

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Formule di media per soluzioni delle equazioni di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Matematica

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa

Annamaria Montanari

Presentata da:

Davide Gazzani

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Operatori di Kolmogorov a Coefficienti Costanti	10
1.1	Nozioni Preliminari	10
1.2	Ipoellitticità e Soluzione Fondamentale	11
1.3	Struttura a Blocchi delle Matrici A e B	15
2	Operatori di Kolmogorov e Strutture di Gruppo Invarianti	20
2.1	Gruppi di Lie	20
2.2	La Sottoclasse $\mathcal{K}_0$	22
3	La Parte Principale dell'Operatore di Kolmogorov	32
3.1	Definizioni Preliminari	32
3.2	Confronto tra le Soluzioni Fondamentali di L e L_0	34
4	Formule di Media per Operatori di Kolmogorov	41
4.1	Formule del Valore Medio	41
4.2	Nuclei Più Regolari	50
5	Disuguaglianza di Harnack e Teoremi di Liouville per Operatori di Kolmogorov	56
5.1	Principio del Massimo Forte	56
5.2	Disuguaglianza di Harnack	58
5.3	Teoremi di tipo Liouville	69
A	Varietà e Insiemi di Livello	72

Introduzione

Motivazione e contesto delle equazioni di Kolmogorov

Le equazioni di Kolmogorov rivestono un ruolo fondamentale nella teoria dei processi stocastici, descrivendo l'evoluzione temporale delle densità di probabilità associate a sistemi dinamici influenzati da fenomeni aleatori. Grazie alla loro versatilità, queste equazioni trovano applicazione in numerosi campi scientifici, dalla fisica statistica alla finanza matematica, offrendo un quadro teorico rigoroso per modellare variabili come velocità, posizione e prezzi di asset finanziari.

L'origine di tali equazioni può essere illustrata considerando un processo stocastico bidimensionale $(V_t, Y_t)_{t \geq 0}$, generato da un moto browniano standard $(W_t)_{t \geq 0}$. La dinamica del processo è descritta dalle seguenti equazioni:

$$V_t = v_0 + \sigma W_t, \quad Y_t = y_0 + \int_0^t V_s ds,$$

dove V_t rappresenta la velocità e Y_t la posizione. In particolare, V_t evolve a partire dalla velocità iniziale v_0 , influenzata da un disturbo stocastico proporzionale a σ , mentre Y_t varia come integrale della velocità.

La densità di probabilità associata al processo (V_t, Y_t) , indicata con

$$p = p(t, v, y, v_0, y_0),$$

soddisfa una specifica equazione differenziale parabolica degenere, nota come *equazione di Kolmogorov*:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + v \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad t > 0, (v, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Questa equazione si distingue per la sua natura degenere: il termine diffusivo

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}$$

opera esclusivamente sulla variabile v , mentre il termine di trasporto

$$v \frac{\partial p}{\partial y}$$

collega le variabili v e y senza introdurre diffusione diretta lungo y . Tale peculiarità rappresenta una sfida analitica, poiché l'assenza di diffusione completa può influire sulla regolarità delle soluzioni.

Nel 1934, Kolmogorov dimostrò che, per ogni $t > 0$, la densità p è una funzione regolare nonostante la degenerazione dell'equazione. Questo risultato, sorprendente per l'epoca, è spiegato dalla proprietà di *ipoellitticità*. Tale concetto, successivamente formalizzato da Hörmander, stabilisce che l'operatore differenziale associato

$$L := \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial}{\partial v^2} + v \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t},$$

propaga la regolarità delle soluzioni, anche in presenza di diffusione limitata a una sola variabile.

Un caso emblematico si verifica quando $\sigma = 1$, in cui l'equazione di Kolmogorov ammette una soluzione esplicita per la densità p , derivata da Kolmogorov stesso ([11]):

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} \exp \left(-\frac{(v - v_0)^2}{t} - 3 \frac{(v - v_0)(y - y_0 - tv_0)}{t^2} - 3 \frac{(y - y_0 - tv_0)^2}{t^3} \right).$$

Questo esempio evidenzia il potenziale dell'ipoellitticità come strumento analitico per garantire la regolarità delle soluzioni e studiarne le proprietà. Più in generale, tale proprietà consente di analizzare sistemi stocastici complessi e di derivare formule di valore medio fondamentali per comprendere le caratteristiche dinamiche e statistiche di operatori differenziali degeneri.

Le formule di valore medio: dal Laplaciano agli operatori di Kolmogorov

Le formule di valore medio rappresentano uno strumento fondamentale nell'analisi delle equazioni differenziali parziali, fornendo una caratterizzazione precisa delle funzioni armoniche nel contesto del Laplaciano. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio aperto e sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica, ovvero una funzione che soddisfa l'equazione $\Delta u = 0$ in Ω . Per ogni

palla $B_r(x) \subset \Omega$, centrata in x e di raggio r , valgono le seguenti formule di valore medio:

$$u(x) = \frac{1}{H^{N-1}(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dH^{N-1}(y),$$

$$u(x) = \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Qui, H^{N-1} rappresenta la misura di Hausdorff di dimensione $N - 1$, che corrisponde alla misura della superficie, mentre $\mathcal{L}^N$ denota la misura di Lebesgue di dimensione N , ovvero il volume. La prima formula esprime il valore di u in x come media sul bordo della palla $\partial B_r(x)$, mentre la seconda lo interpreta come media sul volume interno della palla $B_r(x)$. Queste identità non solo caratterizzano le funzioni armoniche, ma costituiscono il fondamento di risultati importanti come il *principio del massimo forte* e la *disuguaglianza di Harnack*. Il principio del massimo forte afferma che una funzione armonica non costante raggiunge il proprio massimo solo sul bordo del dominio. La disuguaglianza di Harnack, invece, stabilisce che per ogni funzione armonica non negativa esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\sup_{B_r(x)} u \leq C \inf_{B_r(x)} u,$$

per ogni palla $B_{4r}(x) \subset \Omega$. Questi risultati evidenziano le proprietà strutturali delle funzioni armoniche e il controllo che le formule di valore medio forniscono sul comportamento delle soluzioni.

Formule di valore medio per l'operatore del calore

Un'estensione naturale delle formule di valore medio si trova nel contesto dell'operatore del calore $\partial_t - \Delta$. In questo caso, le palle euclidee vengono sostituite da insiemi parabolici, che riflettono la natura spazio-temporale dell'equazione. Studi pionieristici in questa direzione sono stati condotti da Pini [17] e Hadamard [8], che hanno introdotto versioni paraboliche delle formule di valore medio, consentendo un'analisi rigorosa delle soluzioni dell'equazione del calore.

Queste formule mantengono molte delle proprietà delle loro controparti ellittiche, come il principio del massimo forte e la disuguaglianza di Harnack, adattate al contesto parabolico. Tale estensione evidenzia l'unità concettuale tra il caso ellittico e quello parabolico, dimostrando la coerenza teorica tra diversi tipi di equazioni differenziali.

Estensione alle equazioni di Kolmogorov

Le formule di valore medio trovano una naturale generalizzazione anche nel contesto degli operatori di Kolmogorov, come quelli descritti in precedenza. Tuttavia, l'estensione richiede significativi adattamenti delle tecniche classiche. Invece delle palle euclidee o paraboliche, si utilizzano insiemi di super-livello definiti tramite la soluzione fondamentale dell'operatore.

Sia $\Gamma(z_0; z)$ la soluzione fondamentale di un operatore di Kolmogorov ipoellittico, con $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ punto iniziale e $r > 0$ un parametro. L'insieme di super-livello si definisce come:

$$\Omega_r(z_0) := \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma(z_0; z) > \frac{1}{r} \right\}.$$

Nel caso di operatori con coefficienti costanti, la soluzione fondamentale può essere espressa in forma esplicita e il bordo topologico $\partial\Omega_r(z_0)$ si configura come una varietà liscia. Questa regolarità consente l'uso di strumenti analitici come il teorema della divergenza e la formula di co-area, che permettono di derivare formule di valore medio specifiche per gli operatori ipoellittici.

Queste generalizzazioni conducono a versioni ipoellittiche della disuguaglianza di Harnack e consolidano il legame profondo tra le proprietà delle soluzioni di operatori ellittici, parabolici e ipoellittici. In definitiva, le formule di valore medio dimostrano la loro centralità e versatilità nell'analisi di sistemi matematici complessi.

Obiettivi della tesi

L'obiettivo principale di questa tesi è sviluppare una teoria completa delle formule di valore medio per gli operatori di Kolmogorov con coefficienti costanti. Questo lavoro si basa su un approccio che combina metodi classici dell'analisi matematica con tecniche avanzate. Due classi fondamentali di formule vengono introdotte e analizzate:

1. Formule basate sul teorema della divergenza e sulla formula di co-area, che forniscono una base analitica solida per derivare risultati generali.
2. Formule ottenute tramite il metodo della discesa di Hadamard, che permettono di costruire formule con nuclei regolari, ampliando il dominio di applicabilità.

Questo duplice approccio consente di approfondire la comprensione teorica delle formule di valore medio e di estenderne l'utilizzo a contesti più generali.

Le formule di valore medio si dimostrano fondamentali per studiare le proprietà qualitative delle soluzioni degli operatori ipoellittici. Tra le principali applicazioni sviluppate in questa tesi si annoverano:

- Versioni ipoellittiche della disuguaglianza di Harnack e del principio del massimo forte.
- Un teorema unilaterale di tipo Liouville per particolari classi di operatori di Kolmogorov.

Questi risultati evidenziano come le proprietà di regolarità e simmetria tipiche degli operatori ellittici e parabolici possano essere estese e adattate al caso degli operatori degeneri.

Struttura della tesi

La tesi è articolata in cinque capitoli, organizzati come segue:

Capitolo 1: *Operatori di Kolmogorov e ipoellitticità*

In questo capitolo vengono introdotti gli operatori di Kolmogorov con coefficienti costanti e il concetto di ipoellitticità. Si fornisce una caratterizzazione rigorosa delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore del secondo ordine sia ipoellittico, con particolare attenzione alla struttura matriciale sottostante.

Capitolo 2: *Simmetrie e struttura di gruppo*

Si analizzano le simmetrie intrinseche degli operatori di Kolmogorov, quali traslazioni e dilatazioni, e la loro influenza sulle soluzioni. Viene discusso il ruolo della struttura di gruppo associata agli operatori nello studio delle loro proprietà fondamentali.

Capitolo 3: *Stime asintotiche e comportamento globale*

Il capitolo si concentra sulle stime asintotiche che collegano l'operatore di Kolmogorov alla sua parte principale. Tali stime sono cruciali per descrivere il comportamento delle soluzioni su domini estesi e per sviluppare analisi qualitative e quantitative.

Capitolo 4: *Formule di valore medio per gli operatori di Kolmogorov*

Questo capitolo costituisce il nucleo della tesi. La prima sezione è dedicata alle formule di valore medio derivate utilizzando strumenti classici, come il teorema della divergenza e la formula di co-area. Nella seconda sezione vengono introdotte formule più raffinate, basate sul metodo della discesa di Hadamard, caratterizzate da nuclei regolari e maggiore generalità.

Capitolo 5: *Applicazioni delle formule di valore medio*

In quest'ultimo capitolo si esplorano le applicazioni delle formule di valore medio a problemi specifici, tra cui:

- Varianti ipoellittiche della disuguaglianza di Harnack.
- Versioni generalizzate del principio del massimo forte.
- Un teorema unilaterale di tipo Liouville.

In particolare, vengono presentate diverse varianti della disuguaglianza di Harnack e del principio del massimo forte, nonché un teorema unilaterale di tipo Liouville per particolari classi di operatori di Kolmogorov. Questi risultati mettono in evidenza la potenza e la versatilità delle formule di valore medio nell'analisi di operatori differenziali alle derivate parziali.

Capitolo 1

Operatori di Kolmogorov a Coefficienti Costanti

In questo capitolo viene introdotto in modo formale l'operatore di Kolmogorov con coefficienti costanti, accompagnato da un'analisi dettagliata delle sue principali proprietà strutturali e funzionali. Un'attenzione particolare è rivolta al concetto di ipoellitticità nel contesto degli operatori differenziali del secondo ordine, con una descrizione approfondita delle condizioni necessarie e sufficienti per la sua validità.

1.1 Nozioni Preliminari

Sia $z = (x, t) = (x_1, \dots, x_N, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, dove $x \in \mathbb{R}^N$ rappresenta la componente spaziale e $t \in \mathbb{R}$ quella temporale. Consideriamo un operatore differenziale del secondo ordine definito nella forma:

$$L = \operatorname{div}_x (A \nabla_x) + \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t, \quad (1.1)$$

dove $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})$ rappresenta il gradiente rispetto alle variabili spaziali, e div_x denota la divergenza rispetto alla variabile x . Le matrici $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ e $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ sono matrici reali costanti di dimensione $N \times N$, con A simmetrica e semidefinita positiva.

Il termine $\langle x, B \nabla_x \rangle$ descrive una deriva lineare nello spazio, che rappresenta dinamiche non conservative, mentre il termine $-\partial_t$ introduce l'evoluzione temporale. Qui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^N$.

Questa formulazione estende la definizione classica degli operatori di Kolmogorov inclu-

dendo fenomeni di diffusione combinati a drift lineari. La scelta di coefficienti costanti consente di semplificare l'analisi del comportamento asintotico delle soluzioni, offrendo una base per derivare proprietà analitiche generali.

Lo studio dell'operatore L si fonda sulle metodologie sviluppate in [1] e [18], che costituiscono il riferimento teorico principale per questa trattazione.

1.2 Ipoellitticità e Soluzione Fondamentale

In questa sezione viene introdotto il concetto di ipoellitticità, elemento fondamentale nell'analisi degli operatori differenziali. Analizzeremo tale proprietà per un operatore del secondo ordine L , definito su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Definizione 1.2.1. Un operatore differenziale L si dice *ipoellittico* se, per ogni soluzione distribuzionale $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dell'equazione $Lu = f$, vale la seguente implicazione:

$$f \in C^\infty(\Omega) \implies u \in C^\infty(\Omega).$$

Questa definizione stabilisce una stretta connessione tra la regolarità delle soluzioni dell'operatore L e quella del termine sorgente f .

Nel celebre lavoro di Hörmander [9], è stato dimostrato che l'ipoellitticità dell'operatore definito in (1.1) è equivalente alla seguente condizione algebrica:

$$\text{Ker}(A) \text{ non contiene sottospazi non banali invarianti rispetto a } B. \quad (1.2)$$

Per meglio comprendere tale condizione, si introducono due matrici associate all'operatore, che dipendono dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = \exp(-tB^T), \quad (1.3)$$

$$C(t) = \int_0^t E(s) A E^T(s) ds. \quad (1.4)$$

Hörmander ha dimostrato che la condizione (1.2) è equivalente al richiedere che:

$$C(t) > 0, \quad \forall t > 0, \quad (1.5)$$

ossia, la matrice $C(t)$ deve essere definita positiva per ogni $t > 0$. Questo requisito garantisce che l'operatore possieda una efficace capacità di propagazione delle informazioni spaziali.

La condizione (1.5) può essere reinterpretata in termini geometrici utilizzando campi vettoriali associati all'operatore. Si considerino i seguenti operatori differenziali del primo ordine:

$$X_j = \sum_{k=1}^N a_{j,k} \partial_{x_k}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{e} \quad Y = \langle x, B \nabla_x \rangle, \quad (1.6)$$

dove X_j rappresenta combinazioni lineari delle derivate spaziali, con pesi determinati dai coefficienti della matrice A , mentre Y descrive una deriva lineare associata alla matrice B .

In questo contesto, la condizione (1.5) risulta equivalente al criterio di Hörmander:

$$\text{rank} (\text{Lie} \{X_1, \dots, X_N, Y\} (x)) = N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.7)$$

dove $\text{Lie} \{X_1, \dots, X_N, Y\}$ denota l'algebra di Lie generata dagli operatori $X_1, \dots, X_N, Y$. Questa condizione garantisce che l'algebra di Lie generata da tali campi vettoriali sia sufficientemente ricca da coprire l'intero spazio $\mathbb{R}^N$. Ciò implica che la diffusione associata all'operatore L possa raggiungere ogni direzione dello spazio, confermando l'ipoellitticità.

Proposizione 1.2.2. *Le condizioni (1.2), (1.5) e (1.7) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'equivalenza, analizziamo ciascuna coppia di condizioni, dimostrando come una implichi l'altra.

Passo 1: (1.5) **implica** (1.9)

Poiché A è una matrice simmetrica e semidefinita positiva, segue che $C(t) \geq 0$ per ogni $t > 0$. Inoltre, fissato $\xi \in \mathbb{R}^N$, la funzione $t \mapsto \langle C(t) \xi, \xi \rangle$ è monotona non decrescente. Se la condizione (1.5) non fosse verificata, esisterebbero $t > 0$ e $\xi \neq 0$ tali che:

$$\langle C(s) \xi, \xi \rangle = 0, \quad \forall s \in (0, t].$$

Sostituendo nella definizione di $C(t)$ data in (1.4), otteniamo:

$$\langle A E^T(s) \xi, E^T(s) \xi \rangle = 0, \quad \forall s \in (0, t].$$

Da ciò segue che:

$$A E^T(s) \xi = 0, \quad \forall s \in (0, t].$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della matrice esponenziale $E(s) = \exp(-sB^T)$, possiamo scrivere:

$$E^T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k}{k!} (B^T)^k.$$

Inserendo questa espressione, otteniamo:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k}{k!} AB^k \right) \xi = 0, \quad \forall s \in (0, t].$$

Da ciò deduciamo che:

$$AB^k \xi = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (1.8)$$

Passo 2: (1.9) **implica** (1.5).

Supponiamo che $AB^k \xi = 0$ per ogni $k \geq 0$. Allora, per costruzione, $\langle C(t) \xi, \xi \rangle = 0$ per ogni $t > 0$. Questo contraddice la definizione di $C(t) > 0$ per ogni $t > 0$ a meno che $\xi = 0$. Questo dimostra l'equivalenza tra la condizione (1.5) e la seguente:

$$AB^k \xi = 0, \quad \forall k \geq 0 \implies \xi = 0. \quad (1.9)$$

Passo 3: (1.2) **è equivalente a** (1.9).

Consideriamo lo spazio:

$$V = \{ \xi \in \mathbb{R}^N : AB^k \xi = 0, \forall k \geq 0 \}.$$

Questo spazio V è il più grande sottospazio B -invariante contenuto in $\text{Ker}(A)$. La condizione (1.9) richiede che $V = \{0\}$. Questo equivale a dire che $\text{Ker}(A)$ non contiene sottospazi non banali invarianti per B , che è esattamente la condizione (1.2).

Passo 4: (1.9) **è equivalente a** (1.7).

La condizione di Hörmander (1.7) richiede che l'algebra di Lie generata dagli operatori $X_1, \dots, X_N, Y$ abbia rango massimo N . Questo è equivalente a dire che non esistono vettori $\xi \neq 0$ tali che $AB^k \xi = 0$ per ogni $k \geq 0$, il che corrisponde alla condizione (1.9).

Conclusione.

Abbiamo dimostrato che le condizioni (1.2), (1.5) e (1.7) sono tutte equivalenti. □

Osservazione 1.2.3. Dalla dimostrazione della Proposizione 1.2.2, si deduce che la condizione (1.5) è equivalente alle seguenti affermazioni:

- (a) Esiste $t > 0$ tale che $C(t)$ è definita positiva;
- (b) Per ogni $t < 0$, $C(t)$ non è definita positiva;
- (c) Esiste $t < 0$ tale che $C(t)$ non è definita positiva.

Le equivalenze appena enunciate mettono in evidenza il legame tra la positività di $C(t)$ su determinati intervalli temporali e le sue proprietà di invertibilità. Tali condizioni sono strettamente correlate alla condizione di Hörmander (1.7), la quale garantisce l'ipoellitticità dell'operatore L .

Definizione 1.2.4. Denotiamo con $\mathcal{K}$ la classe degli operatori di Kolmogorov della forma (1.1), che soddisfano la condizione di Hörmander (1.7) o, in maniera equivalente, le condizioni (1.2) e (1.5).

Gli operatori appartenenti alla classe $\mathcal{K}$ rappresentano una generalizzazione significativa degli operatori ellittici classici. Per tali operatori, esiste una soluzione fondamentale esplicita, come discusso in [9]. Quando la condizione (1.5) è soddisfatta, la soluzione fondamentale assume la forma:

$$\Gamma(z; \zeta) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x - E(t - \tau)\xi, t - \tau), \quad z = (x, t), \quad \zeta = (\xi, \tau), \quad (1.10)$$

dove $\Gamma(x, t) = \Gamma(x, t; 0, 0)$ (il caso con il polo nell'origine) è data da:

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det(C(t))}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x \rangle - t \operatorname{tr}(B)\right), & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

La funzione $\Gamma(\cdot; \zeta)$ costituisce una soluzione fondamentale per l'operatore L appartenente alla classe $\mathcal{K}$ e gode delle seguenti proprietà:

- **Regolarità:** $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \zeta)$, ovvero è infinitamente differenziabile su $\mathbb{R}^{N+1}$ eccetto nel punto ζ , dove presenta una singolarità.
- **Ben definita:** Poiché $C(t)$ è definita positiva per ogni $t > 0$, la funzione Γ risulta ben definita per tali tempi.

In virtù del suo ruolo di soluzione fondamentale per l'operatore L , Γ consente di rappresentare funzioni test $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ mediante la seguente formula:

$$u(z) = - \int_{\mathbb{R}^{N+1}} [\Gamma(z, \cdot) L(u)](\zeta) d\zeta.$$

Tale espressione fornisce una rappresentazione esplicita di u in termini della soluzione fondamentale Γ , evidenziando come quest'ultima agisca da nucleo per l'operatore L su $\mathbb{R}^{N+1}$.

1.3 Struttura a Blocchi delle Matrici A e B

In questa sezione si esamina la struttura a blocchi delle matrici A e B , evidenziando come essa sia correlata alla classe degli operatori di Kolmogorov $\mathcal{K}$. Per ogni $k \geq 0$ e $j = 1, \dots, N$, si definiscono i campi vettoriali iterati nel seguente modo:

$$X_{(j,0)} = X_j, \quad X_{(j,k+1)} = [X_{(j,k)}, Y], \quad (1.12)$$

dove X_j e Y sono definiti in (1.6). Un operatore differenziale generico $Z = \sum_{k=1}^N c_k \partial_{x_k}$ viene identificato con il vettore dei suoi coefficienti $c = (c_1, \dots, c_N)$.

Si definiscono quindi i sottospazi generati dai campi vettoriali iterati come segue:

$$V_k = \text{span} \{X_{(j,i)} : j = 1, \dots, N, i = 0, \dots, k\}, \quad k \geq 0. \quad (1.13)$$

La condizione di Hörmander (1.7) garantisce l'esistenza di un intero $r \geq 0$ tale che $V_r = \mathbb{R}^N$. Si definisce dunque:

$$r = \min \{k \geq 0 : V_k = \mathbb{R}^N\}.$$

Il numero r rappresenta il minimo indice per cui l'insieme dei campi vettoriali generati raggiunge il rango massimo in $\mathbb{R}^N$.

Ogni campo $X_{(j,k)}$ corrisponde alla j -esima riga della matrice AB^k . Ciò permette di esprimere V_k come:

$$V_k = (\ker(A) \cap \ker(AB) \cap \dots \cap \ker(AB^k))^\perp. \quad (1.14)$$

Ne consegue la seguente successione di sottospazi:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = \mathbb{R}^N,$$

con $V_i \neq V_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq r$. Qualora per un certo $i \geq 1$ si avesse $V_i = V_{i-1}$, si avrebbe $V_k = V_{k-1}$ per ogni $k \geq i$, in contraddizione con la minimalità di r .

Per descrivere le dimensioni di tali sottospazi, si introducono i seguenti parametri:

$$p_0 = \dim(V_0), \quad p_i = \dim(V_i) - \dim(V_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq r.$$

Si dirà che un insieme $\{u_1, \dots, u_N\}$ costituisce una *base canonica di $\mathbb{R}^N$* per l'operatore (1.1) se rappresenta una base ortonormale che rispetta la struttura a catena dei sottospazi $V_0, \dots, V_r$. In altre parole, ciascun sottospazio V_i è generato dai primi $p_0 + p_1 + \dots + p_i$ vettori della base $\{u_1, \dots, u_N\}$.

Proposizione 1.3.1. *Sia $L \in \mathcal{K}$ un operatore di tipo Kolmogorov, e si consideri una base canonica di $\mathbb{R}^N$ per L . Rispetto a tale base, le matrici A e B presentano la seguente struttura a blocchi:*

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_r \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

dove i blocchi soddisfano le seguenti proprietà:

$$A_0 \text{ è una matrice quadrata non singolare di rango } p_0; \quad (1.17)$$

$$B_j \text{ è una matrice } p_{j-1} \times p_j \text{ di rango } p_j, \text{ per } j = 1, 2, \dots, r; \quad (1.18)$$

$$p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_r \geq 1, \quad p_0 + p_1 + \cdots + p_r = N; \quad (1.19)$$

$$i \text{ blocchi denotati con } * \text{ nella matrice } B \text{ possono assumere valori arbitrari.} \quad (1.20)$$

Viceversa, se le matrici A e B soddisfano le condizioni (1.15)–(1.20), allora l'insieme di vettori $\{e_1, \dots, e_N\}$, definito come

$$e_i = \left(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0\right), \quad i = 1, \dots, N,$$

costituisce una base canonica di $\mathbb{R}^N$ per l'operatore L .

Dimostrazione. Supponiamo che $\{u_1, \dots, u_N\}$ sia una base canonica di $\mathbb{R}^N$ per l'operatore L . Rispetto a tale base, si può dimostrare che la matrice A assume la forma specificata in (1.15) e soddisfa la proprietà (1.17). Inoltre, si può riscrivere la matrice B in una forma a blocchi:

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & \cdots & B_{0,r} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{pmatrix},$$

dove ciascun blocco $B_{i,j}$ è una matrice di dimensioni $p_i \times p_j$.

Consideriamo ora il prodotto AB :

$$AB = \begin{pmatrix} A_0 B_{0,0} & A_0 B_{0,1} & A_0 B_{0,2} & \cdots & A_0 B_{0,r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché la j -esima riga di AB rappresenta $X_{(j,1)}$, si ha che

$$X_{(j,1)} \in V_j = \text{span} \{X_{(j,0)}, X_{(j,1)} : j = 1, \dots, N\}.$$

Ne consegue che $A_0 B_{0,2} = 0, \dots, A_0 B_{0,r} = 0$ e $\text{rank}(A_0 B_{0,1}) = p_1$. Poiché A_0 è non singolare, si deduce che $B_{0,2} = 0, \dots, B_{0,r} = 0$ e $\text{rank}(B_{0,1}) = p_1$. Da ciò, $B_1 = B_{0,1}$ è una matrice $p_0 \times p_1$, e si ottiene $p_1 \leq p_0$.

Passiamo ora al prodotto $AB^2 = (AB)B$. La matrice B può essere rappresentata come:

$$B = \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{pmatrix},$$

e il prodotto AB^2 risulta:

$$AB^2 = \begin{pmatrix} * & * & A_0 B_1 B_{1,2} & \cdots & A_0 B_1 B_{1,r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché la j -esima riga di AB^2 rappresenta $X_{(j,2)}$, applicando lo stesso ragionamento, otteniamo che $\text{rank}(A_0 B_1 B_{1,2}) = p_2$ e

$$A_0 B_1 B_{1,3} = 0, \dots, A_0 B_1 B_{1,r} = 0. \quad (1.21)$$

Dato che $\text{rank}(B_{1,2}) \geq \text{rank}((A_0 B_1) B_{1,2})$ e $B_2 = B_{1,2}$ è una matrice di dimensioni $p_1 \times p_2$, segue che $\text{rank}(B_2) = p_2$ e $p_2 \leq p_1$.

Inoltre, poiché $\text{Ker}(A_0 B_1) = \{0\}$ (essendo $A_0 B_1$ di rango p_1), dall'equazione (1.21) segue

che $B_{1,3} = 0, \dots, B_{1,r} = 0$. Pertanto, la matrice B assume la seguente struttura a blocchi:

$$B = \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & B_{r,3} & \cdots & B_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Iterando questo procedimento, si ottiene la struttura desiderata per B , completando così la dimostrazione della prima parte della proposizione.

Viceversa, se le matrici A e B soddisfano la forma specificata nelle equazioni (1.15)–(1.20), allora, per ogni indice i , il prodotto AB^i può essere espresso come:

$$AB^i = \begin{pmatrix} *_{i,0} & \cdots & *_{i,i-1} & C_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

dove $*_{i,j}$ rappresenta un blocco $p_0 \times p_j$ e $C_i = A_0 B_1 \cdots B_i$ è una matrice $p_0 \times p_i$ di rango p_i . Per convenzione, si assume che $C_0 = A_0$ quando $i = 0$.

Dalla relazione (1.13), considerando che $X_{(j,k)}$ rappresenta la j -esima riga di AB^k , possiamo concludere che:

$$V_k = \text{span} \left(e_h : 0 \leq h \leq \sum_{i=0}^k p_i \right), \quad 0 \leq k \leq r.$$

In altre parole, l'insieme $\{e_1, \dots, e_N\}$ costituisce una base ortonormale per i sottospazi $V_0, \dots, V_r$. $\square$

Osservazione 1.3.2. Sotto le ipotesi della Proposizione 1.3.1, l'operatore L può essere rappresentato in una forma di particolare rilevanza, organizzata in termini di quadrati di campi vettoriali. In particolare, se la matrice costante A è simmetrica e definita positiva, esiste una matrice $A^{\frac{1}{2}} = (\tilde{a}_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$, simmetrica e definita positiva, tale che $A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$. Questa proprietà permette di esprimere L come somma di quadrati di campi vettoriali nella forma:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i^2 + Y,$$

dove i campi vettoriali X_i e Y sono definiti come:

$$X_i = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij} \partial_{x_j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad Y = \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t.$$

Tale rappresentazione si dimostra particolarmente vantaggiosa per lo studio del principio del massimo forte applicato agli operatori appartenenti alla classe $\mathcal{K}$.

Osservazione 1.3.3. Da questo momento in poi, per la classe di operatori $\mathcal{K}$, considereremo come base di $\mathbb{R}^N$ la base canonica. In altri termini, le matrici costanti A e B verranno assunte nella forma descritta dalle equazioni (1.15)-(1.20). Questa scelta non solo semplifica l'analisi, ma garantisce anche una maggiore coerenza nei calcoli successivi.

Capitolo 2

Operatori di Kolmogorov e Strutture di Gruppo Invarianti

In questo capitolo ci proponiamo di analizzare la struttura di gruppo che emerge su $\mathbb{R}^{N+1}$ a partire dalle proprietà algebriche associate agli operatori di Kolmogorov. Tale struttura, intrinsecamente non euclidea, è stata introdotta inizialmente nei lavori di Garofalo e Lanconelli [6] e successivamente sviluppata in maniera sistematica da Negrini e Scornazzani [15], nonché da Lanconelli e Polidoro [18]. L'interesse verso questa struttura risiede nella sua invarianza rispetto all'operatore L , una caratteristica che consente di approfondire l'analisi delle proprietà geometriche e analitiche correlate.

Nella seconda parte del capitolo ci concentreremo su una sottoclasse di operatori di Kolmogorov, invariante rispetto a una famiglia specifica di dilatazioni. Analizzeremo le principali proprietà di questa sottoclasse, mettendo in evidenza le conseguenze strutturali e le implicazioni analitiche che ne derivano.

2.1 Gruppi di Lie

Introduciamo una struttura algebrica non commutativa su $\mathbb{R}^{N+1}$ che sostituisce la geometria euclidea classica nell'ambito dello studio degli operatori di Kolmogorov. Sia L un operatore appartenente alla classe $\mathcal{K}$. Definiamo un'operazione tra due elementi $(x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ come segue:

$$(x, t) \circ (\xi, \tau) = (\xi + E(\tau)x, t + \tau), \quad (2.1)$$

dove $E(\tau)$ è una matrice dipendente dal parametro τ . Tale operazione conferisce a $\mathbb{R}^{N+1}$ una struttura di gruppo non commutativa, la quale riflette la complessità delle simmetrie proprie degli operatori di Kolmogorov.

Si può dimostrare che $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ costituisce un gruppo, con elemento neutro $(0, 0)$ e inverso di un elemento (ξ, τ) definito dalla relazione:

$$(\xi, \tau)^{-1} = (-E(-\tau)\xi, -\tau), \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}. \quad (2.2)$$

Tale struttura di gruppo riveste particolare importanza poiché permette l'applicazione dei metodi propri della teoria dei gruppi di Lie all'analisi dell'operatore L . L'introduzione di questa struttura amplia in modo significativo le possibilità di indagine, consentendo di sfruttare le simmetrie intrinseche dell'operatore.

Definiamo, per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, l'operatore di traslazione a sinistra ℓ_ζ :

$$\ell_\zeta : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}^{N+1}, \quad \ell_\zeta(z) = \zeta \circ z. \quad (2.3)$$

Un operatore $L \in \mathcal{K}$ si definisce *invariante a sinistra* rispetto al prodotto $\circ$ se soddisfa la proprietà:

$$\ell_\zeta \circ L = L \circ \ell_\zeta, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Tale invarianza si traduce in una simmetria per la soluzione fondamentale $\Gamma(z; \zeta)$ associata all'operatore L , che soddisfa la relazione:

$$\Gamma(z; \zeta) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z; 0) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z), \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}, z \neq \zeta. \quad (2.4)$$

Questa identità, derivata dalle equazioni (1.10), evidenzia come l'invarianza rispetto al gruppo di traslazioni a sinistra semplifichi significativamente lo studio delle soluzioni, permettendo di sfruttare appieno le simmetrie insite nel problema.

Osservazione 2.1.1. Sebbene l'attenzione sia rivolta prevalentemente agli operatori ipoellittici della classe $\mathcal{K}$, è importante sottolineare che la definizione del prodotto di Lie $\circ$ non dipende dalla condizione di Hörmander. Di conseguenza, la struttura di gruppo rimane valida anche per operatori che, pur condividendo una forma analoga, non soddisfano necessariamente i criteri di ipoellitticità. Tale osservazione apre interessanti prospettive per lo studio di famiglie di operatori più ampie.

2.2 La Sottoclasse $\mathcal{K}_0$

All'interno della vasta famiglia $\mathcal{K}$ degli operatori di Kolmogorov, emerge una sottoclasse $\mathcal{K}_0$ di particolare interesse, contraddistinta dalla sua invarianza rispetto a specifici gruppi di dilatazioni. Tale proprietà consente di indagare le simmetrie intrinseche degli operatori, rivelando strutture geometriche e analitiche altrimenti difficili da identificare. Lo studio della sottoclasse $\mathcal{K}_0$ offre una prospettiva più approfondita sulle connessioni tra dinamiche stocastiche e la geometria del problema.

Definizione 2.2.1. Si definisce un *gruppo di dilatazioni* in $\mathbb{R}^{N+1}$ una famiglia di trasformazioni $\mathcal{G} = \{\lambda^M\}_{\lambda>0}$, dove ciascuna dilatazione λ^M è parametrizzata da $\lambda > 0$ e agisce su $\mathbb{R}^{N+1}$ tramite una matrice M , simmetrica e definita positiva.

Le dilatazioni appartenenti al gruppo $\mathcal{G}$ agiscono in maniera anisotropa sulle coordinate di $\mathbb{R}^{N+1}$, scalando ciascuna direzione in accordo con i coefficienti determinati dagli autovalori di M .

Definizione 2.2.2. Un operatore $L \in \mathcal{K}$ si dice *omogeneo di grado 2* rispetto al gruppo di dilatazioni $\mathcal{G}$ (o $\mathcal{G}$ -invariante) se soddisfa la seguente relazione:

$$L \circ \lambda^M = \lambda^2 (\lambda^M \circ L), \quad \forall \lambda > 0, \quad (2.5)$$

oppure, in modo equivalente, se per ogni funzione test $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, vale:

$$L(u(\lambda^M z)) = \lambda^2 (Lu)(\lambda^M z), \quad \forall \lambda > 0, \quad z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

La condizione di invarianza sopra descritta implica che l'operatore L preserva la propria struttura sotto l'azione delle dilatazioni appartenenti al gruppo $\mathcal{G}$, modulando esclusivamente un fattore di scala λ^2 . Questa simmetria semplifica l'analisi degli operatori, consentendo di sfruttare le proprietà delle dilatazioni.

Definizione 2.2.3. Denotiamo con $\mathcal{K}_0$ la famiglia degli operatori $L \in \mathcal{K}$ invarianti rispetto a un gruppo di dilatazioni $\mathcal{G}$. In altri termini, $\mathcal{K}_0$ comprende tutti gli operatori che soddisfano la condizione di commutatività con le dilatazioni del gruppo $\mathcal{G}$.

Questa proprietà di invarianza esercita un'influenza diretta sulla struttura dell'operatore L e, in particolare, si riflette nella forma della matrice B associata. Per gli operatori appartenenti a $\mathcal{K}_0$, la matrice B rimane invariata sotto le trasformazioni indotte dalle

dilatazioni del gruppo $\mathcal{G}$. In altre parole, la struttura di B non viene modificata dalle dilatazioni, consentendo una caratterizzazione più dettagliata degli operatori $L \in \mathcal{K}_0$. Questo approccio sfrutta le simmetrie per dedurre proprietà analitiche e geometriche altrimenti meno evidenti.

Proposizione 2.2.4. *Sia $L \in \mathcal{K}$ un operatore di Kolmogorov invariante rispetto a un gruppo di dilatazioni $\mathcal{G} = \{\lambda^M\}_{\lambda>0}$. Si afferma che L è $\mathcal{G}$ -invariante se, e solo se, nella forma canonica della matrice B , definita in (1.16), tutti i blocchi indicati con $*$ sono nulli. Di conseguenza, la matrice B assume la seguente struttura:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

In questo caso, il gruppo di dilatazioni ha la seguente forma:

$$\lambda^M = \text{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2), \quad \forall \lambda > 0, \quad (2.7)$$

dove I_k denota la matrice identità di dimensione $k \times k$.

Tale struttura riflette come l'invarianza rispetto alle dilatazioni condizioni la forma della matrice B , facilitando l'identificazione e l'analisi delle proprietà strutturali degli operatori L nella classe $\mathcal{K}_0$.

Dimostrazione. Consideriamo un gruppo di dilatazioni $\mathcal{G} = \{\lambda^M\}_{\lambda>0}$ su $\mathbb{R}^{N+1}$, tale che l'operatore L commuti con le trasformazioni di $\mathcal{G}$. Denotiamo con $(m_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\dots,N+1}$ gli elementi della matrice λ^M . Sia p un parametro reale e definiamo le seguenti due funzioni:

$$u(z) = e^{pt}, \quad v(z) = u(\lambda^M z),$$

dove $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Poiché u dipende esclusivamente dalla coordinata temporale, i termini di diffusione e di drift si annullano quando L viene applicato a u . Si ottiene quindi:

$$(Lu)(\lambda^M z) = -pu(\lambda^M z) = -pv(z).$$

D'altra parte, calcoliamo $Lv(z)$ esplicitando l'azione dell'operatore L su $v(z)$. Procedendo, otteniamo:

$$Lv(z) = \left(p^2 \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} m_{N+1,i}(\lambda) m_{N+1,j}(\lambda) + p \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} z_i m_{N+1,j}(\lambda) - p m_{N+1,N+1}(\lambda) \right) v(z).$$

L'invarianza dell'operatore L rispetto al gruppo $\mathcal{G}$ impone la seguente relazione funzionale:

$$L(u(\lambda^M z)) = \lambda^2 (Lu)(\lambda^M z), \quad \forall \lambda > 0, \forall z_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N.$$

Da tale uguaglianza è possibile ricavare le seguenti condizioni necessarie affinché L risulti essere $\mathcal{G}$ -invariante.

1. Condizione sui coefficienti quadratici:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j} m_{N+1,i}(\lambda) m_{N+1,j}(\lambda) = 0.$$

Questa condizione implica l'annullamento completo dei termini quadratici nella rappresentazione dell'operatore.

2. Condizione sui termini lineari:

$$\sum_{i,j=1}^N b_{i,j} z_i m_{N+1,j}(\lambda) = 0.$$

Tale equazione richiede che la somma dei termini lineari si annulli per ogni z e λ .

3. Condizione sul termine costante:

$$m_{N+1,N+1}(\lambda) = \lambda^2.$$

Questa uguaglianza stabilisce una relazione specifica tra il fattore di scala associato al termine costante e la matrice di dilatazione.

Utilizzando la prima condizione e considerando la forma canonica della matrice A , definita in (1.15), si deduce che:

$$m_{N+1,i}(\lambda) = 0, \quad \text{per } 1 \leq i \leq p_0, \forall \lambda > 0. \quad (2.8)$$

Questo risultato implica che, per i primi p_0 indici, i termini $m_{N+1,i}(\lambda)$ della matrice di dilatazione devono necessariamente essere nulli per ogni valore di λ .

Analogamente, considerando la seconda equazione in combinazione con la condizione precedente, si ottiene:

$$\sum_{j=p_0+1}^N b_{i,j} m_{N+1,j}(\lambda) = 0, \quad \text{per } 1 \leq i \leq N. \quad (2.9)$$

Questa relazione implica che i coefficienti $m_{N+1,j}(\lambda)$, per $j > p_0$, debbano soddisfare specifiche condizioni di annullamento in funzione dei coefficienti della matrice B . Poiché B può essere rappresentata in forma a blocchi diagonale, come indicato in (1.16), possiamo sfruttare la relazione (2.9) per derivare:

$$B_1^T (m_{p_0+1,N+1}, \dots, m_{p_0+p_1,N+1})^T = (0, \dots, 0)^T,$$

dove B_1 è una matrice di dimensione $p_0 \times p_1$ e rango p_1 (con $p_1 \leq p_0$). Questa relazione implica direttamente che:

$$m_{N+1,i}(\lambda) = 0, \quad \text{per } p_0 + 1 \leq i \leq p_0 + p_1, \quad \forall \lambda > 0.$$

Estendendo questo ragionamento agli altri blocchi della matrice B , si arriva alla conclusione generale:

$$m_{N+1,i}(\lambda) = 0, \quad \text{per } 1 \leq i \leq N, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.10)$$

Questa condizione evidenzia che tutti gli elementi della colonna $m_{N+1,i}(\lambda)$, con $i \leq N$, devono essere nulli. Ciò riflette una struttura specifica della matrice di dilatazione coerente con l'invarianza dell'operatore rispetto al gruppo di dilatazioni.

Passiamo ora a definire due funzioni di prova utili a verificare ulteriormente le condizioni di invarianza:

$$U(z) = e^{pz_i + qz_j}, \quad V(z) = U(\lambda^M z),$$

dove $p, q, \lambda \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i, j \leq N$. Consideriamo ora l'azione dell'operatore L su tali funzioni. Calcoliamo $(LU)(\lambda^M z)$ come segue:

$$(LU)(\lambda^M z) = \left(p^2 a_{i,i} + 2pq a_{i,j} + q^2 a_{j,j} + \sum_{h=1}^N (pb_{h,i} + qb_{h,j})(\lambda^M z)_h \right) V(z).$$

Procediamo ora con il calcolo di $LV(z)$ espandendo in termini dei coefficienti della matrice A e delle componenti di λ^M :

$$\begin{aligned}
LV(z) = & \left(p^2 \sum_{h,k=1}^N a_{h,k} m_{i,h}(\lambda) m_{i,k}(\lambda) + 2pq \sum_{h,k=1}^N a_{h,k} m_{i,h}(\lambda) m_{i,k}(\lambda) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{h,k=1}^N a_{h,k} m_{i,h}(\lambda) m_{j,k}(\lambda) + q^2 \sum_{h,k=1}^N a_{h,k} m_{j,h}(\lambda) m_{j,k}(\lambda) \\
& \left. + \sum_{h,k=1}^N b_{h,k} z_h (p m_{i,h}(\lambda) + q m_{i,k}(\lambda)) \right) V(z). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

L'invarianza dell'operatore L rispetto al gruppo di dilatazioni $\mathcal{G}$ impone la seguente relazione fondamentale:

$$(LV)(z) = \lambda^2 (LU)(\lambda^M z), \quad \forall \lambda > 0, \quad z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Pertanto, poiché i parametri p, q, i, j in (2.11) sono scelti arbitrariamente, le seguenti equazioni di compatibilità devono essere soddisfatte:

$$\lambda^2 A = M(\lambda) A M(\lambda), \tag{2.12}$$

$$\lambda^2 M(\lambda) B = B M(\lambda), \tag{2.13}$$

dove $M(\lambda)$ denota la matrice i cui elementi sono dati da $(m_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\dots,N}$.

Per procedere a un'analisi più dettagliata delle equazioni (2.12) e (2.13), consideriamo le matrici $M(\lambda)$ e B suddivise in blocchi di dimensione $p_i \times p_j$. Denotiamo i singoli blocchi come $M_{i,j}(\lambda)$ e $B_{i,j}$, rispettivamente, con $i, j = 0, \dots, r$.

Partendo dall'equazione (2.12) e sfruttando la forma canonica della matrice A descritta in (1.15), possiamo esprimere i blocchi della matrice A come segue:

$$\lambda^2 A_0 = M_{0,0}(\lambda) A_0 M_{0,0}(\lambda),$$

$$M_{i,0}(\lambda) A_0 M_{0,0}(\lambda) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Poiché la matrice $M(\lambda)$ è definita positiva e simmetrica, ne consegue che anche $M_{0,0}(\lambda)$ deve essere simmetrica e definita positiva. Di conseguenza, possiamo concludere che:

$$M_{0,0}(\lambda) = \lambda I_{p_0},$$

e, in virtù della condizione di annullamento che coinvolge $M_{i,0}(\lambda)$, otteniamo:

$$M_{i,0}(\lambda) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Passiamo ora all'analisi dell'equazione (2.13), considerando la struttura a blocchi della matrice B come descritto in (1.16):

$$\begin{cases} B_{j-1,j} = B_j, & \text{se } 1 \leq j \leq r, \\ B_{i,i+1} = 0, & \text{se } 1 \leq i \leq r-1. \end{cases}$$

Considerando l'equazione (2.13) per il blocco $B_{0,0}$, si ottiene:

$$\lambda^3 B_{0,0} = \lambda B_{0,0}, \quad \forall \lambda > 0,$$

da cui segue che:

$$B_{0,0} = 0.$$

Richiamando nuovamente l'equazione (2.13), procediamo con l'analisi dei blocchi $B_{0,i}$:

$$\lambda^3 B_{0,i} = B_{0,1} M_{1,i}(\lambda), \quad \text{per } 2 \leq i \leq r.$$

Poiché $B_{0,1} = B_1$ è di rango massimo e si verifica che $B_{0,i} = 0$ per ogni $i \geq 2$, ne deriva che i termini della matrice devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$M_{1,1}(\lambda) = \lambda^3 I_{p_1}, \quad M_{1,i}(\lambda) = 0, \quad 2 \leq i \leq r.$$

Questo schema si ripete iterativamente per ogni blocco della matrice, portando alla conclusione generale sulla struttura di $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = \text{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2).$$

Inoltre, risulta che:

$$B_{i,j} = 0, \quad \text{quando } i \geq 0 \text{ e } j \leq i.$$

Questi risultati completano la dimostrazione della parte "solo se" della proposizione, dimostrando che, affinché L sia $\mathcal{G}$ -invariante, le matrici $M(\lambda)$ e B devono necessariamente presentare la struttura indicata. In altre parole, l'invarianza impone precise proprietà strutturali alle matrici associate, che si possono interpretare come vincoli specifici sulle dilatazioni e sulle interazioni tra i termini quadratici e lineari dell'operatore differenziale. La direzione "se" della proposizione è lasciata come esercizio. La dimostrazione di tale implicazione è più diretta, poiché è sufficiente verificare le equazioni di invarianza utilizzando le forme specifiche delle matrici $M(\lambda)$ e B precedentemente determinate. $\square$

Osservazione 2.2.5. D'ora in avanti, indicheremo con $D(\lambda)$ la dilatazione (2.7) che commuta con un operatore $L \in \mathcal{K}_0$, e con $D_0(\lambda)$ la restrizione di $D(\lambda)$ a $\mathbb{R}^N$, ovvero la matrice $N \times N$ definita come:

$$D_0(\lambda) = \text{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}),$$

dove I_{p_i} denota la matrice identità di dimensione $p_i \times p_i$. La famiglia $(D_0(\lambda))_{\lambda>0}$ è nota come la *famiglia di dilatazioni spaziali*.

Si osserva che:

$$\det(D(\lambda)) = \lambda^{p_0+3p_1+\dots+(2r+1)p_r+2},$$

da cui è naturale introdurre la seguente definizione.

Definizione 2.2.6. Gli interi

$$Q := p_0 + 3p_1 + \dots + (2r+1)p_r, \quad Q+2, \quad (2.14)$$

sono rispettivamente denominati *dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto a $(D_0(\lambda))_{\lambda>0}$* e *dimensione omogenea di $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$* . Infatti, si ha:

$$\det(D_0(\lambda)) = \lambda^Q, \quad \det(D(\lambda)) = \lambda^{Q+2}, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.15)$$

Inoltre, indicheremo Q come la *dimensione omogenea spaziale* di $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto alla famiglia $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Definizione 2.2.7. Se la matrice B ha la forma descritta in (2.6), definiamo la struttura

$$\mathbb{G}_0 = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ, (D(\lambda))_{\lambda>0}),$$

come un *gruppo di Lie omogeneo*.

Proposizione 2.2.8. Se $L \in \mathcal{K}_0$, allora è soddisfatta la seguente proprietà distributiva:

$$D(\lambda)(\zeta \circ z) = (D(\lambda)\zeta) \circ (D(\lambda)z), \quad (2.16)$$

e inoltre:

$$D(\lambda)z^{-1} = (D(\lambda)z)^{-1}. \quad (2.17)$$

Dimostrazione. Poiché $L \in \mathcal{K}_0$, la matrice B associata è nilpotente. Pertanto, l'esponenziale della matrice si esprime come:

$$E(t) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{t^k}{k!} (B^T)^k.$$

Questa espressione, insieme alle Proposizioni 1.3.1 e 2.2.4, conduce alla relazione:

$$E(\lambda^2 t) = D_0(\lambda) E(t) D_0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2.18)$$

dove $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ rappresenta la famiglia di dilatazioni associata all'operatore L , come indicato in Kuptsov [13].

Consideriamo la relazione:

$$D(\lambda) D(\sqrt{t}) = D(\sqrt{\lambda^2 t}),$$

che, combinata con (2.18), consente di scrivere:

$$\begin{aligned} D(\lambda) (\zeta \circ z) &= D(\lambda) (\xi + E(\tau) x, t + \tau) \\ &= (D_0(\lambda) \xi + D_0(\lambda) E(\tau) x, \lambda^2 t + \lambda^2 \tau) \\ &= (D_0(\lambda) \xi + E(\lambda^2 \tau) D_0(\lambda) x, \lambda^2 t + \lambda^2 \tau) \\ &= (D(\lambda) \zeta) \circ (D(\lambda) z). \end{aligned}$$

Tale relazione dimostra la proprietà (2.16).

Per dimostrare la proprietà (2.17), consideriamo:

$$\begin{aligned} D(\lambda) z^{-1} &= D(\lambda) (-E(t) x, -t) \\ &= (-D_0(\lambda) E(t) x, -\lambda^2 t) \\ &= (-E(\lambda^2 t) D_0(\lambda) x, -\lambda^2 t) \\ &= (D(\lambda) z)^{-1}. \end{aligned}$$

Pertanto, è dimostrato che:

$$D(\lambda) z^{-1} = (D(\lambda) z)^{-1}.$$

□

Definizione 2.2.9. Una funzione misurabile u su $\mathbb{G}_0$ si dice *omogenea di grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ rispetto alla famiglia $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, o *$D(\lambda)$ -omogenea di grado* α , se soddisfa la seguente proprietà:

$$u(D(\lambda) z) = \lambda^\alpha u(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Un operatore differenziale X è detto *omogeneo di grado* $\beta \in \mathbb{R}$ rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ se:

$$Xu(D(\lambda)z) = \lambda^\beta (Xu)(D(\lambda)z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \forall \lambda > 0,$$

per ogni funzione u sufficientemente regolare. Inoltre, se u è omogenea di grado α e X è omogeneo di grado β , allora Xu è omogenea di grado $\alpha - \beta$.

Osservazione 2.2.10. Considerando i campi vettoriali degli operatori di Kolmogorov definiti in (1.6), si osserva che i campi $X_1, \dots, X_N$ sono omogenei di grado 1, mentre il campo Y è omogeneo di grado 2 rispetto alla famiglia $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Proposizione 2.2.11. Se $L \in \mathcal{K}_0$, allora $\Gamma = \Gamma(\cdot; 0)$, la soluzione fondamentale dell'operatore L con polo nel punto $\zeta = 0$, è omogenea di grado $-Q$ rispetto alla famiglia di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Dimostrazione. Dato che $L \in \mathcal{K}_0$ e commuta con le dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, e poiché $\Gamma = \Gamma(\cdot; 0)$ rappresenta la soluzione fondamentale di L con polo nel punto $\zeta = 0 = (0, 0)$, possiamo scrivere:

$$L(\Gamma(D(\lambda)z)) = \lambda^2 D(\lambda)(L\Gamma(z)) = -\lambda^2 D(\lambda)\delta = -\lambda^{-Q}\delta, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1},$$

dove δ denota la misura di Dirac con supporto in $\{(0, 0)\}$.

Da questa relazione segue che:

$$\Gamma(D(\lambda)z) = \lambda^{-Q}\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.19)$$

Ciò dimostra che Γ è $D(\lambda)$ -omogenea di grado $-Q$ rispetto alla famiglia $(D(\lambda))_{\lambda>0}$. $\square$

Osservazione 2.2.12. Dalla proposizione 2.2.11 e dalla proprietà (2.17), è possibile dimostrare l'omogeneità di $\Gamma(0; \cdot)$ rispetto alle dilatazioni $D(\lambda)$. In particolare, si ha:

$$\Gamma(0; D(\lambda)z) = \Gamma((D(\lambda)z)^{-1}; 0) = \Gamma(D(\lambda)z^{-1}) = \lambda^{-Q}\Gamma(z^{-1}) = \lambda^{-Q}\Gamma(0; z).$$

Pertanto, $\Gamma(0; \cdot)$ risulta essere omogenea di grado $-Q$ rispetto alla famiglia di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Consideriamo ora la struttura della matrice $C(t)$, definita in (1.4), nel caso in cui $L \in \mathcal{K}_0$, come formalizzato nella seguente proposizione.

Proposizione 2.2.13 (L. P. Kuptsov [12], [13]). *Se $L \in \mathcal{K}_0$, allora, per ogni $t > 0$, la matrice $C(t)$ può essere espressa come:*

$$C(t) = D_0(\sqrt{t}) C(1) D_0(\sqrt{t}), \quad (2.20)$$

dove $C(t)$ è la matrice definita in (1.4). Inoltre, se Γ rappresenta la soluzione fondamentale dell'operatore L con polo nel punto $(0, 0)$, allora vale la relazione:

$$\Gamma(x, t) = c_N t^{-\frac{Q}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \langle C^{-1}(1) D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) x, D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) x \rangle\right), \quad (2.21)$$

dove c_N è una costante positiva espressa da:

$$c_N = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det(C(1)))^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Dimostrazione. Poiché Γ è omogenea rispetto a $D(\lambda)$ di grado $-Q$ (come dimostrato in (2.19)), per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ si ha:

$$\lambda^{-Q} = \left(\frac{\det(C(t))}{\det(C(\lambda^2 t))} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4} \langle C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) x, D_0(\lambda) x \rangle + \frac{1}{4} \langle C^{-1}(t) x, x \rangle\right).$$

Da questa relazione si deduce che:

$$D_0(\lambda) C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) = C^{-1}(t),$$

e scegliendo $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, si ottiene l'equazione (2.20). Infine, ricordando che

$$\det(D_0(\lambda)) = \lambda^Q,$$

le espressioni (2.21) e (2.22) derivano direttamente dall'equazione (2.20). □

Capitolo 3

La Parte Principale dell'Operatore di Kolmogorov

In questo capitolo viene introdotto il concetto di parte principale dell'operatore di Kolmogorov, un elemento essenziale per comprendere la struttura dell'operatore. Verranno inoltre forniti strumenti analitici per lo studio della regolarità delle soluzioni, indispensabili per l'analisi delle loro proprietà qualitative. Infine, si discuterà un importante risultato di stima asintotica, che permette di confrontare la soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov con quella della sua parte principale, evidenziando le connessioni intrinseche tra i due e fornendo una base per ulteriori sviluppi teorici.

3.1 Definizioni Preliminari

Definizione 3.1.1. Sia B la forma canonica della matrice associata all'operatore $L \in \mathcal{K}$, definita come in (1.16). Indichiamo con B_0 la matrice ottenuta annullando ogni blocco $*$ presente in B , secondo la definizione data in (2.6). Definiamo quindi l'operatore L_0 come la *parte principale* di L , ottenuta sostituendo la matrice B con B_0 nell'espressione generale (1.1). In modo esplicito, si ha:

$$L_0 = \operatorname{div}_x (A \nabla_x) + \langle x, B_0 \nabla_x \rangle - \partial_t. \quad (3.1)$$

È immediato verificare che $L_0 \in \mathcal{K}_0$.

Definizione 3.1.2. Sia $z = (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Introduciamo la seguente *semi-norma*, definita da:

$$\|z\|_B = |t|^{\frac{1}{2}} + |x|_B, \quad |x|_B = \sum_{j=1}^N |x_j|^{\frac{1}{q_j}},$$

dove i parametri q_j rappresentano gli esponenti delle dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ definite come:

$$D(\lambda) = \text{diag}(\lambda^{q_1}, \dots, \lambda^{q_N}, \lambda^2).$$

Osservazione 3.1.3. La semi-norma $\|\cdot\|_B$ è omogenea di grado 1 rispetto alla famiglia di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$; in particolare, vale la seguente relazione:

$$\|D(\lambda)z\|_B = \lambda \|z\|_B, \quad \forall \lambda > 0, z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Inoltre, ricordiamo che in $\mathbb{R}^{N+1}$ tutte le norme sono equivalenti. Pertanto, in letteratura esistono diverse definizioni alternative della semi-norma considerata. Ad esempio, in [14] è proposta una definizione equivalente: per ogni $z = (x_1, \dots, x_N, t) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$, la norma di z è definita come l'unica soluzione positiva r dell'equazione:

$$\frac{x_1^{q_1}}{r^{2q_1}} + \frac{x_2^{q_2}}{r^{2q_2}} + \dots + \frac{x_N^{q_N}}{r^{2q_N}} + \frac{t^2}{r^4} = 1.$$

Sulla base di questa norma, introduciamo ora una quasi-distanza.

Definizione 3.1.4. Definiamo la *quasi-distanza* $d : \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} \mapsto [0, +\infty[$ come:

$$d(z, w) = \|z^{-1} \circ w\|_B, \quad \forall z, w \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad (3.2)$$

dove l'operazione è definita rispetto al gruppo di Lie $\mathbb{G}$, dotato della traslazione sinistra $\circ$ e della norma $\|\cdot\|_B$, associata alla parte principale dell'operatore L_0 .

Osservazione 3.1.5. La quasi-distanza d è invariante rispetto alle traslazioni. Inoltre, soddisfa le seguenti proprietà fondamentali:

1. $d(z, w) = 0$ se e solo se $z = w$, per ogni $z, w \in \mathbb{R}^{N+1}$;
2. Per ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$, esiste una costante $C_K \geq 1$ tale che, per ogni $z, w, \zeta \in K$:

$$d(z, w) \leq C_K d(w, z), \quad d(z, w) \leq C_K (d(z, \zeta) + d(\zeta, w)).$$

La Definizione 3.1.4 è formulata per gruppi di Lie generali, non necessariamente omogenei. Si osserva che, nel caso particolare dei gruppi omogenei, la costante C_K risulta indipendente dall'insieme compatto K (cfr. Proposizione 2.1 in [14]).

Definizione 3.1.6. Sia α una costante positiva tale che $\alpha \leq 1$, e sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Una funzione $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ è detta *Hölder continua di esponente α in Ω* rispetto al gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ e alle dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ (in breve, Hölder continua di esponente α , $f \in C^\alpha(\Omega)$) se esiste una costante positiva $k > 0$ tale che:

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq k d(z, \zeta)^\alpha, \quad \forall z, \zeta \in \Omega.$$

Alla funzione limitata $f \in C^\alpha(\Omega)$ associamo la seguente norma Hölderiana:

$$|f|_{\alpha, \Omega} = \sup_{\Omega} |f| + \sup_{z, \zeta \in \Omega: z \neq \zeta} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{d(z, \zeta)^\alpha}. \quad (3.3)$$

Inoltre, diciamo che una funzione f è *localmente Hölder continua*, e scriviamo $f \in C_{\text{loc}}^\alpha(\Omega)$, se $f \in C^\alpha(\Omega')$ per ogni sottoinsieme compatto $\Omega' \subset \Omega$.

Osservazione 3.1.7. Sia Ω un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$. Se f è Hölder continua di esponente α nel senso euclideo usuale, allora f è anche Hölder continua di esponente α secondo la definizione introdotta in 3.1.6. Viceversa, se $f \in C^\alpha(\Omega)$, allora f è Hölder continua di esponente β nel senso euclideo, dove $\beta = \frac{\alpha}{2r+1}$ e r è la costante introdotta in (1.16).

3.2 Confronto tra le Soluzioni Fondamentali di L e L_0

L'obiettivo principale di questa sezione è dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sia L un operatore della forma (1.1) appartenente alla classe $\mathcal{K}$, e sia L_0 la sua parte principale. Denotiamo con Γ (rispettivamente Γ_0) la soluzione fondamentale di L (rispettivamente L_0), con polo in $(0, 0)$. Allora, per ogni $b > 0$, esiste una costante positiva a tale che:*

$$\frac{1}{a} \Gamma_0(z) \leq \Gamma(z) \leq a \Gamma_0(z), \quad (3.4)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\Gamma_0(z) \geq b$. Inoltre, si ha $a = a(b) \rightarrow 1$ quando $b \rightarrow \infty$.

Per dimostrare il risultato enunciato, inizieremo presentando alcuni lemmi preliminari. Siano $C(t)$ e $C_0(t)$ le matrici definite in (1.4), rispettivamente associate agli operatori L e L_0 . Il lemma seguente stabilisce una relazione asintotica tra queste matrici.

Lemma 3.2.2. Siano $(C_{i,j}(t))_{i,j=0,\dots,r}$ e $(C_{0,i,j}(t))_{i,j=0,\dots,r}$ le decomposizioni a blocchi delle matrici $C(t)$ e $C_0(t)$, rispettivamente. Allora, per $t \rightarrow 0$ e $i, j = 0, \dots, r$ con $i \geq j$, vale la seguente relazione:

$$C_{i,j}(t) = C_{0,i,j}(t) (1 + tO(1)), \quad (3.5)$$

dove $O(1)$ denota una matrice limitata su $]0, 1]$.

Dimostrazione. Consideriamo l'espansione:

$$E(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} (B^T)^k + O(s^{2r+1}), \quad \text{quando } s \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Utilizzando questa espressione, otteniamo:

$$E(s) A E^T(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} F_k + O(s^{2r+1}), \quad \text{quando } s \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

dove

$$F_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (B^T)^j A B^{k-j}. \quad (3.8)$$

Dimostreremo che la relazione asintotica (3.5) deriva dalla particolare struttura delle matrici F_k , la quale dipende dalla forma canonica di A e B .

Osserviamo che, per la struttura delle matrici A e B , si ha:

$$AB^m = \begin{pmatrix} *^{(1)} & \dots & *^{(1)} & \tilde{C}_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\tilde{C}_m = A_0 B_1 \dots B_m$ si trova nella $(m+1)$ -esima colonna e possiede rango massimo.

I blocchi indicati come $*^{(1)}$ derivano dalla moltiplicazione di A_0 con un certo blocco B_j e almeno un blocco $*$ della matrice B . È cruciale notare che, nel caso in cui $L = L_0$, tutti i blocchi $*^{(1)}$ sono nulli.

Analizziamo ora il prodotto $(B^T)^j AB^m$, che si presenta nella seguente forma a blocchi:

$$(B^T)^j AB^m = \begin{pmatrix} *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & *^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & *^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & \tilde{C}_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

dove il blocco $\tilde{C}_m = B_j^T \cdots B_1^T A_0 B_1 \cdots B_m$ ha rango massimo e si trova in posizione $(j+1, m+1)$. I blocchi $*^{(2)}$ presentano proprietà analoghe a quelle dei blocchi $*^{(1)}$, e sono nulli quando $L = L_0$.

A partire dalle equazioni (3.8) e (3.9), si può verificare che la partizione a blocchi della matrice F_k soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) Ogni blocco in posizione $(j+1, m+1)$, con $0 \leq j, m \leq r$ e $m+j > k$, è nullo.
- (ii) Il blocco in posizione $(j+1, m+1)$, con $m+j = k$, è dato da $B_j^T \cdots B_1^T A_0 B_1 \cdots B_m$.
- (iii) Ogni blocco in posizione $(j+1, m+1)$ con $m+j < k$, è una somma di blocchi $*^{(2)}$, e quindi nullo se $L = L_0$.

Di conseguenza, per $j, m \in \mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq j \leq r$, il blocco $(j+1, m+1)$ della matrice $E(s) A E^T(s)$ in (3.7) è espresso come:

$$\begin{aligned} (E(s) A E^T(s))_{j+1, m+1} &= B_j^T \cdots B_1^T A_0 B_1 \cdots B_m (-1)^k \frac{s^k}{k!} \\ &\quad \cdot \left(1 + *^{(3)}_1 s + \cdots + *^{(3)}_{2r-k} s^{2r-k} \right) + O(s^{2r+1}), \quad \text{quando } s \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove $k = j + m + 2$ e i blocchi $*^{(3)}_j$ hanno proprietà simili a quelle dei blocchi $*^{(2)}$.

Quando $L = L_0$, la matrice B è nilpotente, semplificando ulteriormente l'espressione (3.10). In questo caso, il termine di resto $O(s^{2r+1})$ e i blocchi $*^{(3)}$ si annullano. Integrando l'espressione (3.10) su $[0, t]$, si verifica infine la validità di (3.5), completando così la dimostrazione. $\square$

Lemma 3.2.3. *Sia $M(t)$ definita come:*

$$M(t) = D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) (C(t) - C_0(t)) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right), \quad \text{per } t > 0, \quad (3.11)$$

allora vale la seguente stima:

$$\|M(t)\| = O(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Dimostrazione. Consideriamo $M(t) = (M_{i,j}(t))_{i,j=0,\dots,r}$. Dal Lemma 3.2.2, per $i \geq j$, si ha:

$$\begin{aligned} M_{i,j}(t) &= D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)_{i,i} C_{0,i,j}(t) O(t) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)_{j,j} \\ &= D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)_{i,i} C_{0,i,j}(t) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)_{j,j} O(t) \\ &= C_{0,i,j}(1) O(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Poiché $M(t)$ è una matrice simmetrica, la stima (3.12) segue immediatamente. $\square$

Lemma 3.2.4. *Sia $t \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti relazioni:*

$$\langle C(t)x, x \rangle = \langle C_0(t)x, x \rangle (1 + tO(1)), \quad \text{quando } t \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$\langle C^{-1}(t)x, x \rangle = \langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle (1 + tO(1)), \quad \text{quando } t \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

dove $O(1)$ indica una funzione limitata su $\mathbb{R}^N \times]0, 1]$.

Dimostrazione. Partendo dalle equazioni (3.11) e (2.20), si ottiene:

$$\frac{\langle (C(t) - C_0(t))x, x \rangle}{\langle C_0(t)x, x \rangle} = \frac{\langle M(t)y, y \rangle}{\langle C_0(1)y, y \rangle},$$

dove $x = D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)y$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Applicando il Lemma 3.2.2, si ottiene la relazione (3.14).

Analogamente, si ricava:

$$\frac{\langle (C_0^{-1}(t) - C^{-1}(t))x, x \rangle}{\langle C^{-1}(t)x, x \rangle} = \frac{\langle C(t)C_0^{-1}(t)C(t)y, y \rangle - \langle C(t)y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle}.$$

Questa espressione può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} - \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} = R(x, t) + S(x, t), \quad (3.16)$$

dove $x = C(t)y$.

Utilizzando la relazione (3.14), si ottiene:

$$\frac{\langle C(t)y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} = 1 + tO(t), \quad (3.17)$$

e

$$S(x, t) = \frac{\langle C_0(t)y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} \cdot \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} = tO(t). \quad (3.18)$$

D'altra parte, ponendo $y = D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)z$, dalla relazione (3.11) si deduce:

$$\frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} = \frac{\langle M(t)C_0^{-1}(1)M(t)z, z \rangle}{\langle C_0(1)z, z \rangle}, \quad (3.19)$$

da cui, applicando il risultato (3.12), si deduce che $R(x, t) = t^2O(1)$. Infine, utilizzando le relazioni (3.16), (3.17) e (3.18), otteniamo l'espressione (3.15) per $t > 0$. Un argomento analogo completa la dimostrazione per $t < 0$. $\square$

Ora siamo pronti per la dimostrazione del Teorema 3.2.1.

Dimostrazione del Teorema 3.2.1. Siano $C(t)$ e $C_0(t)$ le matrici definite in (1.4), associate rispettivamente agli operatori L e L_0 . Utilizzando il risultato (3.14) del Lemma 3.2.3, e ricordando che il determinante di una matrice simmetrica definita positiva è il prodotto dei suoi autovalori, determinabili tramite un metodo mini-max sulla forma quadratica associata, otteniamo:

$$\det(C(t)) = \det(C_0(t)) (1 + tO(1)), \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \quad (3.20)$$

Dalla relazione (3.15), inoltre, si ricava:

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x \rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle\right) \cdot \exp(t\langle C^{-1}(t)x, x \rangle O(1)). \quad (3.21)$$

Se $\Gamma_0(x, t) > b$,

$$\langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle \leq 2Q \log\left(\left(\frac{c_N}{b}\right)^{\frac{2}{Q}} \frac{1}{t}\right). \quad (3.22)$$

Il Teorema 3.2.1 segue immediatamente dalle espressioni (1.11), (3.20), (3.21) e (3.22). $\square$

Osservazione 3.2.5. È rilevante notare che la relazione (3.4) non è in generale valida per le soluzioni fondamentali $\Gamma(z; \zeta)$ e $\Gamma_0(z; \zeta)$ quando $\zeta \neq 0$.

Per chiarire questo punto, consideriamo il seguente esempio. Sia Γ la soluzione fondamentale dell'operatore

$$L = \partial_{x_1}^2 + x_1 \partial_{x_2} + x_2 \partial_{x_2} - \partial_t,$$

e sia Γ_0 la soluzione fondamentale della sua parte principale:

$$L_0 = \partial_{x_1}^2 + x_1 \partial_{x_2} - \partial_t.$$

Dalla stima (3.20), interpretando correttamente le notazioni, si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\det(C(t))}{\det(C_0(t))} = 1.$$

Definiamo ora $x(t) = (E(t) - E_0(t))\xi$. Si ha quindi:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(E(t)\xi, t; \xi, 0)}{\Gamma_0(E(t)\xi, t; \xi, 0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{4}\langle C_0^{-1}(t)x(t), x(t) \rangle\right). \quad (3.23)$$

Un calcolo diretto delle matrici $E(t)$ ed $E_0(t)$ mostra che, scegliendo $\xi = (0, 1)$, si ottiene:

$$x(t) = -t(1 + O(t))\xi, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Poiché le dilatazioni che commutano con L_0 sono della forma

$$D(\lambda) = (\lambda, \lambda^3, \lambda^2), \quad \lambda > 0,$$

si ha:

$$D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) x(t) = -t^{-\frac{1}{2}} (1 + O(t)) \xi, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Di conseguenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} t \langle C_0^{-1}(t) x(t), x(t) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \langle C_0^{-1}(1) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) x(t), D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) x(t) \rangle \\ &= \langle C_0^{-1}(1) \xi, \xi \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Combinando questa relazione con (3.23), si conclude che:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(E(t)\xi, t; \xi, 0)}{\Gamma_0(E(t)\xi, t; \xi, 0)} = +\infty.$$

Analogamente, si può dimostrare che:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma_0(E_0(t)\xi, t; \xi, 0)}{\Gamma(E_0(t)\xi, t; \xi, 0)} = +\infty.$$

Osservazione 3.2.6. Sia L un operatore appartenente alla classe $\mathcal{K}$, definito da:

$$L = \operatorname{div}_x (A \nabla_x) + \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t. \quad (3.24)$$

Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^N$, la matrice B associata all'operatore L può essere rappresentata come segue (vedi Proposizione 1.3.1):

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r-1,0} & B_{r-1,1} & B_{r-1,2} & B_{r-1,3} & \cdots & B_{r-1,r} \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & B_{r,3} & \cdots & B_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Definiamo ora l'operatore scalato L_λ come:

$$L_\lambda = \lambda^2 D(\lambda) \circ L \circ D \left(\frac{1}{\lambda} \right), \quad (3.25)$$

dove $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ denota il gruppo di dilatazioni che commuta con la parte principale L_0 di L . Si osservi che $L_\lambda = L$ per ogni $\lambda > 0$ se e solo se $L = L_0$. In effetti, ciò avviene poiché:

$$L_\lambda = \operatorname{div}_x (A \nabla_x) + \langle x, B_\lambda \nabla_x \rangle - \partial_t, \quad (3.26)$$

dove A è la matrice definita in (3.24) e B_λ è espressa come:

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2 B_{0,0} & B_{0,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^4 B_{1,0} & \lambda^2 B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & 0 \\ \lambda^6 B_{2,0} & \lambda^4 B_{2,1} & \lambda^2 B_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{2r} B_{r-1,0} & \lambda^{2r-2} B_{r-1,1} & \lambda^{2r-4} B_{r-1,2} & \cdots & B_{r-1,r} \\ \lambda^{2r+2} B_{r,0} & \lambda^{2r} B_{r,1} & \lambda^{2r-2} B_{r,2} & \cdots & \lambda^2 B_{r,r} \end{pmatrix}.$$

La parte principale dell'operatore L si ottiene ponendo $\lambda = 0$ in (3.26). Dai risultati dei Lemmi 3.2.2 e 3.2.4, si ricava:

$$\langle C_\lambda(t) x, x \rangle = \langle C_0(t) x, x \rangle (1 + t\lambda^2 O(1)), \quad (3.27)$$

$$\langle C_\lambda^{-1}(t) x, x \rangle = \langle C_0^{-1}(t) x, x \rangle (1 + t\lambda^2 O(1)), \quad (3.28)$$

dove, fissato arbitrariamente $\lambda_0 > 0$, la funzione $O(1)$ è uniformemente limitata per $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, 1[$ e $\lambda \in]0, \lambda_0[$. Qui, $C_\lambda(t)$ è la matrice definita in (1.4), con B sostituita da B_λ .

Da (3.28) e tramite un procedimento analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del Teorema 3.2.1, segue il risultato seguente.

Corollario 3.2.7. *Sia Γ_λ la soluzione fondamentale dell'operatore L_λ . Per ogni $b > 0$ e $a > 1$, esiste un parametro $\lambda_0 = \lambda_0(a, b) > 0$ tale che:*

$$\frac{1}{a} \Gamma_0(z) \leq \Gamma_\lambda(z) \leq a \Gamma_0(z),$$

per ogni $\lambda \in]0, \lambda_0]$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\Gamma_0(z) \geq b$.

Osservazione 3.2.8. Dalla relazione (3.27), si deduce che:

$$\det(C_\lambda(t)) = \det(C_0(t)) (1 + t\lambda^2 O(1)), \quad \text{per } t \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

uniformemente rispetto a $\lambda \in [0, \lambda_0]$, dove $\lambda_0 > 0$ è un parametro fissato arbitrariamente.

Capitolo 4

Formule di Media per Operatori di Kolmogorov

Dopo aver analizzato in dettaglio le proprietà fondamentali dell'operatore di Kolmogorov L , in questo capitolo ci concentriamo sullo sviluppo del nucleo centrale della nostra indagine: la dimostrazione delle formule di media per l'operatore a coefficienti costanti. Questo studio rappresenta un aspetto essenziale della presente tesi, in quanto tali formule costituiscono uno strumento chiave per comprendere la struttura delle soluzioni e il comportamento degli operatori di Kolmogorov. L'analisi si avvierà attraverso lo studio di casi più semplici, per poi essere estesa a nuclei che soddisfano condizioni di regolarità più rigorose, evidenziando così la flessibilità delle tecniche proposte.

4.1 Formule del Valore Medio

Definizione 4.1.1. Siano dati $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$. Si definisce $\Omega_r(z_0)$ come il seguente insieme di super-livello relativo alla soluzione fondamentale Γ dell'operatore $L \in \mathcal{K}$:

$$\Omega_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma(z_0; z) > \frac{1}{r} \right\}. \quad (4.1)$$

Osservazione 4.1.2. Considerando la relazione di omogeneità della soluzione fondamentale, espressa come $\Gamma(z_0; z) = \Gamma(z^{-1} \circ z_0; 0) = \Gamma(0; z_0^{-1} \circ z)$, l'insieme $\Omega_r(z_0)$ può essere riformulato nella forma:

$$\Omega_r(z_0) = z_0 \circ \Omega_r(0), \quad (4.2)$$

dove $z_0 \circ \Omega_r(0)$ denota la z_0 -traslazione sinistra di $\Omega_r(0)$, definita come:

$$z_0 \circ \Omega_r(0) = \{z_0 \circ w : w \in \Omega_r(0)\}.$$

Nel caso in cui $L \in \mathcal{K}_0$, assumiamo che $\mathcal{G} = (D(\lambda))_{\lambda>0}$ sia il gruppo di dilatazioni associato a L , e che Q rappresenti la dimensione omogenea spaziale di $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto a $\mathcal{G}$. In tale contesto, si verifica la seguente relazione:

$$r\Gamma(0; z) = \Gamma\left(0; D\left(r^{-\frac{1}{Q}}\right)z\right).$$

Da questa proprietà si deduce che:

$$\Omega_r(0) = D\left(r^{\frac{1}{Q}}\right)\Omega_1(0),$$

e di conseguenza:

$$\Omega_r(z_0) = z_0 \circ \left(D\left(r^{\frac{1}{Q}}\right)\Omega_1(0)\right). \quad (4.3)$$

Osservazione 4.1.3. Gli insiemi di livello della soluzione fondamentale Γ si sviluppano interamente al di sotto del polo z_0 , che corrisponde al punto di singolarità. Tale sviluppo è accompagnato da uno spostamento laterale causato dalla presenza del termine di drift $\langle x, B\nabla_x \rangle$.

Proposizione 4.1.4. *Gli insiemi di super-livello di Γ soddisfano le seguenti proprietà:*

1. $\bigcap_{r>0} \overline{\Omega_r(z_0)} = \{z_0\}$.
2. $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}(\Omega_r(z_0))}{r} = 0$, dove $\mathcal{L}$ denota la misura di Lebesgue.
3. Per quasi ogni $r > 0$, la frontiera $\partial\Omega_r(z_0)$ è una superficie di classe C^∞ .

Osservazione 4.1.5. Il risultato espresso in (4.3) implica che, se $L \in \mathcal{K}_0$, l'insieme $\overline{\Omega_r(z_0)}$ risulta essere compatto per ogni $r > 0$. Tuttavia, qualora L appartenga alla classe $\mathcal{K}$ ma non alla sottoclasse $\mathcal{K}_0$, questa proprietà non può essere garantita, come dimostrato nel seguente esempio.

Esempio 4.1.6. Consideriamo l'operatore

$$L = \partial_x^2 - x\partial_x - \partial_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

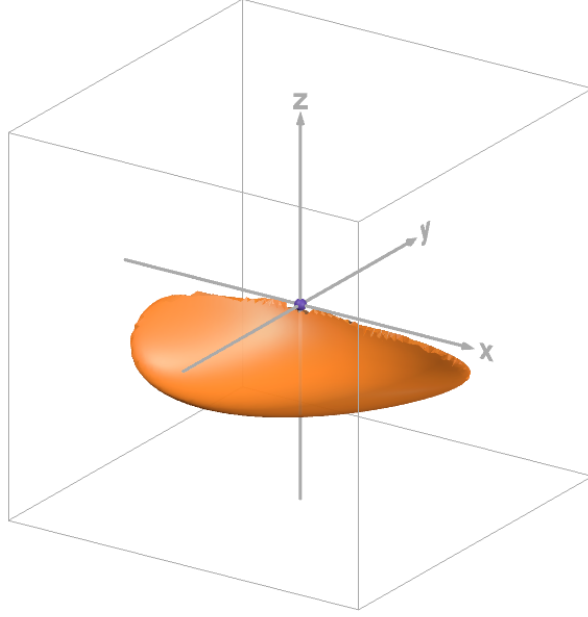


Figura 4.1: Insieme di livello $\Omega_r(z_0)$ della funzione Γ nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, con polo definito nel punto $z_0 = (0, 0, 0)$ e raggio $r = 8$. Gli assi orizzontali x e y rappresentano le componenti spaziali, mentre l'asse verticale z denota la componente temporale.

La soluzione fondamentale associata è data da

$$\Gamma(x, t) = (2\pi(1 - e^{-2t}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(e^{2t} - 1)}\right), \quad \text{per } t > 0,$$

mentre per $t < 0$ si ha:

$$\Gamma(0, 0; x, t) = (2\pi(1 - e^{2t}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1 - e^{2t})}\right).$$

Da tale espressione segue che:

$$\Gamma(0, 0; 0, t) = (2\pi(1 - e^{2t}))^{-\frac{1}{2}} > (2\pi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Di conseguenza, per ogni $r \geq \sqrt{2\pi}$, l'insieme $\Omega_r(0, 0)$ risulta illimitato, in quanto include la semiretta $\{(0, t) : t < 0\}$. Questo esempio dimostra che, qualora si consideri un operatore $L \in \mathcal{K}$ che non appartiene alla sottoclasse $\mathcal{K}_0$, non si può garantire la compattezza degli insiemi $\Omega_r(z_0)$ per ogni $r > 0$.

Proposizione 4.1.7. *Supponiamo che $L \in \mathcal{K}$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, per quasi ogni $r > 0$ tale che $\Omega_r(z_0)$ sia un insieme limitato, e per ogni funzione $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_r(z_0)})$, vale la seguente formula di rappresentazione:*

$$u(z_0) = \int_{\partial\Omega_r(z_0)} Q(z_0; z) u(z) d\mathcal{H}^N(z) + \int_{\Omega_r(z_0)} Lu(z) \left(\frac{1}{r} - \Gamma(z_0; z)\right) dz, \quad (4.4)$$

dove il termine $Q(z_0; z)$ è definito come:

$$Q(z_0; z) := \frac{\langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|}. \quad (4.5)$$

Inoltre, per ogni $r > 0$, la seguente espressione risulta valida:

$$u(z_0) = \frac{1}{r} \int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0; z) u(z) dz + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_\rho(z_0)} Lu(z) \left(\frac{1}{\rho} - \Gamma(z_0; z) \right) dz d\rho, \quad (4.6)$$

dove $M(z_0; z)$ è definito da:

$$M(z_0; z) = \frac{\langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{\Gamma^2(z_0; z)}. \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Sia L un operatore appartenente alla classe $\mathcal{K}$. Consideriamo l'operatore aggiunto L^* di L , definito come:

$$L^* = \operatorname{div}_x (A \nabla_x) - \langle x, B \nabla_x \rangle - \operatorname{tr}(B) + \partial_t,$$

che ammette una soluzione fondamentale Γ^* che soddisfa la seguente proprietà di simmetria:

$$\Gamma^*(z_0; z) = \Gamma(z; z_0), \quad \forall z, z_0 \in \mathbb{R}^{N+1} : z \neq z_0.$$

Per la definizione di soluzione fondamentale, si ha:

$$L^* \Gamma(z_0; z) = L^* \Gamma^*(z; z_0) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1} : z \neq z_0. \quad (4.8)$$

Consideriamo ora due funzioni $u, v \in C^{2,1}$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} uL^*v - vLu &= u \operatorname{div}_x (A \nabla_x v) - v \operatorname{div}_x (A \nabla_x u) - u \langle x, B \nabla_x v \rangle - v \langle x, B \nabla_x u \rangle \\ &\quad + u \partial_t v + v \partial_t u - \operatorname{tr}(B) uv. \end{aligned}$$

Riorganizzando i termini, possiamo riscrivere questa espressione come:

$$\begin{aligned} uL^*v - vLu &= u \operatorname{div}_x (A \nabla_x v) - v \operatorname{div}_x (A \nabla_x u) - \langle x, B \nabla_x (uv) \rangle + \partial_t (uv) \\ &\quad - \operatorname{tr}(B) uv. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analizziamo ora il termine $v \operatorname{div}_x (A \nabla_x u) - u \operatorname{div}_x (A \nabla_x v)$:

$$\begin{aligned} v \operatorname{div}_x (A \nabla_x u) - u \operatorname{div}_x (A \nabla_x v) &= \operatorname{div}_x (v A \nabla_x u - u A \nabla_x v) - \langle A \nabla_x u, \nabla_x v \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_x u, A \nabla_x v \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sfruttando la simmetria della matrice A , ovvero $A = A^T$, otteniamo che:

$$\langle A \nabla_x u, \nabla_x v \rangle = \langle \nabla_x u, A \nabla_x v \rangle.$$

Di conseguenza, combinando (4.9) e (4.10), possiamo scrivere:

$$uL^*v - vLu = \operatorname{div}_z (vA\nabla_x u - uA\nabla_x v, uv) - \langle x, B\nabla_x (uv) \rangle - \operatorname{tr}(B) uv, \quad (4.11)$$

dove la notazione $\operatorname{div}_z = \operatorname{div}_{(x,t)}$ denota la divergenza totale rispetto alla variabile $z = (x, t)$.

Analogamente, il termine $\langle x, B\nabla_x (uv) \rangle$ può essere riscritto come:

$$\langle x, B\nabla_x (uv) \rangle = \langle B^T x, \nabla_x (uv) \rangle = \operatorname{div}_x (uv B^T x) - uv \operatorname{div}_x (B^T x). \quad (4.12)$$

Considerando $B^T = (b^{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$, calcoliamo la divergenza:

$$\operatorname{div}_x (B^T x) = \langle \nabla_x, B^T x \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N b^{i,j} x_j \right) = \sum_{i=1}^N b^{i,i} = \operatorname{tr}(B^T) = \operatorname{tr}(B).$$

Utilizzando questa identità insieme alle equazioni (4.11) e (4.12), si ottiene:

$$uL^*v - vLu = \operatorname{div}_z (vA\nabla_x u - uA\nabla_x v - uv B^T x, uv). \quad (4.13)$$

Sia ora $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un sottoinsieme aperto e limitato con bordo di classe C^1 a tratti, e siano $u, v \in C^{2,1}(\overline{D})$. Applicando il teorema della divergenza all'equazione (4.13), otteniamo:

$$\int_D (uL^*v - vLu) dz = \int_{\partial D} (\langle uA\nabla_x v - vA\nabla_x u - uv B^T x, \nu_x \rangle + uv \nu_t) d\mathcal{H}^N, \quad (4.14)$$

dove $\nu \in \mathbb{R}^{N+1}$ rappresenta il vettore normale uscente a ∂D . Nella formula precedente, le componenti spaziali e temporali di ν , sono indicate esplicitamente come:

$$\nu = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

In particolare, ponendo $v \equiv 1$, l'equazione (4.14) si semplifica nella seguente identità:

$$\int_{\partial D} (\langle A\nabla_x u + u B^T x, \nu_x \rangle - uv \nu_t) d\mathcal{H}^N = \int_D Lu dz. \quad (4.15)$$

Sia ora $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $r > 0$. Consideriamo l'insieme di super-livello $\Omega_r(z_0)$ e, per ogni $\varepsilon \in (0, r)$, definiamo:

$$\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0) := \{z = (x, t) \in \Omega_r(z_0) : t < t_0 - \varepsilon\}.$$

Scegliendo $v = \Gamma(z_0; \cdot)$, si osserva che $v \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{z_0\})$ e che $v = 0$ per $t \geq t_0$. Inoltre, dalla proprietà (4.8), segue che $L^*v = 0$ in $\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)$.

Introduciamo ora gli insiemi che descrivono le superfici di livello:

$$\psi_r(z_0) := \partial\Omega_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma(z_0; z) = \frac{1}{r} \right\} \cup \{z_0\},$$

e, per ogni $\varepsilon \in (0, r)$, definiamo:

$$\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0) := \{z = (x, t) \in \psi_r(z_0) : t < t_0 - \varepsilon\},$$

$$I_r^{(\varepsilon)}(z_0) := \{z = (x, t) \in \Omega_r(z_0) : t = t_0 - \varepsilon\}.$$

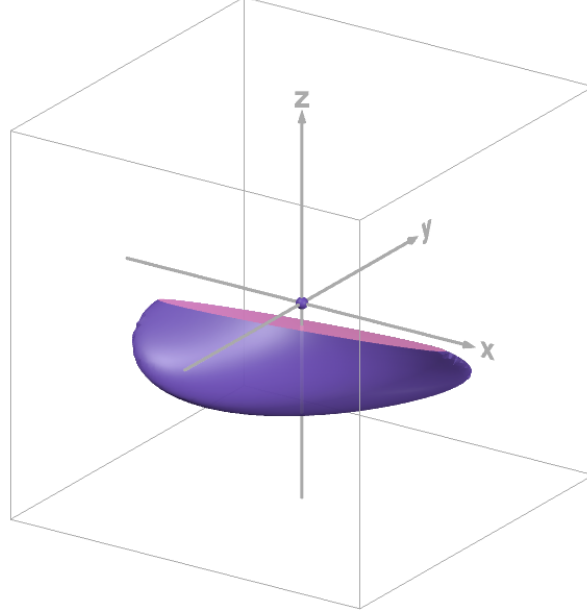


Figura 4.2: Rappresentazione in $\mathbb{R}^3$ degli insiemi $\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ (in viola) e $I_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ (in rosa), con polo $z_0 = (0, 0, 0)$, raggio $r = 8$ e $\varepsilon = 0.3$. Gli assi orizzontali x e y rappresentano le componenti spaziali, mentre l'asse verticale z denota la componente temporale.

Con queste notazioni, il bordo di $\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ può essere espresso come:

$$\partial\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0) = \psi_r^{(\varepsilon)}(z_0) \cup I_r^{(\varepsilon)}(z_0).$$

Inoltre, poiché $\Gamma(z_0; \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{z_0\})$, possiamo applicare il teorema di Dubovitskii (Teorema A.0.4). Tale risultato garantisce che, per quasi ogni $r > 0$ l'insieme $\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ è una varietà N -dimensionale di classe C^∞ in $\mathbb{R}^{N+1}$, per ogni $\varepsilon \in (0, r)$.

Nel prosieguo, assumiamo fissato un $r > 0$ tale che $\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ sia una N -varietà di classe C^∞ . Consideriamo $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_r(z_0)})$. Dato che $\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)$ è un sottoinsieme limitato di $\Omega_r(z_0)$, possiamo applicare l'equazione (4.14) a u e alla funzione $v = \Gamma(z_0; \cdot)$ definita su $D = \Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)} \Gamma(z_0; z) Lu \, dz \\ &= \int_{\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0) \cup I_r^{(\varepsilon)}(z_0)} (\langle \Gamma(z_0; z) A \nabla_x u - u A \nabla_x \Gamma(z_0; z) + u \Gamma(z_0; z) B^T x, \nu_x \rangle, \end{aligned}$$

che può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)} \Gamma(z_0; z) Lu dz \\
&= \int_{\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)} (\langle \Gamma(z_0; z) A \nabla_x u - u A \nabla_x \Gamma(z_0; z) + u \Gamma(z_0; z) B^T x, \nu_x \rangle \\
&\quad - u \Gamma(z_0; z) \nu_t) d\mathcal{H}^N \\
&+ \int_{I_r^{(\varepsilon)}(z_0)} (\langle \Gamma(z_0; z) A \nabla_x u - u A \nabla_x \Gamma(z_0; z) + u \Gamma(z_0; z) B^T x, \nu_x \rangle \\
&\quad - u \Gamma(z_0; z) \nu_t) d\mathcal{H}^N.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Osserviamo preliminarmente che:

$$\nu = (\nu_x, \nu_t) = (0, 1), \quad \text{su } I_r^{(\varepsilon)}(z_0),$$

e

$$\Gamma(z_0; \cdot) \equiv \frac{1}{r}, \quad \text{su } \psi_r^{(\varepsilon)}(z_0).$$

Utilizzando tali osservazioni, l'espressione precedente può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r^{(\varepsilon)}(z_0)} \Gamma(z_0; z) Lu dz &= \frac{1}{r} \int_{\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)} (\langle A \nabla_x u + u B^T x, \nu_x \rangle - u \nu_t) d\mathcal{H}^N \\
&- \int_{\psi_r^{(\varepsilon)}(z_0)} u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^N \\
&- \int_{I_r^{(\varepsilon)}(z_0)} u \Gamma(z_0; z) d\mathcal{H}^N.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Passiamo ora a considerare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ nell'equazione (4.17). Poiché $\Gamma(z_0; \cdot)$ è la soluzione fondamentale con polo in z_0 , si ha che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{I_r^{(\varepsilon)}(z_0)} u(z) \Gamma(z_0; z) d\mathcal{H}^N(z) = u(z_0).$$

Applicando il teorema della convergenza dominata, l'equazione (4.17) si trasforma in:

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= - \int_{\Omega_r(z_0)} \Gamma(z_0; z) Lu dz \\
&+ \frac{1}{r} \int_{\psi_r(z_0)} (\langle A \nabla_x u + u B^T x, \nu_x \rangle - u \nu_t) d\mathcal{H}^N \\
&- \int_{\psi_r(z_0)} u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^N.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Infine, applicando l'identità (4.15) con $D = \Omega_r(z_0)$, si ottiene dalla (4.18):

$$u(z_0) = - \int_{\psi_r(z_0)} u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^N + \int_{\Omega_r(z_0)} Lu \left(\frac{1}{r} - \Gamma(z_0; z) \right) dz, \tag{4.19}$$

dove si ricorda che:

$$\nu_x = -\frac{\nabla_x \Gamma(z_0; \cdot)}{|\nabla_z \Gamma(z_0; \cdot)|}, \quad \text{su } \psi_r(z_0) \setminus \{z_0\}, \quad (4.20)$$

con $\nabla_z = (\nabla_x, \partial_t)$ che rappresenta il gradiente totale. Da qui seguono le equazioni (4.4) e (4.5). Si osservi inoltre che l'identità (4.19), come discusso in precedenza, risulta valida per quasi ogni $r > 0$.

Sostituendo r con ρ e integrando rispetto a ρ nell'intervallo $(0, r)$, otteniamo dalle equazioni (4.19) e (4.20):

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\{\Gamma(z_0; z) = \frac{1}{\rho}\}} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|} d\mathcal{H}^N d\rho \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_\rho(z_0)} Lu \left(\frac{1}{\rho} - \Gamma(z_0; z) \right) dz d\rho. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Con un abuso di notazione, indichiamo con $\left\{ \Gamma(z_0; \cdot) = \frac{1}{\rho} \right\}$ l'insieme $\psi_\rho(z_0)$. Si noti che l'identità (4.19) è valida per quasi ogni $\rho > 0$, mentre (4.21) risulta valida per ogni $r > 0$. Effettuiamo ora un cambiamento di variabile nel primo integrale sul lato destro di (4.21), ponendo $y = \frac{1}{\rho}$. Ciò permette di riscrivere tale integrale come:

$$\begin{aligned} &\int_0^r \int_{\{\Gamma(z_0; z) = \frac{1}{\rho}\}} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|} d\mathcal{H}^N d\rho \\ &= \int_{\frac{1}{r}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \int_{\{\Gamma(z_0; z) = y\}} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|} d\mathcal{H}^N dy \\ &= \int_{\frac{1}{r}}^{+\infty} \int_{\{\Gamma(z_0; z) = y\}} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)| \Gamma^2(z_0; z)} d\mathcal{H}^N dy. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nell'ultima uguaglianza di (4.22) abbiamo utilizzato il fatto che l'integrazione interna viene eseguita sull'insieme in cui $\Gamma(z_0; \cdot) = y$.

Richiamiamo ora la formula della co-area (A.0.7): se $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana, allora per ogni funzione misurabile $g : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto [0, \infty)$ si ha l'identità:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} g(z) |\nabla_z f(z)| dz = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}(y)} g(z) d\mathcal{H}^N \right) dy. \quad (4.23)$$

Definiamo ora la funzione g come segue:

$$g = \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; \cdot), \nabla_x \Gamma(z_0; \cdot) \rangle}{\Gamma^2(z_0; \cdot)} \chi_{\Omega_r(z_0)},$$

dove $\chi_{\Omega_r(z_0)}$ denota la funzione indicatrice di $\Omega_r(z_0)$.

Poiché il gradiente di $\Gamma(z_0; \cdot)$, dato da

$$\nabla_z \Gamma(z_0; \cdot) = (\nabla_x \Gamma(z_0; \cdot), \partial_t \Gamma(z_0; \cdot)),$$

non si annulla quasi ovunque sull'insieme $f^{-1}(y) = \{z = (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : f(z) = y\}$, possiamo riscrivere l'identità (4.23) nella forma più adatta ai nostri scopi:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} g(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}(y)} \frac{g(z)}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|} d\mathcal{H}^N \right) dy. \quad (4.24)$$

Applicando la formula (4.24) all'integrale in (4.22), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{r}}^{+\infty} \int_{\{\Gamma(z_0; z)=y\}} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)| \Gamma^2(z_0; z)} d\mathcal{H}^N dy \\ &= \int_{\Omega_r(z_0)} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{\Gamma^2(z_0; z)} dz. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sostituendo questa espressione all'interno dell'equazione (4.21), si ricava:

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r(z_0)} \frac{u \langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{\Gamma^2(z_0; z)} dz \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_\rho(z_0)} Lu \left(\frac{1}{\rho} - \Gamma(z_0; z) \right) dz d\rho, \end{aligned}$$

da cui seguono direttamente le identità (4.6) e (4.7). $\square$

In particolare, nel caso in cui $L \in \mathcal{K}_0$, come indicato nell'Osservazione 4.1.2, il dominio $\Omega_r(z_0)$ risulta limitato. Questo permette di enunciare il seguente risultato.

Proposizione 4.1.8. *Sia $L \in \mathcal{K}_0$. Allora, per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, per quasi ogni $r > 0$, e per ogni $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_r(z_0)})$, si verifica la seguente identità:*

$$u(z_0) = \int_{\partial\Omega_r(z_0)} Q(z_0; z) u(z) d\mathcal{H}^N(z) + \int_{\Omega_r(z_0)} Lu(z) \left(\frac{1}{r} - \Gamma(z_0; z) \right) dz, \quad (4.26)$$

dove $Q(z_0; \cdot)$ è definito in (4.5).

Inoltre, per ogni $r > 0$, vale la seguente identità:

$$u(z_0) = \frac{1}{r} \int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0; z) u(z) dz + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_\rho(z_0)} Lu(z) \left(\frac{1}{\rho} - \Gamma(z_0; z) \right) dz d\rho, \quad (4.27)$$

dove $M(z_0; \cdot)$ è definito in (4.7).

Definizione 4.1.9. Si definiscono *nuclei* le quantità introdotte nelle formule di rappresentazione (4.4) e (4.6):

$$\begin{aligned} Q(z_0; z) &:= \frac{\langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{|\nabla_z \Gamma(z_0; z)|}, \\ M(z_0; z) &:= \frac{\langle A \nabla_x \Gamma(z_0; z), \nabla_x \Gamma(z_0; z) \rangle}{\Gamma^2(z_0; z)}. \end{aligned}$$

Infine, si osserva che, nel caso particolare in cui $z_0 = (0, 0)$, il nucleo $M(z_0; \cdot)$, definito in (4.7), assume una forma esplicita, come enunciato nella proposizione seguente.

Proposizione 4.1.10. *Sia $L \in \mathcal{K}$. Allora si verifica la seguente identità:*

$$M(0, 0; x, t) = \frac{\langle AC^{-1}(t)x, C^{-1}(t)x \rangle}{4}. \quad (4.28)$$

Dimostrazione. Poiché

$$\Gamma(0; z) = \Gamma(z^{-1}; 0) = \Gamma(-E(-t)x, -t),$$

si può scrivere:

$$\frac{\nabla_x \Gamma(0; z)}{\Gamma(0; z)} = -\frac{1}{2} E^T(-t) C^{-1}(-t) E(-t) x. \quad (4.29)$$

D'altra parte, consideriamo la seguente identità:

$$\begin{aligned} (E^T(-t) C^{-1}(-t) E(-t))^{-1} &= E(t) C(-t) E^T(t) \\ &= \int_0^{-t} E(t+s) A E^T(t+s) ds \\ &= \int_t^0 E(s) A E^T(s) ds \\ &= -C(t). \end{aligned}$$

Combinando questa relazione con l'equazione (4.29), otteniamo l'identità (4.28). $\square$

Osservazione 4.1.11. Supponiamo che la funzione u soddisfi l'equazione $Lu = 0$ in $\Omega_r(z_0)$. In tal caso, le formule di rappresentazione (4.4) e (4.6) si riducono a formule di media. In particolare, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \int_{\partial\Omega_r(z_0)} Q(z_0; z) u(z) d\mathcal{H}^N, \\ u(z_0) &= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0; z) u(z) d\mathcal{H}^{N+1}. \end{aligned}$$

4.2 Nuclei Più Regolari

A partire dall'equazione (4.6) e utilizzando il metodo di discesa di Hadamard, introdotto originariamente da Kuptsov in [16], è possibile derivare formule di media che coinvolgono nuclei dotati di una maggiore regolarità.

Il metodo di discesa si fonda sulla seguente osservazione: se $u = u(x, t)$ è una soluzione dell'equazione $Lu = f$, con $L \in \mathcal{K}$, allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, la funzione

$$\tilde{u}^{(m)}(y, x, t) = u(x, t), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (4.30)$$

è una soluzione della seguente equazione modificata:

$$\tilde{L}^{(m)} \tilde{u}^{(m)} = (\Delta_y^{(m)} + L) \tilde{u}^{(m)} = \tilde{f}^{(m)}, \quad (4.31)$$

dove $\Delta_y^{(m)}$ indica l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^m$ rispetto alle variabili $y = (y_1, \dots, y_m)$ e

$$\tilde{f}^{(m)}(y, x, t) = f(x, t), \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Introdurremo ora alcune notazioni utili. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, definiamo le seguenti quantità:

$$\Gamma^{(m)}(z_0; z) := \frac{\Gamma(z_0; z)}{(4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}}}, \quad (4.32)$$

$$\Omega_r^{(m)}(z_0) := \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma^{(m)}(z_0; z) > \frac{1}{r} \right\}, \quad (4.33)$$

$$N_r(z_0; z) := 2\sqrt{(t_0 - t) \log(r\Gamma^{(m)}(z_0; z))}, \quad (4.34)$$

$$M_r^{(m)}(z_0; z) := \omega_m N_r^m(z_0; z) \left[M(z_0; z) + \frac{m}{m+2} \frac{N_r^2(z_0; z)}{4(t_0 - t)^2} \right], \quad (4.35)$$

$$W_r^{(m)}(z_0; z) := m\omega_m \left(\frac{N_r^m(z_0; z)}{rm} - \Gamma^{(m)}(z_0; z) \frac{(4(t_0 - t))^{\frac{m}{2}}}{2} \right) \cdot \gamma\left(\frac{m}{2}; \frac{N_r^2(z_0; z)}{4(t_0 - t)}\right). \quad (4.36)$$

Nelle espressioni sopra riportate:

- ω_m rappresenta la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^m$,
- $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ denota la funzione Gamma incompleta inferiore.

Proposizione 4.2.1. *Sia $L \in \mathcal{K}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ e $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_r^{(m)}(z_0)})$, vale la seguente identità:*

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r^{(m)}(z_0)} M_r^{(m)}(z_0; z) u(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_\rho^{(m)}(z_0)} W_\rho^{(m)}(z_0; z) Lu(z) dz d\rho. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'operatore $\tilde{L}^{(m)}$ definito in (4.31) appartiene alla classe $\mathcal{K}$ e può essere rappresentato nella forma generale (1.1), sostituendo le matrici A e B associate all'operatore L con:

$$\tilde{A}^{(m)} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

dove I_m denota la matrice identità di dimensione $m \times m$, mentre A e B sono le matrici originali associate a L .

Pertanto, possiamo applicare una formula di media analoga a quella in (4.6). In particolare, per ogni $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{m+N+1}$, $r > 0$ e $\tilde{u}^{(m)} \in C^{2,1}(\overline{\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)})$, si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(m)}(y_0, z_0) &= \frac{1}{r} \int_{\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)} \tilde{M}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) \tilde{u}^{(m)}(y, z) dy dz \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\tilde{\Omega}_\rho^{(m)}(y_0, z_0)} \tilde{L}^{(m)} \tilde{u}^{(m)}(y, z) \left(\frac{1}{\rho} - \Gamma^{(m)}(y_0, z_0; y, z) \right) dy dz d\rho. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Qui, $\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)$ è definito come:

$$\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0) := \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^{m+N+1} : \tilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) > \frac{1}{r} \right\}, \quad (4.39)$$

dove $\tilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; \cdot, \cdot)$ rappresenta la soluzione fondamentale dell'operatore $\tilde{L}^{(m)}$ con polo in (y_0, z_0) .

Nel definire l'insieme di super-livello $\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)$, non imponiamo una condizione di limitatezza, giustificando ciò con la seguente osservazione: per ogni punto fissato $(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{m+N+1}$, si ha

$$\lim_{|(y, z)| \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}^{(m)}(\eta, \zeta; y, z) = 0. \quad (4.40)$$

Per verificare questa affermazione, consideriamo i casi $\tau \leq t$ e $\tau > t$. Se $\tau \leq t$, si ha $\tilde{\Gamma}^{(m)}(\eta, \zeta; y, z) = \tilde{\Gamma}^{(m)}(\eta, \xi, \tau; y, x, t) = 0$. D'altra parte, se $\tau > t$, vale la disuguaglianza

$$\tilde{\Gamma}^{(m)}(\eta, \zeta; y, z) \leq (4\pi)^{-\frac{m+N}{2}} (\tau - t)^{-\frac{m}{2}} (\det(C(\tau - t)))^{-\frac{1}{2}}.$$

Poiché la funzione $s \mapsto \det(C(s))$ è crescente su $]0, \infty[$, il termine a destra tende a zero per $\tau - t \rightarrow \infty$. Ne segue che

$$\lim_{|(y, x)| \rightarrow \infty} \left(\sup_{0 \leq \tau - t \leq T} \tilde{\Gamma}^{(m)}(\eta, \zeta; y, z) \right) = 0, \quad \forall T > 0.$$

Questa proprietà implica che l'espressione in (4.40) è valida e, di conseguenza, l'insieme di super-livello $\tilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)$ risulta limitato per ogni $r > 0$.

Supponiamo ora che Γ sia la soluzione fondamentale dell'operatore L . È possibile dimostrare che la funzione $\tilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; \cdot, \cdot)$ può essere espressa nella forma seguente:

$$\tilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, x_0, t_0; y, x, t) = \Gamma(x_0, t_0; x, t) H^{(m)}(y_0, t_0; y, t), \quad (4.41)$$

dove $H^{(m)}$ rappresenta la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^m$, associata all'operatore $\Delta_y^{(m)} - \partial_t$. In particolare, $H^{(m)}$ può essere esplicitamente definita come:

$$H^{(m)}(y_0, t_0; y, t) = \begin{cases} (4\pi(t_0 - t))^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}\right), & \text{se } t_0 > t, \\ 0, & \text{se } t_0 \leq t. \end{cases} \quad (4.42)$$

Sfruttando l'espressione in (4.41), possiamo dedurre la forma del nucleo $\widetilde{M}^{(m)}(y_0, z_0; \cdot, \cdot)$ associato all'operatore $\widetilde{L}^{(m)}$:

$$\widetilde{M}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) = M(z_0; z) + \frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)^2}.$$

Applichiamo ora la formula del valore medio in (4.38) alla funzione $\widetilde{u}^{(m)}$, definita in (4.30). Questo porta alla seguente identità:

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{r} \int_{\widetilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)} \widetilde{M}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) u(z) dy dz \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\widetilde{\Omega}_\rho^{(m)}(y_0, z_0)} \left(\frac{1}{\rho} - \widetilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) \right) Lu(z) dy dz d\rho. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Poiché u dipende esclusivamente dalla variabile z , possiamo integrare (4.43) rispetto alla variabile y . Utilizzando le definizioni di $\widetilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)$ e di $\widetilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; \cdot, \cdot)$ in (4.39) e (4.41), rispettivamente, si ottiene:

$$\widetilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0) = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^{m+N+1} : r \frac{\Gamma(z_0; z)}{(4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}}} > \exp\left(\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}\right) \right\}. \quad (4.44)$$

Esaminiamo ora il primo integrale nel lato destro di (4.43). Può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} &\int_{\widetilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)} \widetilde{M}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) u(z) dy dz \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}_r^{(m)}(y_0, z_0)} \left(M(z_0; z) + \frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)^2} \right) u(z) dy dz \\ &= \int_{\Omega_r^{(m)}(z_0)} \left(\int_{\{|y_0 - y| < N_r(z_0; z)\}} \left(M(z_0; z) + \frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)^2} \right) dy \right) u(z) dz \\ &= \int_{\Omega_r^{(m)}(z_0)} M_r^{(m)}(z_0; z) u(z) dz, \end{aligned} \quad (4.45)$$

dove $\Omega_r^{(m)}(z_0)$ e $M_r^{(m)}(z_0; \cdot)$ sono stati definiti rispettivamente in (4.33) e (4.35).

Per quanto riguarda il secondo integrale presente nel lato destro di (4.43), osserviamo che:

$$\int_0^R e^{-\frac{r^2}{c}} r^{m-1} dr = \frac{c^{\frac{m}{2}}}{2} \int_0^{\frac{R^2}{c}} e^{-r} r^{\frac{m}{2}-1} dr = \frac{c^{\frac{m}{2}}}{2} \gamma\left(\frac{m}{2}; \frac{R^2}{c}\right), \quad (4.46)$$

dove $\gamma(\cdot, \cdot)$ denota la funzione Gamma incompleta inferiore. Alla luce di questa relazione, è possibile riscrivere il secondo integrale nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Omega}_\rho^{(m)}(y_0, z_0)} \left(\frac{1}{\rho} - \tilde{\Gamma}^{(m)}(y_0, z_0; y, z) \right) Lu(z) dy dz \\
&= \int_{\Omega_\rho^{(m)}(z_0)} \left(\int_{\{|y_0 - y| < N_\rho(z_0; z)\}} \frac{1}{\rho} - \Gamma(z_0; z) \frac{\exp\left(-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}\right)}{(4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}}} dy \right) Lu(z) dz \\
&= \int_{\Omega_\rho^{(m)}(z_0)} W_\rho^{(m)}(z_0; z) Lu(z) dz,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

dove $W_\rho(z_0; \cdot)$ è definito in (4.36).

Infine, applicando un argomento analogo a quello utilizzato nella dimostrazione di (4.40), si può dimostrare che:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z_0; z)}{(4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}}} = 0,$$

il che garantisce la compattezza dell'insieme di super-livello $\overline{\Omega_r^{(m)}(z_0)}$. $\square$

Osservazione 4.2.2. Dall'espressione in (4.34) si deduce la seguente stima:

$$0 \leq N_r^2(z_0; z) \leq 4(t_0 - t) \log \left(\frac{r \exp(-(t_0 - t) \operatorname{tr}(B))}{(4\pi)^{\frac{m+N}{2}} (t_0 - t)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det(C(t_0 - t))}} \right), \tag{4.48}$$

e, utilizzando le relazioni in (3.20) e (2.20), si ottiene:

$$\sqrt{\det(C(t_0 - t))} = (t_0 - t)^{\frac{Q}{2}} (c_0 + O(t_0 - t)), \quad \text{quando } t \rightarrow t_0, \tag{4.49}$$

dove c_0 è una costante positiva e Q rappresenta la dimensione omogenea spaziale di $\mathbb{R}^N$ rispetto al gruppo di dilatazioni associato all'operatore L_0 , ossia la parte principale di L . Pertanto, per ogni $r > 0$, combinando le relazioni (4.34), (4.48) e (4.49), si ottiene infine:

$$N_r^m(z_0; z) = (t_0 - t)^{\frac{m}{2}} \left(\log \left(\frac{1}{t_0 - t} \right) \right)^{\frac{m}{2}} O(1), \quad \text{quando } t \rightarrow t_0. \tag{4.50}$$

Osservazione 4.2.3. La stima (4.50) si applica in modo uniforme rispetto al parametro λ per la famiglia di operatori L_λ definiti in (3.25). Più precisamente, fissato un valore arbitrario $\lambda_0 > 0$, indicando con $N_{r,\lambda}$ il nucleo definito in (4.34) relativo all'operatore L_λ , si ha, per ogni $r > 0$:

$$N_{r,\lambda}^m(z_0; z) = (t_0 - t)^{\frac{m}{2}} \left(\log \left(\frac{1}{t_0 - t} \right) \right)^{\frac{m}{2}} \omega(t, \lambda), \tag{4.51}$$

dove la funzione $\omega(t, \lambda)$ soddisfa la seguente condizione:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \omega(t, \lambda) = O(1), \quad \text{quando } t \rightarrow t_0. \tag{4.52}$$

La dimostrazione di tale risultato si basa sulla stima:

$$\sqrt{\det(C_\lambda(t_0 - t))} = (t_0 - t)^{\frac{Q}{2}} \left(c_0 + O(\lambda^2(t_0 - t)) \right),$$

che discende direttamente dall'espressione in (3.27). Seguendo un procedimento analogo a quello impiegato nella dimostrazione di (4.50), si ottengono le relazioni (4.51) e (4.52).

Capitolo 5

Disuguaglianza di Harnack e Teoremi di Liouville per Operatori di Kolmogorov

In questo capitolo si applicano le formule di valore medio per l'operatore di Kolmogorov, con particolare attenzione alla disuguaglianza di Harnack, al principio del massimo forte e ai teoremi di tipo Liouville. La sezione principale riguarda la disuguaglianza di Harnack, presentata in diverse formulazioni, sia su cilindri standard sia su domini non cilindrici, estendendo i risultati classici agli operatori ipoellittici e invarianti per dilatazioni.

Segue il principio del massimo forte, che garantisce che, se una soluzione non negativa si annulla in un punto, allora rimane identicamente nulla nell'intero insieme raggiungibile da quel punto. Infine, i teoremi di tipo Liouville caratterizzano le soluzioni limitate e inferiormente limitate, con particolare attenzione al comportamento asintotico e alla costanza delle soluzioni globalmente limitate.

5.1 Principio del Massimo Forte

Si enuncia il principio del massimo forte relativo all'operatore di Kolmogorov con coefficienti costanti, ricordando che tale operatore può essere espresso nella forma di Hörmander:

$$L = \sum_{k=1}^N X_k^2 + Y,$$

come descritto nell'Osservazione 1.3.2. Per sviluppare il discorso, introduciamo preliminarmente alcuni concetti essenziali.

Definizione 5.1.1. Sia L un operatore definito come in (1.1). Una mappa

$$\gamma : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^{N+1}$$

si definisce curva L -ammissibile se è assolutamente continua e soddisfa la seguente relazione:

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{k=1}^m \omega_k(s) X_k(\gamma(s)) + Y(\gamma(s)), \quad \text{per quasi ogni } s \in [0, T], \quad (5.1)$$

dove $\omega_1, \dots, \omega_m \in L^1[0, T]$.

Definizione 5.1.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto e sia L un operatore definito come in (1.1). Per ogni $(x_0, t_0) \in \Omega$, si definisce l'insieme raggiungibile come:

$$A_{(x_0, t_0)}(\Omega) = \left\{ (x, t) \in \Omega : \exists \gamma : [0, T] \mapsto \Omega \text{ } L\text{-ammissibile,} \right. \\ \left. \text{tale che } \gamma(0) = (x_0, t_0), \gamma(T) = (x, t) \right\} \quad (5.2)$$

Osservazione 5.1.3. Le nozioni di curva parabolica e di insieme di propagazione per l'operatore del calore H sono analoghe, nel caso dell'operatore di Kolmogorov L , rispettivamente a quelle di curva L -ammissibile e di insieme raggiungibile.

Osservazione 5.1.4. La struttura dell'insieme $A_{(x_0, t_0)}$ dipende in modo significativo dall'insieme Ω . Ad esempio, nel caso in cui $\Omega =]-1, 1[^2 \times]-1, 0[\subset \mathbb{R}^3$, si ottiene:

$$A_{(0,0,0)} = \{(x, y, t) \in \Omega : |x| \leq |t|\}.$$

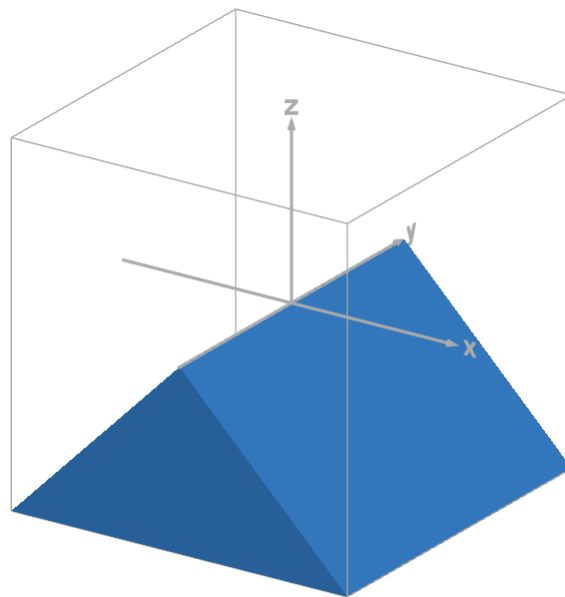


Figura 5.1: Rappresentazione dell'insieme $A_{(0,0,0)}$.

Enunciamo di seguito una formulazione della disuguaglianza di Harnack, risultato centrale per la dimostrazione del principio del massimo forte. La dimostrazione di tale disuguaglianza sarà fornita nella sezione successiva.

Teorema 5.1.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto e sia L un operatore definito come in (1.1). Sia $u \geq 0$ una soluzione dell'equazione $Lu = 0$ in Ω . Per ogni punto $z_0 = (x_0, t_0) \in \Omega$ e per ogni insieme compatto $K \subset \text{int}(A_{(x_0, t_0)})$, esiste una costante $C_K > 0$, dipendente solo da z_0 , Ω , K e L , tale che:*

$$\sup_K u \leq C_K u(z_0). \quad (5.3)$$

Come conseguenza della disuguaglianza di Harnack 5.1.5, si può dimostrare il seguente principio:

Teorema 5.1.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto e sia L un operatore definito come in (1.1). Sia $u \geq 0$ una soluzione dell'equazione $Lu = 0$ in Ω . Dato un punto $(x_0, t_0) \in \Omega$, se $u(x_0, t_0) = 0$, allora si ha $u(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in A_{(x_0, t_0)}$.*

Dimostrazione. Grazie alla disuguaglianza di Harnack 5.1.5, considerando un insieme compatto $K \subset \text{int}(A_{z_0})$, si ottiene:

$$\sup_K u \leq C_K u(z_0).$$

Poiché $u \geq 0$, l'ipotesi $u(z_0) = 0$ implica che $u(z) = 0$ per ogni $z \in K$. Di conseguenza, per continuità di u , si conclude che $u(z) = 0$ per ogni $z \in A_{z_0}$. $\square$

5.2 Disuguaglianza di Harnack

Sia L un operatore appartenente alla classe $\mathcal{K}$, definito nella forma:

$$L = \text{div}_x (A \nabla_x) + \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t.$$

Indichiamo con L_0 la parte principale di L e con $(D(\lambda))_{\lambda > 0}$ il gruppo di dilatazioni associato a L_0 . In questa sezione si dimostra una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni non negative dell'equazione $Lu = 0$, la quale è invariante rispetto al gruppo $(D(\lambda))_{\lambda > 0}$. Per gli operatori appartenenti alla classe $\mathcal{K}_0$, la disuguaglianza di Harnack può essere dimostrata in modo relativamente semplice, sfruttando l'invarianza di L rispetto alle dilatazioni $D(\lambda)$ e alle traslazioni sinistre ℓ_ζ . La dimostrazione si basa sulla seguente formulazione della disuguaglianza di Harnack debole.

Teorema 5.2.1 (Bony [3], Teorema 7.1). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia T un sottoinsieme denso di Ω . Allora, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esistono punti $z_1, \dots, z_p \in T$ e una costante $c > 0$ tali che:*

$$\sup_K u \leq c(u(z_1) + \dots + u(z_p)),$$

per ogni soluzione C^∞ non negativa dell'equazione $Lu = 0$ in Ω .

L'ipoellitticità di L e il risultato precedente consentono di enunciare la seguente proposizione.

Proposizione 5.2.2. *Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di soluzioni dell'equazione $Lu = 0$, con $L \in \mathcal{K}$, tale che $u_n \leq u_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Indichiamo con u il limite della successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e supponiamo che $u < \infty$ in ogni punto di un sottoinsieme denso di Ω . Allora, si ha: $u < \infty$ in ogni punto di Ω , $u \in C^\infty(\Omega)$ e $Lu = 0$ in Ω .*

Dimostrazione. Dal Teorema di Bony segue che la successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω alla funzione u , il che implica $u \in C(\Omega)$.

Inoltre, poiché $Lu_n = 0$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $Lu = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Grazie all'ipoellitticità di L , ne consegue che u è una soluzione classica $C^\infty(\Omega)$ dell'equazione $Lu = 0$. $\square$

Definiamo il seguente insieme:

$$K_r(z_0, \varepsilon) := \Omega_r(z_0) \cap \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t \leq t_0 - \varepsilon r^{\frac{2}{Q}} \right\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.4)$$

dove $\Omega_r(z_0)$ denota l'insieme di super-livello associato alla soluzione fondamentale Γ dell'operatore L , come definito in (4.1).

È ora possibile enunciare il seguente risultato.

Teorema 5.2.3. *Sia $L \in \mathcal{K}_0$ e sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Allora, per ogni $\varepsilon \in \left(0, c_N^{\frac{2}{Q}}\right)$, esiste una costante $c = c(\varepsilon) > 0$ tale che:*

$$\sup_{K_r(z_0, \varepsilon)} u \leq cu(z_0), \quad (5.5)$$

per ogni soluzione non negativa u dell'equazione $Lu = 0$ in Ω , per ogni $z_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_{2r}(z_0)} \subset \Omega$, dove c_N è la costante positiva definita in (2.22).

Dimostrazione. Per via dell'invarianza dell'operatore L rispetto alle traslazioni sinistre ℓ_ζ e alle dilatazioni $D(\lambda)$, possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $z_0 = (0, 0)$ e

$r = 1$ (vedi (4.3)).

Supponiamo, per assurdo, che la disuguaglianza (5.5) non sia valida. In tal caso, esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni $C^\infty(\Omega)$, con $u_n \geq 0$ e $Lu_n = 0$ in Ω , tale che:

$$\sup_{K_1(0, \varepsilon)} u_n > 4^n u_n(0). \quad (5.6)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $u_n(0) \neq 0$. Infatti, se $u_n(0) = 0$, allora, utilizzando la formula della media (4.27), si avrebbe $M(0; z) u_n(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega_2(0)$. Poiché $M(0; z) > 0$ quasi ovunque (vedi (4.28)), ne segue che $u_n \equiv 0$ in $\Omega_2(0)$, in contraddizione con l'ipotesi $u_n \geq 0$ e $u_n \not\equiv 0$.

Definiamo ora:

$$w_n(z) := \frac{u_n(z)}{u_n(0)}, \quad w(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(z)}{2^n}. \quad (5.7)$$

Si ha che $w(0) = 1$, e l'insieme

$$T := \{z \in \Omega : w(z) < +\infty\},$$

non è vuoto. Inoltre, applicando la formula della media (4.27) con $r = 2$, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_2(0)} M(0; z) w(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(0)}{2^n} = 1.$$

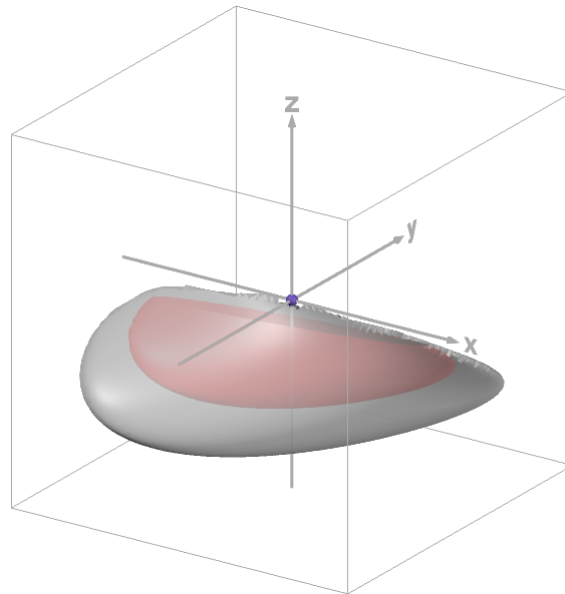


Figura 5.2: Rappresentazione in $\mathbb{R}^3$ degli insiemi $\Omega_{2r}(z_0)$ (in grigio) e $K_r(z_0, \varepsilon)$ (in rosso), con $z_0 = (0, 0, 0)$, $r = 8$ ed $\varepsilon = 0, 3$. Gli assi orizzontali x e y rappresentano le componenti spaziali, mentre l'asse verticale z denota la componente temporale.

Poiché $M(0; z) > 0$ quasi ovunque in $\Omega_2(0)$, si conclude che $T \cap \Omega_2(0)$ è un sottoinsieme denso di $\Omega_2(0)$. Applicando la Proposizione 5.2.2 alla successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(z)}{2^n}$, otteniamo $w \in C^\infty(\Omega_2(0))$, il che implica che w è limitata su $K_1(0, \varepsilon)$.

D'altra parte, dalla disuguaglianza (5.6) si ha:

$$\sup_{K_1(0, \varepsilon)} w \geq \frac{1}{2^n} \sup_{K_1(0, \varepsilon)} w_n \geq 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questo porta a una contraddizione, concludendo la dimostrazione. $\square$

Successivamente, introduciamo ulteriori notazioni: consideriamo il cubo unitario $H_1(0)$, definito come:

$$H_1(0) := [-1, 1]^N \times [-1, 0],$$

e il relativo bordo inferiore:

$$H_1^-(0) := [-1, 1]^N \times \{-1\}.$$

Per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $r > 0$, definiamo:

$$H_r(z_0) := z_0 \circ D(r) H_1(0), \quad H_r^-(z_0) := z_0 \circ D(r) H_1^-(0),$$

dove $D(r)$ rappresenta il gruppo di dilatazioni associato all'operatore L .

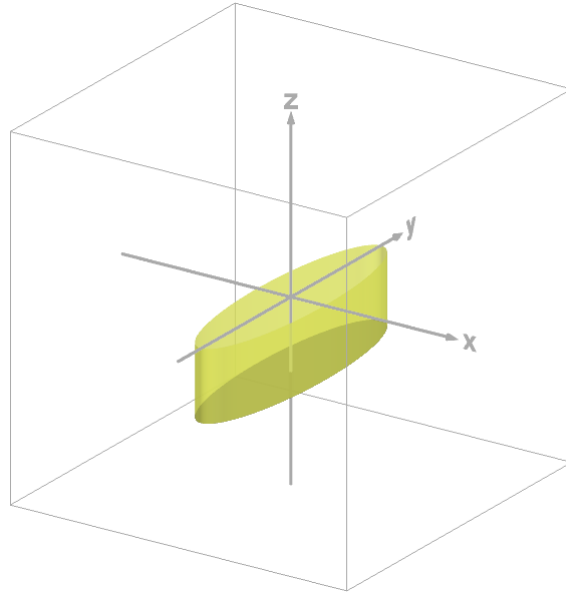


Figura 5.3: Rappresentazione in $\mathbb{R}^3$ degli insiemi $H_r(z_0)$ (in giallo) e $H_r^-(z_0)$ (in nero), con $z_0 = (0, 0, 0)$ e $r = 2$. Gli assi orizzontali x e y rappresentano le componenti spaziali, mentre l'asse verticale z denota la componente temporale.

Grazie al Teorema 5.2.3, è possibile ottenere una formulazione della disuguaglianza di Harnack applicabile ai cosiddetti "cilindri" $H_r(z_0)$.

Teorema 5.2.4. *Sia $L \in \mathcal{K}_0$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un insieme aperto. Esistono due costanti positive $\theta = \theta(L)$ e $c = c(L)$ tali che:*

$$\sup_{H_{\theta r}^-(z_0)} u \leq cu(z_0), \quad (5.8)$$

per ogni soluzione non negativa u di $Lu = 0$ in Ω , e per ogni $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $H_r(z_0) \subset \Omega$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $z_0 = 0$. Dimostreremo l'esistenza di due costanti $\sigma = \sigma(L) > 0$ e $\lambda = \lambda(L) > 0$ tali che:

$$D(\sigma)(\Omega_1(0)) \subset H_1(0), \quad D(\lambda)(H_1^-(0)) \subset (\Omega_1(0) \cap \{t \leq -\varepsilon\}) = K_1(0). \quad (5.9)$$

La prima inclusione in (5.9) è immediatamente verificabile. Ci concentriamo ora sulla dimostrazione della seconda inclusione. Un punto $(\xi, \tau) \in \Omega_1(0)$ soddisfa la relazione:

$$\left\langle C^{-1}(1) D_0\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\right) E(-\tau)\xi, D_0\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\right) E(-\tau)\xi \right\rangle < 4 \log\left(\frac{c_N}{(-\tau)^{\frac{Q}{2}}}\right), \quad (5.10)$$

(vedi (2.21)). Inoltre, è noto che (vedi (2.18)):

$$D_0\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\right) E(-\tau) = E(1) D_0\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\right).$$

Conseguentemente, esiste una costante positiva $a = a(L)$ tale che la relazione (5.10) è soddisfatta se il punto (ξ, τ) verifica:

$$\left| D_0\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\right) \xi \right|^2 \leq a \log\left(\frac{c_N}{(-\tau)^{\frac{Q}{2}}}\right). \quad (5.11)$$

D'altra parte, un punto (ξ, τ) appartiene a $D(\lambda)(H_1^-(0))$ se e solo se $\tau = -\lambda^2$ ed esiste $x \in \mathbb{R}^N$, con $|x| \leq 1$ tale che $\xi = D_0(\lambda)x$. Per verificare la seconda inclusione in (5.9), osserviamo che è possibile definire $\lambda = \lambda(L) > 0$ ed $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ tali che:

$$|x|^2 \leq a \log\left(\frac{c_N}{\lambda^Q}\right), \quad \varepsilon \leq \lambda^2 \leq 1,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| \leq 1$.

Definiamo i seguenti parametri:

$$\rho = \frac{(\sigma r)^Q}{2}, \quad \theta = \frac{\sigma \lambda}{2^{\frac{1}{Q}}},$$

e utilizziamo la relazione (5.9) per ottenere:

$$H_r(0) = D(r) H_1(0) \supset D(r\sigma)(\Omega_1(0)) = \Omega_{2\rho}(0), \quad (5.12)$$

e analogamente:

$$H_{\theta r}^-(0) = D(\theta r) H_1^-(0) \subset D\left(\frac{\theta r}{\lambda}\right)(\Omega_1(0) \cap \{t \leq -\varepsilon\}) = K_\rho(0, \varepsilon). \quad (5.13)$$

Applicando il Teorema 5.2.3 e le inclusioni stabilite in (5.12) e (5.13), si ottiene:

$$\sup_{H_{\theta r}^-(0)} u \leq \sup_{K_\rho(0, \varepsilon)} u \leq cu(0),$$

per ogni soluzione non negativa u dell'equazione $Lu = 0$ in Ω e per ogni $r > 0$ tale che $H_r(0) \subset \Omega$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 5.2.5. La disuguaglianza di Harnack espressa in (5.8) è invariante rispetto al parametro r , in quanto la costante c non dipende da r .

Il Teorema 5.2.4 rimane valido per ogni operatore appartenente alla classe $\mathcal{K}$. Passiamo ora a dimostrare un ulteriore risultato.

Teorema 5.2.6. *Sia $L \in \mathcal{K}$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un sottoinsieme aperto. Per un valore fissato di $m \geq 3$, per ogni $\varepsilon \in \left(0, c_N^{\frac{2}{Q}}\right)$ e per ogni $r_0 > 0$, esiste una costante $c = c(\varepsilon, r_0) > 0$ tale che:*

$$\sup_{K_r^{(m)}(z_0, \varepsilon)} u \leq cu(z_0), \quad (5.14)$$

per ogni soluzione non negativa u dell'equazione $Lu = 0$ in Ω , con $u \in C^{2,1}(\Omega)$, e per ogni $z_0 \in \Omega$, $r \in (0, r_0]$ tale che $\overline{\Omega_{2r}(z_0)} \subset \Omega$.

Nella disuguaglianza (5.14), adottiamo la seguente notazione, analoga a quella introdotta in (5.4):

$$K_r^{(m)}(z_0, \varepsilon) := \Omega_r^{(m)}(z_0) \cap \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t \leq t_0 - \varepsilon r^{\frac{2}{Q+m}} \right\}. \quad (5.15)$$

Dimostrazione. Grazie all'invarianza dell'operatore L rispetto alle traslazioni a sinistra, possiamo senza perdita di generalità supporre $z_0 = 0$. Introduciamo il parametro $\lambda = r^{\frac{1}{m+Q}}$ e definiamo il seguente operatore scalato:

$$L_\lambda = \lambda^2 D(\lambda) L D\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (5.16)$$

dove $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ rappresenta il gruppo di dilatazioni associato a L_0 , la parte principale dell'operatore L .

Definiamo inoltre:

$$u_\lambda(z) = u(D(\lambda)z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Sotto queste condizioni, possiamo verificare che:

$$L_\lambda u_\lambda = 0, \quad \text{in } D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega, \quad (5.17)$$

dato che per ipotesi $Lu = 0$ in Ω . Analogamente, la soluzione fondamentale Γ_λ associata all'operatore L_λ soddisfa:

$$\Gamma_\lambda(z) = \lambda^Q \Gamma(D(\lambda)z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Per dimostrare la disuguaglianza (5.14) nel caso $z_0 = 0$, è sufficiente verificare la seguente relazione:

$$\sup_{K_{1,\lambda}^{(m)}(0,\varepsilon)} v \leq cv(0), \quad (5.18)$$

per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$, dove $\lambda_0 = r_0^{\frac{1}{m+Q}}$, e per ogni soluzione non negativa v di $L_\lambda v = 0$, con $v \in C^{2,1}\left(D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega\right)$, definita in $D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega$.

Nella disuguaglianza (5.18), utilizziamo la seguente definizione:

$$K_{r,\lambda}^{(m)}(0,\varepsilon) := \Omega_{r,\lambda}^{(m)}(0) \cap \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t \leq -\varepsilon r^{\frac{2}{Q+m}} \right\}, \quad (5.19)$$

dove:

$$\Omega_{r,\lambda}^{(m)}(\zeta) := \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma_\lambda(\zeta; z) (4\pi(\tau - t))^{-\frac{m}{2}} > \frac{1}{r} \right\}. \quad (5.20)$$

Consideriamo ora una soluzione non negativa $v \in C^{2,1}\left(D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega\right)$ di $L_\lambda v = 0$. Utilizzando la formula del valore medio, espressa in (4.37), possiamo scrivere:

$$v(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{2,\lambda}^{(m)}(0)} M_{2,\lambda}^{(m)}(0; z) v(z) dz, \quad (5.21)$$

dove $M_{r,\lambda}^{(m)}(0; z)$ rappresenta il nucleo associato all'operatore L_λ con $r = 2$, come definito in (4.35).

Poiché vale l'identità: $D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega_{2r}^{(m)}(0) = \Omega_{2,\lambda}^{(m)}(0)$, e $\Omega_{2r}^{(m)}(0) \subset \Omega$, ne segue che l'insieme $\overline{\Omega_{2,\lambda}^{(m)}(0)}$ è contenuto in $D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega$.

Utilizzando la definizione del nucleo riportata in (4.35), possiamo esprimere:

$$M_\lambda(0; z) = \frac{\langle A \nabla_x \Gamma_\lambda(0; z), \nabla_x \Gamma_\lambda(0; z) \rangle}{\Gamma_\lambda^2(0; z)} \geq 0.$$

Inoltre, si verifica la seguente disuguaglianza:

$$M_{2,\lambda}^{(m)}(0; z) \geq \frac{m}{m+2} \omega_m \frac{N_{2,\lambda}^{m+2}(0; z)}{4t^2}. \quad (5.22)$$

Nell'insieme $\Omega_{\frac{3}{2},\lambda}^{(m)}(0)$, sfruttando le definizioni e le relazioni (4.34) e (5.20), possiamo scrivere:

$$N_{2,\lambda}(0; z) > \left(-4t \log \left(\frac{4}{3} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Combinando le espressioni (5.21), (5.22) e (5.23), otteniamo:

$$v(0) \geq c_m \int_{\Omega_{\frac{3}{2},\lambda}^{(m)}(0)} (-t)^{\frac{m-2}{2}} v(z) dz, \quad (5.24)$$

dove c_m è una costante positiva dipendente esclusivamente da m .

Introduciamo ora l'insieme:

$$K_\lambda := \Omega_{\frac{3}{2},\lambda}^{(m)}(0) \cap \{z \in \mathbb{R}^{N+1} : t \leq -\varepsilon\}.$$

Grazie alla disuguaglianza (5.24), possiamo quindi dedurre che:

$$v(0) \geq c_m \varepsilon^{\frac{m-2}{2}} \int_{K_\lambda} v(z) dz. \quad (5.25)$$

□

Per completare la dimostrazione del Teorema 5.2.6, è necessario fare riferimento al Lemma 5.2.7, riportato di seguito. Grazie alla disuguaglianza (5.25) e al Lemma 5.2.7, si può concludere che, per ogni punto $\zeta \in K_{1,\lambda}^{(m)}(0, \varepsilon)$, vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned} v(0) &\geq c_m \varepsilon^{\frac{m-2}{2}} \int_{\Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta)} v(z) dz \\ &\geq \frac{c_m}{k} \varepsilon^{\frac{m-2}{2}} \int_{\Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta)} M_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta; z) v(z) dz \\ &= \frac{Sc_m}{k} \varepsilon^{\frac{m-2}{2}} v(\zeta). \end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione del Teorema 5.2.6, è sufficiente dimostrare il seguente lemma. Si noti, inoltre, che la prima parte del lemma può essere interpretata come una sorta di "disuguaglianza triangolare geometrica" applicata alla funzione $(\zeta; z) \mapsto \frac{1}{\Gamma(\zeta; z)}$.

Lemma 5.2.7. *Si verificano le seguenti proprietà:*

(i) *Per ogni $\lambda_0 > 0$, esiste una costante positiva $s = s(\lambda_0, m)$ tale che:*

$$\Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta) \subset K_\lambda,$$

per ogni $\zeta \in K_{1,\lambda}^{(m)}(0, \varepsilon)$ e per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

(ii) Per ogni $\lambda_0 > 0$, esiste una costante positiva $k = k(\lambda_0, m, s)$ tale che:

$$M_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \leq k, \quad (5.26)$$

per ogni $z \in \Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta)$ e per ogni $\zeta \in K_{1,\lambda}^{(m)}(0, \varepsilon)$.

Dimostrazione. (i) Per semplicità di notazione, definiamo:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) = (4\pi(\tau - t))^{-\frac{m}{2}} \Gamma_{\lambda}(\zeta; z).$$

Dobbiamo dimostrare che esiste una costante $s > 0$ tale che, per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e per ogni $\zeta \in K_{1,\lambda}^{(m)}(0, \varepsilon)$, vale la seguente implicazione:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \geq \frac{1}{s} \implies \Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; z) \geq \frac{2}{3}. \quad (5.27)$$

Quando $\zeta \in K_{1,\lambda}(0, \varepsilon)$, si ha:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; \zeta) \geq 1, \quad \tau \leq -\varepsilon.$$

Di conseguenza, si può scrivere:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; z) \geq \frac{\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; z)}{\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; \zeta)}.$$

Poiché $t \leq \tau \leq -\varepsilon$, esiste una costante $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda_0) > 0$ tale che:

$$\frac{\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; z)}{\Gamma_{\lambda}^{(m)}(0; \zeta)} \geq \frac{2}{3},$$

per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e per ogni coppia di punti $z, \zeta \in \Omega_{2,\lambda}^{(m)}(0)$ tali che:

$$|z - \zeta| \leq \delta, \quad t, \tau \leq -\varepsilon.$$

Per dimostrare la (5.27), è sufficiente verificare l'esistenza di una costante $s = s(\lambda_0, m) > 0$ tale che:

$$\zeta \in K_{1,1}^{(m)}(0, \varepsilon), \quad \Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \geq \frac{1}{s} \implies |z - \zeta| \leq \delta. \quad (5.28)$$

Se $\Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \geq \frac{1}{s}$, allora:

$$\frac{1}{s} \leq \Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \leq (4\pi)^{-\frac{m+N}{2}} (\tau - t)^{-\frac{m}{2}} (\det(C_{\lambda}(\tau - t)))^{-\frac{1}{2}},$$

da cui segue che:

$$d(\lambda, \tau - t) := (4\pi)^{\frac{m+N}{2}} (\tau - t)^{\frac{m}{2}} (\det(C_{\lambda}(\tau - t)))^{\frac{1}{2}} < s. \quad (5.29)$$

La funzione $(\lambda, \sigma) \mapsto d(\lambda, \sigma)$ risulta continua e strettamente crescente rispetto a σ . Inoltre, per ogni valore fissato λ , si ha che $d(\lambda, \tau - t) \rightarrow \infty$ al tendere di σ a infinito, con $d(\lambda, 0) = 0$. Di conseguenza, definendo $c(\lambda, \cdot) = d^{-1}(\lambda, \cdot)$, la funzione $(\lambda, s) \mapsto c(\lambda, s)$ è continua e soddisfa $c(\lambda, 0) = 0$ per ogni λ .

Utilizzando le relazioni (3.29) e (2.20), si può scrivere:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \geq \frac{1}{s} \implies d(\lambda, \tau - t) = (\tau - t)^{\frac{m+Q}{2}} (c_0 + \omega(s)), \quad (5.30)$$

dove $c_0 = c_0(L) > 0$ e $\omega(s) = \omega(L, \lambda, s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0$, uniformemente rispetto a $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Facendo uso della forma esplicita di Γ_{λ} e facendo riferimento alle equazioni (3.28) e (2.20), si dimostra che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante $s = s(\lambda_0, m, k) > 0$ tale che:

$$\Gamma_{\lambda}^{(m)}(\zeta; z) \geq \frac{1}{s} \implies |\xi - E_{\lambda}(\tau - t)x| \leq \frac{\delta}{k}, \quad (5.31)$$

dove E_{λ} denota la matrice definita in (1.3) associata all'operatore L_{λ} . Inoltre, esiste un insieme compatto $F \subset \mathbb{R}^{N+1}$, dipendente esclusivamente da m e λ_0 , tale che:

$$K_{1,\lambda}^{(m)}(0, \varepsilon) \subset F, \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]. \quad (5.32)$$

Combinando le relazioni (5.30), (5.31) e (5.32), si ottiene immediatamente la validità della relazione (5.28), completando così la dimostrazione della parte (i) del Lemma 5.2.7.

Per quanto concerne la parte (ii) del lemma, si deve dimostrare una stima per il nucleo M_{λ} , definito in (4.7) e associato all'operatore L_{λ} . Precisamente, per ogni insieme compatto $F \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $s > 0$, esiste una costante $k_0 = k_0(F, \lambda_0, m, s) > 0$ tale che:

$$M_{\lambda}(\zeta; z) \leq k_0 \left(\frac{1}{\tau - t} \log \left(\frac{1}{\tau - t} \right) + 1 \right), \quad (5.33)$$

per ogni $\zeta \in F$, $z \in \Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta)$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

La dimostrazione della parte (ii) segue dalla stima (5.33), in combinazione con le relazioni (4.35), (4.51), (5.29), (5.30) e (5.32).

Ponendo $\sigma = \tau - t$ e $y = x - E_{\lambda}(\tau - t)\xi$, il nucleo $M_{\lambda}(\zeta; z)$ si può riscrivere come:

$$M_{\lambda}(\zeta; z) = \frac{1}{4} \langle AC_{\lambda}^{-1}(\sigma)y, C_{\lambda}^{-1}(\sigma)y \rangle = \frac{1}{4} \left| A^{\frac{1}{2}} C_{\lambda}^{-1}(\sigma)y \right|^2.$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} C_{\lambda}^{-1}(\sigma)y &= \left(A^{\frac{1}{2}} D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \right) D_0(\sqrt{\sigma}) C_{\lambda}^{-1}(\sigma) D_0(\sqrt{\sigma}) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} A^{\frac{1}{2}} F_{\lambda}(\sigma) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) y, \end{aligned}$$

dove si è definito:

$$F_\lambda(\sigma) = D_0(\sqrt{\sigma}) C_\lambda^{-1}(\sigma) D_0(\sqrt{\sigma}).$$

Quindi, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} M_\lambda(\zeta; z) &\leq \frac{1}{4\sigma} \|A\| \left\| F_\lambda^{\frac{1}{2}}(\sigma) \right\|^2 \left\| F_\lambda^{\frac{1}{2}}(\sigma) D_0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) y \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4\sigma} \|A\| \|F_\lambda(\sigma)\| \langle C_\lambda^{-1}(\sigma) y, y \rangle. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Poiché $z \in \Omega_{s,\lambda}^{(m)}(\zeta)$, risulta:

$$\langle C_\lambda^{-1}(\sigma) y, y \rangle \leq 2 \log \left(\frac{s^2}{(4\pi)^{N+m} \sigma^m \det(C_\lambda(\sigma))} \right). \quad (5.35)$$

Inoltre, dalla relazione (3.29) si ricava:

$$\det(C_\lambda(\sigma)) = c_0 \sigma^Q (1 + \lambda^2 \sigma O(1)), \quad c_0 = \det(C_0(1)). \quad (5.36)$$

Applicando il risultato di (3.28), si ottiene la seguente stima per $\|F_\lambda(\sigma)\|$:

$$\begin{aligned} \|F_\lambda(\sigma)\| &= \max_{|\xi|=1} \langle C_\lambda^{-1}(\sigma) D_0(\sqrt{\sigma}) \xi, D_0(\sqrt{\sigma}) \xi \rangle \\ &\leq \max_{|\xi|=1} \langle C_0^{-1}(\sigma) D_0(\sqrt{\sigma}) \xi, D_0(\sqrt{\sigma}) \xi \rangle (1 + \lambda^2 \sigma O(1)) \\ &= \|C_0^{-1}(1)\| (1 + \lambda^2 \sigma O(1)). \end{aligned}$$

Questa stima, insieme a (5.35), (5.36) e (5.34), porta direttamente alla disuguaglianza (5.33). $\square$

Analogamente alla dimostrazione del Teorema 5.2.4, è possibile derivare dal Teorema 5.2.6 il seguente risultato:

Teorema 5.2.8. *Sia $L \in \mathcal{K}$ e sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Esistono costanti positive $\theta = \theta(L)$, $c = c(L)$ e $r_0 = r_0(L)$ tali che:*

$$\sup_{H_{\theta r}^-(z_0)} u \leq cu(z_0),$$

per ogni soluzione non negativa u dell'equazione $Lu = 0$ in Ω , e per ogni $z_0 \in \Omega$ e $r \in (0, r_0]$ tali che $H_r(z_0) \subset \Omega$.

Concludiamo ora questa sezione dimostrando il Teorema 5.1.5.

Proposizione 5.2.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un insieme aperto e sia $u \geq 0$ una soluzione di $Lu = 0$ in Ω . Fissato $z_0 \in \Omega$, per ogni $z \in \text{int}(A_{z_0})$, esistono un intorno aperto U_z di z e una costante $C_z > 0$ tali che:*

$$\sup_{U_z} u \leq C_z u(z_0). \quad (5.37)$$

Dimostrazione del Teorema 5.1.5. Per ogni $z \in K$, consideriamo l'insieme aperto U_z fornito dalla Proposizione 5.2.9. Ne consegue:

$$K \subset \bigcup_{z \in K} U_z.$$

Poiché K è compatto, esiste un ricoprimento finito

$$K \subset \bigcup_{j=1, \dots, m_K} U_{z_j}.$$

Dalla Proposizione 5.2.9 segue che:

$$\sup_{U_{z_j}} u \leq C_{z_j} u(z_0), \quad j = 1, \dots, m_K.$$

Definendo $C_K = \max_{j=1, \dots, m_K} C_{z_j}$, si conclude la dimostrazione. $\square$

5.3 Teoremi di tipo Liouville

Il principale obiettivo di questa sezione consiste nel presentare una dimostrazione di natura puramente analitica di un teorema di tipo Liouville "al tempo $t = -\infty$ " per il seguente operatore di Kolmogorov definito in $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$L := \Delta_x + \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t, \quad (5.38)$$

dove Δ_x rappresenta l'operatore di Laplace, mentre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e ∇_x indicano rispettivamente il prodotto scalare e il gradiente in $\mathbb{R}^N$.

Il teorema di Liouville associato all'operatore (5.38) è formulato come segue.

Teorema 5.3.1. *Sia u una soluzione regolare dell'equazione*

$$Lu = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1}.$$

Se $\inf_{\mathbb{R}^N} u > -\infty$, allora vale la seguente proprietà:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dal Teorema 5.3.1 segue direttamente un risultato di tipo Liouville per le soluzioni limitate dell'equazione $Lu = 0$. Per un risultato analogo, si rimanda al Teorema 3.6 in [19].

Teorema 5.3.2. *Sia u una soluzione regolare e limitata di*

$$Lu = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1}.$$

Allora, u è una funzione costante.

Dimostrazione. Siano

$$m = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u \quad \text{e} \quad M = \sup_{\mathbb{R}^{N+1}} u.$$

Applicando il Teorema 5.3.1 alle funzioni $M - u$ e $u - m$, si ottiene per ogni $x \in \mathbb{R}^N$:

$$0 = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} (M - u) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (M - u(x, t)),$$

e

$$0 = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} (u - m) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (u(x, t) - m).$$

Di conseguenza, si ha $M = m$, il che implica che u è costante. □

Il Teorema 5.3.1 deriva a sua volta da una disuguaglianza di Harnack di tipo "globale" per soluzioni non negative dell'equazione $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1}$. Per formulare questa disuguaglianza, è utile ricordare che L è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra sul gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$, dove la legge di composizione $\circ$ è definita in (2.1).

Per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, definiamo il "paraboloide" associato a z_0 :

$$P(z_0) = z_0 \circ P,$$

dove

$$P = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t < -\frac{|x|^2}{4} \right\}.$$

Basandoci su un approccio utilizzato in [5] per operatori parabolici classici e sfruttando le proprietà di media delle soluzioni di $Lu = 0$, si dimostra la seguente disuguaglianza di Harnack.

Teorema 5.3.3. *Sia $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e sia u una soluzione regolare non negativa di*

$$Lu = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1}.$$

Esiste una costante positiva C , indipendente da u e z_0 , tale che

$$u(z) \leq Cu(z_0),$$

per ogni $z \in P(z_0)$.

La dimostrazione di questo risultato è rinviata a [10]. In questa sede, mostriamo come esso consenta di dedurre il Teorema 5.3.2 utilizzando il seguente lemma.

Lemma 5.3.4. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, esiste un numero reale $T = T(x, z_0)$ tale che*

$$(x, t) \in P(z_0), \quad \forall t < T.$$

Dimostrazione del Teorema 5.3.2. Sia u una soluzione regolare e limitata inferiormente dell'equazione $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1}$. Definiamo

$$m = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z_\varepsilon \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$u(z_\varepsilon) - m < \varepsilon.$$

Applicando il Teorema 5.3.3 alla funzione $u - m$, otteniamo

$$u(z) - m < C(u(z_\varepsilon) - m) < C\varepsilon, \quad (5.39)$$

per ogni $z \in P(z_\varepsilon)$, dove la costante $C > 0$ è indipendente da z e da ε .

Fissiamo ora $x \in \mathbb{R}^N$. Per il Lemma 5.3.4, esiste $T = T(z_\varepsilon, x) \in \mathbb{R}$ tale che $(x, t) \in P(z_\varepsilon)$ per ogni $t < T$. Di conseguenza, dalla relazione (5.39) segue che

$$0 \leq u(x, t) - m \leq C\varepsilon, \quad \forall t < T.$$

Passando al limite per $t \rightarrow -\infty$, si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = m.$$

□

Appendice A

Varietà e Insiemi di Livello

Nella presente appendice, introduciamo e formalizziamo gli strumenti e i concetti essenziali, come le varietà e gli insiemi di livello, che sono stati utilizzati nella dimostrazione delle formule di media esposte nel Capitolo 4. Tali nozioni forniscono il quadro teorico necessario per comprendere i risultati discussi e per contestualizzare le proprietà geometriche impiegate nelle analisi.

Definizione A.0.1 (Varietà). Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$, con $M \neq \emptyset$. Diciamo che M è una p -varietà di classe C^k in $\mathbb{R}^N$, con $p, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq N-1$, $k \geq 1$, se per ogni punto $a \in M$ esistono un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e una funzione $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^{N-p})$ tali che:

- $M \cap \Omega = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$;
- $\text{rank}(df(a)) = N - p$ (ovvero, $\text{rank}(J_f(a)) = N - p$).

Il numero naturale p è denominato dimensione della varietà M .

Esempio A.0.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$, con $k \geq 1$. Si consideri l'insieme

$$f^{-1}(\{c\}) = \{f = c\} := \{x \in \Omega : f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tale insieme è detto insieme di livello di f . Se $f^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$ e

$$\nabla f(x) \neq 0, \quad \forall x \in f^{-1}(\{c\}), \tag{A.1}$$

allora $f^{-1}(\{c\})$ è una $(N-1)$ -varietà di classe C^k in $\mathbb{R}^N$.

Per verificare ciò, definiamo la funzione $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, come $g(x) = f(x) - c$. In tal caso:

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}, \quad g \in C^k(\Omega; \mathbb{R}).$$

Inoltre, osserviamo che il jacobiano di g , $J_g = \nabla f$, soddisfa

$$\text{rank}(J_g) = 1, \quad \forall x \in f^{-1}(\{c\}),$$

come richiesto.

Nel 1942, A. Sard ha dimostrato un risultato di grande rilievo nell'analisi differenziale, formulato nel seguente teorema:

Teorema A.0.3 (Sard [20]). *Siano M^m e N^n due varietà differenziabili di classe C^∞ , rispettivamente di dimensione m e n . Sia $f : M^m \mapsto N^n$ una mappa di classe C^k . Se $k > \max(m - n, 0)$, allora*

$$H^n(f(\text{Crit}(f))) = 0.$$

Nel Teorema A.0.3 e in quanto segue, adottiamo la convenzione secondo cui H^s rappresenta la misura di conteggio per $s \leq 0$. Inoltre, per una mappa C^k , $f : M^m \mapsto N^n$, con $k \geq 1$, l'insieme dei punti critici di f è definito come:

$$\text{Crit}(f) := \{x \in M^m : \text{rank}(J_f) < n\}.$$

Diversi anni dopo il lavoro di Sard, A. Ya. Dubovitskiĭ generalizzò questo risultato, ottenendo il seguente teorema:

Teorema A.0.4 (Dubovitskiĭ, [4], [2]). *Siano M^m e N^n due varietà differenziabili di classe C^∞ , rispettivamente di dimensione m e n . Sia $f : M^m \mapsto N^n$ una mappa di classe C^k . Definendo $s = m - n - k + 1$, si ha:*

$$H^s(f^{-1}(y) \cap \text{Crit}(f)) = 0, \quad \text{per quasi ogni } y \in N^n \text{ rispetto a } H^n. \quad (\text{A.2})$$

Osservazione A.0.5. Nel Teorema A.0.4, se $k > \max(m - n, 0)$, allora $s = m - n - k + 1 \leq 0$. In questo caso, H^s coincide con la misura di conteggio, e quindi l'equazione (A.2) diventa:

$$f^{-1}(y) \cap \text{Crit}(f) = \emptyset, \quad \text{per quasi ogni } y \in N^n \text{ rispetto a } H^n. \quad (\text{A.3})$$

Questo implica che il Teorema A.0.4 generalizza il teorema classico di Sard, includendolo come caso particolare.

Osservazione A.0.6. Il teorema di Dubovitskiĭ implica che, per quasi ogni $y \in N^n$ rispetto a H^n , l'insieme di livello $f^{-1}(y)$ può essere decomposto in:

- la parte regolare $f^{-1}(y) \setminus \text{Crit}(f)$, che è una $(m - n)$ -varietà di classe C^k ;
- la parte critica $f^{-1}(y) \cap \text{Crit}(f)$, che ha misura H^s nulla.

Questa decomposizione risulta coerente con le proprietà geometriche evidenziate nell'Esempio A.0.2.

Un ulteriore strumento fondamentale connesso a questi risultati è la formula di co-area, che collega la misura sugli insiemi di livello alla misura globale nel dominio della mappa.

Teorema A.0.7 (Formula di co-area [7]). *Sia $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ una mappa lipschitziana e sia $g : \mathbb{R}^N \mapsto [0, \infty]$ una funzione misurabile. Allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}(y)} g(x) dH^{N-1}(x) \right) dy. \quad (\text{A.4})$$

Segue direttamente dai Teoremi A.0.4 e A.0.7 il seguente importante corollario, che stabilisce una relazione tra l'integrale della norma del gradiente di una mappa e la misura H^{N-1} delle intersezioni degli insiemi di livello regolari con un insieme misurabile:

Corollario A.0.8. *Sia $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ una mappa di classe C^1 , e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Allora, per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, vale la seguente formula:*

$$\int_B |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} H^{N-1}(B \cap f^{-1}(y) \setminus \text{Crit}(f)) dy.$$

Dimostrazione. Dal Teorema A.0.4, scegliendo $k = 1$, $m = N$, e $n = 1$, si ottiene $s = N - 1$. Pertanto, per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ rispetto alla misura di Hausdorff H^1 , risulta:

$$H^{N-1}(f^{-1}(y) \cap \text{Crit}(f)) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Inoltre, il Teorema A.0.7 si applica a qualsiasi mappa $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Considerando la funzione indicatrice $g = \chi_\Omega$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, le equazioni (A.4) e (A.5) implicano che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} H^{N-1}(\Omega \cap f^{-1}(y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} H^{N-1}(\Omega \cap f^{-1}(y) \setminus \text{Crit}(f)) dy < \infty. \end{aligned}$$

Osservando che la relazione precedente vale per ogni insieme $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, si ottiene:

$$\int_B |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} H^{N-1}(B \cap f^{-1}(y) \setminus \text{Crit}(f)) dy.$$

La tesi segue direttamente. □

Bibliografia

- [1] Anceschi, F., & Polidoro, S. (2019). A survey on the classical theory for Kolmogorov equation. arXiv preprint arXiv:1907.05155.
- [2] Bojarski, B., Hajłasz, P., & Strzelecki, P. (2005). Sard's theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces. *manuscripta mathematica*, 118, 383-397.
- [3] Bony, J. M. (1969). Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. In *Annales de l'institut Fourier* (Vol. 19, No. 1, pp. 277-304).
- [4] Dubovitskii, A. Y. (1957). On the structure of level sets of differentiable mappings of an n -dimensional cube into a k -dimensional cube. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 21(3), 371-408.
- [5] Garofalo, N., & Lanconelli, E. (1989). Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients. *Mathematische Annalen*, 283, 211-239.
- [6] Garofalo, N., & Lanconelli, E. (1990). Level sets of the fundamental solution and Harnack inequality for degenerate equations of Kolmogorov type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 321(2), 775-792.
- [7] Giaquinta, M., Modica, G., & Soucek, J. (1998). Cartesian currents in the calculus of variations II: Variational integrals (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- [8] Hadamard, J. (1954). Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 3, 337-346.
- [9] Hörmander, L. (1967). Hypoelliptic second order differential equations.

- [10] Kogoj, A. E., Lanconelli, E., & Priola, E. (2020). Harnack inequality and Liouville-type theorems for Ornstein-Uhlenbeck and Kolmogorov operators. arXiv preprint arXiv:2002.04718.
- [11] Kolmogorov, A. N. (1934). Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Ann Math*, 35, 116-117.
- [12] Kuptsov, L. P. (1978). The mean property and the maximum principle for parabolic equations of second order. In *Doklady Akademii Nauk* (Vol. 242, No. 3, pp. 529-532). Russian Academy of Sciences.
- [13] Kuptsov, L. P. (1982). Fundamental solutions of certain degenerate second-order parabolic equations. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 31, 283-289.
- [14] Manfredini, M. (1997). The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations.
- [15] Negrini, P., & Scornazzani, V. (1984). Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators. *Boll. Un. Mat. Ital. C* (6), 3(1), 85-107.
- [16] On parabolic means, *Dokl. Akad Nauk SSSR* 252 (1980), 296-301; English Transl., *Soviet Math. Dokl.* 21 (1980), 741-746.
- [17] Pini, B. (1954). Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 23, 422-434.
- [18] Polidoro, E. L. S. (1994). On a class of hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 52(1), 29-63.
- [19] Priola, E., & Wang, F. Y. (2006). Gradient estimates for diffusion semigroups with singular coefficients. *Journal of Functional Analysis*, 236(1), 244-264.
- [20] Sard, A. (1942). The measure of the critical values of differentiable maps.

Ringraziamenti

Non sono mai stato bravo a esternare le mie emozioni, e forse questo si noterà anche qui. Ma queste righe sono speciali: sono l'occasione per dire grazie, davvero, a tutte le persone che mi sono state accanto lungo questo percorso. Voglio fare del mio meglio per trasmettere ciò che provo.

Il mio primo e più profondo ringraziamento va alla mia relatrice, la Professoressa Annamaria Montanari. Nonostante i suoi innumerevoli impegni, non mi ha mai fatto mancare il suo tempo, la sua attenzione e una disponibilità incredibile. È stata una guida sicura, anche nei momenti in cui mi sentivo perso. Non dimenticherò mai il nostro primo incontro: con uno sguardo rapido, riconobbe che un operatore soddisfaceva la condizione di Hörmander, mentre io non sapevo nemmeno da dove iniziare. Quel momento mi fece capire quanto fosse immensa la sua preparazione. Professoressa, grazie per aver condiviso con me la sua conoscenza, ma soprattutto per la pazienza, l'entusiasmo e la passione che mi ha trasmesso. Se oggi arrivo a questo traguardo, è anche merito suo, e gliene sarò grato per sempre.

Un grazie speciale va ai miei genitori, Vera e Massimiliano, e a tutta la mia famiglia. Senza di voi, questo viaggio non sarebbe stato possibile. Mi avete sostenuto in ogni modo, permettendomi di concentrarmi sui miei studi e alleviando il peso delle difficoltà. So che questo è un privilegio che non tutti hanno, e ne sono profondamente consapevole. Ricordo ancora quando vi dissi per la prima volta che volevo studiare matematica: ci fu un momento di esitazione, ma subito dopo mi avete incoraggiato a seguire il mio sogno. Il vostro amore e la vostra fiducia sono stati le fondamenta su cui ho costruito questo percorso. Non trovo parole sufficienti per dirvi grazie, ma vi prometto che farò sempre del mio meglio per rendervi orgogliosi.

Grazie, con tutto il cuore, a Federica, la mia compagna, la mia Brontola. Sei stata la persona che mi è stata più vicina in questo viaggio, quella che ha creduto in me più di

tutti, anche quando io stesso facevo fatica a farlo. Non dimenticherò mai che sei stata tu a salvarmi da una delle mie solite distrazioni burocratiche, ricordandomi la scadenza per iscrivermi all'appello di laurea - un dettaglio che, da solo, ti rende indispensabile! Ma non è solo questo. Grazie a te ho capito che è possibile realizzarsi nei propri percorsi, anche impegnativi, senza che una relazione autentica rappresenti un ostacolo. Il tuo esempio mi ha insegnato che l'amore può essere uno spazio di crescita reciproca, un luogo dove costruire senza rinunciare ai propri sogni. Sei stata la mia roccia, il mio stimolo a migliorarmi e il mio punto fermo. Questo traguardo non è solo mio: è anche tuo. E ti ringrazio, dal profondo del cuore, per tutto ciò che hai fatto per me.

Un pensiero va ai miei compagni di corso, con cui ho condiviso giornate intense, pranzi veloci e file infinite alla macchinetta del caffè. Grazie per la compagnia, per le risate e per aver reso questo percorso più leggero e divertente. Voglio ringraziare anche i miei amici di sempre, quelli che non hanno condiviso con me l'università, ma che sono stati una presenza fondamentale. Grazie per i momenti di relax, per le conversazioni che mi hanno aperto nuovi orizzonti e per essere sempre stati al mio fianco, anche da lontano. La vostra amicizia è uno dei doni più preziosi che ho, e ve ne sono infinitamente grato.

Un ringraziamento speciale è per i miei coinquilini modenesi. In questi sei anni ho trovato molto più di un appartamento: ho trovato una famiglia. Grazie per avermi fatto sentire a casa, accettato e libero di essere me stesso. Questo senso di appartenenza sarà sempre con me, ovunque andrò.

Infine, l'ultimo, e forse il più importante, pensiero è per una persona speciale che non è più qui: mia sorella Giulia. Sei stata il mio faro, il mio esempio, sempre pronta a darmi consigli su tutto - dalle scelte importanti ai miei tentativi, spesso disastrosi, di vestirmi con stile. Anche ora, so che continui a vegliare su di me, probabilmente scuotendo la testa ogni volta che sbaglio qualcosa. Mi manchi ogni giorno, ma sento il tuo amore e la tua forza in ogni mio passo. Grazie per essere stata una sorella meravigliosa e un sostegno ineguagliabile.

A tutti voi, grazie. Questo traguardo non è solo mio: è nostro.