

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica delle Galassie a Spirale e delle
Galassie Ellittiche**

Tesi di laurea

Presentata da:
Daphne Venturi

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Appello III
Anno Accademico 2023-2024

A Poppi, che mi accompagna ad ogni passo.

A Libero, Pioggia, Bruno e Nena, le stelle che mi guidano dal cielo.

A tutti coloro che credono in me.

Abstract

Il fine di questo testo è descrivere le galassie, con particolare attenzione alle galassie ellittiche e alle galassie a spirale, per illustrarne la dinamica. Dopo una breve definizione di che cos'è una galassia, e la spiegazione delle componenti caratteristiche delle stesse, viene affrontata la dinamica delle galassie ellittiche attraverso la caratterizzazione del tempo di rilassamento e, in seguito, la dinamica delle galassie a spirale con la definizione della curva di rotazione. Si includono anche alcune relazioni fondamentali per le galassie trattate che sono strettamente legate alla loro dinamica.

Indice

1	Introduzione	1
2	Galassie	2
2.1	Definizione di Galassia	2
2.2	Classificazione delle Galassie	2
3	Struttura delle Galassie	5
3.1	Ellittiche e Bulge	5
3.2	Disco e Bracci di Spirale	6
3.3	Mezzo Interstellare	7
3.4	Regioni Esterne delle Galassie	7
4	Dinamica delle Galassie	8
4.1	Dinamica Stellare nelle Galassie Ellittiche	8
4.2	Dinamica nelle Galassie a Spirale	11
5	Relazioni con la Dinamica	14
5.1	Galassie Ellittiche	14
5.2	Galassie a Spirale	15
6	Appendice	16
6.1	Tempo di Rilassamento a Due Corpi	16

Capitolo 1

Introduzione

Le galassie sono oggetti affascinanti ma estremamente vari e complessi da descrivere. L'obiettivo di questo testo è spiegare le componenti necessarie per comprendere la dinamica di tali oggetti.

Nel prossimocapitolo verrà per prima cosa fornita una definizione, abbastanza ampia, di che cos'è una galassia, accompagnata poi dalla suddivisioni in classi delle galassie, secondo la classificazione di Hubble. In questo modo si delineano le protagoniste del resto dello scritto: le galassie ellittiche e le galassie a spirale.

Il capitolo successivo è dedicato alla spiegazione della struttura di questi due tipi di galassie. Nelle rispettive sezioni vengono definite le componenti chiave per comprendere la dinamica delle galassie stesse. Infatti, per poter approfondire la dinamica di questi oggetti è necessario conoscere i soggetti del tema trattato.

Dopo i due capitoli introduttivi, finalmente si può entrare nel merito della dinamica. Viene affrontata per prima la dinamica delle galassie ellittiche, concentrandosi sulle approssimazioni che si possono utilizzare per descrivere il sistema e quindi l'introduzione del tempo di rilassamento. Successivamente si analizza la dinamica delle galassie a spirale, con un approccio diverso dal precedente. Infatti, si studierà la curva di rotazione, oggetto osservativo, per descrivere il moto dei corpi appartenenti al disco.

Nell'ultimo capitolo si forniscono alcune relazioni che legano quantità fondamentali delle galassie alla dinamica dei corpi studiata nei capitoli precedenti.

Infine, è presente un'appendice che approfondisce la derivazione del tempo di rilassamento a due corpi per le galassie ellittiche.

Capitolo 2

Galassie

2.1 Definizione di Galassia

Le galassie sono sistemi estremamente complessi e molto diversi fra loro. In generale si può dire che una galassia contiene un grande numero di stelle, quantità variabili di mezzo interstellare, e moltissima materia oscura.

Non tutte le galassie dell'Universo sono osservabili dalla nostra posizione, infatti ci sono galassie la cui luminosità superficiale è confrontabile o più bassa della luminosità dello sfondo. In figura 2.1 si può apprezzare come solo oggetti entro una stretta porzione del grafico, per magnitudine assoluta e diametro, possono essere classificati come galassie, rischiando altrimenti o di non essere distinguibili nel cielo notturno o di sembrare oggetti puntiformi. Le galassie che possiamo distinguere hanno a grandi linee le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} 10^7 M_{\odot} &\leq M_{gal} \leq 5 \times 10^{11} M_{\odot} \\ 50 \text{ pc} &\leq R_e \leq 50 \text{ kpc} \\ 10^5 L_{\odot} &\leq L_{gal} \leq 10^{12} L_{\odot} \end{aligned}$$

con $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$ e $L_{\odot} = 3.832 \times 10^{33} \text{ erg/s}$. È necessario però tenere conto del fatto che la massa delle galassie è calcolata considerando sia la materia visibile che quella oscura, mentre il raggio è calcolato in funzione della luminosità della galassia e delle sue isofote, senza considerare la materia oscura.

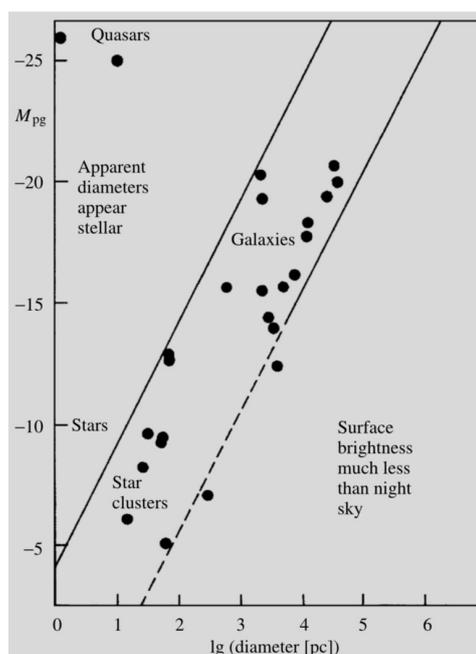


Figura 2.1: Galassie osservabili. Karttunen et al. (2017), 388

2.2 Classificazione delle Galassie

A causa della grande varietà in morfologia e dimensioni delle galassie, è opportuno creare una classificazione in cui galassie con caratteristiche comuni appartengono

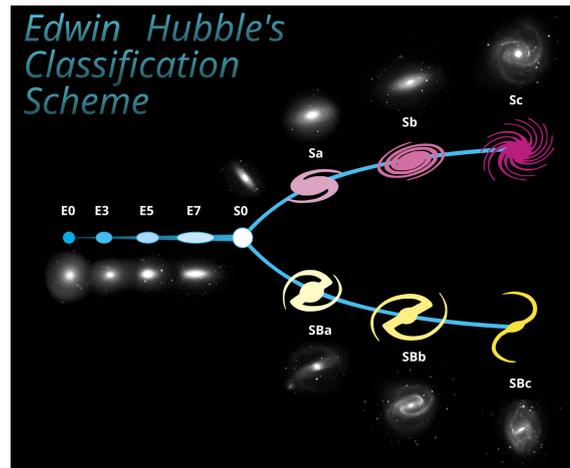


Figura 2.2: Classificazione di Hubble. CC0

alla stessa categoria. La più nota classificazione delle galassie è quella proposta da Edwin Hubble nel 1926.

Nella parte sinistra del diagramma in 2.2 si trovano le galassie ellittiche, mentre sulle ramificazioni a destra si trovano in alto le galassie a spirale normali, e sotto le galassie a spirale barrate.

Galassie Ellittiche - Devono il loro nome al fatto che le loro proiezioni sono ellissoidi e vengono poste con ellitticità crescente da sinistra verso destra nella classificazione di Hubble. Le galassie ellittiche vengono chiamate con l'etichetta E_n , con n che dipende direttamente dalla loro ellitticità: $n = [10 \cdot (1 - \frac{b}{a})]$, con a semiasse maggiore e b semiasse minore. Le galassie E0 sono quelle con la forma più sferoidale, mentre le E7 sono le galassie più schiacciate che si possono osservare. Per proiezione le galassie possono apparire solo più rotondeggianti rispetto alla loro vera ellitticità, dunque questa classificazione non rappresenta la forma intrinseca della galassia, bensì la sua forma apparente sul piano di osservazione. Inoltre, strutture ellissoidali con ellitticità superiori a 0.7 sono instabili, per questa ragione non si osservano galassie più "schiacciate" delle E7.

Le galassie ellittiche sono sistemi stellari costituiti da stelle rosse, "vecchie", e non presentano alcuna regione di formazione stellare; sono permeate da un'atmosfera rarefatta di gas caldo e hanno regioni di gas freddo molto limitate.

Galassie a Spirale - Si chiamano in questo modo per via delle strutture di bracci a spirale che meglio si apprezzano osservandole face-on. Sia le galassie a spirale normali che quelle barrate sono costituite da un bulge centrale, un disco nel quale si trovano, non solo la maggior parte delle stelle e del gas della galassia, ma anche i bracci, e un alone, che si estende attorno all'intera galassia. Il bulge centrale ha una forma ellissoidale per le galassie a spirale normali, e allungato a sembrare una barra per le spirali barrate. Le caratteristiche delle loro componenti verranno approfondite più avanti.

Nonostante la distinzione tra le galassie a spirale normali, indicate con S, e le galassie a spirale barrate, indicate con SB, le loro proprietà variano in maniera analoga seguendo il grafico da sinistra a destra, e in funzione di queste viene



(a) Galassia NGC 4414, tipo Sc. Foto di ESA/Hubble & NASA, O. Graur, S. W. Jha, & NASA, A. Riess e il team SH0ES, riconoscimento: Mahdi Zamari. 1/10/2020.
 (b) Galassia NGC 2525, tipo SBc. Foto di ESA/Hubble & NASA, O. Graur, S. W. Jha, & NASA, A. Riess e il team SH0ES, riconoscimento: Mahdi Zamari. 1/10/2020.
 (c) Galassia NGC 7049, tipo S0. Foto di NASA, ESA & W. Harris (McMaster University, Ontario, Canada). 7/04/2009.

Figura 2.3: Due galassie a spirale e una galassia lenticolare.

associata un'ulteriore lettera alla loro sigla (a, b o c). Spostandosi dalle galassie a spirale di tipo Sa a quelle Sb e poi alle Sc (e similmente per le SBa, SBb e SBc): il bulge diventa via via proporzionalmente più piccolo; i bracci sono più sottili e meno avvolti, fino ad essere "aperti" nelle Sc e SBc; invece, la quantità di gas freddo sul piano galattico cresce verso destra e similmente fa anche il tasso di formazione stellare. Un esempio di Sc è riportato nell'immagine 2.3a, e di una SBc nell'immagine 2.3b

Si stima che circa il 60% di tutte le galassie dell'Universo locale appartenga a questa categoria e che due su tre di queste siano a spirale barrata.

Galassie Lenticolari - Alla biforcazione tra galassie ellittiche e galassie a spirale, si trovano le galassie S0, che presentano caratteristiche intermedie tra i due gruppi. Queste galassie sono costituite da un bulge centrale scarso di gas, in maniera del tutto simile alle galassie ellittiche, ma intorno a questo presentano anche una struttura a disco, come le galassie a spirale, ma al contrario di quest'ultime, le galassie lenticolari non presentano i caratteristici bracci. Un esempio di galassia S0 è in figura 2.3c.

Galassie Irregolari - Le galassie che presentano caratteristiche che non coincidono con nessuna delle categorie precedenti sono dette Irregolari. In particolare, si distinguono due tipi di galassie irregolari: le Irr I e le Irr II. Le prime presentano caratteristiche che coincidono al prolungamento verso destra delle galassie Sc e SBc. Le seconde, invece, sono piccole galassie ellittiche che contengono poche stelle ma molta polvere interstellare.

Ci sono molti altri tipi di galassie e altre classificazioni al di fuori di quella di Hubble ma, ai fini di questo scritto, considereremo da qui in poi esclusivamente le galassie ellittiche e le galassie a spirale, come sopra descritte.

Capitolo 3

Struttura delle Galassie

In questo capitolo verrà illustrata la struttura delle galassie ellittiche e delle galassie a spirale, scomponendole in parti. In particolare, galassie ellittiche e bulge delle galassie a disco presentano caratteristiche simili, dunque verranno descritti insieme.

3.1 Ellittiche e Bulge

Come accennato nella sezione 2.2, le galassie ellittiche sono sistemi stellari costituiti da popolazioni di stelle rosse, gas caldo rarefatto, e regioni di gas freddo con contributo minimo sulla massa totale della galassia. Le galassie ellittiche sono, insieme agli ammassi globulari, tra gli oggetti più antichi dell'Universo osservabile e le stelle che abitano queste galassie sono stelle vecchie e con una metallicità inaspettatamente alta.

Mentre le galassie a spirale presentano una struttura ben definita, schiacciata su un disco, le galassie ellittiche sono oggetti sviluppati tridimensionalmente che però non presentano particolare struttura od organizzazione, al di fuori del fatto che le proprie stelle seguono orbite, alquanto randomiche, attorno al centro. Ed è proprio nel centro di queste galassie che si trova un buco nero supermassivo, che ha massa tipicamente pari a:

$$M_{\text{SMBH}} \simeq 10^{-3} M_{\text{gal}}$$

dove M_{gal} indica la massa dell'intera galassia.

Simili caratteristiche sono presenti anche nei bulge delle galassie a spirale. Infatti, trascurando il disco, bulge e alone presentano proprietà del tutto analoghe a quelle delle galassie ellittiche, quindi in genere quest'ultime e i bulge vengono raggruppati e definiti come sistemi stellari sferoidali, nonostante le loro forme intrinseche non siano necessariamente vicine a veri sferoidi. Inoltre, sia nei bulge delle galassie a spirale normali che barrate è presente un buco nero con lo stesso rapporto in massa della massa totale delle galassie ellittiche, considerando come massa totale esclusivamente la massa del bulge. Tra le due tipologie di bulge esistono però differenze non trascurabili, come riportato in Tabella 3.1.

Tabella 3.1: Proprietà dei bulge classici e a barra. (da Cimatti et al., 2020)

Tipo di Bulge	Colore	Popolazione stellare	ISM	Cinematica
Classico	rosso	vecchia	scarso	$V/\sigma < 1$
A barra	più blu e con strisce di plover	simile al disco/vecchia	presente	complessa

Si noti inoltre che nella quarta colonna della Tabella 3.1 viene riportato il rapporto V/σ , uno strumento comune per descrivere il tipo di dinamica del sistema considerato. V rappresenta la velocità rotazionale netta di un gruppo di stelle, mentre σ ne rappresenta la dispersione di velocità. Il rapporto tra queste due quantità spesso è dell'ordine di 10 per i dischi di grandi galassie a spirale, che sono quindi completamente dominati dalla rotazione e sono detti dischi dinamicamente freddi. In particolare, nel disco della nostra galassia, $V=220$ km/s e $\sigma=30$ km/s, quindi $V/\sigma \sim 7$. Invece, le galassie ellittiche hanno dispersione di velocità significativamente maggiore, dell'ordine dei 100 km/s, quindi il loro rapporto V/σ assume valori compresi indicativamente tra 0 e 1; in questo caso si parla di sistemi dinamicamente caldi. I bulge classici presentano una cinematica analoga a quella delle galassie ellittiche.

3.2 Disco e Bracci di Spirale

Il disco è la componente caratteristica delle galassie a spirale. Su questo giacciono la maggior parte delle stelle e del gas di questo tipo di galassie. Tipicamente il disco si suddivide in disco sottile e disco spesso. Il disco sottile ha uno spessore dell'ordine delle centinaia di parsec, mentre il disco spesso nell'ordine dei kiloparsec. Il disco sottile contiene la maggior parte delle stelle del disco, anche con età molto diverse tra loro. Ciononostante, il disco sottile è considerato essere molto più giovane del disco spesso. La dinamica delle stelle che appartengono al disco è caratterizzata da orbite coerenti quasi circolari intorno al centro galattico, e verrà approfondita nella sezione 4.2.

Dallo studio osservativo della velocità di rotazione sul disco all'aumentare della distanza dal centro sappiamo che il disco delle galassie a spirale non ruota come un disco rigido, bensì ha una rotazione differenziale. Si noti però che la struttura a spirale caratteristica dei bracci non corrisponde a una spirale di Archimede. Se così fosse, come illustrato in Figura 3.1, nel giro di poche centinaia di milioni di anni la struttura dei bracci sarebbe tanto strettamente avvolta su se stessa da non essere più apprezzabile. Poiché le galassie a spirale che osserviamo hanno età ben al di sopra di questo tempo, necessariamente l'avvolgimento dei bracci non è legato né alla rotazione differenziale delle stelle e del gas sul disco, né a possibile materiale in eiezione dal centro galattico.

Una soluzione al problema dell'avvolgimento è data dalla teoria secondo la quale i bracci delle galassie a spirale sono i modi di oscillazione di un disco autogravitante (la teoria delle onde di densità di Lin-Shu). Questi si muovono a velocità diffe-

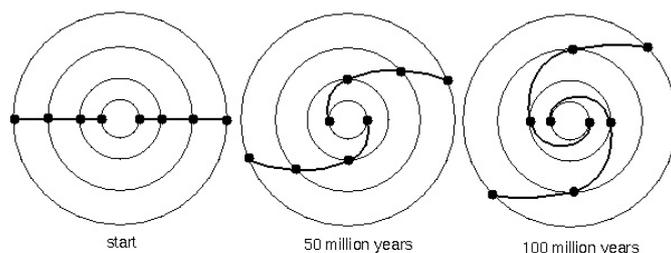


Figura 3.1: Problema dell'avvolgimento. (Nick Strobel, Astronomy Notes)

renti, molto più lente, rispetto alle stelle che orbitano nel disco, e la materia che "contengono" non è sempre la stessa, in quanto si tratta di onde.

Nei bracci di spirale la densità aumenta e con essa anche il campo di gravità locale, quindi in queste regioni avviene il collasso gravitazionale delle nubi di gas, portando alla formazione di stelle. Infatti, corrispondenza dei bracci di spirale si osservano le regioni più blu delle galassie a spirale.

3.3 Mezzo Interstellare

Questo è presente in maniera trascurabile nelle galassie ellittiche, mentre svolge un ruolo essenziale nelle galassie a spirale. Tipicamente consiste in pochi punti percentuali della massa totale della galassia, con picchi in corrispondenza dei bracci di spirale. Il mezzo interstellare dunque non ha influenza rilevante sulla dinamica della galassia ma svolge un ruolo chiave nel determinare le regioni di formazione stellare e la composizione chimica delle stelle stesse.

3.4 Regioni Esterne delle Galassie

Molto oltre la materia luminosa visibile si estende l'alone di materia oscura. Questo alone corrisponde alla componente che più contribuisce alla massa delle galassie, tuttavia la sua natura è estremamente complessa. Infatti, il termine "materia oscura" include sia la materia oscura barionica (elettroni inclusi pur non essendo barioni), costituita da materia ordinaria che non emette radiazione apprezzabile, sia la materia oscura non barionica, ed è quest'ultima che risulta difficile da studiare.

La materia oscura non barionica è costituita da particelle elementari che: non interagiscono con i campi elettromagnetici (dunque non hanno carica), all'epoca dell'equilibrio materia-radiazione hanno velocità molto inferiori alla velocità della luce, e non interagiscono per forza forte. Inoltre, la materia oscura è non dissipativa, quindi non può raffreddarsi emettendo radiazione, e non collisionale, quindi le sue particelle interagiscono fra loro e con le altre particelle esclusivamente attraverso la forza gravitazionale e potenzialmente per la forza debole.

Per queste ragioni, la materia oscura non è osservabile direttamente e non è ancora stata rilevata in laboratorio. L'alone interagisce con le altre componenti delle galassie unicamente attraverso la forza gravitazionale che esercita, palesandosi nella dinamica stellare. In particolare, gli effetti di questa interazione gravitazionale sono importanti nello studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale.

Capitolo 4

Dinamica delle Galassie

La dinamica delle galassie ellittiche e delle galassie a spirale differisce significativamente, come citato nel capitolo precedente. Nelle prossime pagine verrà affrontata esclusivamente la dinamica stellare per le galassie ellittiche, mentre per le galassie a spirale si farà riferimento solo alla dinamica degli oggetti sul disco, sia le stelle che le nubi di gas, con particolare attenzione alle regioni HI.

4.1 Dinamica Stellare nelle Galassie Ellittiche

Le galassie possono contenere un numero estremamente elevato di stelle che varia in maniera significativa in funzione delle dimensioni della galassia in studio, ma anche le ellittiche più piccole contengono nell'ordine delle decine di milioni di stelle. Supponiamo che la galassia ellittica media abbia $N = 10^{11}$ stelle, se volessimo studiare il moto di queste nel tempo, dovremmo risolvere un problema agli N corpi descritto, per un generico sistema di riferimento inerziale S_0 , dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

Per poter trovare una soluzione unidimensionale a questo sistema di $3N$ equazioni differenziali, e dunque ottenere l'orbita delle N stelle, sarebbe necessario ridurre il sistema a $6N - 1$ integrazioni indipendenti, ovviamente impossibile in questo caso. Non è possibile ottenere una soluzione a questo sistema utilizzando lo stesso metodo del problema a due corpi. Siamo limitati a dieci leggi di conservazione per un sistema che ne necessiterebbe molte di più. Per questa ragione, si ricorre invece a metodi numerici o espedienti per ottenere informazioni direttamente dalle equazioni del sistema.

Analizzando l'equazione in 4.1 si può osservare che l'unica forza che consideriamo agire sul sistema è quella di attrazione gravitazionale. Infatti, per semplificare il problema è opportuno assumere che le galassie siano sistemi autogravitanti¹, ovvero

¹In realtà questa assunzione non è sempre vera, anzi proprio la Via Lattea non è un sistema autogravitante a causa della vicina Galassia di Andromeda, con la quale il merger del mezzo circumgalattico è già iniziato (Lehner et al. (2020)), e in generale, anche le galassie più isolate sono circondate da aloni di materia oscura i cui filamenti sono legati agli aloni delle galassie vicine.

in cui l'unica forza agente è quella gravitazionale prodotta dal sistema stesso, e all'equilibrio, ovvero per cui vale il teorema del viriale.

Con le condizioni di sistema autogravitante, il teorema del viriale avrà la seguente forma:

$$2T = -U \quad (4.2)$$

Dove T rappresenta l'energia cinetica del sistema, mentre U ne rappresenta l'energia potenziale, che nel nostro sistema galassia sono date da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{v}_i\|^2, \quad U = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (4.3)$$

Inoltre, in un sistema di N corpi isolato, si conservano: energia totale, l'impulso e il momento angolare, posizione e velocità del centro di massa². Di seguito si riportano le formule delle costanti del moto (con $M = \sum_{i=1}^N m_i$):

$$E = T + U, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{v}_i \quad (4.4)$$

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad (4.5)$$

Sono proprio queste quantità che determinano le dieci leggi di conservazione per qualsiasi sistema di N corpi. Come già citato, però, queste condizioni non sono sufficienti per risolvere un problema tanto complesso quale quello della dinamica stellare all'interno delle galassie. Occorrono quindi ulteriori assunzioni o approssimazioni per ottenere delle stime più o meno accurate per il moto delle stelle all'interno della buca di potenziale di una galassia. Per prima cosa, la distribuzione di densità finora considerata è granulare, discreta, e il potenziale di cui risente ciascuna stella è determinato dalla massa e dalla posizione relativa di ogni altra stella.

$$\Phi_{\text{vero}}(\mathbf{x}_i) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (4.6)$$

Si tratta di condizioni molto complesse da descrivere con precisione, dunque si può approssimare la distribuzione di densità da una discreta ad una continua. In questo modo si semplifica significativamente la forma del potenziale. Tuttavia, si ottengono orbite ideali simili alle orbite reali se e solo se l'approssimazione fatta è sufficientemente buona. Il potenziale del sistema, per una generica distribuzione di densità $\rho(\mathbf{y})$, assume quindi la seguente forma:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_0) - G \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|} \right) \rho(\mathbf{y}) d^3\mathbf{y} \quad (4.7)$$

È necessario chiederci quanto sia valida questa approssimazione. Per riuscire a determinarlo è fondamentale introdurre un tempo caratteristico per il sistema

²La velocità del centro di massa e l'impulso totale del sistema non sono quantità indipendenti, dunque in tutto si hanno sempre 10 integrali primi del moto.

in studio: il tempo di rilassamento a due corpi. Questa quantità rappresenta il tempo entro il quale è valida l'approssimazione dell'orbita ideale del nostro modello. Infatti, se consideriamo una stella nella distribuzione reale e nella distribuzione ideale, inizialmente l'orbita di questa sarà simile nei due sistemi, ma nel tempo, via via che aumentano gli urti con altre stelle, si sviluppa una tromba d'incertezza sempre più significativa tra le due orbite. Finché il sistema ha un'età inferiore al proprio tempo di rilassamento esiste una correlazione tra l'orbita reale e quella ideale. Per età superiori al tempo di rilassamento del sistema, invece, non sussiste più alcuna relazione tra le due. Inoltre, nel caso l'età del sistema sia maggiore del tempo di rilassamento ad esso associato si parlerà di sistemi collisionali, l'effetto totale degli urti non sarà trascurabile. Vice versa, sistemi più giovani del rispettivo tempo di rilassamento saranno non collisionali, e l'effetto complessivo degli urti sarà trascurabile. Infine, il tempo di rilassamento a due corpi deve il suo nome alle assunzioni necessarie per poterlo determinare, ovvero:

1. Ciascun urto tra le particelle del sistema è considerato indipendente dagli altri, quindi l'effetto complessivo degli urti si può ottenere dalla somma diretta dei singoli urti.
2. Tutti gli incontri tra due particelle sono trattati come interazioni a due corpi su orbite iperboliche.

Consideriamo quindi una massa di test m_t e il sistema costituito N masse di campo m_f . Ciascun urto sarà determinato unicamente dall'interazione tra la massa di test m_t e la n-esima massa di campo m_f . Da ognuna di queste interazioni si ottiene un'orbita diversa per m_t e dal fascio delle N orbite è possibile ottenere il tempo di rilassamento, t_{2b} . In particolare, per il sistema sarà passato 1 t_{2b} quando:

$$\sum_{i=1}^N \Delta E_i = E_t, \quad (4.8)$$

dove ΔE_i rappresenta la variazione di energia della particella di test a causa degli urti, e E_t corrisponde alla sua energia cinetica iniziale. Questa variazione di energia a causa degli urti è dovuta all'effetto fionda e non contrasta in alcun modo la conservazione dell'energia totale del sistema in quanto nell'urto anche la particella m_f subisce una pari ed opposta variazione di energia.

La formula per il tempo di rilassamento a due corpi si ottiene calcolando il rapporto tra l'energia cinetica iniziale della particella m_t e il coefficiente di diffusione della variazione dell'energia cinetica di m_t .

Si riporta di seguito la formula finale³:

$$t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|)} \quad (4.9)$$

Introduciamo adesso un ulteriore tempo caratteristico per il sistema: il "crossing time". Questo equivale al tempo necessario affinché una stella che si muove a velocità

³Per la trattazione approfondita e il calcolo esplicito del tempo di rilassamento a due corpi si faccia riferimento all'Appendice 6.1.

σ "attraversi" la galassia di appartenenza, di raggio R . La formula per calcolarlo è semplice ed intuitiva:

$$t_{\text{cross}} = \frac{2R}{\sigma} \quad (4.10)$$

Calcoliamo adesso il tempo di rilassamento a due corpi nel nostro caso astrofisico. Supponiamo di avere un sistema di massa totale M , costituito da N masse di campo m_f e con $\|\mathbf{v}_t\| \equiv \sigma$, che si ottiene dal teorema del viriale:

$$\sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (4.11)$$

Dunque misuriamo il tempo di rilassamento in unità di tempo di crossing e, a seguito delle opportune considerazioni algebriche, si ottiene il seguente rapporto, valido esclusivamente per sistemi autogravitanti:

$$\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} = \frac{N}{12 \ln N} \quad (4.12)$$

Quindi per una tipica galassia ellittica con $N = 10^{11}$ e $t_{\text{cross}} = 2 \times 10^8 \text{yrs}$, il tempo di rilassamento è dell'ordine di $10^{6 \div 7} \text{Gyrs}$.

Il tempo di rilassamento per la galassia in studio è quindi molto più grande dell'età dell'Universo stesso. Ciò comporta che le galassie sono sistemi non-collisionali su tempi scala cosmologici. Nelle galassie non si è ancora instaurata una termodinamica propria e le nostre approssimazioni sono valide. Le orbite delle stelle nelle galassie sono quindi determinate a partire dal potenziale complessivo della galassia, e si possono stimare dall'approssimazione di densità continua.

4.2 Dinamica nelle Galassie a Spirale

La trattazione svolta nella sezione precedente è un mezzo utile per determinare i metodi da utilizzare nella descrizione delle orbite stellari nelle galassie ellittiche. Nei dischi delle galassie a spirale, invece, gli oggetti si muovono su orbite quasi circolari intorno al centro galattico. Per descrivere l'andamento della velocità di rotazione di questi oggetti in funzione della distanza galattocentrica, si utilizza uno strumento specifico: la curva di rotazione.

Questo oggetto osservativo riflette direttamente la distribuzione di massa delle galassie a spirale. In Figura 4.1 sono riportate le curve di rotazione di diverse galassie. Si osserva che queste hanno inizialmente una parte in cui la velocità di rotazione cresce linearmente con la distanza dal centro, ma una volta raggiunto il picco nel regime lineare mantengono poi un andamento più o meno piatto.

L'obiettivo di questa sezione è spiegare l'aspetto delle curve di rotazione. Ciò è possibile studiando la densità $\rho(r)$ nel contesto della porzione di galassia che si sta osservando. Innanzitutto, consideriamo i primi due teoremi di Newton:

1. Il campo gravitazionale totale all'interno di una sfera cava è nullo.
2. All'esterno della distribuzione di massa sferica, il campo gravitazionale è pari a quello corrispondente a un oggetto puntiforme della stessa massa posto nel centro della sfera.

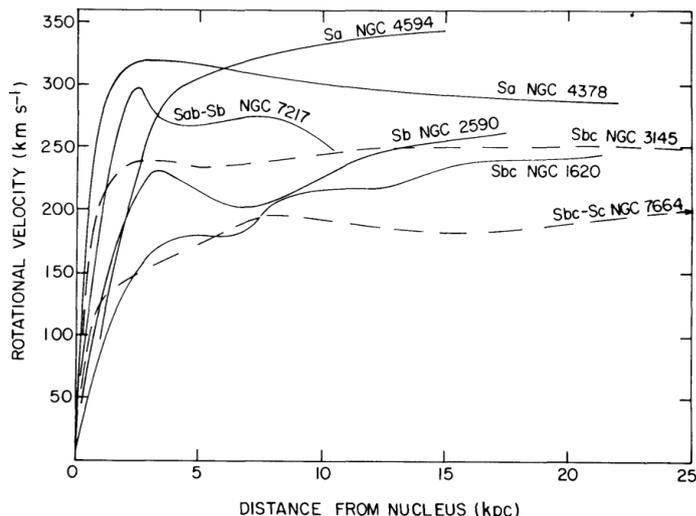


Figura 4.1: Curve di rotazione in diverse galassie a spirale. Rubin et al. (1978)

Il secondo teorema vale anche per distribuzioni sferiche a “bucce”, ovvero, all’interno di un sistema a simmetria sferica, la forza agente a distanza R dal centro dipende solo da $M(R)$, la massa contenuta all’interno del raggio. Quindi, per una distribuzione sferica avremo:

$$M(R) = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr \quad (4.13)$$

Distinguiamo adesso due casi:

1. a distanza sufficientemente grande dalla distribuzione di massa sferica, otterremo un andamento Kepleriano per la velocità di rotazione:

$$v_c(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow v_c(R) \propto \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (4.14)$$

2. all’interno di una distribuzione sferica con densità ρ_0 costante, si ottiene invece una dipendenza lineare tra la distanza dal centro R e la velocità di rotazione $v_c(R)$:

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3, \quad \frac{v_c^2(R)}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \Rightarrow v_c(R) \propto R \quad (4.15)$$

Nessuno di questi due casi spiega però una curva di rotazione piatta. Infatti, per avere una velocità di rotazione che non dipenda dalla distanza R in una distribuzione sferica, sarà necessaria una densità $\rho(r) = \frac{1}{r^2}$. In questo modo, sostituendo $\rho(r)$ nell’espressione della massa e poi nell’uguaglianza tra le forze agenti si ottiene effettivamente una velocità v_c indipendente da R .

I ragionamenti fatti finora sono però fallaci, perché nelle galassie a spirale la distribuzione di stelle e gas non è a simmetria sferica. O meglio, la distribuzione a simmetria sferica è corretta per l’alone, ma non per il disco sul quale giace la maggior parte delle stelle e del gas delle galassie a spirale. Per questi oggetti, infatti, trovandosi su un disco, la forza di cui risentono non è solo legata alla massa entro il raggio R del disco ma anche alla massa esterna ad R . Inoltre, sappiamo

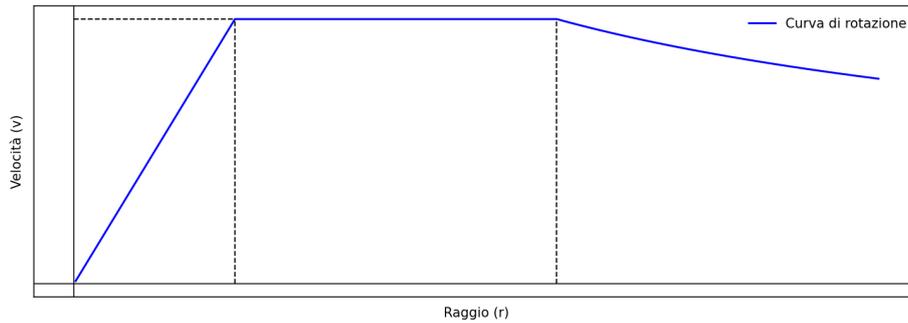


Figura 4.2: Curva di rotazione prevista per un disco.

dalle osservazioni che la decrescita della densità dal centro è molto più rapida di $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$, ed è più vicina a: $\rho(r) \propto e^{-r}$. Con questa distribuzione delle stelle, la curva di rotazione prima cresce, poi diventa piatta (esattamente come nel modello osservativo) e poi torna a decrescere con andamento Kepleriano, come illustrato in Figura 4.2. Ciò che si osserva, invece, è che la curva di rotazione del disco di stelle rimane nel regime piatto, e non si osserva alcuna decrescita kepleriana.

Se ripetiamo le stesse osservazioni utilizzando la riga a 21 cm delle nubi di HI, che si estendono molto oltre le regioni popolate da stelle, ancora osserviamo lo stesso andamento. Anche la curva di rotazione delle nubi di HI cresce, raggiunge il regime piano e si mantiene nello stesso regime fino a distanze pari a dieci volte l'estensione del disco stellare. Se la maggior parte della massa delle galassie fosse concentrata nelle stelle, ci aspetteremmo che a tali distanze la curva di rotazione decresca con regime Kepleriano. Poiché ciò non si osserva, e siamo certi che la legge di gravitazione scali come $\frac{1}{r^2}$, l'unica soluzione possibile è che a grandi raggi la massa della galassia sia dominata non più dalle stelle ma dalla materia oscura (descritta nella Sezione 3.4).

Per determinare l'abbondanza di materia oscura nelle galassie a spirale si ricorre ad una legge empirica, che lega la luminosità assoluta del disco e la velocità di rotazione delle nubi di HI: la relazione Tully-Fisher, che verrà approfondita nel prossimo capitolo.

Capitolo 5

Relazioni con la Dinamica

In quest'ultima sezione citiamo alcune relazioni fondamentali tra quantità caratteristiche per le galassie, sia ellittiche sia a spirale, che coinvolgono le grandezze dinamiche finora trattate.

5.1 Galassie Ellittiche

Legge di Faber-Jackson

La relazione di Faber-Jackson è una legge empirica per le galassie ellittiche che fu scoperta nel 1976 da S. M. Faber e R. E. Jackson. Questa relazione lega fra loro la luminosità assoluta¹ della galassia (o alternativamente la sua magnitudine assoluta) e la dispersione di velocità calcolata al centro della galassia.

Le due quantità sono legate fra loro da una legge di potenza:

$$L \propto \sigma^b, \quad b \simeq 4 \quad (5.1)$$

La relazione è riportata in Figura 5.1 e come si può osservare questa non è esatta, anzi ha un'incertezza pari a circa il 40%.

Questa relazione può essere utilizzata per determinare la scala delle distanze. Infatti, potendo misurare la dispersione di velocità centrale delle stelle (attraverso la spettroscopia), si può poi ottenere una stima della luminosità assoluta (dalla legge di Faber-Jackson). Dalla luminosità assoluta si ricava la magnitudine assoluta e confrontando questa con la magnitudine apparente si ottiene la distanza della galassia.

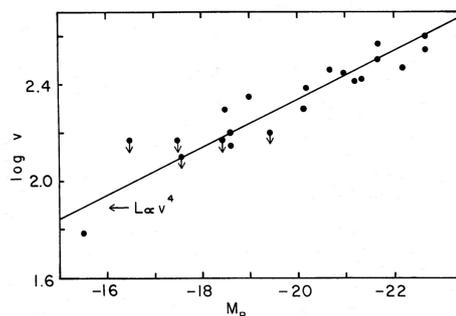


Figura 5.1: Legge di Faber-Jackson. Faber & Jackson (1976)

¹La luminosità è calcolata in corrispondenza del raggio effettivo della galassia, che coincide con il raggio dell'isofota che contiene metà del flusso luminoso dell'intera galassia.

Relazione $D_n - \sigma$

Questa relazione lega fra loro D_n e la dispersione di velocità per le galassie ellittiche (Dressler et al. (1987), e per i bulge delle galassie a spirale, Dressler (1987)). La quantità D_n è un parametro fotometrico che coincide con il diametro che racchiude una fissata brillantezza superficiale della galassia.

Anche questa relazione è caratterizzata da una legge di potenza, che ha la stessa incertezza della precedente:

$$D_n \propto \sigma^b, \quad b \simeq \frac{4}{3} \quad (5.2)$$

Anche questa relazione può essere utilizzata per studiare la scala di distanza delle galassie. Inoltre, unitamente alla legge di Faber-Jackson e alla legge di Kormendy (qui non approfondita), va a definire il piano fondamentale sul quale giacciono tutte le galassie ellittiche.

5.2 Galassie a Spirale

Legge di Tully-Fisher

La relazione di Tully-Fisher fu per la prima volta individuata da R. B. Tully e J. R. Fisher nel 1977, ed è il corrispettivo per le galassie a spirale della legge di Faber-Jackson (5.1). Questa legge empirica si applica esclusivamente alle galassie a spirale e lega la luminosità assoluta (o alternativamente la magnitudine assoluta) del disco alla velocità delle nubi di idrogeno neutro.

La luminosità assoluta del disco dipende dal numero di stelle che gli appartengono, e questo numero dipende a sua volta dalla quantità di materia oscura presente nella galassia considerata. Infatti, poiché la materia oscura è il principale contribuente alla massa della galassia influenza significativamente la buca di potenziale della galassia stessa. Più materia oscura c'è, più stelle ci saranno, e più sarà anche la velocità delle nubi di HI più lontane dal centro.

La relazione di Tully-Fisher è data da una dipendenza lineare tra $\log(v_{HI})$ e $\log(L_{disco})$, dunque tra le due si ha una legge di potenza (Tully & Fisher (1977)):

$$L_{disco} \propto v_{HI}^\beta, \quad \beta \simeq 4 \quad (5.3)$$

Questa relazione è osservativa e altamente imprecisa, con un errore di circa il 40% ma è stata fondamentale nel problema della misura della scala delle distanze. Infatti, la luminosità assoluta è legata alla distanza attraverso la densità di flusso:

$$l = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (5.4)$$

Quindi, misurando la velocità di rotazione di una galassia si ottiene la luminosità, dall'applicazione della relazione di Tully-Fisher, e misurando poi anche la densità di flusso è possibile risalire alla distanza della galassia.

Capitolo 6

Appendice

6.1 Tempo di Rilassamento a Due Corpi

Per ciascuna interazione a due corpi, in un sistema inerziale qualsiasi S_0 , si definiscono le posizioni delle due particelle con \mathbf{x}_t e \mathbf{x}_f e le rispettive velocità \mathbf{v}_t e \mathbf{v}_f , con associate condizioni iniziali \mathbf{x}_{t0} , \mathbf{x}_{f0} , \mathbf{v}_{t0} e \mathbf{v}_{f0} . Si introduce quindi l'orbita relativa di m_t rispetto a m_f : $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_f$; e la velocità relativa: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f$. Per ogni interazione si conservano le quantità citate in 4.4 e 4.5, che si semplificano nelle seguenti formule:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\text{CM}0} = \frac{m_t \mathbf{x}_{t0} + m_f \mathbf{x}_{f0}}{M}, & M = m_t + m_f \\ \mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{m_t \mathbf{v}_{t0} + m_f \mathbf{v}_{f0}}{M} \\ E = \frac{m_t \|\mathbf{v}_t\|^2}{2} + \frac{m_f \|\mathbf{v}_f\|^2}{2} - \frac{Gm_t m_f}{r}, & r \equiv \|\mathbf{r}\| \\ \mathbf{J} = m_t \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{x}_f \wedge \mathbf{v}_f \end{cases} \quad (6.1)$$

Nel sistema del centro di massa, anch'esso un sistema di riferimento inerziale, si ha inoltre che le prime due quantità sono costanti e uguali a zero ($\mathbf{R}_{\text{CM}0}$ coincide con l'origine del sistema). Infatti, queste quantità sono costanti del moto, ma il loro valore dipende dalle condizioni iniziali e queste a loro volta dipendono dal sistema rispetto al quale vengono calcolate. In altre parole, le costanti del moto **non** sono (necessariamente) invarianti fra sistemi.

Per la determinazione del tempo di rilassamento è necessario definire la variazione dell'energia della particella m_t . Quindi, per prima cosa determiniamo il valore dell'energia totale al tempo iniziale dell'interazione. Se assumiamo che al tempo $t=0$ le due particelle si trovino a distanza $r = \infty$, l'energia totale coincide con l'energia cinetica iniziale:

$$E_0 = \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \frac{m_f}{2} \|\mathbf{v}_f\|^2 \quad (6.2)$$

Inoltre, sia all'inizio che al termine dell'interazione l'energia potenziale U sarà uguale a zero, dunque $\|\mathbf{v}\|_{fin} = \|\mathbf{v}\|_{in}$

In un generico sistema inerziale S_0 , la variazione di energia cinetica per la massa di test sarà data da:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} (\|\mathbf{v}_t\|_{fin}^2 - \|\mathbf{v}_t\|_{in}^2) = \mu \langle \mathbf{V}_{\text{CM}}, \Delta \mathbf{v} \rangle \quad (6.3)$$

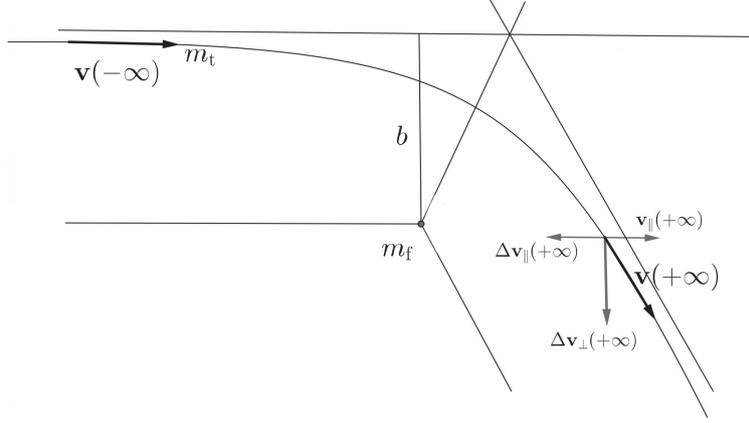


Figura 6.1: Rappresentazione di un'interazione tra la particella m_t e la particella di campo m_f . Ciotti (2021)

$$\mu = \frac{m_t m_f}{M}, \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{fin} - \mathbf{v}_{in}$$

Da 6.3 si evince che nel sistema di riferimento del centro di massa non c'è effetto fionda, e che $\Delta \mathbf{v}$ è la stessa per ogni sistema inerziale S_0 . La somma di tutti queste variazioni darà la componente chiave per determinare il tempo di rilassamento a due corpi.

Scomponiamo ora la velocità relativa nelle sue componenti, inizialmente sarà lungo la sola componente a sé parallela, mentre al termine dell'interazione, la velocità relativa finale avrà anche una componente perpendicolare alla sua direzione iniziale a causa dell'urto tra le due particelle, come illustrato in Figura 6.1. La variazione della velocità relativa tra le due componenti sarà quindi data da: $\Delta \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_\perp$ e $\Delta \mathbf{v}_\parallel = -\alpha \mathbf{v}_\parallel$, con α parametro ignoto. Quindi, la variazione della velocità della massa m_t sarà data da $\Delta \mathbf{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v} = \frac{\mu}{m_t} (\Delta \mathbf{v}_\perp + \Delta \mathbf{v}_\parallel)$. In questo modo si può riscrivere la variazione di energia in 6.3, come:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta \mathbf{v}_\perp\|^2 + \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta \mathbf{v}_\parallel\|^2 + 2 \frac{\mu}{m_t} \langle \mathbf{v}_{t,in}, \Delta \mathbf{v}_\perp + \Delta \mathbf{v}_\parallel \rangle \right) \quad (6.4)$$

I primi due termini di questa nuova definizione sono di riscaldamento, in quanto necessariamente portato ad un aumento dell'energia della particella di test poiché sempre ≥ 0 ; l'ultimo termine, invece, sarà di riscaldamento o di raffreddamento a seconda del suo segno.

Adesso che abbiamo la variazione di energia per ciascun urto, è necessario considerare l'effetto totale della sovrapposizione dei singoli urti. Per fare ciò è necessario descrivere la distribuzione delle stelle di campo nello spazio delle fasi, quindi si introduce una funzione che descrive un sistema omogeneo, infinito e isotropo nello spazio delle velocità per le stelle di campo.

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(v_f), \quad v_f \equiv \|\mathbf{v}_f\| \quad (6.5)$$

con n_f che rappresenta la densità numerica delle stelle del sistema. Definiamo anche il numero di incontri con le particelle di campo per un lasso di tempo Δt :

$$\Delta n_{inc} = 2\pi b db \times \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t \times n_f g(v_f) d^3 \mathbf{v}_f \quad (6.6)$$

Introduciamo adesso, per una generica proprietà orbitale P , il coefficiente di diffusione:

$$D(P) \equiv 2\pi n_f \int_{\mathbb{R}^3} g(v_f) \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| d^3\mathbf{v}_f \int_0^\infty \langle P \rangle b db \quad (6.7)$$

b , illustrato in Figura 6.1, rappresenta il parametro d'impatto e consiste nella distanza minima tra le due stelle in assenza di interazione gravitazionale. In generale questo parametro può variare tra 0 e ∞ ma di fatto, varia tra un valore minimo e un valore massimo, come vedremo tra poco. Il coefficiente di diffusione misura il tasso di variazione nel tempo della proprietà orbitale P a causa degli effetti cumulativi degli incontri con le stelle di campo.

La quantità che più influisce al riscaldamento particella di test è il primo termine in 6.4, e quindi è quello che ci avvicina al soddisfacimento della condizione in 4.8. Infatti, il tempo di rilassamento sarà dato dal rapporto:

$$t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{D(\|\Delta\mathbf{v}_\perp\|^2)} \quad (6.8)$$

Per determinare $D(\|\Delta\mathbf{v}_\perp\|^2)$ seguiremo l'approssimazione impulsiva, che ci permette di scrivere:

$$\mu \|\Delta\mathbf{v}_\perp\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \cdot \frac{2b}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2Gm_t m_f}{b\|\mathbf{v}\|} \quad (6.9)$$

Questa formula è tanto più vera quanto più grande è b .

Quindi, da

$$\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta\mathbf{v}_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}\|^2} e \|\mathbf{v}_t\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\mathbf{v}\|^2 \quad (6.10)$$

Otteniamo finalmente $D(\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|)$, e calcoliamo successivamente il rapporto per t_{2b} in termini soltanto di \mathbf{v}_t :

$$D(\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2) \sim \Delta t 8\pi G^2 m_f^2 n_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f) d^3\mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} \quad (6.11)$$

Il primo integrale presenta divergenze ad entrambi gli estremi. La divergenza a 0 è detta "divergenza ultravioletta" ed è dovuta al fatto che non abbiamo usato la formula esatta per D , mentre la divergenza a ∞ , detta "divergenza infrarossa", è dovuta all'assunzione di universo infinito, omogeneo ed euclideo. A causa di queste divergenze, l'integrale si risolve limitandolo tra un minimo e un massimo per b e la sua soluzione si chiama "logaritmo di Coulomb", $\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \ln\Lambda$, con $\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$.

Il secondo integrale corrisponde invece al primo potenziale di Rosenbluth, $\Psi(\|\mathbf{v}_t\|)$, ed è proporzionale all'inverso di $\|\mathbf{v}_t\|$.

Quindi:

$$D(\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2) \sim \Delta t 8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln\Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \quad (6.12)$$

Riprendiamo ora la definizione di tempo di rilassamento in 6.8, in funzione di \mathbf{v}_t :

$$t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln\Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|)} \quad (6.13)$$

Abbiamo così ottenuto la definizione del tempo di rilassamento a due corpi.

Bibliografia

- Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics*, 2 edn. Princeton University Press
- Cimatti A., Fraternali F., Nipoti C., 2020, *Introduction to Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press
- Ciotti L., 2021, *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press
- Dressler A., 1987, *THE $D_n - \sigma$ RELATION FOR BULGES OF DISK GALAXIES: A NEW, INDEPENDENT MEASURE OF THE HUBBLE CONSTANT*, [The Astrophysical Journal](#), p. 10
- Dressler A., Lynden-Bell D., Burstein D., Davies R. L., Faber S. M., Terlevich R. J., Wegner G., 1987, *SPECTROSCOPY AND PHOTOMETRY OF ELLIPTICAL GALAXIES. I. A NEW DISTANCE ESTIMATOR*, [The Astrophysical Journal](#), p. 17
- Faber S. M., Jackson R. E., 1976, *VELOCITY DISPERSIONS AND MASS-TO-LIGHT RATIOS FOR ELLIPTICAL GALAXIES*, [The Astrophysical Journal](#), p. 16
- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. J., 2017, *Fundamental Astronomy*, 6 edn. Springer
- Lehner N., et al., 2020, *Project AMIGA: The Circumgalactic Medium of Andromeda*, [The Astrophysical Journal](#), p. 44
- Rubin V. C., Ford W. K., Norbert T., 1978, *EXTENDED ROTATION CURVES OF HIGH-LUMINOSITY SPIRAL GALAXIES. IV. SYSTEMATIC DYNAMICAL PROPERTIES, $S_a \rightarrow S_c$* , [The Astrophysical Journal](#), p. 6
- Tully R. B., Fisher J. R., 1977, *A New Method of Determining Distances to Galaxies*, *Astronomy and Astrophysics*, p. 13