risultato fondamentale nella teoria dei gruppi che fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di complementi in un'estensione di gruppi. Discuteremo inoltre alcune proprietà degli ordini dei gruppi di coomologia e le loro implicazioni nella teoria delle estensioni.

Capitolo 1

Algebra omologica

In questo capitolo tratteremo alcune strutture e proprietà elementari dell'algebra omologica. Questi risultati saranno fondamentali per affrontare il caso particolare dell'**omologia di gruppi**.

1.1 Complessi di catene

Definizione 1.1.1 (Complesso di catene)**.** Sia R un **anello**, allora un **complesso di catene** (o semplicemente **complesso**) di R-moduli è una successione

$$(C_\bullet, d_\bullet) = \left(\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \right)$$

Dove per ogni $n \in \mathbb{N}$

- C_n è un R-modulo;
- $d_n \in \mathrm{Hom}(C_n, C_{n-1})$ dove $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

In generale quando non c'è ambiguità scriveremo $C_\bullet$ per indicare un **complesso** $(C_\bullet, d_\bullet)$. In questo contesto diremo che

- n è il **grado** dell'R-modulo C_n;
- d_n è la **mappa differenziale** di grado n;
- Per semplicità spesso si ometteranno gli indici per la mappa differenziale d e la condizione $d_n \circ d_{n+1} = 0$ può essere scritta sinteticamente come $d^2 = 0$.

Esempio 1.1.2. la catena

$$0_\bullet := \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dove tutti gli R-moduli sono banali e la mappa di derivazione è la mappa nulla, è un complesso di catene.

Definizione 1.1.3 (Morfismi di complessi)**.** Un **morfismo di complessi** (o **morfismo di catene**) tra due **complessi di catene** $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ viene indicato con $\varphi_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ ed è il dato di una famiglia di mappe $\varphi_n : C_n \to C'_n$, tali che il seguente diagramma sia commutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & C'_n & \xrightarrow[d'_n]{} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Definizione 1.1.4 (Sottocomplesso di catene)**.** Un **sottocomplesso** per un complesso di catene $(C_\bullet, d_\bullet)$ è un un complesso $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ dove

- C'_n è un sottomodulo di C_n tale che $d_n(C'_n) \subseteq C'_{n-1}$;
- $d'_n = d_n|_{C'_n}$.

In tal caso l'inclusione $C'_\bullet \hookrightarrow C_\bullet$ data dalle mappe $C'_n \hookrightarrow C_n$ diventa un morfismo di complessi.

Definizione 1.1.5 (Complesso quoziente)**.** Sia $C'_\bullet$ un sottocomplesso di $C_\bullet$ allora il **complesso di catene quoziente** $C_\bullet/C'_\bullet$ è il dato di

- R-moduli C_n/C'_n;
- mappe differenziali $\widehat{d_n}$ definite tramite la proprietà universale del quoziente, cioè sono le uniche mappe che fanno commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n/C'_n & \xrightarrow[\widehat{d_n}]{} & C_{n-1}/C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

  dove le mappe π_n[1] sono le proiezioni al quoziente.

Definizione 1.1.6. Siano $C_\bullet, D_\bullet$ due complessi di catene e $\varphi_\bullet$ un morfismo di complessi, allora definiamo

- **il nucleo di** $\varphi_\bullet$ come il sottocomplesso $\ker \phi_\bullet := (\ker \phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$;
- **l'immagine di** $\varphi_\bullet$ come il sottocomplesso $\operatorname{Im} \varphi_\bullet := (\operatorname{Im} \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$;
- **il conucleo di** $\varphi_\bullet$ come il complesso quoziente $D_\bullet / \operatorname{Im} \varphi_\bullet = (\operatorname{coker} \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.1.1 Omologia

Definizione 1.1.7 (Omologia)**.** Sia $(C_\bullet, d_\bullet)$ un complesso di catene allora definiamo per ogni $n \in \mathbb{Z}$

- un n**-ciclo** come un elemento di $Z_n(C_\bullet) := \ker d_n$;
- un n**-bordo** come un elemento di $B_n(C_\bullet) := \operatorname{Im} d_{n+1}$;
- il **modulo di omologia di grado** n su $C_\bullet$ come $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.

[1] È evidente da questa definizione che $\pi_\bullet$ è un morfismo di complessi di catene.

Osserviamo che il modulo $H_n(C_\bullet)$ è sempre ben definito perché $B_n \subseteq Z_n$ per definizione di complesso di catene, infatti $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Proposizione 1.1.8. *È possibile dare ad $H_\bullet$ una struttura di funtore tra la categoria dei complessi di catene e la categoria degli R-moduli sinistri. Questa struttura è descritta come segue:*

- *se $C_\bullet$ è un complesso di catene, allora $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$;*
- *se $\varphi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (D_\bullet, d'_\bullet)$ è un morfismo di complessi allora*

$$\begin{aligned} H_n(\varphi_\bullet) : H_n(C_\bullet) &\longrightarrow H_n(D_\bullet) \\ z + B_n(C_\bullet) &\longmapsto \varphi_n(z) + B_n(D_\bullet) \end{aligned}$$

generalmente la mappa $H_\bullet(\varphi_\bullet)$ è indicata per semplicità con $\varphi_\star$.

Dimostrazione. Mostriamo che la funzione H_n è ben definita: osserviamo che $\varphi_n(Z_n(C_\bullet)) \subseteq Z_n(D_\bullet)$, infatti

$$\Big(d'_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n\Big) \Longrightarrow \Big(\varphi_n(\ker d_n) \subseteq {d'_n}^{-1}(\varphi_{n-1}(0) = \ker d'_n\Big).$$

Allora $H_n(\varphi_\bullet)$ può essere descritto attraverso il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} Z_n(C_\bullet) & \xrightarrow{\varphi_n|_{Z_n(C_\bullet)}} & Z_n(D_\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_D} \\ H_n(C_\bullet) = \dfrac{Z_n(C_\bullet)}{B_n(C_\bullet)} & \xrightarrow[H_n(\varphi_\bullet)]{} & H_n(D_\bullet) = \dfrac{Z_n(D_\bullet)}{B_n(D_\bullet)} \end{array}$$

dove π_C e π_D sono le proiezioni al quoziente. Quindi per mostrare che H_n esiste (unica) ci basta mostrare che $\pi_D \circ \varphi_n$ è costante sulle classi. Dalla definizione di morfismo di catene abbiamo che $\varphi_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = d'_n \circ \varphi_n \circ d'_{n+1}$ e per definizione di complesso di catene $d_n \circ d_{n+1} = 0$ quindi

$$\Big(0 = \varphi_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = d'_n \circ \varphi_n \circ d'_{n+1}\Big) \Longrightarrow \Big(\varphi_n(B_n(C_\bullet)) \subseteq B_n(D_\bullet)\Big)$$

per cui H_n è ben definita.

Rimane solo da mostrare che H_n si comporta come morfismo di gruppi tra i gruppi dei morfismi delle due categorie, cioè $H_n(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet) = H_n(\psi_\bullet) \circ H_n(\varphi_\bullet)$. Questo segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc} Z_n(C_\bullet) & \xrightarrow{\varphi_n|_{Z_n(C_\bullet)}} & Z_n(D_\bullet) & \xrightarrow{\psi_n|_{Z_n(D_\bullet)}} & Z_n(E_\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_D} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{H_n(\varphi_\bullet)} & H_n(D_\bullet) & \xrightarrow{H_n(\psi_\bullet)} & H_n(E_\bullet) \\ & & & \searrow^{H_n(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet)} & \end{array}$$

■

Osservazione 1.1.9. Da un punto di vista intuitivo si dice che il funtore H_n misura quanto la catena $C_\bullet$ non è esatta come successione di moduli.

Definizione 1.1.10 (Successione corta di complessi esatta in $D_\bullet$)**.** Siano $C_\bullet, D_\bullet, E_\bullet$ complessi di catene e $\varphi_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$, $\psi : D_\bullet \longrightarrow E_\bullet$ due morfismi di complessi di catene, allora la **successione corta** $C_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} D_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} E_\bullet$ si dice **esatta** in $D_\bullet$ se $\operatorname{Im}\varphi_\bullet = \ker\psi_\bullet$.

Osservazione 1.1.11. Una successione corta di complessi di catene $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet$ è esatta in $D_\bullet$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ le successioni corte $C_n \xrightarrow{\varphi_n} D_n \xrightarrow{\psi_n} E_n$ sono esatte in D_n.

Definizione 1.1.12 (Successione esatta di complessi di catene)**.** Sia $\left(C_\bullet^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ una famiglia di complessi di catene, $\varphi_\bullet^{(n)} : C_\bullet^{(n)} \longrightarrow C_\bullet^{(n+1)}$ morfismi di complessi di catene. Allora la **successione**

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet^{(n-1)} \xrightarrow{\varphi_\bullet^{(n-1)}} C_\bullet^{(n)} \xrightarrow{\varphi_\bullet^{(n)}} C_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \cdots$$

si dice **esatta** se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la successione corta $C_\bullet^{(n-1)} \xrightarrow{\varphi_\bullet^{(n-1)}} C_\bullet^{(n)} \xrightarrow{\varphi_\bullet^{(n)}} C_\bullet^{(n+1)}$ è esatta in $C_\bullet^{(n)}$.

Teorema 1.1.13. *Sia* $0_\bullet \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} D_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} E_\bullet \longrightarrow 0_\bullet$ *una successione esatta corta di complessi di catene, allora esiste una successione esatta lunga di moduli*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \cdots \\
 & & & & \downarrow \\
H_{n+1}(E_\bullet) & \xleftarrow[\psi_{\star n+1}]{} & H_{n+1}(D_\bullet) & \xleftarrow[\varphi_{\star n+1}]{} & H_{n+1}(C_\bullet) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} & & & & \\
H_n(C_\bullet) & \xrightarrow[\varphi_{\star n}]{} & H_n(D_\bullet) & \xrightarrow[\psi_{\star n}]{} & H_n(E_\bullet) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n} \\
H_{n-1}(E_\bullet) & \xleftarrow[\psi_{\star n-1}]{} & H_{n-1}(D_\bullet) & \xleftarrow[\varphi_{\star n-1}]{} & H_{n-1}(C_\bullet) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_{n-1}} & & & & \\
\cdots & & & &
\end{array}$$

dove la mappa $\delta_n : H_n(E_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C_\bullet)$ *è un omomorfismo di R-moduli ed è detta* ***morfismo di connessione*** *(dallo Snake Lemma A.1.5)*

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n & \xrightarrow{\psi_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_n^C} & & \downarrow{\scriptstyle d_n^D} & & \downarrow{\scriptstyle d_n^E} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow[\varphi_{n-1}]{} & D_{n-1} & \xrightarrow[\psi_{n-1}]{} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Come mostrato nello Snake Lemma A.1.5 possiamo costruire le successioni esatta

$$0 \longrightarrow Z_n(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n} Z_n(D_\bullet) \xrightarrow{\psi_n} Z_n(E_\bullet) \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} d_n^C \xrightarrow{\widehat{\varphi_{n-1}}} \operatorname{coker} d_n^D \xrightarrow{\widehat{\psi_{n-1}}} \operatorname{coker} d_n^E \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

con $\widehat{\varphi_n}$ e $\widehat{\psi_n}$ i passaggi al quoziente delle mappe φ, ψ. Fissiamo n e consideriamo la successione (1.1) con indice $n-1$ e la successione (1.2) con indice $n+1$, quindi costruiamo il diagramma commutativo che segue

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} d^C_{n+1} & \xrightarrow{\widehat{\varphi_n}} & \operatorname{coker} d^D_{n+1} & \xrightarrow{\widehat{\psi_n}} & \operatorname{coker} d^E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{d^C_n}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{d^D_n}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{d^E_n}} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(C_\bullet) & \xrightarrow[\varphi_{n-1}]{} & Z_{n-1}(D_\bullet) & \xrightarrow[\psi_{n-1}]{} & Z_{n-1}(E_\bullet) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove $\widehat{d^C_n}, \widehat{d^D_n}, \widehat{d^E_n}$ sono i passaggi al quoziente delle mappe d^C_n, d^D_n, d^E_n che esistono per la proprietà fondamentale dei complessi di catene secondo cui $d_{n+1} \circ d_n = 0$, $d_n \circ d_{n-1} = 0$.

Allora per lo Snake Lemma A.1.5 abbiamo che esiste un **morfismo di connessione**

$$\delta_n : \ker \widehat{d^E_n} \longrightarrow \operatorname{coker} \widehat{d^C_n}.$$

Osserviamo che

$$\ker \widehat{d^E_n} = Z_n(E_\bullet)/B_n(E_\bullet) = H_n(E_\bullet)$$
$$\operatorname{coker} \widehat{d^C_n} = Z_{n-1}(C_\bullet)/B_{n-1}(C_\bullet) = H_{n-1}(C_\bullet)$$

Per cui la successione ottenuta usando lo Snake Lemma è esattamente la successione cercata. ■

1.1.2 Omotopia di complessi di catene

In questa sezione definiremo una relazione di equivalenza sui **complessi di catene** e sui **morfismi di complessi** che ci consenta di lasciare invariata l'Omologia. Chiameremo questa relazione **equivalenza omotopica** per coerenza con l'omotopia **topologica** che ha anch'essa la proprietà di lasciare invariata l'omologia, ma in un contesto topologico.

Definizione 1.1.14 (Omotopia di complessi di catene)**.** Siano $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet, d'_\bullet)$ due morfismi di complessi di catene, diremo che essi sono **omotopi** (o **omotopicamente equivalenti**), se esiste una famiglia di morfismi di R-moduli $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ per $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\varphi_n - \psi_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

come illustrato nel seguente diagramma (che non è commutativo).

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}-\psi_{n+1}} & \swarrow{\scriptstyle s_n} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n-\psi_n} & \swarrow{\scriptstyle s_{n-1}} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}-\psi_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & D_n & \xrightarrow[d'_n]{} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

In tal caso scriveremo $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$, diremo che $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una **contrazione di complessi di catene** e che $\varphi_\bullet - \psi_\bullet$ è **contraibile**.

Infine diremo che $C_\bullet$ e $D_\bullet$ sono **omotopi** (o **omotopicmanete equivalenti**) se esistono $\varphi_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$, $\psi_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ tali che $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet \sim \mathrm{id}_{D_\bullet}$ e $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet \sim \mathrm{id}_{C_\bullet}$.

Esempio 1.1.15. Sia $C_\bullet$ un **complesso di catene** di K-moduli con K un campo, allora C_n è uno **spazio vettoriale** per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
Osserviamo che siccome gli spazi vettoriali sono semisemplici, allora esistono $B'_n \cong B_{n-1}, H'_n \cong H_n$ tali che

$$C_n = Z_n \oplus B'_n \qquad\qquad Z_n = B_n \oplus H'_n$$

Allora consideriamo la mappa s_n così definita

$$C_n \twoheadrightarrow Z_n \longrightarrow B_n \hookrightarrow C_{n+1}/Z_{n+1} \hookrightarrow B'_{n+1} \subseteq C_{n+1}$$
$$\overset{\qquad\qquad\qquad\qquad s_n \qquad\qquad\qquad\qquad}{\curvearrowright}$$

quindi $d_n = d_n \circ s_{n-1} \circ d_n$ allora $s_{n-1} \circ d_n$ è la proiezione su B'_n e $d_{n+1} \circ s_n$ è la proiezione su B_n e quindi la mappa $\varphi_n := s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n$ è un endomorfismo di C_n (questo morfismo è l'identità se e solo se $C_\bullet$ è una successione esatta).

Questa mappa è omotopa alla mappa nulla per definizione di omotopia ed in particolare abbiamo mostrato che questo complesso è una successione esatta se e solo se l'identità è omotopa alla mappa nulla.

Proposizione 1.1.16. *Siano $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet, d'_\bullet)$ due morfismi di complessi di catene tra loro **omotopi**, allora $H_\bullet(\varphi_\bullet) = H_\bullet(\psi_\bullet)$. Inoltre se $C_\bullet$ e $D_\bullet$ sono tra loro **omotopi** allora $H_n(C_\bullet) \cong H_n(D_\bullet)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in Z_n(C_\bullet)$ allora

$$(\varphi_n - \psi)_n(z) = \underbrace{d'_{n+1} \circ s_n(z)}_{\in B_n(D_\bullet)} + s_{n-1} \circ \underbrace{d_n(z)}_{=0} \in B_n(D_\bullet).$$

Quindi $H_n(\varphi_\bullet)(z) - H_n(\psi_\bullet)(z) = 0$. ■

Osservazione 1.1.17. Siano $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ due morfismi **omotopi** tramite la contrazione $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e siano dati $\alpha : B_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ e $\beta : D_\bullet \longrightarrow E_\bullet$ due morfismi di complessi di catene. Quindi

$$\beta_\bullet \circ \varphi_\bullet \circ \alpha_\bullet \sim \beta_\bullet \circ \psi_\bullet \circ \alpha_\bullet,$$

tramite la contrazione $(\beta_n \circ s_n \circ \alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.2 Complessi di cocatene

In questa sezione, studieremo i complessi di cocatene e la loro coomologia. I risultati che otterremo sono analoghi a quelli visti nella sezione sui complessi di catene.

Definizione 1.2.1 (Complesso di cocatene)**.** Sia R un **anello**, allora un **complesso di cocatene** di R-moduli è una successione

$$(C^\bullet, d^\bullet) = \left(\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots \right)$$

Dove per ogni $n \in \mathbb{N}$

- C^n è un R-modulo;
- $d^n \in \mathrm{Hom}(C^n, C^{n+1})$ dove $d^n \circ d^{n-1}$.

Osservazione 1.2.2. Come per i complessi di catene si definiscono i morfismi di complessi di cocatene, i sottocomplessi di cocatene, i complessi di cocatene quoziente, le successioni esatte di complessi di cocatene in modo del tutto analogo.

Definizione 1.2.3 (Coomologia)**.** Sia $(C^\bullet, d^\bullet)$ un complesso di cocatene allora definiamo per ogni $n \in \mathbb{Z}$

- un n**-cociclo** come un elemento di $Z^n(C^\bullet) := \ker d^n$;
- un n**-cobordo** come un elemento di $B^n(C^\bullet) := \operatorname{Im} d^{n-1}$;
- il **modulo di coomologia di grado** n su $C^\bullet$ come $H^n(C_\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$.

Osserviamo che il modulo $H^n(C^\bullet)$ è sempre ben definito perché $B^n \subseteq Z^n$ per definizione di complesso di cocatene, infatti $d^n \circ d^{n-1} = 0$

Proposizione 1.2.4. *È possibile dare ad $H^\bullet$ una struttura di funtore tra la categoria dei complessi di cocatene e la categoria degli R-moduli sinistri. Questa struttura è descritta come segue: se $\varphi^\bullet : (C^\bullet, d^\bullet) \to (D^\bullet, d'^\bullet)$ è un morfismo di complessi di cocatene allora*

$$\begin{aligned} H^n(\varphi) : H^n(C^\bullet) &\longrightarrow H^n(D^\bullet) \\ z + B^n(C^\bullet) &\longmapsto \varphi^n(z) + B^n(D^\bullet) \end{aligned}$$

generalmente la mappa $H^\bullet(\varphi^\bullet)$ è indicata per semplicità con $\varphi^\star$.

Teorema 1.2.5. *Sia $0^\bullet \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{\varphi^\bullet} D^\bullet \xrightarrow{\psi^\bullet} E^\bullet \longrightarrow 0^\bullet$ una successione esatta corta di complessi di cocatene, allora esiste una successione esatta lunga di moduli*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \cdots \\ & & & & \downarrow \\ H^{n-1}(E^\bullet) & \xleftarrow[\psi^{\star n-1}]{} & H^{n-1}(D^\bullet) & \xleftarrow[\varphi^{\star n-1}]{} & H^{n-1}(C^\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^{n-1}} & & & & \\ H^n(C^\bullet) & \xrightarrow[\varphi^{\star n}]{} & H^n(D^\bullet) & \xrightarrow[\psi^{\star n}]{} & H^n(E^\bullet) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta^n} \\ H^{n-1}(E^\bullet) & \xleftarrow[\psi^{\star n+1}]{} & H^{n-1}(D^\bullet) & \xleftarrow[\varphi^{\star n+1}]{} & H^{n-1}(C^\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^{n+1}} & & & & \\ \cdots & & & & \end{array}$$

dove la mappa $\delta^n : H^n(E^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(C^\bullet)$ è un omomorfismo di R-moduli ed è detta ***morfismo di connessione****.*

1.3 Risoluzioni proiettive

Definizione 1.3.1 (Risoluzione proiettiva)**.** Sia dato M un R-modulo, allora si dice **risoluzione proiettiva** per M un complesso di catene

$$(P_\bullet, d_\bullet) = (\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$$

che è una **successione esatta**, P_n è un **modulo proiettivo** per ogni $n \in \mathbb{N}$ e infine $P_0/\operatorname{Im} d_1 \cong M$.
Quindi possiamo costruire la **risoluzione proiettiva aumentata**

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

dove $\pi : P_0 \twoheadrightarrow M = P_0/\operatorname{Im} d_1$ è la proiezione al quoziente.
In generale per indicare una risoluzione proiettvia $P_\bullet$ su M scriveremo $P_\bullet \twoheadrightarrow M$.
Inoltre se P_n è libero per ogni $n \in \mathbb{N}$ diremo che questa è una **risoluzione libera**.

Osservazione 1.3.2. Si osserva che se $P_\bullet \xrightarrow{\pi} M$ è una risoluzione proiettiva (ma più in generale è sufficiente che sia una successione esatta) allora $H_0(P_0) = P_0/\operatorname{Im} d_1 = P_0/\ker \pi \cong M$. Inoltre se $Q_\bullet \xrightarrow{\pi'} N$ è una risoluzione proiettiva e $\varphi_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ è un morfismo di catene, allora $H_0(\varphi_\bullet) = \widehat{\varphi_0}$ dove $\widehat{\varphi_0}$ è il passaggio al quoziente della mappa φ_0 rispetto alle proiezioni π, π', cioè fa commutare il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\pi} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\varphi_0}} \\ Q_0 & \xrightarrow{\pi'} & N \end{array}$$

Esempio 1.3.3. Sia $M := \mathbb{Z}_{/n}$ uno $\mathbb{Z}$-modulo, allora esso ammette risoluzione libera

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_n} \mathbb{Z}$$

dove μ_n è la moltiplicazione per n, infatti questi sono tutti moduli liberi con base $\{1\}$, la successione è evidentemente esatta e $\mathbb{Z}/\operatorname{Im} \mu_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{/n}$.

Proposizione 1.3.4 (Esistenza della risoluzione libera)**.** *Ogni R-modulo ammette* ***risoluzione proiettiva*** *e più in particolare ammette anche una* ***risoluzione libera****.*

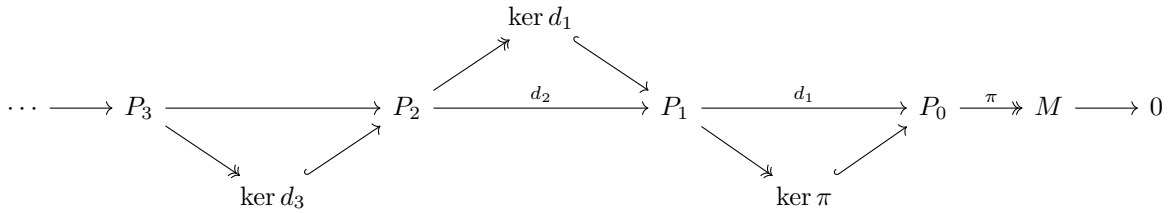


Figura 1.1: Costruzione di una risoluzione libera

Dimostrazione. Sia M un R-modulo, sappiamo che esiste P_0 **modulo libero** e $\pi : P_0 \twoheadrightarrow M$ proiezione al quoziente (vedi A.3.4).
Allo stesso modo costruisco P_1 modulo libero tale che $d_1 : P_1 \twoheadrightarrow \ker \pi \subseteq P_0$ sia una proiezione al quoziente, procedendo in questo modo costruisco il diagramma (1.1) da cui abbiamo proprio la successione esatta cercata. ∎

Teorema 1.3.5 (Del sollevamento)**.** *Sia dato il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{b_n} & B_1 & \xrightarrow{b_1} & B_0 & \xrightarrow{b_0} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*con $(P_\bullet, d_\bullet)$ una **risoluzione proiettiva** per M e $(B_\bullet, b_\bullet)$ una successione esatta in ogni B_n con $n \in \mathbb{N}$.*
Allora, se α è una mappa R-lineare, esiste $\alpha_\bullet : P_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ un morfismo di complessi di catene con la proprietà aggiuntiva che $\alpha \circ \pi = b_0 \circ \alpha_0$, cioè il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{b_2} & B_1 & \xrightarrow{b_1} & B_0 & \xrightarrow{b_0} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Inoltre questo morfismo di complessi è **unico a meno di omotopia**.*

Dimostrazione. Siccome P_0 è un R-modulo proiettivo e $b_0 : B_0 \longrightarrow B$ è suriettiva, esiste $\alpha_0 : P_0 \longrightarrow B_0$ tale che $\alpha \circ \pi = b_0 \circ \alpha_0$. Osserviamo che $b_0 \circ \alpha_0 \circ d_1 = \alpha \circ \pi \circ d_1 = 0$, allora $\operatorname{Im} \alpha_0 \circ d_1 \subseteq \ker b_0$. Consideriamo la mappa suriettiva $b_1 : B_1 \twoheadrightarrow \operatorname{Im} b_1 = \ker b_0$ e allora, siccome P_1 è proiettivo, esiste $\alpha_1 : P_1 \longrightarrow B_1$ tale che $b_1 \circ \alpha_1 = \alpha_0 \circ d_1$. Procedo in questo modo per i P_n successivi e costruisco $\alpha_\bullet$ cercato.

Rimane da mostrare l'unicità a meno di omotopia. Siano $\varphi_\bullet$, $\psi_\bullet$ due sollevamenti della mappa $\alpha : M \longrightarrow B$, allora consideriamo $\sigma_\bullet := \varphi_\bullet - \psi_\bullet$. Vogliamo mostrare che σ è **contraibile**, cioè $\sigma_\bullet \sim 0$, osserviamo che

$$H_0(\sigma_\bullet) = H_0(\varphi_\bullet - \psi_\bullet) = H_0(\varphi_\bullet) - H_0(\psi_\bullet) = \alpha - \alpha = 0$$

Quindi possiamo guardare σ come un sollevamento dello 0 e vogliamo mostrare che essa è contraibile, per fare ciò dobbiamo costruire una **contrazione** $(s_n)_n$.
Consideriamo $s_{-1}, s_{-2} = 0$ che rispettano l'ipotesi $s_{-2} \circ 0 = b_0 \circ s_{-1}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & \swarrow{\scriptstyle s_0} & \downarrow{\scriptstyle \sigma_0} & \swarrow{\scriptstyle s_{-1}} & \downarrow{\scriptstyle 0} & \swarrow{\scriptstyle s_{-2}} & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow[b_1]{} & B_0 & \xrightarrow[b_0]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Osserviamo che

$$b_0 \circ (\sigma_0 - s_{-1} \circ \pi) = b_0 \circ \sigma_0 - b_0 \circ s_{-1} \circ \pi = 0$$

allora $\operatorname{Im}(\sigma_0 - s_{-1} \circ \pi) \subseteq \ker b_0 = \operatorname{Im} b_1$ e siccome b_1 è suriettiva rispetto alla sua immagine, per proiettività di P_0, possiamo costruire s_0 tale che $b_1 \circ s_0 = \sigma_0 - s_{-1} \circ \pi$.
Procediamo allo stesso modo per costruire gli s_n successivi: assumiamo di aver già costruito i primi $n-1$, allora

$$\begin{aligned} b_n \circ (\sigma_n - s_{n-1} \circ d_n) &= b_n \circ \sigma_n - b_n \circ s_{n-1} \circ d_n && (1.3) \\ &= b_n \circ \sigma_n - \sigma_{n-1} \circ d_n && (1.4) \\ &= \sigma_{n-1} \circ d_m - \sigma_{n-1} \circ d_n = 0 && (1.5) \end{aligned}$$

dove (1.4) è dovuto al fatto che

$$b_n \circ s_{n-1} + s_{n-2} \circ d_{n-1} = \sigma_{n-1} \Longrightarrow b_n \circ s_{n-1} \circ d_n = \sigma_{n-1} \circ d_n$$

quindi $\mathrm{Im}(\sigma_n - s_{n-1} \circ d_n) \subseteq \ker b_n = \mathrm{Im}\, b_{n-1}$, per cui come prima, siccome P_n è proiettivo, possiamo costruire s_n. ■

Corollario 1.3.6. *Siano M un R-modulo, $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M$,$Q_\bullet \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} M$ due risoluzioni proiettive per M. Allora $P_\bullet \sim Q_\bullet$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\varphi : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$, $\psi : Q_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ sollevamenti di id_M. Quindi consideriamo la mappe $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : P_\bullet \longrightarrow P_\bullet$, osserviamo che

$$H_0(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet) = H_0(\psi_\bullet) \circ H_0(\varphi_\bullet) = \mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$$

quindi il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1\circ\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0\circ\varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow[\pi']{} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

poiché id_M è il passaggio al quoziente della mappa $\psi_0 \circ \varphi_0$. Quindi $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : P_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ è un sollevamento di id_M, ma anche $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ ne è un sollevamento, quindi $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet \sim \mathrm{id}_{P_\bullet}$.
Si può ripetere lo stesso ragionamento su $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet : Q_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ per avere $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet \sim \mathrm{id}_{Q_\bullet}$. ■

Lemma 1.3.7 (Horseshoe lemma)**.** *Sia $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una successione esatta di R-moduli. Siano $P'_\bullet \overset{\varepsilon'}{\to} M'$ una risoluzione proiettiva di M' e $P''_\bullet \overset{\varepsilon''}{\longrightarrow} M''$ una risoluzione proiettiva di M'', come illustrato in figura (1.3.7).*

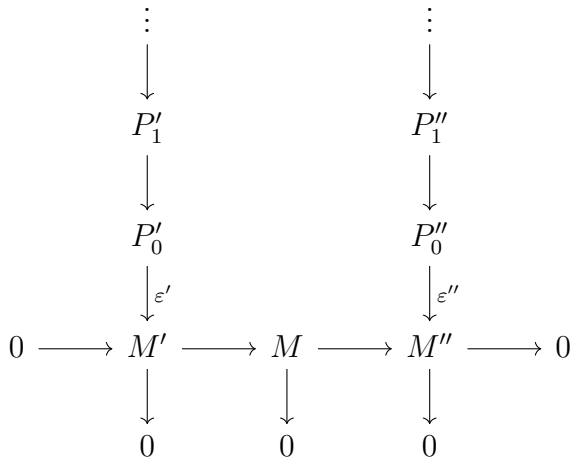


Figura 1.2: Horseshoe Lemma

Allora, esiste una risoluzione proiettiva $P_\bullet \overset{\varepsilon}{\to} M$ di M tale che $P_n \cong P'_n \oplus P''_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Inoltre, la successione esatta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ si solleva a una successione esatta di complessi di catene $0_\bullet \to P'_\bullet \overset{i_\bullet}{\to} P_\bullet \overset{\pi_\bullet}{\to} P''_\bullet \to 0$, dove $i_\bullet$ e $\pi_\bullet$ sono rispettivamente l'iniezione e la proiezione canoniche rispetto alla somma diretta.

Dimostrazione. Vedi [Wei94, Cp. 2, pg. 37] ■

1.4 Funtori derivati sinistri

Ora trattiamo alcuni funtori fondamentali Ext, Tor la cui costruzione è riconducibile alla seguente idea generale.

Definizione 1.4.1 (Funtore derivato sinistro)**.** Sia $T : {}_R\mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{A}b = {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}od$ un **funtore covariante** esatto **a destra** (o **controvariante** esatto **a sinsitra**[2]) verso la categoria dei gruppi abeliani, allora definiamo il **funtore derivato sinistro** L_nT come segue

- Se M è un R-modulo consideriamo $P_\bullet \twoheadrightarrow M$ una **risoluzione proiettiva** per M e $TP_\bullet$ il **complesso di catene**[3] ottenuto applicando il funotre T (se T è controvariante avrò un complesso di cocatene), a questo punto definiamo $L_nT(M) := H_n(TP_\bullet)$;
- se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un morfismo di R-moduli allora consideriamo $\varphi_\bullet$ un sollevamento alla risoluzione proiettvia $P_\bullet$, costruita come nel **teorema del sollevamento**(1.3.5), quindi definiamo $L_nT(\varphi) = H_n(\varphi_\bullet)$.

Osservazione 1.4.2. Il problema della definizione che abbiamo dato è che apparentemente L_nT dipende dalla scelta della risoluzione proiettiva $P_\bullet \twoheadrightarrow M$ e del sollevamento $\varphi_\bullet$, tuttavia è possibile mostrare che a prescindere dalla scelta di questi due oggetti $L_nT(M)$ e $L_nT(\varphi)$ rimangono rispettivamente invariati, quindi l'operatore L_nT è ben definito.

Proposizione 1.4.3. *Il funtore derivato sinitstro $L_nT(M)$ non dipende dalla scelta della risoluzione proiettiva $P_\bullet \twoheadrightarrow M$.*

Dimostrazione. Siano M un R-modulo e $P_\bullet \twoheadrightarrow M$, $Q_\bullet \twoheadrightarrow M$ due risoluzioni proiettive, allora per il **corollario** 1.3.6 del **teorema del sollevamento** 1.3.5 esistono $\varphi_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$, $\psi_\bullet : Q_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ tali che $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet \sim \mathrm{id}_{P_\bullet}$, $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet \sim \mathrm{id}_{Q_\bullet}$. Siccome tramite T trasformiamo le contrazioni in contrazioni avremo che $TP_\bullet \sim TQ_\bullet$ tramite $T\psi_\bullet \circ T\varphi_\bullet \sim \mathrm{id}_{TP_\bullet}$ e $T\varphi_\bullet \circ T\psi_\bullet \sim \mathrm{id}_{TQ_\bullet}$. Per cui avremo che $H_n(TP_\bullet) = H_n(TQ_\bullet)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
Ora consideriamo $f : M \longrightarrow N$, consideriamo $f^1_\bullet, f^2_\bullet$ due sollevamenti di f ottenuti come nel teorema 1.3.5, per l'unicità a meno di omotopia, abbiamo che $f^1_\bullet \sim f^2_\bullet$, cioè esiste una contrazione di $f^1_\bullet - f^2_\bullet$. La trasformazione T manda contrazioni in contrazioni, quindi abbiamo che $Tf^1_\bullet \sim Tf^2_\bullet$ e quindi $H_n(f^1_\bullet) = H_n(f^2_\bullet)$. ■

Definizione 1.4.4 (Tor)**.** Siano M un R-modulo **destro** e $T := M \otimes_R (\cdot)$ un funtore **covariante** (vedi A.2.4), allora $\mathrm{Tor}^R_n := L_nT$, cioè

- se N è un R-modulo e $P_\bullet$ è una sua risoluzione proiettiva, allora $\mathrm{Tor}^R_n(M, N) := H_n(M \otimes_R P_\bullet)$;
- se $\varphi : N \longrightarrow N'$ è un morfismo di R-moduli e $\varphi_\bullet$ è un sollevamento di φ indotto da delle risoluzioni proiettive di N e N', allora $\mathrm{Tor}^R_n(M, \varphi) := H_n(M \otimes \varphi_\bullet)$.

[2]Il caso **controvariante** è del tutto analogo a quello covariante, solo che consideriamo la Coomologia invece dell'omologia sul complesso ottenuto applicando il funtore alla risoluzione proiettiva

[3]$TP_\bullet$ è un complesso di catene grazie all'esattezza del funtore, a destra nel caso covariante e a sinistra nel caso controvariante.

Definizione 1.4.5 (Ext)**.** Siano N un R-modulo e $T := \mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ un funtore **controvariante** (vedi A.2.5), allora $\mathrm{Ext}^n_R(\cdot, N) := L_nT$, cioè

- se M è un R-modulo e $P_\bullet$ è una sua risoluzione proiettiva, allora $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N))$;
- se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un morfismo di R-moduli e $\varphi_\bullet$ un sollevamento di φ indotto da delle risoluzioni proiettive di M e M', allora $\mathrm{Ext}^n_R(\varphi, N) := H^n(\mathrm{Hom}(\varphi_\bullet, N))$.

Capitolo 2

(Co)Omologia di gruppi

Siamo finalmente arrivati al corpo di questo elaborato, definiremo l'omologia e la Coomologia di gruppi e ne scopriremo alcune proprietà molto interessanti.

2.1 $R[G]$-moduli

Introduciamo qualche struttura preliminare ed alcune proprietà che ci torneranno utili per l'omologia di gruppi.

Definizione 2.1.1. Se G è un gruppo e R è un **anello commutativo** si dice **algebra di gruppo** il modulo $R[G]$ libero su R che ha per base G dotato di una operazione di prodotto

$$R[G] \times R[G] \ni \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g, \sum_{g \in G} \lambda'_g g \right) \overset{\cdot}{\longmapsto} \sum_{g,g' \in G} \lambda_g \lambda'_g (gg') \in R[G].$$

Osservazione 2.1.2. $R[G]$ ha una struttura di **algebra** sull'anello R, per questo il nome **algebra di gruppo** è una buona notazione.

Definizione 2.1.3. ($R[G]$-modulo) Un gruppo abeliano $(M, +)$ si dice $R[G]$-modulo **sinistro**(destro) se dotato di un'azione sinistra (destra) di $R[G]$ su M che sia un prodotto R-bilineare. Indicheremo questo prodotto con $\cdot$, così definito

$$\begin{aligned} \cdot : R[G] \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto g \cdot m \end{aligned}$$

questo definisce univocamente il prodotto per la R-linearità. In generale richiederemo anche che questo prodotto sia associativo, cioè $g \cdot g'm = gg' \cdot m$.
Nel seguito parlando di $R[G]$-moduli ometteremo il termine **sinistri**. Qualora incontrassimo $R[G]$-moduli **destri**, cioè in cui il prodotto è un'azione destra di $R[G]$ su M, sarà sempre specificato.

Osservazione 2.1.4. In generale è possibile interpretare un $R[G]$-modulo sinistro come un $R[G]$-modulo destro e viceversa tramite il prodotto

$$m \cdot g = g^{-1} m$$

allora quando useremo il funtore $\mathrm{Tor}^R_\bullet(M, N)$, in cui M deve essere un modulo destro, interpreteremo M in questi termini.

Esempio 2.1.5 (modulo regolare)**.** Consideriamo $R[G]$ come $R[G]$-modulo dove il prodotto è quello di cui $R[G]$ è dotato naturalmente. Questo modulo è detto modulo regolare e i suoi sottomoduli sono gli ideali di $R[G]$ come anello.

Esempio 2.1.6. Siano M, N due $R[G]$-moduli, allora possiamo dare a $M \otimes_R N$ una struttura di $R[G]$-modulo, dotandolo del prodotto

$$g \cdot (m \otimes_R n) := (g \cdot m) \otimes_R (g \cdot n).$$

Definizione 2.1.7. Siano M, N due $R[G]$-moduli, allora una mappa $\varphi : M \longrightarrow N$ si dice **omomorfismo** di $R[G]$-moduli o $R[G]$-lineare se

$$\varphi(g \cdot m + g' \cdot m') = g \cdot \varphi(m) + g' \cdot \varphi(m')$$

Denotiamo con $\mathrm{Hom}_{R[G]}(M, N)$ l'insieme degli omomorfismi di $R[G]$-moduli tra M e N. È possibile vedere M, N anche come R-moduli e quindi denotiamo con $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ l'insieme degli omomorfismi di R-moduli tra M e N.

Esempio 2.1.8. Siano M, N due $R[G]$-moduli, allora possiamo dotare il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ di una struttura di $R[G]$-modulo, utilizzando il prodotto

$$g \cdot f := g \circ f \circ g^{-1}.$$

Definizione 2.1.9 (mappa e ideale di aumentazione)**.** Si dice **mappa di aumentazione** il morfismo di R-moduli ottenuti da

$$R[G] \ni g \overset{\varepsilon}{\longmapsto} 1 \in R$$

e l'ideale $I[G] := \ker \varepsilon$ è detto **ideale di aumentazione**.

Osservazione 2.1.10. ε è anche un morfismo di $R[G]$-moduli e quindi $I[G]$ è un $R[G]$-sottomodulo di $R[G]$ come $R[G]$-modulo.

Osservazione 2.1.11. $I[G]$ è un R-modulo **libero** che ha per base $S := \{g-1 : g \in G \backslash \{1\}\}$. Inoltre se M è un $R[G]$-modulo allora $I[G] \cdot M := \{gm - m : g \in G, m \in M\}$.

Definizione 2.1.12. Sia M un $R[G]$-modulo, allora definiamo

- **l'insieme dei punti fissati sotto l'azione di** G : $M^G := \{m \in M : Gm = \{m\}\}$;
- **l'insieme dei punti co-fissati sotto l'azione di** G : $M_G := M/(I[G] \cdot M) = M/\{gm - m : g \in G, m \in M\}$.

Osservazione 2.1.13. M^G è il più grande sottomodulo di M su cui G agisce banalmente. Invece M_G è il più grande modulo quoziente di M su cui G agisce banalmente.

Proposizione 2.1.14.

1. *se G è un gruppo **finito**, allora* $R[G]^G = \left\langle \sum_{g \in G} g \right\rangle_R$
2. *se G **non è finito** allora* $R[G]^G = 0$

Dimostrazione.

1. Sia $\sum_{g\in G} \lambda_g g \in R[G]^G$ allora per ogni $h \in G$

$$\sum_{g\in G} \lambda_g hg = \sum_{g\in G} \lambda_g g$$

ma l'azione di moltiplicazione a sinistra di G su sé stessa è transitiva, quindi se per assurdo esistono $g_0, g_1 \in G$ tali che $\lambda_{g_0} \neq \lambda_{g_1}$ esiste anche $h \in G$ tale che $hg_0 = g_1$, ma allora

$$\sum_{g\in G} \lambda_g hg \neq \sum_{g\in G} \lambda_g g$$

quindi, se $\lambda = \lambda_g$, avremo che

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda g = \lambda \sum_{g\in G} g \in \left\langle \sum_{g\in G} g \right\rangle_R ;$$

2. Sia $\sum_{g\in G} \lambda_g g \in R[G]$, quindi con $\lambda_g \neq 0$ per un numero finito di $g \in G$. allora siccome G non è finito esiste $g_0, g_1 \in G$ tali che $\lambda_{g_0} \neq 0$ e $\lambda_{g_1} = 0$, quindi consideriamo $h = g_1 g_0^{-1}$. Abbiamo che $hg_o = g_1$ e $\lambda_{g_0} = \lambda_{g_1}$ per cui, come prima, abbiamo che $\sum_{g\in G} \lambda_g g \notin R[G]^G$.

■

Proposizione 2.1.15. *Siano M, N due $R[G]$-moduli, allora*

1. $\mathrm{Hom}_R(M,N)^G = \mathrm{Hom}_{R[G]}(M,N)$
2. *Siano M, N due $R[G]$-moduli dove guardiamo M come modulo destro (vedi osservazione 2.1.4) e N come modulo sinistro, allora*

$$(M \otimes_R N)_G = M \otimes_{R[G]} N$$

Dimostrazione.

1. ($\subseteq$) Sia $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)^G$ allora $f(m) = (g \cdot f)(m) = gf(g^{-1}(m))$, quindi f è $R[G]$-lineare, infatti

$$f\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot m\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g \cdot m) = \sum_{g\in G} \lambda_g g^{-1} \cdot gf(g^{-1}m) = \sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot f(m).$$

($\supseteq$) Evidentemente una mappa $R[G]$-lineare è G-invariante, infatti

$$gf(g^{-1}m) = gg^{-1}f(m) = f(m);$$

2. Consideriamo la mappa $m \otimes_R n \xmapsto{\phi} m \otimes_{R[G]} n$, questa è una mappa R-lineare. Si osserva che $I[G] \cdot (M \otimes_R N) \subseteq \ker \phi$, infatti

$$g(m \otimes_R n) - m \otimes_R n = g^{-1}m \otimes_R gn - m \otimes_R n \xmapsto{\phi} g^{-1}m \otimes_{R[G]} gn - m \otimes_{R[G]} n = 0.$$

Allora possiamo considerare la mappa $\widehat{\phi} : (M \otimes_R N)_G \longrightarrow M \otimes_{R[G]} N$, essa ammette inversa $m \otimes_{R[G]} n \longmapsto [m \otimes_R n]$, questa è ben definita, infatti $[g^{-1}m \otimes_R n] = [m \otimes_R gn]$.

■

2.2 Omologia e coomologia di gruppi

In questa sezione definiremo l'omologia e la coomologia di gruppi attraverso i funtori Ext e Tor (vedi sezione 1.4). Questa definizione, per quanto astratta, è estremamente versatile perchè ci consente di utilizzare una qualsiasi risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$ per calcolare i gruppi di omologia e coomologia. Nel seguito vedremo che può tornare utile utilizzare risoluzione proiettive particolari in alcuni casi specifici, come quello dei gruppi ciclici (vedi sezione 2.4).

Definizione 2.2.1. (Omologia e Coomologia di gruppi) Sia A un $\mathbb{Z}[G]$-modulo, allora

- $H_n(G, A) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$[1] che è detto n-esimo **gruppo di omologia** di G a coefficienti in A;
- $H^n(G, A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ che è detto n-esimo **gruppo di coomologia** di G a coefficienti in A.

D'altra parte se $\varphi : A \longrightarrow B$ è un morfismo di $Z[G]$-moduli, allora

- $H_n(G, \varphi) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \varphi)$ che spesso indicheremo con $\varphi_{\star n}$;
- $H^n(G, \psi) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \varphi)$ che spesso indicheremo con $\varphi^{\star n}$.

La definizione 2.2.1 è piuttosto astratta, quindi ripercorriamo una costruzione esplicita dei gruppi $H^n(G, A)$ e $H_n(G, A)$.

1. Il primo passo è considerare una risoluzione proiettiva $P_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{Z}[G]$-modulo. Un esempio classico è la **risoluzione standard** (vedi sezione 2.3);
2. il secondo passo è l'applicazione dei funtori $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot, A)$ e $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ alle risoluzioni proiettive, questo crea un complesso di catene (2.1) e uno di cocatene (2.2) rispettivamente:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \xrightarrow{d_2 \otimes \mathrm{id}_A} P_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_A} P_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_0, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(d_1, A)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_1, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(d_2, A)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_2, A) \longrightarrow \cdots \tag{2.2}$$

3. Infine calcoliamo i l'omologia del complesso (2.1) e la coomologia del complesso (2.2). Questi saranno i gruppi di omologia $H_n(G, A)$ e coomologia $H^n(G, A)$ rispettivamente.

Proposizione 2.2.2. *Siano G un gruppo e A uno $Z[G]$-modulo, allora*

1. $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A_G$
2. $H^0(G, A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \cong A^G$

[1] Qui $\mathbb{Z}$ è da interpretarsi come $\mathbb{Z}[G]$ modulo destro, cioè $n \cdot g = g^{-1} n$

Dimostrazione.

1. $H_0(G,A) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ allora consideriamo $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$ una risoluzione proiettiva, applico il funtore $T := \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\cdot)$ ed ottengo una nuova successione esatta perché i moduli proiettivi sono piatti (vedi proposizione A.4.2). Allora, per l'osservazione 1.3.2, abbiamo che $H_0(TP_\bullet) = TA = \mathbb{Z} \otimes_{Z[G]} A$. Infine, per la proposizione 2.1.15, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G = A_G$.

2. $H^0(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ allora consideriamo $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ una risoluzione proiettiva, applico il funtore $T := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot, A)$ ed ottengo una nuova successione esatta, perchè questo funtore è esatto sui moduli proiettivi (vedi definizione A.3.5). Allora, per un risultato analogo all'osservazione 1.3.2 per la coomologia, abbiamo che $H^0(TP_\bullet) = TA = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$. Infine, per la proposizione 2.1.15, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},A)^G \cong A^G$.

■

Proposizione 2.2.3. *Sia* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ *una successione esatta di* $\mathbb{Z}[G]$*-moduli, allora essa induce le seguenti successioni esatte*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \vdots \\
 & & & & \downarrow \\
H_{n+1}(G,C) & \xleftarrow[\psi_{\star n+1}]{} & H_{n+1}(G,B) & \xleftarrow[\varphi_{\star n+1}]{} & H_{n+1}(G,A) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} & & & & \\
H_n(G,A) & \xrightarrow[\varphi_{\star n}]{} & H_n(G,B) & \xrightarrow[\psi_{\star n}]{} & H_n(G,C) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n} \\
H_{n-1}(G,C) & \xleftarrow[\psi_{\star n-1}]{} & H_{n-1}(G,B) & \xleftarrow[\varphi_{\star n-1}]{} & H_{n-1}(G,A) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_{n-1}} & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \\
\downarrow & & & & \\
H^{n-1}(G,A) & \xrightarrow{\varphi^{\star n-1}} & H^{n-1}(G,B) & \xrightarrow{\psi^{\star n-1}} & H^{n-1}(G,C) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta^{n-1}} \\
H^n(G,C) & \xleftarrow[\psi^{\star n}]{} & H^n(G,B) & \xleftarrow[\varphi^{\star n}]{} & H^n(G,A) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^n} & & & & \\
H^{n+1}(G,A) & \xrightarrow{\varphi^{\star n+1}} & H^{n+1}(G,B) & \xrightarrow{\psi^{\star n+1}} & H^{n+1}(G,C) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta^{n+1}} \\
 & & & & \vdots
\end{array}
$$

Dove $f_{\star n} := H_n(G,f)$ *e* $f^{\star n} := H^n(G,f)$.

Dimostrazione. Per la prima successione consideriamo $P^A_\bullet \twoheadrightarrow A$, $P^C_\bullet \twoheadrightarrow C$ due risoluzioni proiettive. Allora per l'**Horseshoe Lemma** 1.3.7 possiamo costruire una risoluzione

proiettiva $P_\bullet^B \twoheadrightarrow B$ e possiamo sollevare le mappe φ, ψ ottenendo una successione esatta di complessi di catene $0_\bullet \longrightarrow P_\bullet^A \xrightarrow{\varphi_\bullet} P_\bullet^B \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet^C \longrightarrow 0_\bullet$. Quindi, siccome i moduli proiettivi sono piatti (vedi A.4.2), avremo che il funotre $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\cdot)$ è esatto e quindi otteniamo la successione esatta

$$0_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_\bullet^A \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z} \otimes \varphi_\bullet} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_\bullet^B \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z} \otimes \psi_\bullet} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_\bullet^C \longrightarrow 0_\bullet, \tag{2.3}$$

da cui per il Teorema 1.1.13, otteniamo la successione esatta in omologia cercata.

Per la seconda successione, invece, consideriamo $P_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ una risoluzione proiettiva. Quindi, siccome il funtore $\mathrm{Hom}(P_n, \cdot)$ è esatto perchè P_n è proiettivo (vedi A.3.5), otteniamo la successione esatta

$$0_\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, \psi)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, \varphi)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, C) \longrightarrow 0_\bullet,$$

da cui per il Teorema 1.2.5 otteniamo la successione esatta in coomologia cercata. ■

Osservazione 2.2.4. Quanto mostrato finora ci permette di dire che quella di omologia e coomologia di gruppi è una buona nomenclatura perché l'omologia e coomologia di gruppi preserva le proprietà fondamentali dell'omologia e della coomologia.

2.3 Risoluzione standard

In questa sezione otterremo una costruzione esplicita dei gruppi di coomologia: per fare ciò utilizzeremo una particolare **risoluzione libera** di $\mathbb{Z}$, la **risoluzione standard**.

Definizione 2.3.1 (Risoluzione standard)**.** Consideriamo per ogni $n \geq 0$ lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo $S_n := \mathbb{Z}[G^{n+1}]$, dove G^{n+1} è prodotto diretto di G con sé stesso $n+1$ volte e l'azione di G è determinata da $g \cdot (g_0, \ldots, g_n) := (gg_0, \ldots, gg_n)$.
Per $n > 0$, definiamo gli $Z[G]$-morfismi di moduli

$$s_j^n : S_n \longrightarrow S_{n-1} \qquad\qquad \delta_n : S_n \longrightarrow S_{n-1}$$
$$(g_0, \ldots, g_n) = \underline{g} \longmapsto (g_0, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_n) \qquad\qquad \underline{g} \longmapsto \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s_j^n(\underline{g})$$

In questo modo, otteniamo una successione di $\mathbb{Z}[G]$-moduli e $\mathbb{Z}[G]$-morfismi:

$$\cdots \longrightarrow S_2 \xrightarrow{\delta_2} S_1 \xrightarrow{\delta_1} S_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Questa successione è chiamata **risoluzione standard** di $\mathbb{Z}$.

Proposizione 2.3.2. *Se $S_\bullet$ è la **risoluzione standard** e $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \longmapsto \mathbb{Z}$ è la **mappa di aumentazione**, allora $S_\bullet \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ è una **risoluzione libera** si $\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $S_n := \mathbb{Z}[G^n] \cong \mathbb{Z}[G]^n$ e quindi gli S_n sono tutti $\mathbb{Z}[G]$-moduli liberi. Osserviamo che $S_\bullet$ è un **complessi di catene** perché $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$, infatti ogni coppia di entrate eliminate può essere eliminata in due diversi ordini, questi ordini danno origine a due segni diversi che si annullano a vicenda:

$$\begin{aligned}\delta_n \circ \delta_{n+1}(\underline{g}) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} s_j^n(s_i^{n+1}(\underline{g}) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n+1} (-1)^{i+j} s_j^n(s_i^{n+1}(\underline{g})) + (-1)^{j+i-1} s_{i-1}^n(s_j^{n+1}(\underline{g})) = 0\end{aligned}$$

Rimane solo da mostrare che la successione è esatta, per fare ciò consideriamo le mappe $(h_n)_n$ così definite

$$\begin{aligned} h_n : S_n &\longrightarrow S_{n+1} \\ (g_0, \dots, g_n) = \underline{g} &\longmapsto (1, \underline{g}) = (1, g_0, \dots, g_n) \end{aligned}$$

allora si osserva facilmente che $\delta_{n+1} \circ h_n - h_{n-1} \circ \delta_n = \mathrm{id}_{S_n}$ e quindi $(h_n)_n$ è una contrazione di $\mathrm{id}_{S_\bullet}$. Quindi, sia $x \in \ker \delta_n$ avremo che $\delta_{n+1} \circ h_n(x) = \mathrm{id}_{S_n}(x) = x$ per cui $x \in \operatorname{Im} \delta_{n+1}$, cioè $\ker \delta_n \subseteq \operatorname{Im} \delta_{n+1}$. Infine

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \delta_1 &= \langle g_0 - g_1 \mid g_0, g_1 \in G \rangle_{\mathbb{Z}[G]} \\ &= \left\langle g_1(g_1^{-1} g_0 - 1) \mid g_0, g_1 \in G \right\rangle_{\mathbb{Z}[G]} \\ &= \langle g - 1 \mid g \in G \rangle_{\mathbb{Z}[G]} = I[G] = \ker \varepsilon \end{aligned}$$

■

Osservazione 2.3.3. Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo usato un fatto che può essere generalizzato, cioè che $\mathrm{id}_{S_\bullet} \sim 0$ implica $S_\bullet$ è esatta. Più in generale è possibile dire che se $C_\bullet$ è un complesso di catene e $C_\bullet \sim 0_\bullet$, cioè $\mathrm{id}_{C_\bullet} \sim 0$, allora $C_\bullet$ è esatto.
Tuttavia è interessante osservare che non vale il viceversa, cioè esistono complessi di catene esatti ma non contraibili. Quindi un risultato inverso dovrà richiedere condizioni più restrittive, ad esempio: se $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M$ è una **risoluzione proiettiva**, quindi una richiesta più forte rispetto alla sola esattezza, allora $P_\bullet \sim 0_\bullet$. Questo è vero grazie all'unicità del sollevamento e sia $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ che 0 sono sollevamenti di $0 : M \longrightarrow M$.

Definizione 2.3.4 (Notazione a barre)**.** Per questioni di semplicità di calcolo adottiamo la seguente **notazione a barre**

$$[g_1 | \cdots | g_n] := (1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \cdots g_n) \in S_n$$

Osservazione 2.3.5. $S_n = \langle [g_1 | \cdots | g_n] \mid g_i \in G \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$ perché se $(h_0, \dots, h_n) = \underline{h} \in S_n$ allora

$$\underline{h} = h_0 \cdot [h_1 | h_1^{-1} h_2 | h_2^{-1} h_3 | \cdots | h_{n-1}^{-1} h_n]$$

Osservazione 2.3.6. La notazione a barre è utile perché si comporta bene con le mappe δ_n, s_j^n, infatti

$$s_j^n [g_1 | \cdots | g_n] = \begin{cases} g_1 \cdot [g_2 | \cdots | g_n] & \text{se } j = 0 \\ [g_1 | \cdots | g_{j-1} | g_j g_{j+1} | g_{j+2} | \cdots | g_n] & \text{se } 1 \leq j \leq n-1 \\ [g_1 | \cdots | g_{n-1}] & \text{se } j = n \end{cases}$$

e quindi per i casi più piccoli abbiamo che

$$\delta_1 [g_1] = g_1 [] - [] \tag{2.4}$$
$$\delta_2 [g_1, g_2] = g_1 [g_2] - [g_1 g_2] + [g_1] \tag{2.5}$$
$$\delta_3 [g_1 | g_2 | g_3] = g_1 [g_2 | g_3] - [g_1 g_2 | g_3] + [g_1 | g_2 g_3] - [g_1 | g_2] \tag{2.6}$$

Definizione 2.3.7 (Coomologia di gruppi, tramite la risoluzione standard)**.** Siano A uno $Z[G]$-modulo e $(S_\bullet, \delta_\bullet) \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ la **risoluzione standard**, allora definiamo

- $\delta^{\star n} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\delta_n, A)$ la mappa ottenuta tramite il funtore $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ (vedi A.2.5);
- $C^n(G,A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(S_n, A)$ la n-cocatena di G, infatti $(C^\bullet(G,A), \delta^\star)$ è un complesso di cocatene.

$$0 \longrightarrow C^0(G,A) \xrightarrow{\delta^{\star 1}} C^1(G,A) \xrightarrow{\delta^{\star 2}} C^2(G,A) \xrightarrow{\delta^{\star 3}} \cdots$$

  In particolare questo è il complesso di cocatene per cui $H^n(G,A) = H^n(C^n(G,A))$;
- $Z^n(G,A) := Z^n(C^n(G,A)) = \ker \delta^{\star n+1}$ ed ogni suo elemento è detto n-cociclo di G;
- $B^n(G,A) := B^n(C^n(G,A)) = \mathrm{Im}\, \delta^{\star n}$ ed ogni suo elemento è detto n-cobordo di G;
- $H^n(G,A) := Z^n(G,A)/B^n(G,A)$ è il gruppo di coomologia per G di grado n.

Osservazione 2.3.8. Si osserva che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^{n+1}], A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], A)$, come $\mathbb{Z}[G]$-moduli, considerando la mappa $S_n \ni [g_1|\dots|g_n] \overset{\omega_n}{\longmapsto} (g_1, \dots, g_n) \in S_{n-1}$. Tramite questo isomorfismo abbiamo che $\delta^{\star n}$ agisce su $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], A)$ come

$$\delta^{\star n} f(g_1, \dots, g_n) = f(\omega_{n-1}(\delta_n[g_1|\dots|g_n]))$$

Esempio 2.3.9. Ad esempio nel caso $n = 2$ avremo che $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^2], A)$ e

$$\delta^{\star 2} f(g_1, g_2) = f(\omega_1(g_1[g_2] - [g_1 g_2] + [g_1])) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1).$$

Nel seguito, per semplicità notazionale, potremo guardare f sia come un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(S_n, A)$ che come un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], A)$. Questo non causa ambiguità perché in un caso useremo la notazione a barre e nell'altro la notazione vettoriale. Quindi omettendo la mappa ω, scriviamo

$$\delta^{\star 2} f(g_1, g_2) = f(g_1[g_2] - [g_1 g_2] + [g_1]) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1).$$

2.3.1 Calcolo di H^0

$B^0(G,A) = \mathrm{Im}\, 0 = 0$ e $Z^0(G,A) := \{f \in C^0(G,A) : \delta^{\star 1} f = 0\}$. Allora, guardando l'equazione (2.4), si osserva che f è uno 0-cociclo se e solo se

$$0 = f(g_1[]) - f([]) = g_1 f([]) - f([]) \quad \forall\, g_1 \in G.$$

D'altra parte osserviamo che $C^0(G,A) \cong A$ perché $S_0 = \{[]\}$ e quindi una funzione $f \in C^0(G,A)$ è univocamente determinata da dove manda questo elemento, questo induce un isomorfismo $C^0(G,A) \cong A$ e in questo isomorfismo i cocicli sono identificati dagli elementi $a \in A$ tali che $ga - a = 0$ per ogni $g \in G$ che sono gli elementi G-fissati di A, cioè

$$H^0(G,A) = Z^1(G,A)/B^0(G,A) \cong Z^1(G,A) \cong A^G.$$

2.3.2 Calcolo di H^1

Osservazione 2.3.10 (Caratterizzazione degli 1-cocicli). $Z^1(G,A) := \{f \in C^n(G,A) : \delta^{\star 2} f = 0\}$. Allora, guardando alla equazione (2.5), si osserva che f è un 1-cociclo se e solo se

$$0 = f(g_1[g_2]) - f([g_1 g_2]) + f([g_1]) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G,$$

cioè se

$$f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \tag{2.7}$$

Osservazione 2.3.11 (Caratterizzazione degli 1-cobordi). Come nella sezione 2.3.1, osserviamo che $C^0(G,A) \cong A$ perché $S_0 = \{[]\}$ e quindi una funzione $\phi \in C^0(G,A)$ è univocamente determinata da dove manda questo elemento. Sia $\phi_a([]) = a \in A$, allora, guardando all'equazione (2.4), si osserva che

$$(\delta^{\star 1}\phi_a)(g) = \phi_a(g[]) - \phi_a([]) = ga - a.$$

Allora $f : G \longrightarrow A$ è un 1-cobordo se e solo se

$$\exists\, a \in A : f(g) = ga - a \quad \forall\, g \in G. \tag{2.8}$$

Questa equazione ci dice anche che le immagini degli 1-cobordi formano $I[G] \cdot A \subseteq A$

Definizione 2.3.12 (Derivazione)**.** Sia A uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo e $f : G \longrightarrow A$, allora f si dice **derivazione** di G se f rispetta l'equazione (2.7). L'insieme di questi oggetti è indicato con $\mathrm{Der}(G,A)$. Se inoltre f rispetta anche l'equazione (2.8) per qualche $a \in A$, allora diremo che f è una **derivazione interna** e indicheremo l'insieme delle derivazioni interne con $\mathrm{Inn}(G,A)$.

Proposizione 2.3.13 (Caratterizzazione di $H^1(G,A)$)**.** *Siano G un gruppo e A uno $Z[G]$-modulo, allora*

$$H^1(G,A) = \mathrm{Der}(G,A)/\,\mathrm{Inn}(G,A) = \frac{\{f : G \longrightarrow A \mid f(g_1g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)\}}{\{G \ni g \longmapsto ga - a \in A \mid a \in A\}}$$

2.3.3 Calcolo di H^2

Osservazione 2.3.14 (Caratterizzazione dei 2-cocicli). $Z^2(G,A) = \{f \in C^2(G,A) \mid \delta^{*3}(f) = 0\}$. Allora, guardando all'equazione (2.6), si osserva che f è 2-cociclo se e solo se

$$f(g_1[g_2|g_3]) - f([g_1g_2|g_3]) + f([g_1|g_2g_3]) - f([g_1|g_2])) = 0 \quad \forall\, g_1, g_2, g_3 \in G^3.$$

In altre parole, una mappa $f : G^2 \longrightarrow A$ è un 2-cociclo se e solo se

$$g_1 f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) = f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G. \tag{2.9}$$

Osservazione 2.3.15 (Caratterizzazione dei 2-cobordi). Se $\phi \in C^1(G,A)$, guardando all'equazione (2.5), si osserva che

$$\delta^{*2}\phi([g_1|g_2]) = \phi(g_1[g_2]) - \phi([g_1g_2]) + \phi([g_1]) \quad \forall g_1, g_2 \in G^2.$$

Pertanto, una mappa $f : G \times G \to A$ è un 2**-cobordo** se e solo se esiste una mappa $\phi : G \to A$ tale che

$$f(g_1, g_2) = g_1\, \phi(g_2) - \phi(g_1g_2) + \phi(g_1) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \tag{2.10}$$

Proposizione 2.3.16 (Caratterizzazione di $H^2(G,A)$)**.** *Siano G un gruppo e A uno $Z[G]$-modulo, allora*

$$H^2(G,A) = \frac{\{f : G^2 \longrightarrow A \mid g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0\}}{\{G^2 \ni (g_1, g_2) \longmapsto g_1\phi(g_2) - \phi(g_1g_2) + \phi(g_1) \in A \mid \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G,A)\}}$$

2.4 Coomologia di gruppi ciclici

I gruppi ciclici, costituiscono una famiglia di gruppi per cui la coomologia è facile da calcolare. In questa sezione calcoleremo prima alcuni cocicli e cobordi di grado piccolo usando la risoluzione standard, poi vedremo come questo ci porterà a definire una risoluzione libera più semplice che ci permetterà di calcolare facilmente i gruppi di coomologia per ogni grado.

Nel seguito $\Gamma := \langle\gamma\rangle$ è un gruppo ciclico e A è un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modulo. Inoltre per ogni $y \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ definiamo $\mu_y^A : A \longrightarrow A$ la moltiplicazione a sinistra per y. Procediamo con il calcolo dei cocicli più piccoli:

$Z^0(\Gamma, A)$: Da quanto visto nella sezione 2.3.1 sappiamo che $Z^0(\Gamma, A) \cong A^G = \ker \mu_{\gamma-1}^A$;

$Z^1(\Gamma, A)$: Psosto $\Gamma := \langle\gamma \mid \gamma^n = 0\rangle$ un gruppo ciclico finito, $Z^1(\Gamma, A)$ è composto dalle funzioni $f : \Gamma \longrightarrow A$ per cui vale (2.7), cioè $f(\gamma^{i+j}) = \gamma^i f(\gamma^j) + f(\gamma^j)$. Osserviamo che $f(\gamma) = f(1\gamma) = f(\gamma) + f(1)$ quindi $f(1) = 0$, per cui

$$f(\gamma^{k+1}) = \gamma^k f(\gamma) + f(\gamma^k) = \cdots = \sum_{j=0}^{k} \gamma^j f(\gamma). \tag{2.11}$$

Ora consideriamo l'equazione (2.11) in cui $k = n$

$$f(\gamma) = f(\gamma^{n+1}) = \left(\sum_{j=0}^{n} \gamma^j\right) f(\gamma)$$

e allora se $N := \left(\sum_{j=0}^{n} \gamma^j\right) - 1 = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j$ avremo che $Nf(\gamma) = 0$ e quindi $N \cdot f = 0$. Per l'equazione (2.11) $f \in Z^1(G, A)$ è univocamente determinato da $f(1) \in A$ e quindi esiste un isomorfismo $Z^1(\Gamma, A) \cong \ker \mu_N^A$.

L'insorgenza delle funzioni μ_N^A e $\mu_{\gamma-1}^A$ ci fa pensare di poter costruire una risoluzione proiettiva in cui queste due mappe formino il differenziale. In particolare l'isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma], A) \cong A$ ed il fatto che $\mu_N \circ \mu_{\gamma-1} = \mu_{\gamma-1} \circ \mu_N = 0$ ci suggeriscono la costruzione del complesso

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[G].$$

Osservazione 2.4.1. Sia $\Gamma = \langle\gamma \mid \gamma^n = 1\rangle$, osserviamo che

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j\right) \cdot (\gamma - 1) = (\gamma - 1) \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j = \sum_{i=1}^{n} \gamma^i - \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j = \gamma^n - \gamma^0 = 0.$$

Quindi $\mu_N \circ \mu_{\gamma-1} = \mu_{\gamma-1} \circ \mu_N = 0$ e questo vale in qualsiasi modulo. Possiamo, quindi, considerare il seguente complesso di moduli liberi

$$Z_\bullet := \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}} \mathbb{Z}[\Gamma].$$

Vogliamo mostrare che $Z_\bullet \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ è una risoluzione libera. Osserviamo che $\gamma^i - 1 = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma^j\right)(\gamma - 1)$, quindi

$$I[\Gamma] = \left\langle \gamma^i - 1 \mid i = 0, \ldots, n-1 \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \gamma - 1 \rangle_{\mathbb{Z}[\Gamma]},$$

allora $\operatorname{Im}\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]} = I[\Gamma] = \ker\varepsilon$. D'altra parte se $x = \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\gamma^j$ è un qualsiasi elemento di $\mathbb{Z}[\Gamma]$ allora

$$(\gamma-1)x = \gamma x - x = \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\gamma^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\gamma^j = \lambda_{n-1} - \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j-1}-\lambda_j)\gamma^j. \qquad (2.12)$$

Ma allora $\ker\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]} = \{\lambda N \mid \lambda\in\mathbb{Z}\}$.
Inoltre si osserva che $N\cdot\gamma^j = \gamma^j\cdot N = N$ per cui

$$N\cdot x = N\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\gamma^j = \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j N.$$

Quindi $\operatorname{Im}\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]} = \{\lambda N : \lambda\in\mathbb{Z}\} = \ker\mu_{\gamma-1}$. Infine $\ker\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]} = \{\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\gamma^j \mid \sum_{j=0}^{n-1}\xi_j = 0\}$ ora per l'equazione (2.12), dato $\sum\xi_j\gamma^j\in\ker N$, possiamo scegliere $\lambda_{n-j} = \sum_{i=0}^{j}\xi_j$ ed avremo che

$$(\gamma-1)\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\gamma^j = \sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\gamma^j \in \ker\mu_N,$$

dunque $\ker\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}\subseteq\operatorname{Im}\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}$. Da $\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}\circ\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]} = 0$ segue che $\operatorname{Im}\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}\subseteq\ker\mu_N^{\mathbb{Z}[\Gamma]}$, pertanto vale l'uguaglianza.

Proposizione 2.4.2 (Coomologia dei gruppi ciclici finiti)**.** *Siano* $\Gamma := \langle\gamma \mid \gamma^n = 1\rangle$ *un* ***gruppo ciclico finito*** *e* A *uno* $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-modulo, allora*

$$H^n(\Gamma,A) \cong \begin{cases} A^\Gamma & \text{se } n = 0 \\ \ker\mu_N^A/\operatorname{Im}\mu_{\gamma-1}^A & \text{se } n\geq 1 \text{ dispari} \\ A^\Gamma/\operatorname{Im}\mu_N^A & \text{se } n\geq 2 \text{ pari} \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo la risoluzione libera ottenuta nell'osservazione 2.4.1: $Z_\bullet \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow}\mathbb{Z}$, applichiamo il funtore $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\cdot,A)$ ed otteniamo il complesso di cocatene

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A) \overset{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[G]\star}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A) \overset{\mu_N^{\mathbb{Z}[G]\star}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A) \overset{\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[G]\star}}{\longrightarrow} \cdots$$

dove $\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[G]\star} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mu_{\gamma-1}^{\mathbb{Z}[G]},A)$ e $\mu_N^{\mathbb{Z}[G]\star} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mu_N^{\mathbb{Z}[G]},A)$. Allora consideriamo il complesso $A_\bullet := A \overset{\mu_{\gamma-1}^A}{\longrightarrow} A \overset{\mu_N^A}{\longrightarrow} A \longrightarrow \cdots$ e l'isomorfismo naturale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A)\ni f\overset{\phi}{\longmapsto} f(1)\in A$. per ogni $x\in A$ il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A) & \xrightarrow{\quad\mu_x^{\mathbb{Z}[G]\star}\quad} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma],A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\phi} \\ A & \xrightarrow[\mu_x^A]{} & A \end{array}$$

e quindi $\phi_\bullet$ è un isomorfismo di complessi di catene tra $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(Z_\bullet,A)$ e $A_\bullet$, per cui $Z^n(\Gamma,A)\cong Z^n(A_\bullet)$ e $B^n(\Gamma,A)\cong B^n(A_\bullet)$. Infine osserviamo che

$$Z^n(\Gamma,A) = \begin{cases} \ker\mu_{\gamma-1}^A = A^\Gamma & \text{se } n \text{ è pari} \\ \ker\mu_N^A & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}, \quad B^n(\Gamma,A) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \operatorname{Im}\mu_N^A & \text{se } n\neq 0 \text{ è pari} \\ \operatorname{Im}\mu_{\gamma-1}^A & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

■

Proposizione 2.4.3 (Coomologia dei gruppi ciclici infiniti)**.** *Siano* $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ *un* ***gruppo ciclico infinito*** *e* A *uno* $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-modulo, allora*

$$H^n(\Gamma, A) = \begin{cases} A^\Gamma & \text{se } n = 0 \\ A_\Gamma & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\gamma^i$, con un numero finito di $\lambda_i \neq 0$, un qualsiasi elemento di $\mathbb{Z}[\Gamma]$. Allora

$$(\gamma - 1)x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\gamma^{i+1} - \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\gamma^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_{i-1}\gamma^i - \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\gamma^i = \lambda_0 + \sum_{i\in\mathbb{N}} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\gamma^i$$

per cui $(\gamma - 1) = 0$ se e solo se $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_i = \lambda_{i-1}$, cioè $x = 0$. Quindi $\ker \mu_{\gamma-1} = 0$.
A questo punto posso considerare il complesso di catene $Z_\bullet$, così definito

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\mu^{\mathbb{Z}[G]}_{\gamma-1}} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

da cui si ottiene la risoluzione libera $\mathbb{Z}_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$. Da qui ragionando come prima si passa trasforma la catena tramite $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\cdot, A)$ e si considera l'isomorfismo $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[\Gamma], A) \longrightarrow A$ che induce un isomorfismo con il complesso di cocatene $A_\bullet$, così definito

$$A \xrightarrow{\mu^A_{\gamma-1}} A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

da cui si ottiene la tesi. ■

2.5 Restrizione

Definizione 2.5.1. Siano G un gruppo, $H \leq G$ un sottogruppo e M uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo. Allora è possibile guardare ad M come uno $\mathbb{Z}[H]$-modulo restringendo il prodotto al sottoanello $\mathbb{Z}[H] \subseteq \mathbb{Z}[G]$, indichiamo questo modulo con $\mathrm{Res}^G_H(M)$.
Inoltre è possibile dare a Res^G_H una natura di funtore come segue

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathcal{M}od & \longrightarrow & {}_{\mathbb{Z}[H]}\mathcal{M}od \\ M & \longmapsto & \mathrm{Res}^G_H(M) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} \varphi : M & \longrightarrow & N \\ m & \longmapsto & \varphi(m) \end{array} \right) \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \mathrm{Res}^G_H(\varphi) : \mathrm{Res}^G_H(M) & \longrightarrow & \mathrm{Res}^G_H(N) \\ m & \longmapsto & \varphi(m) \end{array} \right)$$

Lemma 2.5.2. *Sia* P *un* $\mathbb{Z}[G]$*-modulo* ***proiettivo****, allora* $\mathrm{Res}^G_H(P)$ *è uno* $\mathbb{Z}[H]$*-modulo* ***proiettivo****.*

Dimostrazione. Sia $\{g_i\}_{i\in I}$ un insieme di rappresentanti di laterali destri di H in G, allora avremo che come $\mathbb{Z}[H]$-modulo

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[H]g_i.$$

Se P è un $\mathbb{Z}[G]$-modulo proiettivo, allora esso è un addendo diretto di un modulo libero A.3.5, cioè

$$P + Q = \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}[G] \qquad \underset{\text{come } \mathbb{Z}[H]\text{-moduli}}{=} \qquad \bigoplus_{j\in J}\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[H]g_i$$

quindi $P+Q$ è libero anche come $\mathbb{Z}[H]$-modulo e allora P è uno $\mathbb{Z}[H]$-modulo proiettivo. ■

Osservazione 2.5.3 (Restrizione in coomologia). Siano M un $\mathbb{Z}[G]$-modulo e $P_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ una $\mathbb{Z}[G]$-risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$. Allora $\mathrm{Res}^G_H(P_\bullet) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ è una $\mathbb{Z}[H]$-risoluzione proiettiva per $\mathbb{Z}$. Osserviamo che Res^G_H ci fornisce una inclusione $i^\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathrm{Res}^G_H(P_\bullet), \mathrm{Res}^G_H(M))$[2], quindi passando alla coomologia abbiamo una mappa $H^\bullet(i^\bullet) : H^\bullet(G, M) \longrightarrow H^\bullet(H, \mathrm{Res}^G_H(M))$, indicheremo anche questa mappa con Res^G_H e la chiamiamo **restrizione della coomologia**.

2.6 Transfer

Definizione 2.6.1. Siano G un gruppo, $H \leq G$ con $r := [G : H] < +\infty$, $\{g_i\}_{i=1,\dots,r}$ un insieme di rappresentanti dei laterali sinistri di H in G. Allora se M, N sono $\mathbb{Z}[G]$-moduli definiamo il **transfer** (o **corestrizione**) come la mappa

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^G_H : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N) \\ \varphi &\longmapsto \sum_{i=1}^{r} g_i \varphi g_i^{-1} \end{aligned}$$

Osservazione 2.6.2. Il **transfer** è ben definito e non dipende dalla scelta dei rappresentanti dei laterali.

Dimostrazione. Proviamo che $\mathrm{Tr}^G_H(\varphi)$ è un morfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli: l'additività è evidente, resta solo da verificare la G-linearità

$$\begin{aligned} g\,\mathrm{Tr}^G_H(\varphi)(x) &= g\sum_{i=1}^{r} g_i\varphi g_i^{-1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_{\sigma(i)} \underbrace{h_i}_{\in H} \varphi g_i^{-1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_{\sigma(i)}\varphi h_i g_i^{-1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_{\sigma(i)}\varphi g_{\sigma(i)}^{-1}(gx) = \mathrm{Tr}^G_H(\varphi)(gx) \end{aligned}$$

Proviamo, ora, che Tr^G_H non dipende dalla scelta dei rappresentanti dei laterali: consideriamo $\{g_i\}_{i=1,\dots,r}$ e $\{g'_i\}_{i=1,\dots,r}$ due famiglie di rappresentanti per i laterali sinistri di H in G, allora esistono $h_1, \dots, h_r \in H$ tali che $g'_i = g_i h_i$

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\varphi g_i^{-1} = \sum_{i=1}^{r} g_i h_i \varphi h_i^{-1} g_i^{-1} = \sum_{i=1}^{r} g'_i \varphi g_i'^{-1}.$$

■

[2]Si verifica facilmente che questo è un morfismo di complessi di catene ben definito

Osservazione 2.6.3 (Transfer in coomologia). Sia M uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo e $P_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ una $\mathbb{Z}[G]$-risoluzione proiettiva di$\mathbb{Z}$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P_{n-1}, M) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_H^G} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_{n-1}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P_n, M) & \xrightarrow[\mathrm{Tr}_H^G]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_n, M) \end{array}$$

quindi osserviamo che il diagramma commuta perché

$$(\delta^{\star n} \circ \mathrm{Tr}_H^G)(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} g_i \varphi g_i^{-1} \delta_n = \sum_{i=1}^{r} g_i (\varphi \circ \delta) g_i^{-1} = \sum_{i=1}^{r} g_i (\delta^{\star n} \varphi) g_i^{-1} = \mathrm{Tr}_H^G(\delta^{\star n} \varphi)$$

allora il transfer induce un morfismo di complessi di cocatene

$$\tau^\bullet = \mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P_\bullet, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, M)$$

che passa all'omologia e con un abuso di notazione indicheremo $\mathrm{Tr}_H^G = H^\bullet(\tau^\bullet)$

Proposizione 2.6.4. *Sia $H \leq G$ con indice finito $r := [G : H]$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Tr}_H^G \circ \mathrm{Res}_H^G : H^n(G, M) \longrightarrow H^n(G, M)$$

è uguale alla moltiplicazione per l'indice r, cioè $\mathrm{Tr}_H^G \circ \mathrm{Res}_H^G([z]) = [G : H] \cdot [z]$

Dimostrazione. Sia $P_\bullet$ una $\mathbb{Z}[G]$-risoluzione proiettiva per $\mathbb{Z}$, allora consideriamo i morfismi di cocatene $i^\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathrm{Res}_H^G(P_\bullet), \mathrm{Res}_H^G(M))$, definito nella definizione 2.5.3, e $\tau^\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P_\bullet, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, M)$, definito nella definizione 2.6.3, quindi

$$\tau^n \circ i^n(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} g_i \varphi g_i^{-1} = \sum_{i=1}^{r} g_i g_i^{-1} \varphi = r \cdot \varphi.$$

■

Capitolo 3

Estensioni

Nel corso di questo capitolo definiremo le estensioni di un gruppo e vedremo come queste, in particolare quando hanno nucleo abeliano, diano origine a delle caratterizzazioni interessanti per i gruppi di coomologia H^1 e H^2.

Definizione 3.0.1 (Estensione di gruppi)**.** Siano A, E, G **gruppi**, allora si dice **estensione di** A la successione esatta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1.$$

In questo contesto identifichiamo A con la sua immagine tramite l'immersione i. Diremo che A è il **nucleo** dell'estensione e G è il **conucleo**.

Definizione 3.0.2. Sia $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una **estensione di gruppi** con nucleo **abeliano**, allora definiamo lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo $A_\star := (A, +, \star)$ con

$$\begin{array}{cc} A \times A \xrightarrow{+} A & G \times A \xrightarrow{\star} A \\ (a_0, a_1) \longmapsto a_0 a_1 & (\underbrace{eA}_{=p(e)}, a) \longmapsto eae^{-1} \end{array}$$

Dove la mappa $\star$ è ben definita perché $A = \ker p \trianglelefteq E$, $G = E/\ker p$ e A è abeliano quindi il coniugio non dipende dalla preimmagine scelta per un elemento di G in E.

Definizione 3.0.3 (Estensione centrale)**.** Sia E un gruppo e $A \leq G$ un sottogruppo, allora A si dice **centrale** in E se $eae^{-1} = a$ per ogni $e \in E, a \in A$. Il più grande dei sottogruppi centrali è detto **centro**, indicato con $Z(E)$. Inoltre se $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una estensione, essa di dice **centrale** se A è **centrale** in E.

Osservazione 3.0.4. L'estensione $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ è centrale se e solo se l'azione $\star$ di G su A è banale, cioè lascia fissi gli elementi di A.

Definizione 3.0.5 (Estensione scissa)**.** Data $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una estensione, essa si dice **scissa** o che **spezza** se esiste un morfismo di gruppi $s : G \longrightarrow E$ tale che $p \circ s = \mathrm{id}_G$. In tal caso diremo che s è una **sezione** di p o uno **spezzamento** per l'estensione.

Osservazione 3.0.6. Sia $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una estensione di A, allora sono equivalenti

1. l'estensione spezza

2. esiste $H \leq E$ tale che $p|_H : H \longrightarrow G$ è un isomorfismo di gruppi

3. esiste $H \leq E$ tale che $E = A \rtimes H$[1]

Proposizione 3.0.7 (Corrispondenza tra spezzamenti e complementi)**.** *Sia* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *una estensione, allora* $H \leq E$ *è un* ***complemento*** *di* A *se* $H \cap A = \emptyset$ *e* $H \cong G$ *o equivalentemente* $AH = E$*.*
Esiste una corrispondenza biunivoca tra le sezioni di p *(spezzamenti dell'estensione) ed i complementi di* A *in* E

$$\begin{aligned} \phi : \{\textit{spezzamenti}\} &\longrightarrow \{\textit{complementi}\} \\ s &\longmapsto s(G) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Proviamo l'invertibilità di ϕ costruendone una inversa. Consideriamo, quindi, la mappa

$$\begin{aligned} \sigma : \{\text{complementi}\} &\longrightarrow \{\text{spezzamenti}\} & \sigma(H) : E &\longrightarrow G \\ H &\longmapsto \sigma(H) & e = ha &\longmapsto hA \end{aligned}$$

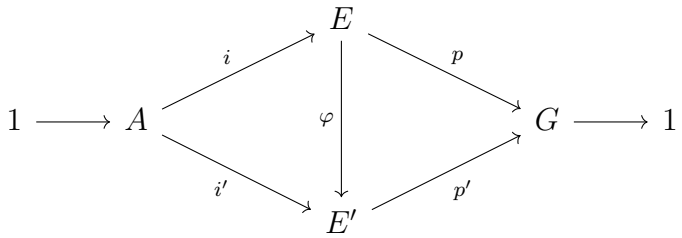
La mappa $\sigma(H)$ è ben definita perché H è un insieme di rappresentati di laterali sinistri di A. D'altra parte $\sigma(H)$ è un omomorfismo, infatti

$$\begin{aligned} \sigma(H)(h_0a_0 \cdot h_1a_1) &= \sigma(H)(h_0h_1 \cdot \underbrace{h_1^{-1}a_0h_1}_{\in A} a_1) \\ &= h_0h_1A \\ &= h_0A \cdot h_1A = \sigma(H)(h_0a_0) \cdot \sigma(H)(h_1a_1) \end{aligned}$$

Inoltre $\sigma(H)$ è evidentemente una sezione di p perché $p \circ \sigma(H)(hA) = p(ha) = hA = \mathrm{id}_G$. Infine è chiaro che ϕ e σ sono l'una l'inversa dell'altra.

■

Definizione 3.0.8 (isomorfismo di estensioni)**.** Siano $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1$ due estensioni di A, allora diremo che esse sono isomorfe se esiste esiste un **omomorfismo** di gruppi $\varphi : E \longrightarrow E'$ che faccia commutare il diagramma



in tal caso diremo che φ è un **isomorfismo** tra queste due estensioni.

Lemma 3.0.9. *Sia* $\varphi : E \longrightarrow E'$ *un omomorfismo tra le estensioni* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *e* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1$*. Allora* φ *è un isomorfismo di gruppi.*

[1] In questo contesto con $\rtimes$ si intende il prodotto semidiretto interno, cioè in cui l'azione di H su A è data dal coniugio in E.

Dimostrazione. Consideriamo $\{e_r\}_{r\in R}$ un insieme di rappresentati dei laterali sinistri di $i(A)$ in E, allora $\{\varphi(e_r)\}_{r\in R}$ è un insieme di rappresentanti di laterali sinistri di $i'(A)$ in E' perché $p'\circ\varphi = p$. Quindi possiamo costruire la mappa $E' \ni \varphi(e_r)i'(a) \overset{\psi}{\longmapsto} e_r i(a) \in E$. È evidente che questa mappa inverte φ', ci resta solo da far vedere che è un omomorfismo di gruppi

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(e_r)i'(a)\cdot\varphi(e_s)i'(b)) &= \psi(\varphi(e_r)\varphi(e_s)\cdot\varphi(e_s)^{-1}i'(a)\varphi(e_s)i'(b))) \\
&= \psi(\varphi(e_k i(c))\varphi(\underbrace{e_s^{-1}i(a)e_s}_{\in i(A)\trianglelefteq E})i'(b)) \\
&= \psi(\varphi(e_k)\cdot i'(c)i'(i^{-1}(e_s^{-1}i(a)e_s))i'(b)) \\
&= e_k i(c)e_s^{-1}i(a)e_s i(b) \\
&= e_r e_s e_s^{-1}i(a)e_s i(b) \\
&= e_r i(a)e_s i(b) = \psi(\varphi(e_r)i'(a))\psi(\varphi(e_s)i'(b))
\end{aligned}$$

■

Definizione 3.0.10. Sia G un gruppo e sia $x \in G$, allora indichiamo il coniugio per x con χ_x, quindi

- definiamo $\operatorname{Inn} G := \{\chi_x : x \in G\} \subseteq \operatorname{Aut} G$
- se $A \leq G$ allora definiamo $\operatorname{Inn}_A G := \{\chi_a : a \in A\}$
- se $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ è una estensione del gruppo **abeliano** A, allora definiamo $\operatorname{Aut}_{A,G} E$ il gruppo degli automorfismi dell'estensione, cioè

$$\operatorname{Aut}_{A,G} E := \{\varphi \in \operatorname{Aut} E \mid i = \varphi\circ i,\ p = p\circ\varphi\}$$

Osservazione 3.0.11. Osserviamo che $\operatorname{Inn} G \trianglelefteq \operatorname{Aut} G$ e $\operatorname{Inn} G \cong G/Z(G)$.
Allora è ben definito il gruppo $\operatorname{Out} G := \operatorname{Aut} G/\operatorname{Inn} G$. Vedi [Rot99, Cp. 7]

3.1 Coomologia ed estensioni

In questa sezione intendiamo investigare il rapporto tra la coomologia di gruppi e le estensioni di gruppi. Vedremo che i gruppi di coomologia più piccoli ci forniscono una descrizione utile delle estensioni di gruppi.

3.1.1 H^1 ed estensioni

Teorema 3.1.1. *Sia* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *una estensione con* ***nucleo abeliano****, allora*

$$H^1(G, A_\star) \cong \operatorname{Aut}_{A,G}(E)/\operatorname{Inn}_A(E)$$

Corollario 3.1.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente se l'estensione è* ***centrale*** *allora* $\operatorname{Inn}_A(E) = \{1\}$ *e quindi* $H^1(G, A_\star) = \operatorname{Aut}_{A,G} E$.

Per dimostrare questo teorema passiamo per un paio di lemmi intermedi

Lemma 3.1.3. *Nelle ipotesi del Teorema 3.1.1, vale che* $\operatorname{Inn}_A E \trianglelefteq \operatorname{Aut}_{A,G} E$.

Dimostrazione. Sia $a \in A$, allora, siccome A è abeliano, $\chi_a \circ i = i$. D'altra parte

$$\begin{aligned} p(\chi_a(e)) &= p(aea^{-1}) \\ &= \underbrace{p(a)}_{=1}\underbrace{p(ea^{-1}e^{-1})}_{=1}p(e) = p(e) \end{aligned}$$

Quindi $\chi_a \in \mathrm{Aut}_{A,G} E$, cioè $\mathrm{Inn}_A E \leq \mathrm{Aut}_{A,G} E$.
Inoltre se $\varphi \in \mathrm{Aut}_{A,G}(E)$ avremo che $\varphi(a) \in A$ e $\varphi \circ \chi_a \circ \varphi^{-1} = \chi_{\varphi(a)} \in \mathrm{Inn}_A E$. ■

Lemma 3.1.4. *Nelle ipotesi del Teorema 3.1.1 vale che* $\mathrm{Aut}_{A,G} E \cong Z^1(G, A_\star) = \mathrm{Der}(G, A)$[2].

Dimostrazione. Nella seguente dimostrazione identifichiamo A con $i(A)$ per semplicità. VOgliamo costruire un isomorfismo di gruppi $\phi : \mathrm{Aut}_{A,G} E \longrightarrow Z^1(G, A_\star)$, per fare ciò consideriamo una mappa $\varphi \in \mathrm{Aut}_{A,G} E$ e costruiamo il morfismo di gruppi $E \ni e \overset{f_\varphi}{\longmapsto} \varphi(e)e^{-1} \in E$, cosicché $\varphi(e) = f_\varphi(e)e$. In questo modo $\mathrm{Im}\, f_\varphi \subseteq A = \ker p$, perché

$$\begin{aligned} p \circ f_\varphi(e) &= p(\varphi(e)e^{-1}) \\ &= \underbrace{p(\varphi(e))}_{p\circ\varphi = p} p(e^{-1}) \\ &= p(e)p(e)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

D'altra parte $A \subseteq \ker f_\varphi$, infatti $f_\varphi(a) = \varphi(a)a^{-1} = aa^{-1} = 1$.

Passando al quoziente otteniamo la mappa $G \ni g = eA \overset{\widehat{f_\varphi}}{\longmapsto} f_\varphi(e) \in A$. Osserviamo che questa mappa è un elemento di $Z^1(G, A_\star)$ usando l'**equazione caratterizzante degli 1-cocicli** (2.7): consideriamo $e_0, e_1 \in E$ e $e_0A, e_1A \in G$, allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\varphi(e_0e_1A) = f_\varphi(e_0e_1) &= \varphi(e_0e_1)e_1^{-1}e_0^{-1} \\ &= \varphi(e_0)e_0^{-1}g\varphi(e_1)e_1^{-1}e_0^{-1} \\ &= \widehat{f}_\varphi(e_0A)e_0\widehat{f}_\varphi(e_1A)e_0^{-1} \\ &= \widehat{f}_\varphi(e_0A) +_A e_0A \star_A \widehat{f}_\varphi(e_1A) \end{aligned}$$

Quindi definiamo la mappa $\phi(\varphi) := \widehat{f}_\varphi$, verifichiamo che sia un omomorfismo di gruppi: consideriamo $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}_{A,G} E$, allora

$$\begin{aligned} \phi(\varphi \circ \psi)(eA) = \widehat{f}_{\varphi\circ\psi}(eA) &= \varphi(\psi(e))e^{-1} \\ &= \varphi(\widehat{f}_\psi(eA)e)e^{-1} \\ \text{φ fissa } a\in A \longleftarrow\ &= \widehat{f}_\psi(eA)\varphi(e)e^{-1} \\ &= \widehat{f}_\psi(eA)\widehat{f}_\varphi(eA) \\ A \text{ è abeliano} \longleftarrow\ &= \widehat{f}_\varphi(eA)\widehat{f}_\psi(eA) \\ &= \phi(\varphi)(eA) +_A \phi(\psi(eA)) = (\phi(\varphi) + \phi(\psi))(eA) \end{aligned}$$

Ci rimane solo da verificare che sia un isomorfismo, per fare ciò costruiamo una inversa:

$$\begin{aligned} \sigma : Z^1(G, A_\star) &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{A,G} E \\ c &\longmapsto \sigma(c) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma(c) : E &\longrightarrow E \\ e &\longmapsto c(\underbrace{eA}_{=p(e)})e \end{aligned}$$

[2]Per la definizione di Der vedi 2.3.12

Verifichiamo che $\sigma(c)$ è un omomorfismo

$$\begin{aligned}\sigma(c)(e_0e_1) &= c(e_0e_1A)e_0e_1\\ \text{per (2.7)} \longleftarrow &= c(e_0A)e_0c(e_1A)e_0^{-1}e_0e_1\\ &= \sigma(c)(e_0)\sigma(c)(e_1)\end{aligned}$$

ora verifichiamo che $\sigma(c) \in \mathrm{Aut}_{A,G} E$

$$\begin{aligned}\sigma(c)(a) = c(A)a = a &\qquad \Longrightarrow \sigma(c)\circ i = i\\ p(\sigma(c)(e)) = p(c(eA)e) = \underbrace{p(c(eA))}_{p(A)=1}p(e) &\qquad \Longrightarrow p\circ\sigma(c) = p\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che σ e ϕ sono una lpinversa dell'altra,dunque ϕ è un isomorfismo. ■

Lemma 3.1.5. *Nelle ipotesi del Teorema 3.1.1 vale che* $\mathrm{Inn}_A E \cong B^1(G, A_\star) = \mathrm{Inn}(G, A)$[3]*, tramite una restrizione dell'isomorfismo* $\mathrm{Aut}_{A,G} E \cong Z^1(G, A_\star)$ *visto nel Lemma 3.1.4.*

Dimostrazione. Consideriamo la mappa ϕ del Lemma 3.1.4, allora se $a \in A$

$$\begin{aligned}\phi(\mu_a)(eA) &= \mu_a(e)e^{-1}\\ &= a\underbrace{ea^{-1}e^{-1}}_{\in A}\\ &= eae^{-1}a\\ &= eA \star_A a^{-1} +_A a = eA \star_A a^{-1} - a^{-1}\end{aligned}$$

questo verifica la **condizione di 1-cobordo** (2.8), per cui $\phi(\mathrm{Inn}_A E) \subseteq B^1(G, A_\star)$. Mostriamo che vale anche il viceversa usando l'inversa di ϕ cioè σ, anch'essa deinita nella dimostrazione del lemma 3.1.4. Sia $c_a(eA) := eA \star_A a - a = eae^{-1}a^{-1} = [e, a]$

$$\begin{aligned}\sigma(c_a)(e) &= c_a(eA)e\\ &= eae^{-1}a^{-1}e\\ &= ee^{-1}a^{-1}ea = \chi_{a^{-1}}(e)\end{aligned}$$

quindi $\sigma(B^1(G, A_\star)) \subseteq \mathrm{Inn}_A E$. ■

Dimostrazione(Del Teorema 3.1.1). Dai Lemmi 3.1.3, 3.1.5, 3.1.5 segue che $H^1(G, A_\star) = Z^1(G, A_\star)/B^1(G, A_\star) \cong \mathrm{Aut}_{A,G}(E)/\mathrm{Inn}_A(E)$. ■

Teorema 3.1.6 (di corrispondenza H^1)**.** *Sia* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *una* ***estensione scissa****. Allora c'è una biezione tra* $H^1(G, A_\star)$ *e le classi di coniugio rispetto alla moltiplicazione per elementi di A degli spezzamenti* $s : G \longrightarrow E$ *dell'estensione.*

Dimostrazione. Sia s una sezione per p, allora consideriamo la mappa

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{Aut}_{A,G} E &\longrightarrow \{\text{spezzamenti}\}\\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ s\end{aligned}$$

[3]Per la definizione di $\mathrm{Inn}(G, A)$ vedi 2.3.12

si osserva che $\varphi \circ s$ è uno spezzamento perché $p \circ \varphi \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_G$.
Invertiamo ϕ tramite la mappa σ così definita

$$\begin{aligned} \sigma : \{\text{spezzamenti}\} &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{A,G} E & \sigma(s') : E &\longrightarrow E \\ s' &\longmapsto \sigma(s') & e = as(eA) &\longmapsto as'(eA) \end{aligned}$$

la mappa $\sigma(s')$ è ben definita perché $A \trianglelefteq E$, quindi gli $\{s(eA) : e \in E\}$ formano una famiglia di rappresentanti dei laterali sia destri che sinistri, quindi ogni elemento può essere univocamente determinato da un prodotto di un elemento di $i(A)$ ed un elemento di $s(G)$. Allora $\sigma(s') \in \mathrm{Aut}_{A,G} E$ perché

$$\begin{aligned} \sigma(s')(e_0e_1) &= \sigma(s')(a_0 s(e_0A) \cdot a_1 s(e_1A)) \\ &= \sigma(s')(a_0 s(\underbrace{(e_0A)a_1 s(e_0A)^{-1}}_{=e_0A \star_A a_1} s(e_0e_1A)) \\ &= a_0 s'(e_0A) a_1 s'(e_0A)^{-1} s'(e_0e_1A) \\ &= a_0 s'(e_0A) a_1 s'(e_1A) && \Longrightarrow \sigma(s') \text{ è omomorfismo} \end{aligned}$$

$$\sigma(s')(a) = as'(A) = a \qquad \Longrightarrow \sigma(s') \circ i = i$$

$$p(\sigma(s')(e)) = p(a \cdot s'(eA)) = p(s'(eA)) = eA \qquad \Longrightarrow p \circ \sigma(s') = p$$

Rimane solo da verificare che σ e ϕ sono una l'inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} \phi(\sigma(s'))(eA) &= \sigma(s')(s(eA)) = s'(eA) \\ \sigma(\phi(\varphi))(e) &= \sigma(\varphi \circ s)(as(eA)) = a\varphi(s(eA)) = \varphi(a \cdot s(eA)) = \varphi(e) \end{aligned}$$

A questo punto quozientiamo $\mathrm{Aut}_{A,G} E$ per il sottogruppo $\mathrm{Inn}_A(E)$ e consideriamo la relazione di equivalena indotta tramite l'isomorfismo ϕ sull'insieme degli spezzamenti:

$$s_0 \sim s_1 \Longleftrightarrow \sigma(s_0) \circ \sigma(s_1)^{-1} \in \mathrm{Inn}_A E.$$

Osserviamo che $\sigma(s_0) \circ \sigma(s_1)^{-1}(as_1(eA)) = as_0(eA)$, allora $\sigma(s_0) \circ \sigma(s_1)^{-1} = \chi_b \in \mathrm{Inn}_A(E)$ se e solo se

$$bas_0(eA)b^{-1} = as_1(eA) \quad \forall\, a \in A, e \in E$$

cioè se e solo se $s_0 = \chi_b \circ s_1$. Così otteniamo una biezione tra $H^1(G, A_\star) = \mathrm{Aut}_{A,G} E / \mathrm{Inn}_A E$ e gli spezzamenti a meno di coniugio rispetto a elementi di A. ■

Corollario 3.1.7. *Sia $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una **estensione scissa**, allora c'è una biezione tra $H^1(G, A_\star)$ e le classi di coniugio in E dei complementi di A.*

Dimostrazione. Questa è una conseguenza diretta dell'osservazione 3.0.7 per la quale c'è una corrispondenza tra spezzamenti e complementi

$$\begin{aligned} \{\text{spezzamenti}\} &\longrightarrow \{\text{complementi}\} \\ s &\longmapsto s(G) \\ (hA \xmapsto{s} h \in H) &\longleftarrow\!\shortmid H \end{aligned}$$

Inoltre, siccome $AH = E$, abbiamo che le classi di coniugio rispetto ad A di H sono le classi di coniugio rispetto ad E di H. ■

3.1.2 H^2 ed estensioni

Abbiamo già visto come $H^1(G, A_\star)$ è in corrispondenza con gli automorfismi dell'estensione $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$, ora vogliamo mettere $H^2(G, A_\star)$ in corrispondenza con le classi di isomorfismo delle estensioni di A, questo risultato è da attribuire a **Baer**, nell'articolo [Bae34], ma in origine fu ottenuto senza la formalizzazione dell'omologia e coomologia.

Teorema 3.1.8 (di **Baer**). *Sia* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *una estensione del gruppo abeliano* A. *Allora esiste una biezione tra* $H^2(G, A_\star)$ *e l'insieme dei classi di isomorfismo di estensioni di* A *con* ***conucleo*** G *ed azione* $\star_A$.

Dimostrazione. Costruiamo una mappa $\sigma : \{\text{estensioni}\} \longrightarrow H^2(G, A)$. Consideriamo $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ una estensione e $s : G \longrightarrow E$ un'inversa destra di p (non necessariamente un omomorfismo di gruppi), chiamiamo tale mappa sezione insiemistica. Quindi costruiamo la mappa

$$\begin{aligned} f_s : G \times G &\longrightarrow E \\ (g_0, g_1) &\longmapsto s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1} \end{aligned}$$

in modo che $f_s(g_0, g_1)s(g_0g_1) = s(g_0)s(g_1)$. Si osserva che $\operatorname{Im} f_s \subseteq A = \ker p$, infatti

$$\begin{aligned} p(f_s(g_0, g_1)) &= p(s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1}) \\ &= p(s(g_0))p(s(g_1))p(s(g_0g_1))^{-1} \\ &= g_0g_1(g_0g_1)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Usando l'equazione (2.9), osserviamo che f_s è un 2-cociclo:

$$\begin{aligned} g_0 \star_A f_s(g_1, g_2) +_A f_s(g_0, g_1g_2) &= s(g_0)f_s(g_1, g_2)s(g_0)^{-1}f_s(g_0, g_1g_2) \\ &= s(g_0)s(g_1)s(g_2)s(g_0g_1g_2)^{-1} \\ &= f_s(g_0g_1, g_2)f_s(g_0, g_1) \\ &= f_s(g_0, g_1) +_A f_s(g_0g_1, g_2) \end{aligned}$$

Ora vogliamo fare in modo che f_s non dipenda dalla scelta della sezione insiemistica s, quindi consideriamo s' un'altra sezione di p e la mappa $G \ni g \xmapsto{c} s'(g)s(g)^{-1} \in A$, allora abbiamo che $s'(g) = c(g)s(g)$, quindi

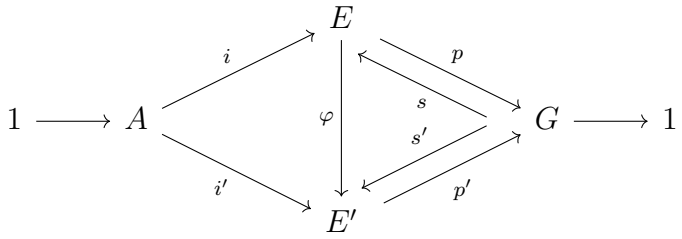
$$\begin{aligned} f_{s'}(g_0, g_1) &= s'(g_0)s'(g_1)s'(g_0g_1)^{-1} \\ &= c(g_0)s(g_0)c(g_1)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1}c(g_0g_1)^{-1} \\ &= c(g_0)s(g_0)c(g_1)s(g_0)^{-1}f_s(g_0, g_1)c(g_0g_1)^{-1} \\ \xleftarrow{A \text{ abeliano}} &= c(g_0)s(g_0)c(g_1)s(g_0)^{-1}c(g_0g_1)^{-1}f_s(g_0g_1) \\ &= s(g_0)c(g_1)s(g_0)^{-1}c(g_0g_1)^{-1}c(g_0)f_s(g_0, g_1) \\ &= \underbrace{g_0 \star_A c(g_1) -_A c(g_0g_1) +_A c(g_0)}_{\delta^{2\star}(c)([g_0,g_1])} +_A f_s(g_0, g_1) \end{aligned}$$

per l'equazione caratterizzante dei 2-cobordi (2.10), abbiamo che

$$f_{s'} + B^2(G, A_\star) = f_s + B^2(G, A_\star) \in H^2(G, A_\star).$$

Quindi possiamo definire $\sigma(1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1) := f_s + B^2(G, A_\star)$.

Ora vogliamo quozientare questa mappa per la relazione di isomorfismo tra estensioni, per fare ciò dobbiamo mostrare che la mappa è costante sulle classi, allora consideriamo il diagramma commutativo



quindi $s' = \varphi \circ s$ e

$$\begin{aligned} f_{s'}(g_0, g_1) &= \varphi(s(g_0))\varphi(s(g_1))\varphi(s(g_0g_1))^{-1} \\ &= \varphi(s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1}) \\ &= \varphi(f_s(g_0, g_1)) \end{aligned}$$

ma $f_s(g_0, g_1) \in A$ e per la commutatività del diagramma φ fissa gli elementi di A e quindi $\varphi(f_s(g_0, g_1)) = f_s(g_0, g_1)$. Allora

$$\sigma(1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1) = \sigma(1 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1).$$

In conclusione è possibile costruire la mappa al quoziente $\widehat{\sigma} : \{\text{estensioni a meno di iso.}\} \longrightarrow H^2(G, A_\star)$.

Proviamo ora che la mappa $\widehat{\sigma}$ è una biezione:

suriettività: consideriamo $[f] \in H^2(G, A_\star)$ con $f \in Z^2(G, A_\star)$ tale che $f(1,1) = 1$[4] il che è sempre possibile grazie alla libertà che ci danno i cobordi. Vogliamo costruire una estensione di A con conucleo G che tramite σ è mandata in $[f]$. Consideriamo la costruzione del prodotto semidiretto $A \rtimes_\star G$[5], dove il prodotto è definito da

$$\begin{aligned} (A \times G)^2 &\xrightarrow{\bullet} A \times G \\ (a_0, g_0), (a_1, g_1) &\longmapsto (a_0 +_A g_0 \star a_1, g_0g_1) \end{aligned}$$

l'idea è quella di modificare questo prodotto semidiretto in modo che generi una estensione la cui immagine tramite σ sia $[f]$, per fare ciò consideriamo il gruppo $E_f := (A \times G, \bullet)$ con

$$\begin{aligned} (A \times G)^2 &\xrightarrow{\bullet} A \times G \\ (a_0, g_0), (a_1, g_1) &\longmapsto (a_0 +_A g_0 \star_A a_1 +_A f(g_0, g_1), g_0g_1) \end{aligned}$$

quindi si considera l'estensione $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} E_f \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1$ con

$$\begin{aligned} \iota : A &\longrightarrow E_f & \qquad \rho : E_f &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto (a, 1) & \qquad (a, g) &\longmapsto g \end{aligned}$$

[4]Questa condizione è importante affinché il prodotto su E_f sia ben definito e $(1,1)$ sia l'elemento neutro. Inoltre dalla caratterizzazione di 2-cociclo (2.9) si deduce che $f(1, g) = f(1, 1) = 1$.

[5]Qui stiamo considerando il prodotto semidiretto esterno con azione $\star_A$ di G su A, la quale è data dalla definizione di $A_\star$ (3.0.2).

quindi ι e ρ sono due omomorfismi di gruppi e la successione corta, sopra definita, è esatta. consideriamo la sezione insiemistica[6] di ρ così definita $G \ni g \overset{s}{\longmapsto} (1, g) \in E_f$ ed avrò

$$\begin{aligned} f_s(g_0, g_1) &= s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1} \\ &= (1, g_0) \bullet (1, g_1) \bullet (1, g_0g_1)^{-1} \\ &= (f(g_0, g_1), g_0g_1) \bullet (1, g_0g_1)^{-1} \\ &= (f(g_0, g_1), 1) \bullet (1, g_0, g_1) \bullet (1, g_0g_1)^{-1} \\ &= (f(g_0, g_1), 1) \end{aligned}$$

in queste ultime uguaglianze abbiamo usato il fatto che $f(1, g) = f(1, 1) = 1$ e quindi $(a, 1) \bullet (1, g) = (a, g)$.
In conclusione abbiamo mostrato che $\sigma(1 \longrightarrow A \overset{\iota}{\longrightarrow} E_f \overset{\rho}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1) = [f_s] = [f]$.

initettività: consideriamo $1 \longrightarrow A \overset{i}{\longrightarrow} E \overset{p}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$, $1 \longrightarrow A \overset{i'}{\longrightarrow} E' \overset{p'}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$ due estensioni tali che

$$\widehat{\sigma}([1 \longrightarrow A \overset{i}{\longrightarrow} E \overset{p}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1]) = \widehat{\sigma}([1 \longrightarrow A \overset{i'}{\longrightarrow} E' \overset{p'}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1]) = [f].$$

Come prima, prendiamo $f \in Z^1(G, A_\star)$ tale che $f(1, 1) = 1$ e costruaimo E_f, con la relativa estensione $1 \longrightarrow A \overset{\iota}{\longrightarrow} E_f \overset{\rho}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$. Consideriamo s sezione insiemistica di p tale che $f_s = f$. Allora la mappa $E_f \ni (a, g) \longmapsto as(g) \in E$ è un isomorfismo di estensioni. Analogamente, possiamo costruire un isomorfismo di estensioni anche tra E' e E_f.

■

Corollario 3.1.9 (di Gaschütz)**.** *Sia $\phi : H^2(G, A_\star) \longrightarrow \{$estensioni a meno di iso.$\}$ la corrispondenza descritta nel Teorema 3.1.8. Si consideri la mappa $G \times G \ni (g, h) \overset{f}{\longmapsto} 1 \in A_\star$, allora $\phi([f])$ è l'insieme delle **estensioni scisse** di A con conucleo G e azione $\star_A$. In particolare le estensioni scisse sono tra loro isomorfe.*

Dimostrazione. Osserviamo che le **estensioni scisse**, con azione $G \overset{\star}{\curvearrowright} A$, sono tutte isomorfe all'estensione

$$1 \longrightarrow A \overset{\iota}{\longrightarrow} A \rtimes_\star G \overset{\rho}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$$

tramite la mappa $E \ni e = as(eA) \longmapsto (a, eA) \in A \rtimes G$, dove s è una sezione di p (questa volta intesa come omorfismo di gruppi).
Consideriamo l'estensione $1 \longrightarrow A \overset{\iota}{\longrightarrow} A \rtimes_\star G \overset{\rho}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$, con le mappe ι e ρ definite come nella dimostrazione del Teorema 3.1.8, essa ammette spezzamento s, quindi $f_s(g_0, g_1) = s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1} = 1$, dunque $[f_s] = [f]$, pertanto $\phi([f]) = [1 \longrightarrow A \overset{\iota}{\longrightarrow} A \rtimes_\star G \overset{\rho}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1]$. ■

3.2 Somma di Baer

In questa sezione studieremo l'operazione di somma di Baer. Vedremo che essa traduce la somma dei cocicli in $H^2(G, A)$ in somma di estensioni tramite l'isomorfismo introdotto nel **teorema di Baer** 3.1.8.

[6] Qui sezione è inteso come mappa insiemistica e non come omomorfismo di gruppi, coerentemente con quanto fatto nel resto della dimostrazione.

Siano $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1$, $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} G \longrightarrow 1$ due estensioni con nucleo abeliano, allora consideriamo l'estensione

$$1 \longrightarrow A \times A \xrightarrow{i_1 \times i_2} E_1 \times E_2 \xrightarrow{p_1 \times p_2} G \longrightarrow 1.$$

Consideriamo inoltre i gruppi

$$\begin{aligned} \Delta_G &:= \{(g,g) \in G \times G\} \leq G \times G \\ E_1 \times_G E_2 &:= \{(e_1,e_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(e_1) = p_2(e_2)\} = (p_1 \times p_2)^{-1}(\Delta_G) \leq E_1 \times E_2 \\ \Delta_A &:= \{(a,a^{-1}) \in A \times A\} \leq A \times A \\ E_1 + E_2 &:= E_1 \times_G E_2/(i_1 \times i_2)(\Delta_A) \end{aligned}$$

e gli isomorfismi

$$\begin{aligned} \psi : \Delta_G &\longrightarrow G & \qquad \phi : (A \times A)/\Delta_A &\longrightarrow A \\ (g,g) &\longmapsto g & (a,b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Definizione 3.2.1 (Somma di Baer)**.** Date $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1$ e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} G \longrightarrow 1$ due estensioni con nucleo abeliano, consideriamo le mappe $p_1 + p_2 = \psi \circ \widehat{p_1 \times p_2}|_{E_1 \times_G E_2}$[7] e $i_1 + i_2 = \widehat{i_1 \times i_2} \circ \phi^{-1}$[8], allora la **somma di Baer** delle due estensioni date è l'estensione

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1+i_2} E_1 + E_2 \xrightarrow{p_1+p_2} G \longrightarrow 1.$$

Proposizione 3.2.2. *La classe di isomorfismo della somma di Baer è invariante per isomrofismo degli addendi. Cioè dati i seguenti diagrammi commutativi con righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{p_1} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G} & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1'} & E_1' & \xrightarrow{p_1'} & G & \longrightarrow & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{p_2} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G} & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2'} & E_2' & \xrightarrow{p_2'} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

dove φ_1, φ_2 sono isomorfismi di estensioni, allora le estensioni

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1+i_2} E_1 + E_2 \xrightarrow{p_1+p_2} G \longrightarrow 1 \quad e \quad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1'+i_2'} E_1' + E_2' \xrightarrow{p_1'+p_2'} G \longrightarrow 1$$

sono tra loro isomorfe.

Dimostrazione. Consideriamo l'isomorfismo $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2$, esso induce un isomorfismo $\widehat{\varphi} : E_1 + E_2 \longrightarrow E_1' + E_2'$ restringendo e passando al quoziente, infatti:

$$\begin{aligned} (p_1' \times p_2') \circ \varphi = p_1 \times p_2 \qquad &\Longrightarrow \varphi((p_1 \times p_2)^{-1}(\Delta_G) = (p_1' \times p_2')^{-1}(\Delta_G) \\ (i_1' \times i_2') \circ \varphi = i_1 \times i_2 \qquad &\Longrightarrow \varphi((i_1 \times i_2)^{-1}(\Delta_A) = (i_1' \times i_2')^{-1}(\Delta_A) \end{aligned}$$

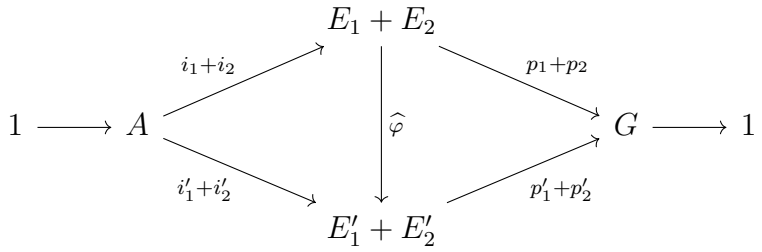
[7] $\widehat{p_1 \times p_2}$ è l'omomorfismo indotto da $(p_1 \times p_2)|_{E_1 \times_G E_2}$ rispetto al quozeinte $E_1 \times_G E_2/(i_1 \times i_2)(\Delta_A)$.
[8] $\widehat{i_1 \times i_2}$ è l'omomorfismo indotto da $i_1 \times i_2$ rispetto ai quozeinti $(A \times A)/\Delta_A$ e $E_1 \times_G E_2/(i_1 + i_2)(\Delta_A)$.

D'altra parte

$$\begin{aligned}(p_1' + p_2')(\widehat{\varphi}[e_1, e_2]) &= \psi(p_1'(\varphi_1(e_1)), p_2'(\varphi_2(e_2))) \\ &= \psi(p_1(e_1), p_2(e_2)) \\ &= (p_1 + p_2)[e_1, e_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}((i_1' + i_2')(a)) &= \widehat{\varphi}(\widehat{i_1' \times i_2'}(\phi^{-1}(a))) \\ &= \widehat{\varphi}(\widehat{i_1' \times i_2'}([a, 1])) \\ &= \widehat{\varphi}[i_1'(a), i_2'(1)] \\ &= [\varphi_1(i_1'(a)), \varphi(i_2'(1))] \\ &= [i_1(a), i_2(1)] = (i_1 + i_2)(a)\end{aligned}$$

cioè il seguente diagramma commuta



Quindi $\widehat{\varphi}$ è un isomorfismo di estensioni e quindi la classe di isomorfismo della somma di Baer è invariante per isomorfismo degli addendi. ■

Proposizione 3.2.3. *Se* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1$ *e* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} G \longrightarrow 1$ *due estensioni che inducono la stessa azione* $G \overset{\star}{\curvearrowright} A$*. Allora la somma di Baer* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1+i_2} E_1 + E_2 \xrightarrow{p_1+p_2} G \longrightarrow 1$ *induce la stessa azione* $\star$ *su* A*.*

Dimostrazione. Sia s una sezione insiemistica di $p_1 + p_2$, consideriamo $g \in G$ e $s(g) := [e_1, e_2] \in E_1 + E_2$, allora $g = (p_1 + p_2)[e_1, e_2] = p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Quindi non è restrittivo scrivere $s(g) = [s_1(g), s_2(g)]$ dove s_1 e s_2 sono sezioni insiemistiche di p_1 e p_2 rispettivamente. Consideriamo $g \bullet a$ l'azione indotta da $E_1 + E_2$ di G su A, quindi

$$\begin{aligned}g \bullet a &= (i_1 + i_2)^{-1}(s(g)(i_1 + i_2)(a)s(g)^{-1}) \\ &= (i_1 + i_2)^{-1}([s_1(g), s_2(g)][a, 1][s_1(g)^{-1}, s_2(g)^{-1}]) \\ &= (i_1 + i_2)^{-1}([s_1(g)as_1(g)^{-1}, 1]) \\ &= s_1(g)as_1(g)^{-1} = g \star a\end{aligned}$$

■

Proposizione 3.2.4. *Sia* $\sigma : \{$*estensioni a meno di iso.*$\} \longrightarrow H^2(G, A_\star)$ *la corrispondenza del Teorema 3.1.8, allora la somma di Baer corrisponde alla somma in* $H^2(G, A_\star)$ *tramite* σ*. Cioè*

$$\sigma(E_1 + E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2).$$

Dimostrazione. Consideriamo $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1$ e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} G \longrightarrow 1$ due estensioni che inducono la stessa azione $G \overset{\star}{\curvearrowright} A$. Consideriamo, inoltre, s_1,

s_2 sezioni insiemistiche di p_1 e p_2 rispettivamente, allora i 2-cocicli associati a s_1 e s_2 sono rispettivamente:

$$f_{s_1}(g_0, g_1) = s_1(g_0)s_1(g_1)s_1(g_0g_1)^{-1}$$
$$f_{s_2}(g_0, g_1) = s_2(g_0)s_2(g_1)s_2(g_0g_1)^{-1}$$

Consideriamo la somma di Baer $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1+i_2} E_1 + E_2 \xrightarrow{p_1+p_2} G \longrightarrow 1$ e la sezione insiemistica s di $p_1 + p_2$ così definita $s(g) = [s_1(g), s_2(g)]$. Allora il 2-cociclo associato a s è

$$\begin{aligned} f_s(g_0, g_1) &= s(g_0)s(g_1)s(g_0g_1)^{-1} \\ &= [s_1(g_0), s_2(g_0)][s_1(g_1), s_2(g_1)][s_1(g_0g_1)^{-1}, s_2(g_0g_1)^{-1}] \\ &= [s_1(g_0)s_1(g_1)s_1(g_0g_1)^{-1}, s_2(g_0)s_2(g_1)s_2(g_0g_1)^{-1}] \\ &= [f_{s_1}(g_0, g_1), f_{s_2}(g_0, g_1)] \\ &= (i_1 + i_2)(f_{s_1}(g_0, g_1) +_A f_{s_2}(g_0, g_1)). \end{aligned}$$

Per la proposizione 3.2.3 la somma di Baer è una estesnione di A con conucleo G e azione $\star$, quindi $\sigma(E_1 + E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$. ■

Capitolo 4

Applicazioni

In questo capitolo vedremo un'applicazione della teoria coomologica dei gruppi, in particolare studieremo i teoremi di **Schur** e **Zassenhaus** che più comunemente vengono accorpati in un unico risultato a cui ci si riferisce con il nome di **teorema di Schur-Zassenhaus**.

Lemma 4.0.1. *Siano G un gruppo finito e M un $\mathbb{Z}[G]$-modulo, allora $|G| \cdot H^n(G, M) = 0$ per ogni $n \geq 1$*

Dimostrazione. Consideriamo la composizione delle mappe

$$H^n(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}^G_{\{1\}}} H^n\left(\{1\}, \mathrm{Res}^G_{\{1\}} M\right) \xrightarrow{\mathrm{Tr}^G_{\{1\}}} H^n(G, M).$$

Sappiamo, per lo studio della coomologia dei gruppi ciclici (2.4), che

$$H^n\left(\{1\}, \mathrm{Res}^G_{\{1\}} M\right) = \begin{cases} M & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

inoltre, per (2.6.4), sappiamo che

$$\mathrm{Tr}^G_{\{1\}} \circ \mathrm{Res}^G_{\{1\}}(\underbrace{[z^n]}_{\in H^n(G,M)}) = [G : \{1\}] \cdot m = |G| \cdot [z^n]$$

quindi per ogni $n \geq 1$ abbiamo che $|G| \cdot m = 0 \quad \forall\, m \in M$ ■

Proposizione 4.0.2 (Sull'ordine dei gruppi di coomologia)**.** *Siano G un gruppo finito e M un $\mathbb{Z}[G]$-modulo finitamente generato, allora*

1. *$H^0(G, M)$ è un gruppo abeliano finitamente generato*
2. *$H^n(G, M)$ è un gruppo finito per ogni $n \geq 1$ ed in particolare $|H^n(G, M)| \mid |G|^k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$*

Dimostrazione.

1. Dato che G è un gruppo finito, lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo $S_n := \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ è finitamente generato e quindi la risoluzione standard $S_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ è composta da moduli finitamente generati. Ora consideriamo il complesso di catene $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(S_\bullet, \mathbb{Z})$ che è anch'esso composta da $\mathbb{Z}$-moduli finitamente generati grazie al fatto che S_n e $\mathbb{Z}$ sono finitamente generati. Passando alla coomologia di questo complesso, ottengo i gruppi abeliani $H^n(G, A)$, che sono in particolare $\mathbb{Z}$-moduli finitamente generati.

2. Per il lemma precedente $|G| \cdot H^n(G.M) = 0$, allora i generatori di $H^n(G, M)$ hanno ordine che divide G, per il **teorema di struttura dei moduli finitamente generati su P.I.D.** (vedi A.5.2) abbiamo che $H^n(G, M) = \prod_{i \in I} \mathbb{Z}_{/p_i^{n_i}}$ dove i p_i sono numeri primi che dividono $|G|$ e l'insieme dei loro indici I è finito.

■

4.1 Il Teorema di Schur-Zassenhaus

Teorema 4.1.1 (di Schur)**.** *Siano G un gruppo finito, A un gruppo abeliano e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ una estensione di A con conucleo G. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \cdot A_\star = 0$, allora se $(|G|, m) = 1$*

1. *L'estensione è **scissa***
2. *Ogni complemento di A in E è coniugato*

Dimostrazione. Sia $n \geq 1$, quindi per la proposizione 4.0.2 abbiamo che $|G| \cdot H^n(G, A) = 0$, d'altra parte per ogni $a \in A_\star$ si ha $m \cdot a = 0$, quindi se $f \in H^n(G, A)$ si ha $m \cdot f(g) = 0$ per ogni $g \in G$, cioè $m \cdot H^n(G; A) = 0$. D'altra parte $(m, |G|) = 1$ per cui per il **Lemma di Bezout** esistono $r, s \in \mathbb{Z}$ tali che

$$rm + s|G| = 1 \Longrightarrow H^n(G, A) = (rm + s|G|) \cdot H^n(G; A) = \{0\}.$$

In conclusione abbiamo mostrato che $H^2(G, A) = \{0\}$ per cui, per il Teorema 3.1.8, l'estensione $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ deve appartenere alla classe di isomorfismo banale e quindi è **scissa**, cioè $E = A \rtimes_\star G$. D'altra parte $H^1(G, A) = 0$ quindi, per il corollario 3.1.7, tutti i complementi di A in E sono coniugati. ■

Corollario 4.1.2. *Siano A, G gruppi finiti con A abeliano e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ una estensione di A con conucleo G. Allora, se $(|A|, |G|) = 1$*

1. *L'estensione è **scissa***
2. *Ogni complemento di A in E è coniugato*

Dimostrazione. Osserviamo che $|A| \cdot A_\star = 0$, quindi dal Teorema 4.1.1 la tesi segue. ■

Osservazione 4.1.3. Se A è finito il corollario 4.1.2 copre tutti i casi $m \in \mathbb{N}$ del **teorema di Schur** (4.1.1), infatti $(m, |G|) = 1$ implica $(|A|, |G|) = 1$ perché se esiste p primo che divide $|A|$ allora per il **Teorema di Cauchy** esiste un elemento di ordine p in A e quindi $p \mid m$.

Teorema 4.1.4 (di Zassenhaus)**.** *Siano A, G gruppi finiti e $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ una estensione di A con conucleo G. Se $(|A|, |G|) = 1$ allora l'estensione è **scissa**.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $|A|$

- Se $|A| = 1$ oppure $|A|$ è primo avremo che A è ciclico, quindi abeliano e per il **teorema si Schur con $|A|$ finito** (4.1.2) otteniamo la tesi.

- se $|A| > 1$ consideriamo $p \mid |A|$ primo e P un p-Sylow in A. Quindi consideriamo $N := N_E(P) := \{e \in E : ePe^{-1}\}$.
  Osserviamo che $E = AN$ perché se $e \in E$ allora P e ePe^{-1} sono p-Sylow du A e dunque per il **secondo teorema di Sylow** sono A-coniugati, cioè esiste $a \in A$ tale che $aPa^{-1} = ePe^{-1}$, dunque $P = (a^{-1}e)P(a^{-1}e)^{-1}$, per cui $a^{-1}e \in N$. Allora $e = a(a^{-1}e) \in AN$.
  Mostriamo che A ammette complemento in E, distinguiamo due casi

  Se $N \neq E$: consideriamo la successione $1 \longrightarrow A \cap N \xrightarrow{i|_{A\cap N}} N \xrightarrow{p|_N} G \longrightarrow 1$. Osserviamo che $p|_N$ è suriettiva perché $E/A = (AN)/A \cong N/(A \cap N)$. Per ipotesi induttiva questa estensione spezza e quindi esiste $H \leq N$ tale che $H \cap A = \emptyset$ e $N = AH$. Allora $E = AN = AAH = AH$ e $A \cap H = \emptyset$ per cui H è un complemento di A in E.

  Se $N = E$: consideriamo $Z := Z(P)$. Osserviamo che Z è invariante per gli automorfismi di P e $Z \leq P \trianglelefteq N = E$ quindi $Z \trianglelefteq E$. Consideriamo l'estensione $1 \longrightarrow A/Z \xrightarrow{\widehat{i}} E/Z \xrightarrow{\widehat{p}} G \longrightarrow 1$, quindi per ipotesi induttiva essa spezza, cioè esiste $F/Z \cong G$ tale che $A/Z \cdot F/Z = E/Z$. Allora $A/Z \cap F/Z = \{1\}$, quindi $A \cap F \subseteq Z$. Infine osserviamo che $|Z| \mid A$ e $|F/Z| = |G|$, allora $(|A|, |F/Z|) = 1$. Se consideriamo l'estensione $1 \longrightarrow Z \longrightarrow F \longrightarrow F/Z \longrightarrow 1$ essa spezza per il **teorema di schur**, quindi esiste $H \leq F$ tale che $H \cong F/Z \cong G$ e $ZH = F$. Quindi $H \cap Z = \{1\}$ e allora $H \cap A = H \cap A \cap F \subseteq H \cap Z = \{1\}$ e $|H| \cdot |A| = |G| \cdot |A| = |E|$, quindi $E = AH$.

  ■

Appendice A

Risultati preliminari

In questo capitolo si introducono alcuni strumenti necessari per poter parlare di algebra omologica. Si assume che i risultati di questa sezione siano già chiari al lettore, ma si riportano per completezza.

A.1 Successioni esatte

Definizione A.1.1 (Successione esatta in M)**.** Siano L, M, N R-moduli e $\varphi : L \longrightarrow M$, $\psi : M \longrightarrow N$ due morfismi di R-moduli, allora la **successione**

$$L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N$$

si dice esatta in M se $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$.

Definizione A.1.2 (successione esatta)**.** Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una successione di R-moduli, e siano $\varphi_n : M_n \longrightarrow M_{n+1}$ morfismi di R-moduli, allora la **successione**

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

si dice **esatta** se ogni successione breve $M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1}$ è esatta in M_n per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione A.1.3 (Successione esatta corta)**.** La successione corta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

si dice **esatta** se e solo se φ è iniettiva, $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$ e ψ è suriettiva.

Osservazione A.1.4. Data una qualsiasi categoria $\mathcal{A}$ è possibile definire le successioni esatte in maniera analoga a quelle dei moduli. Ad esempio noi useremo le **successioni esatte di complessi di catene**(1.1.12) e le **successioni esatte di gruppi** (3.0.1).

Lemma A.1.5 (Snake Lemma)**.** *Supponiamo che il seguente diagramma composto da R-moduli e R-omomorfismi sia commutativo e abbia righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\psi} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow[\varphi']{} & M' & \xrightarrow[\psi']{} & N' & & \end{array}$$

Allora esiste una una ***successione esatta***

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{\varphi} & \ker g & \xrightarrow{\psi} & \ker h \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \operatorname{coker} h & \xleftarrow[\widehat{\psi'}]{} & \operatorname{coker} g & \xleftarrow[\widehat{\varphi'}]{} & \operatorname{coker} f \end{array}$$

dove

- $\widehat{\varphi'}$, $\widehat{\psi'}$ *sono le mappe ottenuto da* φ', ψ' *per la proprietà universale della proiezione al quoziente*

$$\begin{array}{ccccc} L' & \xrightarrow{\varphi'} & M' & \xrightarrow{\psi'} & N' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{L'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{M'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{N'}} \\ \operatorname{coker} f & \xrightarrow[\widehat{\varphi'}]{} & \operatorname{coker} g & \xrightarrow[\widehat{\psi'}]{} & \operatorname{coker} h \end{array}$$

- $\delta := (\pi_{L'} \circ \varphi'^{-1} \circ g \circ \psi^{-1})|_{\ker h}$ *ove* $\pi_{L'}$ *è la proiezione al quoziente*

$$\pi_{L'} : L' \longrightarrow \operatorname{coker} L = L'/\operatorname{Im} f$$

Dimostrazione. Mostriamo che la mappa δ è ben definita: sia $x \in \ker h$ e sia $y \in \psi^{-1}(x)$, allora, siccome il diagramma è commutativo, $h \circ \psi = \psi' \circ g$, quindi, siccome $y \in \ker(h \circ \psi)$, abbiamo che $y \in \ker(\psi' \circ g)$ per cui $g(y) \in \ker \psi' = \operatorname{Im} \varphi'$. Allora è ben posto $Z := \varphi'^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}(x)$. Osserviamo inoltre che $\psi^{-1}(x) = y + \ker \psi = y + \operatorname{Im} \varphi$, per cui

$$g(\psi^{-1}(x)) = g(y) + g(\ker \psi) = g(y) + g(\varphi(L)),$$

ma siccome $\varphi' \circ f = g \circ \varphi$ abbiamo che $\varphi'^{-1}(g(\varphi(L))) = f(L) = \operatorname{Im} f$. D'altra parte $\varphi'^{-1}(g(y))$ è un punto perché φ' è iniettiva (quindi invertibile a sinistra), quindi abbiamo mostrato che δ è ben posta.

Mostriamo anche che $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}$ sono ben posta: lo proviamo per φ' per ψ' sarà analogo. Ci basterà mostrare che $\pi_{M'} \circ \varphi'$ è costante sulle classi:

$$\varphi'(\underbrace{f(L)}_{=\pi_{L'}(0)}) = g(\varphi(L)) \subseteq g(L) = \pi_{M'}^{-1}(0)$$

per la linearità delle proiezioni al quoziente questo basta.

Ora proviamo che la successione è esatta:

- in $\ker g$: siccome $L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N$ è esatta lo è anche la sua restrizione ai ker, però bisogna mostrare che $\varphi(\ker f) \subseteq \ker g$. Questo è chiaro dalla commutatività del diagramma, infatti $\varphi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(\varphi'(0)) = g^{-1}(0)$.
- in $\ker h$: bisogna mostrare che $\psi(\ker g) = \ker \delta$, sia $x \in \ker g$ allora

$$\delta \circ \psi(x) = \pi_{L'} \circ \varphi'^{-1} \circ \underbrace{g(x)}_{=0} = 0.$$

  Quindi $\psi(\ker g) \subseteq \ker \delta$, tuttavia, per la commutatività del diagramma $\psi(g^{-1}(0)) = h^{-1}(\psi'(0))$, allora $\ker \delta = \psi(\ker g) = \ker h$.

- in $\operatorname{coker} f$: bisogna mostrare che $\delta(\ker h) = \ker \widehat{\varphi}$, ma per quanto abbiamo visto prima $\delta(\ker h) = 0$ quindi dobbiamo mostrare che $\widehat{\varphi}'$ è iniettiva. Questo è evidente perché φ' è iniettiva e passando al quoziente l'iniettività è preservata.
- in $\operatorname{coker} g$: sappiamo che $\operatorname{Im} \varphi' = \ker \psi'$ allora passando al quoziente avremo $\operatorname{Im} \widehat{\varphi'} = \ker \widehat{\psi'}$.

■

Osservazione A.1.6. Nelle ipotesi dello Snake Lemma A.1.5 valgono i seguenti fatti:

- se φ è iniettiva allora $\varphi|_{\ker f} : \ker f \longrightarrow \ker \psi$ è iniettiva;
- se ψ' è suriettiva allora $\widehat{\psi'} : \operatorname{coker} g \longrightarrow \operatorname{coker} h$ è suriettiva,

quindi sotto queste ipotesi aggiuntiva la seguente è una **successione esatta**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \xrightarrow{\varphi} & \ker g & \xrightarrow{\psi} & \ker h \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ 0 & \longleftarrow & \operatorname{coker} h & \xleftarrow[\widehat{\psi'}]{} & \operatorname{coker} g & \xleftarrow[\widehat{\varphi'}]{} & \operatorname{coker} f \end{array}$$

Definizione A.1.7 (Spezzamento di successioni)**.** Sia $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$ una successione **esatta** allora diciamo che essa **si spezza** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- ψ è invertibile a destra, cioè esiste un omomorfismo di R-moduli $\sigma : N \longrightarrow M$ tale che $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_N$, questo morfismo è detto **sezione** di ψ;
- φ è invertibile a sinistra, cioè esiste un omomorfismo di R-moduli $\rho : M \longrightarrow L$ tale che $\rho \circ \varphi = \mathrm{id}_L$, questo morfismo è detto **retrazione** di ρ;
- Esiste $Q \leq M$ sottomodulo tale che $M = Q \oplus \ker \psi = Q \oplus \operatorname{Im} \varphi$.

Dimostrazione. Vedi [Rot02, prop. 7.22, p. 437]. ■

A.2 Funtori esatti

Definizione A.2.1 (Funtore esatto)**.** Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ due categorie e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore **covariante**, allora esso si dice

- **Esatto a sinistra** se preserva le successioni esatte corte a sinistra, cioè per ogni successione esatta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, la successione $0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ è esatta in $\mathcal{B}$;
- **Esatto a destra** se preserva le successioni esatte corte a destra, cioè per ogni successione esatta $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, la successione $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$ è esatta in $\mathcal{B}$;

- **Esatto** se è sia esatto a sinistra che a destra, ovvero se trasforma ogni successione esatta corta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ in una successione esatta corta $0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$.

Osservazione A.2.2. Se $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è un funtore **controvariante** allora consideriamo il funotre **covariante** $\widetilde{F} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$, quindi diremo che F è **esatto** (a desta o a sinistra) se $\widetilde{F}$ è **esatto** (a destra o a sinistra). Ricordando che nella cateforia opposta $\ker f^{op} = (\operatorname{coker} f)^{op}$ e $\operatorname{Im} f^{op} = \operatorname{coIm} f = \operatorname{Dom} f/\ker f$.

Osservazione A.2.3. Un funtore esatto preserva non solo le successioni esatte corte, ma anche le successioni esatte lunghe.

Esempio A.2.4. Sia M un R-modulo **destro**, allora costruiamo il funotre **covariante** $T := M \otimes_R (\cdot)$ come segue

- Se N è un R-modulo **sinistro** allora $TN := M \otimes_R N$;
- Se $f : N \longrightarrow N'$ è un morfismo di R-moduli, allora $Tf := \mathrm{id}_M \otimes f$.

Questo funtore è **esatto a destra**: sia $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ una successione esatta, allora

- $\mathrm{id}_M \otimes \beta$ è suriettiva perchè

$$\mathrm{id}_M \otimes \beta \left(\sum_{i \in I} m_i \otimes b_i \right) = \sum_{i \in I} m_i \otimes \beta(b_i)$$

  quindi, per la suriettività di β, l'immagine è tutto $M \otimes C$;

- consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \alpha} & M \otimes B & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \beta} & M \otimes C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & \nearrow{\scriptstyle \sigma} & & & \\ & & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha) & \swarrow{\scriptstyle \sigma^{-1}} & & & \end{array}$$

  la mappa σ è ben posta per la proprietà universale della proiezione al quoziente, infatti $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha) \subseteq \ker(\mathrm{id}_M \otimes \beta)$. Se mostriamo che la mappa σ è invertibile, allora

$$\operatorname{coker}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha) \cong M \otimes C \cong (M \otimes B)/\ker(\mathrm{id}_M \otimes \beta)$$

  per cui avremmo $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha) = \ker(\mathrm{id}_M \otimes \beta)$.

  Quindi considero $M \otimes C \ni m \otimes c \xmapsto{\sigma^{-1}} [m \otimes b] \in \operatorname{coker}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha)$ dove $b \in B$ è tale che $\beta(b) = c$ il che è sempre possibile per la suriettività di β. Questa mappa è ben definita perchè se $\beta(b) = c = \beta(b')$ allora $b - b' \in \ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$ e quindi $m \otimes (b - b') \in \operatorname{Im}(\mathrm{id}_M \otimes \alpha)$.

Esempio A.2.5. Sia N un R-modulo **sinistro**, allora costruiamo il funotore **controvariante** $T := \operatorname{Hom}(\cdot, N)$ come segue

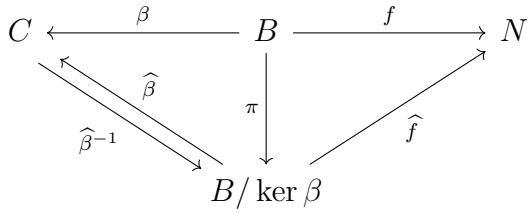
- Se M è un R-modulo **sinistro** allora $TM := \operatorname{Hom}(M, N)$;

- Se $f : M \longrightarrow M'$ è un morfismo di R-moduli allora

$$\begin{aligned} Tf : \mathrm{Hom}(M', N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Questo funtore è **esatto a sinistra**: Sia $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ una successione esatta, allora consideriamo la successione $0 \longrightarrow C \xrightarrow{T\beta} B \xrightarrow{T\alpha} A$ essa è esatta, infatti

- Sia $0 = T\beta(\varphi) = \varphi \circ \beta$ ma β è suriettiva, quindi invertibile a destra, quindi $0 = \varphi$;
- Osserviamo che $\mathrm{Im}\, T\beta \subseteq \ker T\alpha$ perchè $\beta \circ \alpha = 0$. D'altra parte sia $f \in \ker T\alpha$ allora $\ker f \supseteq \mathrm{Im}\, \alpha = \ker \beta$, quindi possiamo considerare il diagramma commutativo



dove $\widehat{\beta}$ è invertibile e quindi $f = \widehat{f} \circ \widehat{\beta}^{-1} \circ \beta$ e allora $f = T\beta(\widehat{f} \circ \widehat{\beta}^{-1})$.

A.3 Moduli proiettivi

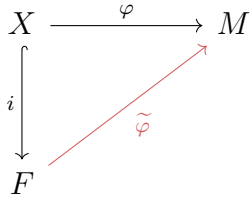
Definizione A.3.1 (Modulo libero)**.** Siano M un R-modulo ed $X \subseteq M$, allora diremo che M è generato da X se ogni elemento $m \in M$ può essere scritto come R-combinazione lineare di un numero finito di elementi di X, cioè

$$m = \sum_{x \in X} \lambda_x x \quad \text{dove } \lambda_x \neq 0 \text{ per un numero finito di } x \in X.$$

Se questa scrittura è unica diremo che X è una R-base per M ed in tal caso diremo che M è un R-modulo libero.

Osservazione A.3.2. Se R è un campo allora ogni R-modulo è libero per il teorema di esistenza di una base negli spazi vettoriali.

Proposizione A.3.3 (Proprietà universale dei moduli liberi)**.** *Siano F un R-modulo libero con base X, M un R-modulo, $i : X \hookrightarrow F$ inclusione, $\varphi : X \longrightarrow M$ una funzione, allora esiste un'unica mappa $\widetilde{\varphi} : F \longrightarrow M$ che rende commutativo il diagramma*



Dimostrazione. Basta costrire $\widetilde{\varphi}$ come segue:

$$F \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} M$$
$$\sum_{x\in X} \lambda_x x \longmapsto \sum_{x\in X} \lambda_x \varphi(x)$$

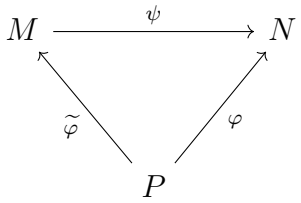
questa mappa è evidentemente R-lineare e fa commutare il diagramma voluto. Essa è ben posta grazie al fatto che X è una base per F. ■

Corollario A.3.4. *Ogni modulo M è un quoziente di un modulo libero F. In tal caso diremo che una* ***base*** *per F è un insieme di generatori per M.*

Dimostrazione. Sia M un R-modulo e X un set di suoi generatori, allora considero il modulo libero $F := \bigoplus_{x\in X} R$ con mappa di inclusione $X \ni x \xmapsto{i} (\delta_x, y)_{y\in X}$ dove δ è la delta di kroneker, allora se $\varphi : X \longrightarrow M$ è l'inclusione di X in M possiamo costruire $\widetilde{\varphi}$ per la proprietà universale ed avremo $M \cong F/\ker\widetilde{\varphi}$ ■

Definizione A.3.5 (Modulo proiettivo)**.** Sia P un R-modulo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- Il funtore $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ è esatto;
- Se $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ è un morfismo suriettivo di R-moduli, allora il morfismo di gruppi abeliani $\mathrm{Hom}_R(P, \psi) : \mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N)$ è suriettivo, cioè se $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ allora esiste $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ che faccia commutare il diagramma;



- Se $\pi : M \longrightarrow P$ è una mappa R-lineare suriettiva, allora π si spezza, cioè esiste $\sigma : P \longrightarrow M$ tale che $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_P$;
- esistono Q, M R-moduli con M **libero**, tali che $P \oplus Q \cong M$.

diremo che P è proiettivo se soddisfa una di queste condizioni equivalenti.

Dimostrazione. vedi [Rot08, Cp. 3]. ■

Osservazione A.3.6. Sia M un R-modulo libero, allora $M \oplus 0 \cong M$, quindi M è **proiettivo**.

A.4 Moduli piatti

Definizione A.4.1 (Modulo piatto)**.** Sia M un R-modulo **destro**. Si dice che M è **piatto** se il funtore prodotto tensoriale $M \otimes_R (\cdot)$ è **esatto**.

Proposizione A.4.2. *Sia P un R-modulo* ***proiettivo destro****, allora P è piatto.*

Dimostrazione. Vedi [Rot08, Cp. 3, pg. 132]. ■

A.5 Moduli finitamente generati

Definizione A.5.1. Un R-modulo M si dice **finitamente generato** se ammette un insieme **finito** di generatori (vedi A.3.4).

Teorema A.5.2 (Teorema di struttura di moduli finitamente generati su P.I.D.)**.** *Sia R un dominio ad ideali principali (**P.I.D.**) e sia M un modulo finitamente generato su R. Allora:*

1. *M è isomorfo a una somma diretta della forma*

$$R^r \oplus R/(d_1) \oplus R/(d_2) \oplus \cdots \oplus R/(d_t)$$

   dove $r \geq 0$ è il rango libero di M e i d_i sono elementi di R tali che $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_t$;

2. *I generatori $d_1, d_2, \ldots, d_t$ sono determinati univocamente a meno di unità in R.*

Dimostrazione. Vedi [Jac12, Cp. 3. pg. 187] ■

Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia più profonda gratitudine a tutte le persone che hanno reso possibile la realizzazione di questa tesi e che mi hanno accompagnato nel mio percorso accademico e personale.

In primo luogo, ringrazio il **Professor Luca Moci**, mio relatore, per avermi dato l'opportunità di approfondire questo argomento.

Un sincero ringraziamento va anche alla **Dottoressa Martina Costa Cesari**, che mi ha seguito con grande attenzione nella scrittura di questo lavoro. La sua disponibilità e i suoi consigli sono stati fondamentali per la stesura di questa tesi.

Desidero inoltre ringraziare gli **autori del software Quiver** [Ark24], il cui lavoro ha reso estremamente semplice la scrittura di diagrammi commutativi.

Un ringraziamento speciale va a **mia madre**, che mi ha sempre supportato nello studio, anche nei momenti più difficili. La sua presenza e il suo incoraggiamento sono stati una fonte di forza e motivazione per me.

Un pensiero particolare va ai miei Nonni **Rosaria** ed **Egerio**, che hanno sempre creduto in me e nelle mie capacità, spronandomi a dare il meglio di me stesso.

Un sentito ringraziamento va anche a tutti gli altri miei parenti, che non mi hanno mai fatto mancare il loro supporto e il loro affetto lungo tutto il mio percorso.

Grazie di cuore al mio amico **Mario**, che è stato un punto di riferimento costante. Con lui ho avuto il piacere di discutere non solo delle nostre ultime scoperte matematiche, ma della vita, trovando sempre un interlocutore stimolante e un grandissimo amico. Grazie a lui ho avuto la possibilità di scoprire tante cose nuove e a fare chiarezza sulle possibilità che il futuro ci riserva.

Ringrazio inoltre **Daniele, Raffaele e Giuseppe**, con cui ho passato serate indimenticabili tra giochi e risate. Con loro mi sono sempre sentito libero e leggero e di questo li ringrazio profondamente.

Non posso dimenticare i miei **amici di Bologna**, che sono stati una compagnia fondamentale durante questa avventura universitaria. Anche se molti di noi hanno preso strade diverse, il legame creato nel corso degli anni rimane per me prezioso.

Infine, ringrazio il mio compagno di stanza, **Tomaso**. Le nostre chiacchierate notturne mi hanno spesso aiutato a chiarire le idee, sullo studio e sulla vita.

A tutti voi, grazie di cuore.

Bibliografia

[Ark24] Nathanael Arkor. *quiver*. Ver. 1.5.3. Dic. 2024. URL: https://github.com/varkor/quiver.

[Bae34] Reinhold Baer. «Erweiterungen von Gruppen und ihren Isomorphismen». In: *Mathematische Zeitschrift* 38 (1934), pp. 375–416. DOI: 10.1007/BF01170643.

[EM45] Samuel Eilenberg e Saunders MacLane. «Relations between Homology and Homotopy Groups of Spaces». In: *Annals of Mathematics* 46 (1945), pp. 480–509. DOI: 10.2307/1969165.

[EM47] Samuel Eilenberg e Saunders MacLane. «Cohomology Theory in Abstract Groups. I». In: *Annals of Mathematics* 48 (1947), pp. 51–78. DOI: 10.2307/1969215.

[EM53] Samuel Eilenberg e Saunders MacLane. «On the Groups $H(\Pi, n)$, II: Methods of Computation». In: *Annals of Mathematics* 60 (1953), pp. 49–139. DOI: 10.2307/1969702.

[GS06] P. Gille e T. Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9781139458726. URL: https://books.google.it/books?id=HFsxkvLtl_QC.

[Jac09] N. Jacobson. *Basic Algebra II: Second Edition*. Basic Algebra. Dover Publications, 2009. ISBN: 9780486471877. URL: https://books.google.com.bz/books?id=4WU_AwAAQBAJ.

[Jac12] N. Jacobson. *Basic Algebra I: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN: 9780486135229. URL: https://books.google.it/books?id=JHFpvOtKiBAC.

[Rot02] J.J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002. ISBN: 9780130878687. URL: https://books.google.it/books?id=3B98QgAACAAJ.

[Rot08] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, 2008. ISBN: 9780387683249. URL: https://books.google.it/books?id=P2HV4f8gyCgC.

[Rot99] J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1999. ISBN: 9780387942858. URL: https://books.google.it/books?id=vb9kUfHqQigC.

[Sch04] Issai Schur. «Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen». In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 127 (1904), pp. 20–50. DOI: 10.1515/crll.1904.127.20.

[Wei94] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. ISBN: 9780521559874. URL: https://books.google.it/books?id=flm-dBXfZ_gC.