Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

Cinematica Relativistica degli Urti

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Samuele Pettinotti

Anno Accademico 2023/2024

Ringraziamenti

Premetto che con queste poche parole non riuscirò ad esprimere l'immensa gratitudine che provo per le persone citate e per le possibilità che hanno reso concreta questa meta.
Questa tesi rappresenta un punto fondamentale di un percorso, che è stato possibile -soprattutto- grazie all'aiuto e al supporto della mia famiglia, che ha avuto fiducia nelle mie possibilità. Inoltre, è necessario ricordare gli amici, in particolare Elia e Thomas, che mi hanno accompagnato in questi anni; attraverso discussioni e riflessioni si è riusciti a crescere e a migliorare.
Ringrazio profondamente il professore Roberto Balbinot per aver condiviso la sua conoscenza e il suo metodo, regalandomi sapienti insegnamenti.
Infine, voglio dedicare il raggiungimento di questo obbiettivo a Noemi e a Davide, che hanno saputo mostrarmi quanta forza risieda nella volontà; per questo -e molto altro- non trovo neppure parole di ringraziamento, non dimenticherò un tale debito sinché avrò vita.

Indice

“La natura è prima dell’uomo,
ma l’uomo è prima della
scienza naturale.”
Carl Friedrich von Weizsäcker

Introduzione

In questo lavoro si sono voluti ripercorre i passi fondamentali, sia logici che formali, che portano ad una esposizione consistente della teoria della relatività ristretta. Partiti da un ragionamento di carattere generale, che ha enunciato i postulati teorici, si sono poi mostrate le conseguenze geometriche di tali assunzioni e il formalismo covariante del nuovo spazio geometrico. Inoltre, si è cercato di utilizzare il più possibile un approccio covariante in tutta la trattazione seguente.
Successivamente, a partire da un principio variazionale di minima azione, è stato possibile creare una teoria covariante del moto. Si è continuato mostrando alcuni risultati fondamentali della teoria.
Infine, la teoria è stata applicata ai processi d'urto. Mediante alcune considerazioni e alla legge di conservazione del quadrimomento, si è mostrato come la relatività ristretta permetta un approccio cinematico alla descrizione degli urti. Principalmente, si sono approfonditi gli urti a due corpi, con un particolare riferimento agli urti elastici.

1 Richiami di Relatività Ristretta e Formalismo Tensoriale

1.1 Basi filosofiche della Relatività Ristretta

La meccanica classica nasce attraverso un lungo e geniale processo di razionalizzazione dei concetti che, intuitivamente, la nostra ragione ci suggerisce: lo spazio è il luogo dove i corpi si trovano e si muovono, il tempo è il concetto che ci consente di scandire la successione dei fenomeni o, ancora, la forza è il modo in cui abbiamo razionalizzato l'interazione tra gli oggetti, ecc. A tutto questo si accompagna la formulazione, ossia la necessità di rendere la relazione tra i concetti quantitativa, che viene rappresentata -in ultima analisi- dalle equazioni differenziali; come scrive Poincaré all'inizio del decimo capitolo di *La scienza e l'ipotesi*: "Le equazioni differenziali sono sempre vere, [...]; queste equazioni esprimono relazioni e se le equazioni rimangono vere è perché le relazioni conservano la loro realtà". Oppure ancora: "Le vere relazioni tra questi oggetti reali sono l'unica realtà che possiamo raggiungere, e l'unica condizione è che esistano tra questi oggetti le stesse relazioni che esistono tra le immagini che siamo costretti a mettere al loro posto".
Possiamo dunque, pensare la meccanica classica come un potente raffinamento delle idee quotidiane ed una sorprendente capacità di mettere in formule le relazioni fra i concetti che, si assume, corrispondano agli oggetti reali.

Un primo concetto, di fondamentale importanza, in meccanica classica è il sistema di riferimento, caratterizzato come una terna di rette perpendicolari che rappresenta lo spazio di un osservatore. Risulta evidente come ad osservatori diversi siano associabili diversi sistemi di riferimento e da ciò segue che il moto di questi, potrà, in generale, essere vario. Una categoria rilevante, nello studio meccanico, di sistemi di riferimento è quella individuata come sistemi di riferimento inerziali, ovvero quei sistemi il cui moto risulta essere rettilineo uniforme. Una volta chiarita questa struttura concettuale è immediato comprendere la natura relativa dello spazio, mentre il tempo -nel contesto classico- viene considerato assoluto. Vale a dire che la progressione temporale risulta coerente per tutti i sistemi di riferimento. La rilevanza dei sistemi inerziali è dovuta al principio di relatività galileiano, il quale afferma: le leggi della meccanica sono invarianti, in forma, in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ciò che, di fatto, si assume con questo principio è l'equivalenza tra i diversi sistemi di riferimento. Questo garantisce la coerenza delle osservazioni, ovvero -ai fini di uno studio scientifico- è necessario assumere che le realtà fenomenologiche di osservatori diversi siano coese in modo da formare un'unica realtà che, attraverso i successi della fisica classica, è ritenuta oggettiva. Perché questo sia garantito è necessario ipotizzare che le relazioni tra le quantità -come detto le equazioni differenziali- siano assolute[1].
Lo sviluppo teorico della meccanica classica mostra come, storicamente, sia stata fatta un'altra assunzione, ossia che le interazioni naturali dispongano di una velocità infinita. Tuttavia, l'esperienza ha abbondantemente dimostrato che, nella natura macroscopica, non esistono interazioni istantanee. Questa rappresenta una prima imprecisione della meccanica classica, la quale è stata il primo punto di superamento che la teoria della relatività ristretta ha compiuto rispetto alla teoria precedente. Difatti, la teoria della

[1] Almeno nel regime inerziale considerato dal principio.

relatività riprende -seppur ampliandolo a tutti i fenomeni fisici- il principio di relatività e postula, inoltre, l'invarianza della velocità della luce $\boldsymbol{c}$ rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo secondo postulato porta all'inevitabile risultato di porre la velocità della luce come velocità limite. Chiariamo come le due cose siano correlate; consideriamo un primo sistema di riferimento in quiete ed un secondo sistema in moto rettilineo uniforme, a questo punto consideriamo un oggetto che si muove a una determinata velocità in verso opposto al sistema di riferimento in moto. È chiaro come la velocità dell'oggetto misurata dal sistema in moto risulterà superiore rispetto a quella misurata dal sistema in quiete. Ora, immaginiamo di accelerare l'oggetto fino alla velocità della luce, quando l'oggetto la raggiungerà -per il postulato- la misura dei due sistemi di riferimento sarà la medesima. Aggiungiamo un terzo sistema di riferimento, che si muove con una velocità doppia rispetto al secondo e nella stessa direzione; anche per questo l'oggetto andrà alla velocità della luce. Risulta chiaro come il postulato vieti l'esistenza di un sistema di riferimento per il quale l'oggetto superi la velocità della luce, divenendo questa un limite.

Pertanto, il principio di relatività einsteiniano affiancato dal postulato dell'esistenza di una velocità limite, formano la base teoretica della relatività ristretta.
Anche assumendo che l'interazione viaggi alla velocità massima, risulta evidente come una velocità finita di trasmissione del realizzarsi di un fenomeno, metta in crisi il concetto di simultaneità della fisica pre-relativistica, fondato, a sua volta, sul concetto di tempo assoluto.
Siamo, dunque, giunti ad una contraddizione tra l'impianto filosofico della relatività ristretta e l'idea classica di tempo assoluto. Per proseguire è necessario negare una delle due ipotesi. Procediamo negando il carattere assoluto del tempo e facendolo diventare un concetto relativo, al pari dello spazio in meccanica classica. In questo modo, tuttavia, siamo usciti dalla meccanica classica, infatti l'assunzione che il tempo sia relativo esce dalla nostra concezione quotidiana del mondo, sulla quale -come detto- si basa la fisica classica, causando, in maniera del tutto propria, un cambio di paradigma.

1.2 Spazio di Minkowski e tempo proprio

Dal risultato della sezione precedente ci troviamo a dover introdurre il tempo come una variabile relativa, per farlo -in piena analogia a quanto è solito fare per lo spazio euclideo- definiamo una varietà, questa volta quadridimensionale, che chiamiamo *spazio di Minkowski*. È importante sottolineare il fatto che lo spazio che andremo a considerare è formato da tre dimensioni spaziali e una temporale, questo significa che risulterà topologicamente differente da uno spazio $\mathbb{R}^4$.

Definiamo, ora, un *evento* come un punto della nostra varietà, il quale sarà individuabile attraverso un quadrivettore del tipo

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \tag{1.2.1}$$

Da notare che la coordinata temporale è moltiplicata per la velocità della luce per ragioni di consistenza dimensionale dello spazio considerato.
A questo punto, dati due eventi, vogliamo determinare la separazione tra i punti dello spazio, in altre parole siamo interessati a definire la metrica dello spazio. Questa ci fornirà una sorta di quadridistanza, che chiameremo *intervallo*. Pertanto, la metrica dello spazio di Minkowski è la seguente forma quadratica differenziale:

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \tag{1.2.2}$$

ove si è fatto uso della convezione di Einstein per semplificare la notazione. Inoltre, η_{ij} sono gli elementi di una matrice η detta *tensore metrico*:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

Sviluppando la (1.2.2) otteniamo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

Scritta in questa maniera risulta evidente come questa sia una metrica indefinita. Possiamo, dunque, sviluppare la seguente caratterizzazione degli intervalli, a partire dal loro segno:

1. $ds^2 > 0$ l'intervallo è di *genere tempo*; in tal caso è ammesso che gli eventi considerati abbiano una relazione di causalità.

2. $ds^2 = 0$ l'intervallo è di *genere luce*; è l'intervallo tipico dei fenomeni luminosi, poiché prevede una velocità pari a quella limite.

3. $ds^2 < 0$ l'intervallo è di *genere spazio*; in questo caso non è ammessa causalità tra gli eventi considerati, poiché il contrario implicherebbe il superamento della velocità limite.

Poniamoci, ora, in un sistema inerziale $\mathcal{K}$ e consideriamo due eventi $A = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$, nel quale una sorgente emette un impulso luminoso e l'evento $B = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ nel quale l'impulso luminoso giunge, allora l'intervallo associato sarà:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$$

per un impulso luminoso avremo che l'intervallo sarà nullo, ciò discende dalla definizione che abbiamo dato di intervallo. In un altro sistema di riferimento, anch'esso inerziale, $\mathcal{K}'$ gli stessi eventi sono definiti nel modo seguente $A' = (ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ e $B' = (ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$, quindi in tale sistema l'intervallo sarà:

$$\Delta s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2$$

per il secondo postulato avremo che la velocità della luce anche in questo sistema di riferimento sarà pari a $\boldsymbol{c}$, quindi l'intervallo sarà nullo. Avremo dunque che l'intervallo è invariante per il cambio di sistema di riferimento

$$\Delta s^2 = 0 = \Delta s'^2 \implies c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2$$

Il risultato appena ottenuto è di importanza capitale, poiché generalizzabile a tutti i sistemi di riferimento inerziali e alle altre tipologie di intervallo.
Consideriamo i due soliti sistemi inerziali $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$, poiché il moto relativo è rettilineo uniforme, la trasformazione che lega le coordinate dei due sistemi dovrà essere necessariamente lineare, ciò ci consente di scrivere la trasformazione per gli intervalli nella seguente maniera:

$$\Delta s^2 = \lambda \Delta s'^2$$

Per l'uniformità dello spaziotempo avremo che λ non dipenderà dalle coordinate degli eventi, bensì solamente dalla velocità relativa tra i sistemi $\vec{v}$. Inoltre, per l'isotropia dello spazio λ dovrà dipendere solo dal modulo della velocità, quindi la funzione λ sarà pari:

$$\Delta s^2 = \lambda(v)\Delta s'^2 \qquad \text{con} \qquad \lambda(v) = \lambda(-v)$$

Possiamo invertire la relazione, ottenendo:

$$\Delta s'^2 = \frac{1}{\lambda}\Delta s^2 \tag{1.2.4}$$

A questo punto dobbiamo fare un ragionamento di importanza pivotale poiché utilizziamo il principio di relatività. I due sistemi $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$ sono equivalenti, per cui la relazione di equivalenza può essere riscritta come

$$\Delta s'^2 = \lambda(-v)\Delta s^2$$

Confrontando con la (1.2.4) e ricordando la parità della funzione, otteniamo:

$$\lambda(-v) = \frac{1}{\lambda(v)} \implies \lambda^2(v) = 1$$

La soluzione $\lambda = -1$ può essere scartata, poiché per $v = 0$, ossia per sistemi solidali, risulta evidente che $\Delta s'^2 = \Delta s^2$. Concludiamo che $\lambda = 1$ per cui $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ indipendentemente dalla tipologia di intervallo e per ogni sistema di riferimento inerziale.

Il fatto che la velocità della luce sia la velocità limite, dota lo spazio di Minkowski di una *struttura causale*, rappresentata in Fig.1.

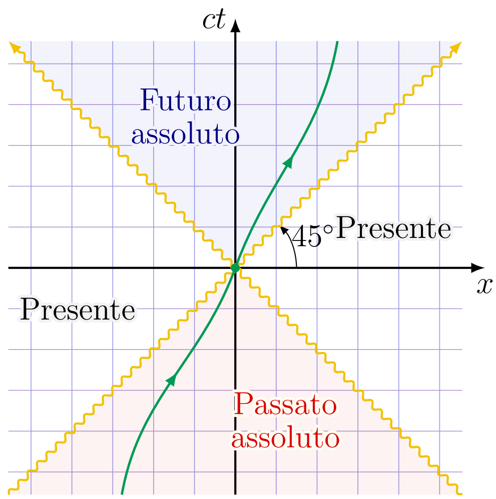

Figura 1: Spazio di Minkowski

Chiariamo cosa sia la struttura causale. Nella rappresentazione precedente, si sono omesse due delle tre dimensioni spaziali al fine di una rappresentazione maggiormente comprensibile; si può vedere come lo spazio di Minkowski sia diviso in tre parti: il presente, il passato assoluto e il futuro assoluto. Le varie regioni sono separate dalle bisettrici del piano, le quali rappresentano il moto di un oggetto passante per $t = 0$ e $x = 0$ che viaggia alla velocità c, quindi la velocità della luce. Poiché tale velocità rappresenta un limite superiore, sarà necessario che le linee di universo dei corpi non superino l'inclinazione di 45°, ciò significa che nessuna traiettoria potrà mai superare i limiti posti dalle bisettrici. Gli eventi appartenenti al futuro assoluto sono quelli il cui intervallo associato, rispetto all'origine, è di genere tempo, questo garantisce la possibilità di causalità tra gli eventi. Di conseguenza, non esiste alcun sistema di riferimento inerziale nel quale l'evento O risulti simultaneo agli eventi contenuti nella regione superiore, da qui il nome futuro assoluto. Al contrario gli eventi appartenenti al passato assoluto sono quelli il cui intervallo associato è di genere spazio e questo vieta la possibilità di causalità tra gli eventi. In maniera complementare al caso precedente, non esiste alcun sistema di riferimento inerziale nel quale l'evento O risulti simultaneo agli eventi contenuti nella regione inferiore. Infine, la regione chiamata presente ha la proprietà secondo cui: per ogni evento esiste un sistema di riferimento nel quale, l'evento in questione, risulta simultaneo all'evento O.
Concludiamo questa parentesi dicendo che l'osservatore nel centro del sistema di riferimento sarà sottoposto ad una progressione lungo l'asse dei tempi, in tale maniera ciò che prima era parte del futuro assoluto diverrà parte del presente e, viceversa, ciò che era presente diverrà passato assoluto.

Continuiamo ad analizzare le conseguenze del nostro cambio di paradigma considerando, gli ormai consueti, sistemi inerziali $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$. In particolare, sia $\mathcal{K}$ in quiete e $\mathcal{K}'$ in moto con velocità v. L'osservatore in $\mathcal{K}$, in un tempo dt, vedrà spostarsi $\mathcal{K}'$ di una quantità spaziale $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Ci chiediamo che relazione ci sia tra dt e dt'. Per rispondere usiamo gli intervalli, che abbiamo capito essere invarianti. Lo spostamento spaziale di $\mathcal{K}'$ rispetto a se stesso è chiaramente nullo, ciò ci consente di scrivere:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt'^2$$

Definiamo il *tempo proprio*, ossia il tempo solidale all'osservatore considerato in moto in funzione delle coordinate del sistema in quiete, come:

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \tag{1.2.5}$$

ove si è definito il fattore di Lorentz $\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}$.

Consideriamo la misurazione nel sistema $\mathcal{K}$ di un intervallo di tempo Δt, una volta fissato un tempo iniziale t_i e un tempo finale t_f. Nel sistema $\mathcal{K}'$ l'intervallo di tempo sarà dato da:

$$\Delta t' = t'_f - t'_i = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$$

Poiché il termine sotto radice può essere solo minore o uguale a 1, complessivamente l'intervallo di tempo nel sistema in movimento risulta essere minore o uguale di quello misurato nel sistema considerato in quiete. Vale a dire che un orologio nel sistema $\mathcal{K}'$ risulterebbe in ritardo rispetto a quello in $\mathcal{K}$. Ora, in linea di principio, se ci ponessimo nel sistema $\mathcal{K}'$, si otterrebbe un risultato simmetrico per il sistema $\mathcal{K}$. Questo comporterebbe in maniera evidente un paradosso, in quanto entrambi i sistemi di riferimento dovrebbero, contemporaneamente, misurare l'intervallo temporale con due risultati diversi. Tuttavia, ragionando più attentamente si può giungere alla risoluzione. Ipotizziamo che, in un dato istante, l'orologio di $\mathcal{K}'$ incontri quello di $\mathcal{K}$ e che in tale istante essi indichino lo stesso tempo. Per comparare le andature degli orologi, bisogna nuovamente confrontare -in un altro luogo dello spazio- il tempo segnato dell'orologio di $\mathcal{K}'$ con il tempo segnato da un secondo orologio di $\mathcal{K}$, il quale sarà sincronizzato con il primo. Sperimentalmente si ottiene che l'orologio di $\mathcal{K}'$ è in ritardo rispetto al secondo orologio di $\mathcal{K}$. Capiamo che, al fine di comparare le andature degli orologi, occorre un orologio in un sistema di riferimento e almeno due nell'altro sistema. Pensato in questo modo il processo non è più simmetrico. Concludiamo che l'orologio in ritardo sarà sempre quello che viene confrontato con orologi differenti, ma sincronizzati tra loro. Potremmo riassumere quanto detto affermando che la simmetria viene rotta dalla procedura sperimentale.

1.3 Trasformazioni di Lorentz

Vogliamo definire delle trasformazioni che -risultando compatibili con i due postulati della relatività ristretta- leghino le coordinate spaziotemporali di due sistemi di riferimento inerziali. Più precisamente, vogliamo che le equazioni di Maxwell (le quali descrivono la propagazione della luce) risultino invarianti per la trasformazione cercata.

Come già anticipato, la trasformazione dovrà essere necessariamente lineare e omogenea, questo perché il moto dei sistemi di riferimento in esame è rettilineo uniforme, ovvero:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = 0 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Per cui, dato un evento x^μ in $\mathcal{K}$, la trasformazione lineare che restituisce l'evento in $\mathcal{K}'$ avrà una forma del tipo seguente

$$x^\mu \xrightarrow{\text{L}} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.3.2}$$

Le trasformazioni lineari che soddisfano i postulati della relatività ristretta sono dette *trasformazioni di Lorentz*. Considerando la natura quadridimensionale di un evento avremo che la matrice di trasformazione avrà sedici elementi

$$\Lambda \equiv \{\Lambda^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

Definite in questo modo -le trasformazioni di Lorentz- sono sia trasformazioni di velocità, le quali coinvolgono gli aspetti spaziotemporali degli osservatori, sia rotazioni, che conservano la metrica euclidea e non trasformano il tempo.
Inoltre, è possibile compiere un'ulteriore generalizzazione introducendo anche le traslazioni; tuttavia, in questo modo la trasformazione non risulta più omogenea e viene detta *trasformazione di Poincaré*

$$x^\mu \xrightarrow{\text{P}} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.3.4}$$

ove a^μ è una costante.

Consideriamo, ora, una trasformazione di Lorentz per un evento infinitesimo dx^μ

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$$

dalla quale sono facilmente ottenibili gli elementi della matrice di trasformazione

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{dx'^\mu}{dx^\nu}$$

Nella sezione precedente abbiamo, già trattato il carattere invariante di un intervallo; vogliamo, qui, riproporla con un approccio inverso. Vogliamo imporre la conservazione

di un intervallo infinitesimo per comprendere quali condizioni una trasformazione -che rispetta questo vincolo- deve soddisfare.
Dalla definizione (1.2.2):

$$ds'^2 = ds^2 \implies = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$
$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \implies \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Quella appena trovata risulta essere la condizione più generale che deve soddisfare una trasformazione di Lorentz. Ora, ci domandiamo quanti dei $4 \times 4 = 16$ elementi della matrice Λ siano parametri liberi. Al numero massimo dobbiamo, ovviamente, sottrarre il numero di condizioni che imponiamo, l'unica relazione che abbiamo imposto è quella appena trovata. In linea di principio, la relazione, comporta 16 equazioni a causa della doppia sommatoria, tuttavia, ricordando la definizione di η (1.2.3) si nota che questa è simmetrica, quindi le equazioni indipendenti saranno 10. Si conclude così che i parametri liberi sono $16 - 10 = 6$. Questo risultato torna fisicamente, poiché ci aspettiamo che i parametri liberi siano le 3 direzioni di moto, più i 3 angoli di rotazione.

Da qui in avanti, a meno di specifiche, ci concentreremo sulle trasformazioni di Lorentz omogenee. Vogliamo capire quali caratteristiche posseggano le matrici associate a queste trasformazioni, per poi farne una classificazione.
Possiamo ridefinire, più formalmente, la trasformazione di Lorentz -in virtù della condizione che le individua- come una trasformazione lineare che soddisfa la seguente relazione di invarianza del tensore metrico, che riportiamo per semplicità

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{1.3.5}$$

Possiamo riscrivere la relazione di invarianza trasponendo una matrice[2], così da ottenere:

$$(\Lambda^T)^{\mu}{}_{\alpha} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

che in forma matriciale si scrive:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

Ora, consideriamo i determinanti:

$$\det\left(\Lambda^T \eta \Lambda\right) = \det \eta$$
$$\det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = \det \eta$$
$$(\det \Lambda)^2 = 1 \implies \det \Lambda = \pm 1$$

Abbiamo ricavato una prima proprietà delle trasformazioni di Lorentz, pertanto, definiamo *trasformazioni proprie* le matrici che hanno $\det \Lambda = 1$ e *trasformazioni improprie* quelle che hanno $\det \Lambda = -1$.
Possiamo fare un'ulteriore classificazione delle trasformazioni di Lorentz. Nella relazione (1.3.5) abbiamo gli indici μ e ν liberi, ponendoli entrambi pari a zero otteniamo:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{0} \Lambda^{\beta}{}_{0} = \eta_{00} = 1$$

[2] Nell'operazione di trasposizione si ha l'inversione di righe e colonne, quindi, per rispettare il formalismo, si deve scambiare l'indice alto, rispetto a quello basso.

sviluppando la somma su α, β e ricordando che η è diagonale, con $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, abbiamo:

$$\eta_{00}({\Lambda^0}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3} \eta_{ii}({\Lambda^i}_0)^2 = 1$$
$$\eta_{00}({\Lambda^0}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} ({\Lambda^i}_0)^2 \geq 1$$
$$\implies {\Lambda^0}_0 \geq 1 \quad \vee \quad {\Lambda^0}_0 \leq -1$$

Allora, definiamo *trasformazioni ortocrone* quelle che hanno ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ e *trasformazioni non ortocrone* quelle che hanno ${\Lambda^0}_0 \leq -1$.

Concludiamo la trattazione di questa sezione analizzando il caso di trasformazioni di Lorentz ristrette al solo caso di trasformazioni di velocità.
Dunque, consideriamo il sistema di riferimento $\mathcal{K}'$ che al tempo $t' = 0$ si trova totalmente coincidente con il sistema $\mathcal{K}$, anch'esso nell'istante $t = 0$. Il sistema di riferimento $\mathcal{K}'$ si muove con velocità costante $\vec{v}$, rispetto a $\mathcal{K}$, lungo la sola direzione x, come mostrato in Fig.2.

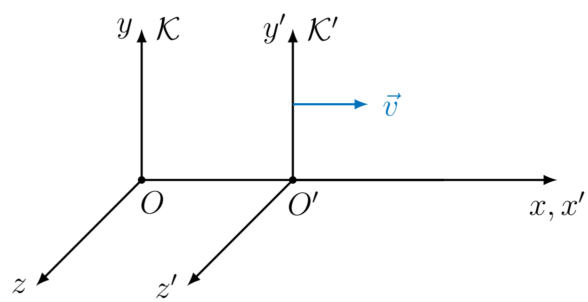

Figura 2: Sistemi di riferimento inerziali.

Come già detto più volte, le trasformazioni che collegano sistemi inerziali sono lineari e dipendenti dal modulo della velocità relativa, in virtù dell'uniformità e dell'isotropia dello spazio di Minkowski. Nel caso analizzato la forma più generale della trasformazione sarà la seguente

$$\begin{cases} x' = A(v)x + B(v)t \\ y' = E(v)y \\ z' = E(v)z \\ t' = C(v)t + D(v)x \end{cases}$$

L'origine O' si muove con una legge oraria $x = vt$, per cui per $x' = 0$ otteniamo

$$x' = A(v)x + B(v)t = 0 \implies x = -BA^{-1}t = vt \implies B = -Av$$

Sostituendo la forma di B ottenuta, il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = E(v)y \\ z' = E(v)z \\ t' = C(v)t + D(v)x \end{cases}$$

Ovviamente per $v = 0$ il sistema primato dovrà rimanere sovrapposto a quello non primato. Questo si traduce in:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

allora le funzioni dovranno assumere i valori:

$$\begin{cases} A(0) = 1 \\ E(0) = 1 \\ C(0) = 1 \\ D(0) = 0 \end{cases}$$

Imponiamo l'invarianza dell'intervallo:

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= (c^2C^2 - v^2A^2)t^2 - (A^2 - c^2D^2)x^2 - (E^2)y^2 \\ &\quad - (E^2)z^2 + 2(vA^2 + c^2CD)xt \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} c^2C^2 - v^2A^2 = c^2 \\ A^2 - c^2D^2 = 1 \\ E^2 = 1 \\ vA^2 + c^2CD = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per sostituzione e ricordando le condizioni nel regime statico $v = 0$, si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} A(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ E(v) = 1 \\ C(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ D(v) = -\dfrac{v}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Sostituendo le costanti troviamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \dfrac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Definiamo, allora, la velocità relativa normalizzata dalla velocità della luce e richiamiamo il, già citato, fattore di Lorentz:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{1.3.6}$$

Ricordiamo la trasformazione di Lorentz scritta in forma tensoriale

$$x^\mu \xrightarrow{\text{L}} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

La matrice associata alla trasformazione considerata è

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come si è mostrato anche per le trasformazioni di velocità rispetto alle altre due direzioni y e z, capiamo che i sedici elementi della matrice di trasformazione per un moto inerziale in direzione arbitraria sono:

$$\begin{gathered} \Lambda^0{}_0 = \gamma; \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\beta_i\gamma; \\ \Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}\beta_i\beta_j \qquad \forall i, j = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{1.3.7}$$

ove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Notiamo che la matrice associata a questo tipo di trasformazione sarà simmetrica, inoltre (poiché $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$) sarà una trasformazione propria e ortocrona.

1.4 Formalismo tensoriale sulla varietà di Minkowski

Siccome la nostra trattazione verterà sullo studio di sistemi dinamici nello spazio di Minkowki, risulta ragionevole definire il formalismo che utilizzeremo in funzione delle proprietà di trasformazione. Come abbiamo compreso nella sezione precedente, le trasformazioni che regolano il passaggio delle coordinate nei diversi sistemi di riferimento inerziali, sono quelle di Lorentz. Procediamo, dunque, con gli oggetti di nostro interesse.

1. *Scalare*: definiamo scalare un oggetto $\phi(x^\mu)$ che si trasforma nel modo seguente:
$$\phi(x^\mu) \xrightarrow{\mathrm{L}} \phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) \tag{1.4.1}$$
ovvero rimane costante, un esempio che abbiamo già incontrato è l'intervallo.

2. *Quadrivettore controvariante*: definiamo quadrivettore controvariante un oggetto $A^\mu(x^\alpha) = (A^0(x^\alpha), A^1(x^\alpha), A^2(x^\alpha), A^3(x^\alpha))$ che si trasforma nel modo seguente:
$$A^\mu(x^\alpha) \xrightarrow{\mathrm{L}} A'^\mu(x'^\alpha) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x^\alpha) \tag{1.4.2}$$
ovvero si trasforma con la matrice di trasformazione, un esempio è l'evento.

3. *Quadrivettore covariante*: definiamo quadrivettore covariante un oggetto $B_\mu(x^\alpha) = (B_0(x^\alpha), B_1(x^\alpha), B_2(x^\alpha), B_3(x^\alpha))$ che si trasforma nel modo seguente:
$$B_\mu(x^\alpha) \xrightarrow{\mathrm{L}} B'_\mu(x'^\alpha) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu B_\nu(x^\alpha) \equiv \Lambda_\mu{}^\nu B_\nu(x^\alpha) \tag{1.4.3}$$
ovvero si trasforma con l'inversa della matrice di trasformazione.

Possiamo generalizzare le definizioni precedenti introducendo il concetto di quadritensori.

4. *Quadritensore*: definiamo quadritensore $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p}$ di rango $n = p+q$ un oggetto composto da 4^n grandezze, che si trasforma nel modo seguente:
$$T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p} \xrightarrow{\mathrm{L}} T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\alpha_p}\Lambda_{\nu_1}{}^{\beta_1}\cdots\Lambda_{\nu_q}{}^{\beta_q}T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\cdots\beta_p} \tag{1.4.4}$$
quindi un tensore misto si trasformerà attraverso p matrici dirette e q matrici inverse.

Avremo, quindi, che uno scalare sarà un tensore di rango $(0,0)$, un quadrivettore controvariante sarà un tensore di rango $(1,0)$ e un quadrivettore covariante sarà un tensore di rango $(0,1)$.
Consideriamo il vettore controvariante $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, il corrispettivo vettore covariante è $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$, quindi sostanzialmente, in relatività ristretta, il passaggio da covariante a controvariante consiste nel cambio di segno delle tre componenti spaziali.

Possiamo, anche, dimostrare un'importante identità, considerando la definizione di matrice di trasformazione e della sua inversa:
$$\Lambda^\alpha{}_\beta\Lambda_\alpha{}^\gamma = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} = \delta^\gamma{}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ove $\delta^\gamma{}_\beta$ è la delta di Kronecker quadridimensionale ed è un tensore di rango (1,1).

1.5 Calcolo tensoriale in relatività ristretta

Una volta definiti gli oggetti, vogliamo creare un'algebra fondamentale che ci permetta di effettuare relazioni tra i tensori. Definiamo, quindi, le operazioni fondamentali:

1. *Prodotto scalare.* Consideriamo i vettori $A_\alpha = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $B^\alpha = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ e definiamo l'operazione: $A_\alpha B^\alpha = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$. Dimostriamo che il risultato è uno scalare utilizzando le definizioni di contravariante e covariante:
$$A'_\alpha B'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\nu A_\nu \Lambda^\alpha{}_\mu B^\mu = \delta^\nu{}_\mu A_\nu B^\mu = A_\mu B^\mu \tag{1.5.1}$$
quindi la quantità $A_\alpha B^\alpha$ è invariante per trasformazioni di Lorentz.

2. *Combinazione lineare.* Consideriamo tensori dello stesso rango, allora possiamo definire combinazioni che rispettano la legge: $(m, n) \oplus (m, n) = (m, n)$
$$C^\mu{}_\nu = aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu \tag{1.5.2}$$

3. *Prodotto diretto.* Consideriamo due vettori di rango qualsiasi, allora possiamo definire un'operazione che rispetta la legge: $(m, n) \otimes (m', n') = (m + m', n + n')$
$$A^\mu{}_\nu B^\delta = C^\mu{}_\nu{}^\delta \tag{1.5.3}$$

4. *Contrazione.* Consideriamo un tensore di rango generico, allora possiamo definire un'operazione che fissi un indice alto ed un indice basso. Di conseguenza il rango del tensore si trasforma $(m, n) \to (m - 1, n - 1)$
$$T^\mu{}_\nu{}^{\delta\sigma} \to T^\mu{}_\nu{}^{\delta\nu} \tag{1.5.4}$$

5. *Differenziabilità.* Considerando un campo tensoriale, quindi i tensori dipenderanno dalle coordinate, allora possiamo definire la derivata di un tensore. Il rango varierà secondo la trasformazione: $(m, n) \to (m, n + 1)$
$$T^{\beta\gamma}(x) \to \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}(x) \tag{1.5.5}$$

Vediamo come applicare le nozioni apprese fin qui. Riguardiamo la definizione di intervallo:
$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$
In tale relazione i prodotti considerati sono prodotti diretti. I tensori dx^α e dx^β sono vettori controvarianti e il loro prodotto diretto forma un tensore di rango $(2, 0)$, mentre il tensore metrico ha rango $(0, 2)$. Dovremmo concludere che ds^2 sia un tensore di rango $(2, 2)$, tuttavia a seguito di una contrazione sull'indice α ed una sull'indice β $(2, 2) \to (1, 1) \to (0, 0)$ si ottiene uno scalare.

Alla luce di ciò, possiamo definire la *norma quadra* di un vettore quadridimensionale come il prodotto scalare del vettore per il suo "reciproco in rango", ovvero:
$$A^\alpha A_\alpha = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^0 A^0 - A^1 A^1 - A^2 A^2 - A^3 A^3 = (A^0)^2 - |\vec{A}|^2$$

risulta evidente a questo punto come ds^2 sia la norma quadra di un evento. Nella trattazione successiva -solo per semplicità- con la notazione $(A^\mu)^2$ indicheremo la norma quadra di un quadrivettore.

Trattiamo, infine, l'operazione di integrazione in relatività ristretta. La varietà che si considera è quella di Minkowski, quindi la misura di integrazione dovrà essere quella di un evento infinitesimo:

$$\int d^4x = \int cdtd^3x \tag{1.5.6}$$

inoltre, la misura, dovrà essere Lorentz invariante; possiamo mostrarlo rapidamente.
Considerando una trasformazione di Lorentz, avremo che, per il teorema del cambiamento di variabile, la misura si trasforma secondo:

$$x^\alpha \xrightarrow{\mathrm{T}} x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \qquad d^4x \xrightarrow{\mathrm{T}} d^4x' = |J(x)|d^4x$$

ove $J(x) = det\{\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\} = det\Lambda^\alpha{}_\beta$ è il determinate dello jacobiano associato alla trasformazione, sappiamo che le trasformazioni di Lorentz possono essere proprie o improprie, quindi la conservazione dei volumi è garantita.
Consideriamo la lunghezza di una traiettoria Γ nello spazio di Minkowski una volta fissato un tempo iniziale t_i e un tempo finale t_f:

$$L(t_f - t_i) = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$$

ovviamente l'integrale dipende dal percorso Γ, quindi da come l'oggetto si muove spaziotemporalmente. Se fossimo in $\mathbb{R}^3$ l'integrale della congiungente sarebbe minimo, al contrario, poiché siamo in uno spazio con una geometria non euclidea, l'integrale, lungo una retta, è massimo. Infatti, se consideriamo una particella a riposo il termine sotto radice è 1, mentre se la particella fosse in movimento il termine sotto radice sarebbe minore di 1, quindi complessivamente l'integrando sarebbe minore di c.

Concludiamo la sezione corrente con un'importante riflessione sul ruolo di questo formalismo nella teoria della relatività ristretta.
Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, come in Fig.2, ed ipotizziamo che in $\mathcal{K}$ sia vera l'equazione tensoriale:

$$T^\alpha{}_\beta = S^\alpha{}_\beta$$

allora potremo riscrivere per il sistema $\mathcal{K}'$

$$T'^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda_\beta{}^\nu T^\mu{}_\nu = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda_\beta{}^\nu S^\mu{}_\nu = S'^\alpha{}_\beta$$

concludiamo che, se siamo in grado di scrivere leggi fisiche in formalismo tensoriale, sappiamo, per costruzione, che queste saranno invarianti in forma per tutti i sistemi di riferimento inerziali. La convenienza di questo formalismo risiede proprio in questa proprietà: il formalismo tensoriale, così introdotto, soddisfa in maniera del tutto naturale il primo postulato della relatività.

2 Studio Analitico della Meccanica Relativistica

2.1 Fondamenti di meccanica relativistica

Consideriamo un sistema fisico che si muove spaziotemporalmente nella varietà minkowskiana, ad esso sarà associabile una traiettoria, detta linea di universo. In completa analogia con la meccanica classica risulta possibile parametrizzare la traiettoria di eventi x^μ. Sappiamo che nella teoria classica per parametrizzare le traiettorie si utilizza il tempo; questo perché il tempo risulta essere un parametro invariante per trasformazioni di Galilei, fornendo -di conseguenza- leggi covarianti rispetto alle medesime trasformazioni. In relatività ristretta, tuttavia, le trasformazioni di riferimento sono quelle di Lorentz e il tempo non è uno scalare lorentziano.
In generale non ci sono restrizioni sulla parametrizzazione da usare, ciononostante è necessario ricordare che se si utilizza una parametrizzazione non scalare, le relazioni derivati da essa non saranno manifestamente covarianti. Quindi, possiamo introdurre una generica parametrizzazione ξ tra le infinite possibili:

$$x^\mu = x^\mu(\xi) \tag{2.1.1}$$

Ora, ci chiediamo come sia possibile parametrizzare la traiettoria x^μ mantenendo, in maniera esplicita, la covarianza per trasformazioni di Lorentz. Il primo problema consiste nell'individuare un parametro scalare in senso lorentziano; l'unica quantità invariante e cinematicamente rilevante che abbiamo introdotto è l'intervallo s^2. Risulta, quindi, naturale assumere s come parametro, il quale rappresenta il cammino spaziotemporale di riferimento o, più semplicemente, il cammino proprio:

$$x^\mu = x^\mu(s) \tag{2.1.2}$$

Ricordando la definizione di intervallo (1.2.2) possiamo trovare la relazione che collega la parametrizzazione del cammino proprio con una parametrizzazione generica

$$ds = (dx_\mu dx^\mu)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dx_\mu}{d\xi}\frac{dx^\mu}{d\xi}d\xi^2\right)^{\frac{1}{2}} = (v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} d\xi \tag{2.1.3}$$

ove v^μ è la velocità parametrica definita come la derivata dell'evento nel parametro:

$$v^\mu(\xi) = \frac{dx^\mu}{d\xi} \tag{2.1.4}$$

Alcune quantità fisiche fondamentali nello studio meccanico non sono tensori, come per esempio la velocità e l'accelerazione. Pertanto, per avere delle grandezze covarianti, introdurremo quantità tensoriali che le rappresentino esaustivamente.
Fissiamo la parametrizzazione del cammino proprio e definiamo il *quadrivettore velocità* come la derivata di un quadrivettore posizione nell'elemento parametrico infinitesimo[3]:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{2.1.5}$$

[3]Notiamo che la grandezza che ne risulta è adimensionale, ciononostante continueremo a chiamarla velocità.

Siccome l'evento infinitesimo è un quadrivettore e l'intervallo infinitesimo è uno scalare, si ha -per costruzione- che la quantità risultante è un quadrivettore. Dalla definizione di tempo proprio (1.2.5) possiamo ottenere:

$$ds = cdt' = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = c\frac{dt}{\gamma}$$

Sostituendo l'equazione precedente[4] nella definizione di quadrivelocità e considerando la definizione di evento, otteniamo le componenti del nuovo tensore

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{\nu}}{c}\right)$$

ove $\vec{\nu}(t)$ è la velocità ordinaria. Inoltre, la quadrivelocità è un vettore di genere tempo, infatti ha norma unitaria, mostriamolo brevemente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ij}dx^i dx^j \\ 1 = \frac{ds^2}{ds^2} &= \eta_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \\ 1 = \eta_{ij}u^i u^j &= u_j u^j \end{aligned}$$

A questo punto possiamo definire il *quadrivettore accelerazione* come la derivata, in ds, della quadrivelocità:

$$\omega^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} \tag{2.1.6}$$

Per determinare le componenti della quadriaccelerazione è sufficiente conoscere la formula per le derivate composte, difatti:

$$\omega^0 = \frac{du^0}{ds} = \frac{\gamma}{c}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{\vec{\nu}\frac{d\vec{\nu}}{dt}}{c^2\left(1-\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma^4}{c^3}\vec{\nu}\vec{a}$$

$$\omega^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{\gamma}{c^2}\frac{d(\gamma\nu^i)}{dt} = \frac{\gamma}{c^2}\left[\gamma\frac{d\nu^i}{dt} + \frac{\vec{\nu}\frac{d\vec{\nu}}{dt}}{c^2\left(1-\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\nu^i\right] = \frac{\gamma^2}{c^2}\left[a^i + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{\nu}\vec{a})\nu^i\right]$$

ove $\vec{a}(t)$ è l'accelerazione conosciuta dalla teoria classica.
È possibile mostrare come -nello spazio quadridimensionale di Minkowsky- la quadrivelocità sia ortogonale alla quadriaccelerazione. Per farlo partiamo dal risultato ottenuto precedentemente riguardo la norma della quadrivelocità e deriviamo per ds:

$$\begin{aligned} u_i u^i &= 1 \\ \frac{du_i}{ds}u^i &= 0 \\ \omega_i u^i &= 0 \end{aligned}$$

[4] Osserviamo come la medesima relazione si possa ottenere dalla (2.1.3) usando come parametrizzazione alternativa $\xi = ct$. Anticipiamo che tale metodologia sarà usata successivamente, mentre qui è stata preferita questa per completezza.

poiché il prodotto scalare è nullo, concludiamo che sono ortogonali.
Dimostriamo anche che la quadriaccelerazione è un vettore di genere spazio, ossia che $\omega_\alpha \omega^\alpha < 0$. Dall'ortogonalità, appena mostrata, so che:

$$\omega_i u^i = 0$$
$$\omega^0 u^0 - \vec{\omega}\vec{u} = 0 \implies \omega^0 = \frac{\vec{\omega}\vec{u}}{u^0}$$

sostituiamo ω^0 nella norma di ω^α:

$$\omega_j \omega^j = (\omega^0)^2 - |\vec{\omega}|^2 = \left(\frac{\vec{\omega}\vec{u}}{u^0}\right)^2 - |\vec{\omega}|^2$$
$$\omega_j \omega^j = \left(\frac{\vec{\omega}\vec{u}}{u^0}\right)^2 - |\vec{\omega}|^2 = \frac{|\vec{\omega}|^2 |\vec{u}|^2 \cos^2\theta}{(u^0)^2} - |\vec{\omega}|^2$$
$$\omega_j \omega^j = -\frac{|\vec{\omega}|^2}{(u^0)^2}\left[(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 \cos^2\theta\right] < 0$$

La disuguaglianza finale deriva, banalmente, dal fatto che $u_j u^j = (u^0)^2 - (\vec{u})^2 = 1$, mentre θ è l'angolo compreso tra i vettori costituiti dalle componenti spaziali.

2.2 Principio di minima azione

Sappiamo che la meccanica classica è formulabile a partire da un principio di minima azione. Ci chiediamo se da una versione rielaborata del principio possa discendere la meccanica relativistica. Sappiamo che lo stato meccanico di ogni sistema è determinato dalle coordinate e dalle velocità che lo caratterizzano. Ipotizziamo, dunque, che ad ogni sistema meccanico sia associabile una funzione, detta di Lagrange (o *Lagrangiana*), che rappresenti il sistema. La Lagrangiana -per assolvere alla sua funzione- dovrà dipendere dalle coordinate e dalle velocità, che in questo contesto saranno gli eventi e le quadrivelocità. Inoltre, poiché la Lagrangiana deve rappresentare matematicamente il sistema, essa dovrà essere la medesima per tutti i sistemi di riferimento inerziali, quindi -per rispettare il primo postulato della relatività- sarà uno scalare.
Concludiamo che la Lagrangiana avrà una dipendenza del tipo:

$$L\left(x^\mu(s), u^\mu(s), s\right)$$

in questo modo abbiamo esplicitato la parametrizzazione s del cammino proprio, rendendo manifesta la covarianza della Lagrangiana. Tuttavia, tale parametrizzazione risulta problematica al fine dello studio analitico. La problematicità deriva dal fatto che la definizione stessa di intervallo (1.2.2) è dipendente dalle coordinate x^μ. Inoltre, come abbiamo visto nella sezione precedente, tale dipendenza si traduce nel vincolo di unitarietà della norma della quadrivelocità.
Procediamo, dunque, con un cambio di parametrizzazione:

$$s \to \xi \implies x^\mu(s) \to x^\mu(\xi)$$

Possiamo riscrivere la dipendenza della Lagrangiana nella nuova parametrizzazione:

$$L\left(x^\mu(\xi), v^\mu(\xi), \xi\right)$$

Poiché costruita a partire da uno scalare la Lagrangiana sarà covariante, tuttavia a seconda della parametrizzazione ξ scelta, la funzione potrà essere manifestamente covariante o meno.
A questo punto è possibile definire una grandezza, che chiameremo *azione*, come:

$$S = \int L\left(x^\mu(\xi), v^\mu(\xi), \xi\right) d\xi \tag{2.2.1}$$

richiediamo che l'azione sia invariante per riparametrizzazioni

$$\xi \to \xi'(\xi) \implies \int L\left(x^\mu(\xi), v^\mu(\xi), \xi\right) d\xi = \int L\left(x^\mu(\xi'), v^\mu(\xi'), \xi'\right) d\xi'$$

Ora abbiamo tutti i concetti necessari per enunciare il *principio di minima azione* o principio di Hamilton.

Ad ogni sistema meccanico è associabile un'azione -definita secondo la (2.2.1)- il cui valore, corrispondente ad una porzione infinitesima della traiettoria di integrazione, deve essere il minimo possibile. Affinché l'azione sia minima è necessario che la sua variazione si annulli, ovvero $\delta S = 0$.

2.3 Equazioni del moto e momento canonico

In questa sezione vogliamo ricavare le equazioni differenziali che permettono di determinare il minimo dell'azione (2.2.1). Dal principio di minima azione possiamo scrivere

$$\delta S = \delta \int_{A^\mu}^{B^\mu} L\left(x^\mu(\xi), v^\mu(\xi), \xi\right) d\xi = 0 \tag{2.3.1}$$

ove A^μ e B^μ sono gli eventi che sanciscono gli estremi della traiettoria. Inoltre, imponiamo che le variazioni delle coordinate δx^μ siano date fissata un parametrizzazione ξ e nulle agli estremi A^μ e B^μ.
Considerando le dipendenze della Lagrangiana avremo che la variazione di S al primo ordine è data da:

$$\delta S = \int_{A^\mu}^{B^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \delta v^\mu \right) d\xi = 0 \tag{2.3.2}$$

Ricordando la definizione di velocità parametrica (2.1.4), possiamo scrivere

$$\int_{A^\mu}^{B^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \frac{d}{d\xi} (\delta x^\mu) \right) d\xi = 0$$

A questo punto integriamo per parti il secondo termine

$$\int_{A^\mu}^{B^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) \delta x^\mu d\xi + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \delta x^\mu \Big|_{A^\mu}^{B\mu} = 0$$

l'ultimo termine della relazione precedente risulta nullo dalla condizione imposta sulle variazioni negli estremi di integrazione. Pertanto, rimane:

$$\int_{A^\mu}^{B^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) \delta x^\mu d\xi = 0$$

Poiché le variazioni δx^μ sono arbitrarie si deve avere che la funzione integranda sia identicamente nulla. In questo modo abbiamo ottenuto le *equazioni covarianti di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = 0 \tag{2.3.3}$$

Risolvendo queste equazioni si ricava la linea di universo $x^\mu(\xi)$ del sistema meccanico.

Inoltre possiamo definire il *momento canonico covariante* come la derivata della Lagrangiana rispetto alla velocità v^μ

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial v_\mu} \tag{2.3.4}$$

più avanti scopriremo che tale oggetto risulta estremamente importante per i sistemi dinamici.

2.4 Particella libera

Vogliamo applicare le conoscenze fin qui apprese per lo studio di un semplice sistema: la particella libera.
La prima questione da affrontare è determinare una forma per l'azione. Per farlo, ripercorriamo le condizioni di costruzione per la Lagrangiana, già enunciate nella sezione § 2.2, le quali vengono ereditate dall'azione. Imponiamo che la dinamica del sistema in questione rispetti la prescrizione data dal primo postulato della relatività, ossia che la forma dell'azione associata al sistema sia la stessa per tutti i sistemi inerziali, da qui deduciamo che l'azione -rispettando la sua definizione- dovrà essere una forma integrale di scalari. Per cui sotto il segno di integrale dovranno esserci differenziali di primo ordine, in generale, definiti a meno di una costante. In favore di un criterio di semplicità scegliamo la parametrizzazione data dal cammino proprio, per cui avremo che il differenziale in questione sarà ds, ottenendo:

$$S = \alpha \int ds \tag{2.4.1}$$

ove α è una costante che caratterizza la particella. Ora, volendo essere più generici, possiamo definire l'azione per un'arbitraria parametrizzazione ξ, allora la misura di integrazione deve essere modificata secondo la (2.1.3), ottenendo:

$$S = \alpha \int (v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} d\xi = \alpha \int \left((v^0)^2 - |\vec{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \tag{2.4.2}$$

Dalla (2.2.1) comprendiamo che la Lagrangiana associata al sistema sarà della forma

$$L = \alpha (v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} = \alpha \left((v^0)^2 - |\vec{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.3}$$

Giunti a questo punto dobbiamo determinare la costante che caratterizza la nostra particella, per farlo individuiamo una parametrizzazione conveniente. Scegliamo $\xi = ct$, ossia lo spazio percorso da un raggio luminoso rispetto a un osservatore che non è solidale con la particella libera. Notiamo che la parametrizzazione scelta non è uno scalare lorenziano, a causa del termine di tempo che compare. Tuttavia, nella (2.1.3), il termine $(v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}}$ ci garantisce l'uguaglianza con il cammino proprio, che sappiamo essere invariante. Possiamo quindi ricavare le componenti della velocità parametrica mediante le loro definizioni:

$$v^0 = \frac{dx^0}{d\xi} = \frac{cdt}{cdt} = 1$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\xi} = \frac{d\vec{x}}{cdt} = \frac{\vec{\nu}}{c}$$

ove $\vec{\nu}(t)$ è la velocità della particella misurata dall'osservatore. Sostituendo le relazioni appena trovate ed esplicitando la parametrizzazione scelta nella (2.4.2), otteniamo:

$$S = \alpha \int \left[(1)^2 - \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} cdt = \alpha c \int \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt \tag{2.4.4}$$

Notiamo che l'integrale appena trovato era ottenibile considerando la definizione di tempo proprio (1.2.5) e sostituendo $ds = cdt'$. La ragione per cui si è scelta una trattazione differente è la maggiore aderenza con la formulazione tensoriale della teoria. Dall'equazione precedente estraiamo la Lagrangiana seguente

$$L = \alpha c \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.5}$$

A questo punto dobbiamo porre l'attenzione su un fatto importante. Il superamento della teoria della relatività rispetto alla meccanica classica risiede nel aver dato predizioni esatte sulla fenomenologia ad alte velocità, tuttavia la meccanica classica in un regime di basse velocità fornisce previsioni adeguate. Dunque la teoria della relatività ristretta deve essere concorde con la teoria classica, nel regime di validità di quest'ultima. Il regime di validità della teoria classica è individuato dalla condizione $\nu << c$, che si traduce nel limite per $c \to \infty$. Tale limite ci consente di approssimare la Lagrangiana (2.4.5) attraverso uno sviluppo in serie di potenze nel quale consideriamo i termini di ordine v/c e trascuriamo quelli di ordine superiore, ottenendo:

$$L \approx \alpha c \left(1 - \frac{\nu^2}{2c^2}\right) \tag{2.4.6}$$

Dalla meccanica analitica classica sappiamo che, ai fini della descrizione dinamica dei sistemi, i termini costanti non contribuiscono alle equazioni del moto[5], per cui possiamo ometterlo dalla Lagrangiana:

$$L \approx -\alpha \frac{\nu^2}{2c} \tag{2.4.7}$$

Inoltre, dallo studio della meccanica analitica classica, ricordiamo la Lagrangiana per la particella libera:

$$L_C = \frac{1}{2} m \nu^2 \tag{2.4.8}$$

Confrontando la (2.4.7) con la (2.4.8) -in virtù di un principio di coerenza tra le teorie- otteniamo il valore della costante α

$$-\alpha \frac{\nu^2}{2c} = \frac{1}{2} m \nu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -mc$$

come potevamo aspettarci la grandezza che caratterizza un punto materiale è la sua massa.
Sostituendo il valore della costante α nella (2.4.3) otteniamo la Lagrangiana in forma covariante

$$L = -mc(v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.9}$$

Tuttavia al fine di determinare le equazioni del moto il segno risulta ininfluente[6], per cui ridefiniamo la Lagrangiana nel modo seguente

$$L = mc(v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.10}$$

[5]Matematicamente diciamo che i termini costanti appartengono al kernel dell'operatore di Eulero-Lagrange.
[6]Ciò è dovuto alla linearità dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Possiamo ottenere le equazioni del moto usando la (2.3.3) sulla Lagrangiana appena trovata

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} = 0 \implies -\frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} = 0 \implies \frac{d}{d\xi}\frac{\partial[mc(v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}}]}{\partial v^\mu} = 0 \\ \frac{d}{d\xi}\left[\frac{mcv_\mu}{(v_\alpha v^\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0\end{gathered} \tag{2.4.11}$$

abbiamo, così, ottenuto l'equazione differenziale che -indipendentemente dalla parametrizzazione considerata- rappresenta il moto spaziotemporale della particella libera.
Usando la parametrizzazione del cammino proprio $\xi = s$, otteniamo:

$$\frac{v_\mu}{(v_\alpha v^\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\dfrac{dx_\mu}{ds}}{\left(\dfrac{dx_\alpha}{ds}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u_\mu}{u_\alpha u^\alpha} = u_\mu$$

ove, nell'ultimo passaggio, si è usato il vincolo di norma unitaria della quadrivelocità.
Quindi la (2.4.11) diventa:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = 0 \tag{2.4.12}$$

tale relazione mostra come la particella libera avrà una quadrivelocità costante nello spazio di Minkowski.
A scopo di esercizio, possiamo ripercorrere i passaggi appena espressi considerando la parametrizzazione $\xi = ct$, quindi la (2.4.11) diventa:

$$\begin{gathered}\frac{d}{cdt}\left[\frac{mc\nu_\mu}{(\nu_\alpha \nu^\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \implies \frac{d}{dt}\left[\frac{m\nu_\mu}{\left(1 - \dfrac{\nu^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \\ m\frac{d}{dt}\left[\gamma\nu_\mu\right] = 0\end{gathered}$$

sviluppiamo la derivata del prodotto:

$$m\left[\frac{\gamma^3}{c^2}(\vec{\nu}\vec{a})\nu_\mu + \gamma\frac{d\nu_\mu}{dt}\right] = 0$$

a questo punto dividiamo la relazione quadrivettoriale nella sua componente temporale e nelle sue componenti spaziali

$$\begin{cases} m\left[\dfrac{\gamma^3}{c^2}(\vec{\nu}\vec{a}) + \gamma\dfrac{d1}{dt}\right] = 0 \\ m\left[\dfrac{\gamma^3}{c^2}(\vec{\nu}\vec{a})\dfrac{\vec{\nu}}{c} + \gamma\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\nu}}{c}\right)\right] = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m\dfrac{\gamma^3}{c^2}\vec{\nu}\vec{a} = 0 \\ m\gamma\dfrac{d\vec{\nu}}{cdt} = 0 \end{cases}$$

come potevamo aspettarci l'accelerazione, classicamente intesa $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{\nu}(t)}{dt}$, della particella libera è nulla.

Ricordando la definizione di quadrivelocità (2.1.5) e sostituendola nell'equazione del moto covariante (2.4.12), si ottiene:

$$mc\frac{d^2x_\mu}{ds^2} = 0 \tag{2.4.13}$$

Concludiamo facendo notare la lampante analogia tra l'equazione del moto trovata e quella classica, derivante dal secondo principio della dinamica:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 0 \tag{2.4.14}$$

al netto dei diversi oggetti matematici di cui le due teorie si servono, risulta evidente come la formalizzazione -quindi la rappresentazione matematica- sia simile.

2.5 Teorema di Noether

In questa sezione affronteremo un risultato di grande importanza nello studio analitico della meccanica: il *teorema di Noether*. L'enunciato del teorema afferma che: data una simmetria del sistema (ossia una trasformazione delle coordinate x^μ che mantiene invariata la Lagrangiana), allora esiste una quantità -detta carica di Noether- la quale è conservata a seguito della trasformazione.
Dimostriamolo brevemente.
Fissiamo una parametrizzazione ξ e definiamo una trasformazione infinitesima delle coordinate x^μ:

$$x^\mu(\xi) \xrightarrow{T} x'^\mu(\xi) = x^\mu(\xi) + \delta x^\mu(\xi) \tag{2.5.1}$$

Considerando le dipendenze della Lagrangiana $L\left(x^\mu(\xi), v^\mu(\xi), \xi\right)$ possiamo scrivere la variazione di quest'ultima dovuta alla trasformazione:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu}\delta v^\mu \tag{2.5.2}$$

Considerando la definizione di velocità parametrica (2.1.4), possiamo scrivere:

$$\delta v^\mu = \frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi} \tag{2.5.3}$$

mentre considerando le equazioni di Eulero-Lagrange (2.3.3), otteniamo:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} \tag{2.5.4}$$

Applicando le sostituzioni (2.5.3) e (2.5.4) nella (2.5.2), otteniamo:

$$\delta L = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right)\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\delta x^\mu\right) \tag{2.5.5}$$

ove nell'ultimo passaggio si è riconosciuta la derivata di un prodotto.
Ora, imponiamo che la trasformazione sia una simmetria per il sistema, ciò si traduce nell'invarianza della Lagrangiana e dunque $\delta L = 0$. La relazione precedente diventa:

$$\delta L = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\delta x^\mu\right) = 0 \tag{2.5.6}$$

Abbiamo, dunque, ottenuto la legge di conservazione:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\delta x^\mu\right) = 0 \tag{2.5.7}$$

Nel caso particolare in cui la variazione δx^μ sia una costante arbitraria, si ha che la costante del moto è:

$$Q_\mu = \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \tag{2.5.8}$$

Ricordando la (2.3.4) capiamo che, in questo caso specifico, la quantità conservata coincide con il momento canonico covariante.

2.6 Quadrimomento

Applichiamo il teorema di Noether per traslazioni al caso della particella libera, con il fine di trovare una quantità che sia conservata. Fissata una parametrizzazione, consideriamo la trasformazione infinitesima di traslazione spaziotemporale

$$x^\mu(\xi) \xrightarrow{T} x'^\mu(\xi) = x^\mu(\xi) + \epsilon^\mu \tag{2.6.1}$$

ove ϵ^μ è un quadrivettore costante infinitesimo.
Mostriamo che la Lagrangiana della particella libera (2.4.10) risulta invariante per traslazioni:

$$\begin{aligned} L' &= mc(v'_\mu v'^\mu)^{\frac{1}{2}} = mc\left(\frac{dx'_\mu}{d\xi}\frac{dx'^\mu}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} = mc\left(\frac{d(x_\mu+\epsilon_\mu)}{d\xi}\frac{d(x^\mu+\epsilon^\mu)}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= mc\left(\frac{d(x_\mu)}{d\xi}\frac{d(x^\mu)}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} = mc(v_\mu v^\mu)^{\frac{1}{2}} = L \end{aligned}$$

dunque abbiamo una simmetria.
Dall'enunciato del teorema di Noether sappiamo che tale simmetria comporta necessariamente la conservazione della quantità (2.5.8). Tuttavia, notiamo che tale quantità dipende dalla parametrizzazione usata. Consideriamo il cammino proprio $\xi = s$, sappiamo che in tale parametrizzazione si ha $v^\mu = u^\mu$, per cui otteniamo:

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial v_\mu} = mc\frac{d\left[(u_\mu u^\mu)^{\frac{1}{2}}\right]}{du_\mu} = mc\frac{u^\mu}{(u_\alpha u^\alpha)^{\frac{1}{2}}} = mcu^\mu \tag{2.6.2}$$

Il quadrivettore trovato è detto *quadrimomento* per ragioni che si capiranno a breve. Studiamone le componenti:

$$\begin{cases} P^0 = mcu^0 = mc\gamma \\ \vec{P} = mc\vec{u} = m\gamma\vec{\nu} \end{cases} \tag{2.6.3}$$

A questo punto manipoliamo i risultati ottenuti per le componenti al fine di comprendere di che grandezze si tratta. Partiamo dalle componenti spaziali:

$$\vec{P} = m\gamma\vec{\nu} = \frac{m\vec{\nu}}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}\frac{2\vec{\nu}}{c^2} \tag{2.6.4}$$

Scritto in questa forma si può notare come il vettore ottenuto sia pari alla derivata della Lagrangiana (2.4.5) rispetto alla velocità della particella misurata da un osservatore esterno

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\nu}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}\frac{2\vec{\nu}}{c^2} = m\gamma\vec{\nu} = \vec{P} \tag{2.6.5}$$

Dalla meccanica classica è noto che la quantità $\partial L/\partial\vec{\nu}$ determina l'impulso. Risulta pertanto naturale concludere che quello appena trovato è l'impulso nel contesto relativistico.

Passiamo alla componente temporale:

$$\begin{aligned}P^0 = mc\gamma = \frac{\gamma}{c}[mc^2 + m\nu^2 - m\nu^2] = \frac{\gamma}{c}\left[mc^2(1-\frac{\nu^2}{c^2}) + m\nu^2\right] \\ = \frac{\gamma}{c}\left[\frac{mc^2}{\gamma^2} + m\nu^2\right] = \frac{1}{c}\left[m\gamma\nu^2 + \frac{mc^2}{\gamma}\right] = \frac{1}{c}[\vec{P}\vec{\nu} - L] = \frac{E}{c}\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Abbiamo trovato che la componente temporale è legata all'energia. Siccome la teoria della relatività punta ad una trattazione coerente e coesa di spazio e tempo, non è così inaspettato scoprire che la quantità conservata per traslazioni spaziotemporali è un quadrivettore le cui componenti sono le quantità che già classicamente si conservavano per le simmetrie corrispondenti.

Possiamo, inoltre, notare un vincolo sul quadrimomento dovuto all'identità $u_\mu u^\mu = 1$

$$P_\mu P^\mu = (P^0)^2 - |\vec{P}|^2 = (mcu^0)^2 - |mc\vec{u}|^2 = m^2c^2[(u^0)^2 - |\vec{u}|^2] = m^2c^2 \tag{2.6.7}$$

tale quantità è -per costruzione- uno scalare, quindi invariante per trasformazioni di Lorentz e viene detta *massa invariante* della particella. Consideriamo, ora, lo stesso prodotto scalare, ma considerando le componenti non dipendenti dalla quadrivelocità

$$P_\mu P^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |m\gamma\vec{\nu}|^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{\nu^2}{c^2}} - \frac{m^2\nu^2}{1-\frac{\nu^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2\left(1-\frac{\nu^2}{c^2}\right)}{1-\frac{\nu^2}{c^2}} = m^2c^2 \tag{2.6.8}$$

notiamo che il vincolo rimane. Questo ci porta a una conclusione importante: il vincolo $u_\mu u^\mu = 1$ è dovuto alla scelta di s come parametrizzazione (dunque può essere rimosso), mentre il vincolo $P_\mu P^\mu = m^2c^2$ ha un'origine fisicamente più profonda; esso deriva dalla interdipendenza presente tra il momento, la massa e l'energia. Tale dipendenza si manifesta in tutta la sua importanza nella *relazione energia-impulso*, ottenibile a partire dalla precedente:

$$E^2 = m^2c^4 + P^2c^2 \tag{2.6.9}$$

Un esempio esplicito di questo avviene se consideriamo una particella di massa nulla. Infatti, la relazione

$$P^\mu = mcu^\mu$$

perde significato, ciò nonostante possiamo comunque introdurre un quadrimpulso associato alla particella senza massa a partire dal vincolo di massa invariante:

$$P_\mu P^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{P}|^2 = 0 \implies E = c|\vec{P}| \tag{2.6.10}$$

quindi il quadrimomento associato avrà componenti

$$P^\mu = (|\vec{P}|, \vec{P})$$

Concludiamo osservando che il genere del quadrimomento sarà, rispettivamente, di tipo tempo o luce a seconda che la particella sia dotata o meno di massa.

3 Urti in Regime Relativistico

3.1 Caratterizzazione dei processi d'urto

I processi d'urto si configurano come fenomeni nei quali si ha -nello stato iniziale- un avvicinamento degli oggetti urtanti e -nello stato finale- un allontanamento. Tali oggetti sono, dunque, sottoposti a cambi di velocità, di traiettoria ed -eventualmente- a mutamenti della loro natura. La fenomenologia degli urti è sempre determinata da un'interazione, dalla natura di quest'ultima possiamo distinguere gli urti di contatto da quelli di diffusione. L'interazione dei primi discende dalla proprietà di incompenetrabilità dei corpi, mentre per i secondi è dovuta da un'azione a distanza; basti pensare all'avvicinamento di due calamite nel verso di poli uguali. Nelle prossime pagine, tuttavia, non studieremo la descrizione del processo dinamico d'interazione. Ciononostante, ipotizzando un'assenza di interazione prima e dopo l'urto, ci concentreremo nel fare una trattazione di carattere cinematico. Da un punto di vista teorico, lo studio cinematico, è possibile in virtù di un'ipotesi di conservazione del quadrimomento, la quale risulta verificata sperimentalmente. Queste considerazioni possono essere riassunte affermando che i processi d'urto si verificano in una regione spaziotemporale limitata, così da consentirci lo studio cinematico dello stato iniziale e dello stato finale. Più formalmente, si dice che lo stato iniziale e finale sono asintotici ($t_i = -\infty$ per quello iniziale e $t_f = \infty$ per quello finale), vale a dire che gli oggetti sono sufficientemente lontani -in entrambi gli stati- da rendere le reciproche interazioni trascurabili. Perciò, di fatto, negli stati asintotici gli oggetti procederanno in moto libero.

A seconda degli oggetti presenti nel sistema nello stato iniziale e finale, possiamo fare una classificazione degli urti:

1. *Elastici*: definiamo urto elastico un processo nel quale gli oggetti nello stato iniziale sono gli stessi dello stato finale, ovvero la natura degli oggetti è conservata, dunque differiscono solo per lo stato di moto.

2. *Anelastici*: definiamo urto anelastico un processo nel quale il numero di oggetti o, equivalentemente, la natura degli oggetti non è conservata fra lo stato iniziale e finale.

È, inoltre, possibile un'ulteriore caratterizzazione dei processi d'urto basata sulla conoscenza sperimentale del fenomeno:

1. *Esclusivo*: definiamo urto esclusivo un fenomeno di cui si conosce la totalità dei prodotti, ovvero gli oggetti nello stato finale.

2. *Seminclusivo*: definiamo urto seminclusivo un fenomeno di cui si rileva solo una parte dei prodotti.

3. *Totalmente inclusivo*: definiamo urto totalmente inclusivo un fenomeno di cui non si rileva alcun prodotto.

Ora, consideriamo il caso -sperimentalmente rilevante- nel quale l'urto di due particelle genera la produzione di $N-2$ particelle:

$$1 + 2 \to 3 + \cdots + N$$

In generale, la massa delle N particelle può essere varia, quindi la indicheremo con $m_{(i)}$, ove l'indice individua la particella corrispondente.
Dall'ipotesi di conservazione del quadrimpulso otteniamo la relazione:

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + \cdots + P_N^\mu \tag{3.1.1}$$

dividendo quest'ultima nelle sue componenti temporali e spaziali otteniamo le relazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = E_3 + \cdots + E_N \\ \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3 + \cdots + \vec{P}_N \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Come già detto, il moto delle particelle nello stato iniziale e finale sarà asintoticamente libero, pertanto -come appreso nella sezione precedente- ogni particella dovrà soddisfare il vincolo dato dalla massa invariante (2.6.8):

$$P_{\mu(i)} P^\mu_{(i)} = m^2_{(i)} c^2 \qquad \forall i = 1, \cdots, N \tag{3.1.3}$$

Riassumendo: avremo $4N$ parametri con N vincoli, dati dalle masse invarianti, e 4 vincoli dati dalla (3.1.1). In tutto avremo $4N - (N+4) = 3N - 4$ parametri liberi. Questi sono i vincoli dovuti alle leggi cinematiche, tuttavia per completare la trattazione dobbiamo considerare un sistema di riferimento nel quale effettuare lo studio del sistema. Fissare il sistema di riferimento[7] significa, di fatto, imporre 3 vincoli sugli angoli di rotazione e 3 vincoli sulla velocità inerziale, per un totale di 6. In conclusione, avremo $(3N - 4) - 6 = 3N - 10$ parametri indipendenti. La procedura sperimentale, in particolare la preparazione delle particelle nello stato iniziale, fisserà alcuni di questi parametri, quindi saranno conosciuti.

[7] L'arbitrarietà nel fissare il sistema di riferimento discende dall'ipotesi che le particelle non abbiano proprietà caratterizzate da direzioni privilegiate.

3.2 Invarianti cinematici

Come detto nella sezione precedente, lo studio teorico degli urti è possibile mediante un approccio cinematico. Per una trattazione covariante degli urti risulta efficace introdurre degli invarianti cinematici, ossia quantità che -create a partire dai quadrimomenti delle particelle- siano scalari.

Massa invariante

Il primo invariante che possiamo considerare lo abbiamo già definito nella sezione § 2.6, ovvero la massa invariante (2.6.8).
Possiamo generalizzare quanto detto in tale occasione per una particella, a un sistema asintotico di N particelle, del tipo:

$$1 + 2 \to 3 + \cdots + N$$

Per la conservazione del quadrimomento (3.1.1) avremo che anche la massa invariante sarà conservata, pertanto possiamo scrivere:

$$M^2c^2 = \left(P_1^\mu + P_2^\mu\right)^2 = \left(P_3^\mu + \cdots + P_N^\mu\right)^2 \tag{3.2.1}$$

Comprendiamo, quindi che la quantità Mc^2 sarà l'energia che necessariamente dovrà rimanere sotto forma di massa nel corso del processo d'urto.
Sviluppiamo la norma quadra per la relazione dello stato finale

$$\begin{aligned} M^2c^2 &= (P_3^\mu + \cdots + P_N^\mu)^2 = \sum_{i=3}^{N} P_{i\mu}P_i^\mu + 2\sum_{i=3}^{N}\sum_{j>3}^{N} P_{i\mu}P_j^\mu \\ &= \sum_{i=3}^{N} m_i^2c^2 + 2\sum_{i=3}^{N}\sum_{j>3}^{N} P_{i\mu}P_j^\mu \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

concentriamoci sui termini di doppio prodotto

$$P_{i\mu}P_j^\mu = \frac{E_iE_j}{c^2} - \vec{P}_i\vec{P}_j \geq \frac{E_iE_j}{c^2} - |\vec{P}_i||\vec{P}_j| = \frac{E_iE_j}{c^2} - \frac{1}{c^2}\sqrt{E_i^2 - m_i^2c^4}\sqrt{E_j^2 - m_j^2c^4} \tag{3.2.3}$$

Ora, partendo dalla disequazione $(E_im_j - E_jm_i)^2 \geq 0$ -certamente vera- vogliamo trovare una maggiorazione che ci aiuti a stimare più semplicemente la (3.2.3).

$$\begin{gathered} (E_im_j - E_jm_i)^2 = E_i^2m_j^2 - 2E_im_jE_jm_i + E_j^2m_i^2 \geq 0 \\ \frac{E_i^2E_j^2}{c^4} - 2E_im_jE_jm_i + m_i^2m_j^2c^4 \geq \frac{E_i^2E_j^2}{c^4} - E_j^2m_i^2 - E_i^2m_j^2 + m_i^2m_j^2c^4 \\ \left(\frac{E_iE_j}{c^2} - m_im_jc^2\right)^2 \geq \frac{1}{c^4}(E_i^2 - m_i^2c^4)(E_j^2 - m_j^2c^4) \\ \frac{E_iE_j}{c^2} - m_im_jc^2 \geq \frac{1}{c^2}\sqrt{E_i^2 - m_i^2c^4}\sqrt{E_j^2 - m_j^2c^4} \\ \frac{E_iE_j}{c^2} - \frac{1}{c^2}\sqrt{E_i^2 - m_i^2c^4}\sqrt{E_j^2 - m_j^2c^4} \geq m_im_jc^2 \end{gathered}$$

Quindi la (3.2.2) deve soddisfare la seguente diseguaglianza

$$M^2c^2 = \sum_{i=3}^{N} m_i^2c^2 + 2\sum_{i=3}^{N}\sum_{j>3}^{N} P_{i\mu}P_j^\mu \geq \sum_{i=3}^{N} m_i^2c^2 + 2\sum_{i=3}^{N}\sum_{j>3}^{N} m_im_jc^2 \tag{3.2.4}$$

ovvero

$$M^2c^2 \geq \left(\sum_{i=3}^{N} m_i c\right)^2 \tag{3.2.5}$$

Questa relazione è una condizione che l'energia deve soddisfare affinché il processo sia possibile. Se consideriamo il sistema di riferimento in cui il momento totale è nullo, la massa invariante sarà data solo dalle energie delle particelle, quindi per stato iniziale

$$M^2c^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} = \frac{E_{tot}^2}{c^2} \tag{3.2.6}$$

per cui la condizione (3.2.5) si riduce a

$$\frac{E_{tot}^2}{c^2} \geq \left(\sum_{i=3}^{N} m_i c\right)^2 \implies E_{tot} \geq \sum_{i=3}^{N} m_i c^2 \tag{3.2.7}$$

L'energia trovata è l'energia necessaria affinché l'urto (inteso come la produzione delle $N-2$) avvenga, questa viene detta *energia di soglia*.

Velocità relativa

Consideriamo il sistema in cui, nello stato iniziale, una delle due particelle è in quiete e l'altra in moto, i quadrimomenti corrispettivi saranno pertanto:

$$\begin{aligned} P_1^{\mu} &= \left(\frac{E_1}{c}, \vec{P}_1\right) \\ P_2^{\mu} &= (m_2 c, 0) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

moltiplicandoli scalarmente, otteniamo:

$$P_{\mu 1} P_2^{\mu} = E_1 m_2 \tag{3.2.9}$$

esplicitiamo l'energia della particella in moto

$$E_1 = \frac{P_{\mu 1} P_2^{\mu}}{m_2} \tag{3.2.10}$$

A questo punto dalla relazione energia-impulso (2.6.9) possiamo ottenere il modulo del momento e sostituendo la formula per l'energia appena trovata si ricava:

$$|\vec{P}_1| = \frac{1}{c}\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(P_{\mu 1} P_2^{\mu})^2}{m_2^2} - m_1^2c^4} \tag{3.2.11}$$

Dal rapporto tra le componenti del quadrimomento (2.6.3) possiamo determinare la velocità relativa

$$v_{rel} = \frac{|\vec{P}_1|}{E_1}c^2 \tag{3.2.12}$$

sostituendo le (3.2.10), (3.2.11) nella precedente otteniamo la velocità relativa in funzione di invarianti cinematici, rendendola -a sua volta- invariante:

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(P_{\mu 1} P_2^{\mu})^2 - m_2^2 m_1^2 c^4}}{P_{\mu 1} P_2^{\mu}} c \tag{3.2.13}$$

Concludiamo osservando che il medesimo ragionamento è possibile farlo fissando il sistema solidale alla particella 1.

Variabili di Mandelstam

Consideriamo il caso particolare di urti a due corpi, ossia urti che presentano due particelle nello stato iniziale e due particelle nello stato finale, le quali -in generale- potranno avere masse diverse ($m_i \neq m_j \quad \forall i = 1,2,3,4 \quad \wedge \quad \forall j > i$):

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

ricordando la relazione trovata nella sezione precedente $3N - 10$, avremo che le variabili libere saranno $3 \cdot 4 - 10 = 2$.

Risultano estremamente convenienti tre invarianti, detti *variabili di Mandelstam*, definiti -a partire dai quattro quadrimomenti delle particelle- nel modo seguente:

$$s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = (P_3^\mu + P_4^\mu)^2 \tag{3.2.14}$$

$$t = (P_1^\mu - P_3^\mu)^2 = (P_2^\mu - P_4^\mu)^2 \tag{3.2.15}$$

$$u = (P_1^\mu - P_4^\mu)^2 = (P_2^\mu - P_3^\mu)^2 \tag{3.2.16}$$

Notiamo che la variabile s risulta essere la massa invariante, mentre t e u sono le norme quadre dei momenti trasferiti.

Sviluppiamo la somma delle variabili di Mandelstam:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 + (P_1^\mu - P_3^\mu)^2 + (P_1^\mu - P_4^\mu)^2 \\ &= (P_1^\mu)^2 + 2P_{\mu 1}P_2^\mu + (P_2^\mu)^2 + (P_1^\mu)^2 - 2P_{\mu 1}P_3^\mu + (P_3^\mu)^2 + \\ &\quad + (P_1^\mu)^2 - 2P_{\mu 1}P_4^\mu + (P_4^\mu)^2 \\ &= 3(P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + (P_3^\mu)^2 + (P_4^\mu)^2 - 2P_{\mu 1}\left(P_3^\mu + P_4^\mu - P_2^\mu\right) \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

ricordando la conservazione del quadrimomento (3.1.1) e la definizione di massa invariante (2.6.8), la relazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} s + t + u &= 3(P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + (P_3^\mu)^2 + (P_4^\mu)^2 - 2P_{\mu 1}\left(P_3^\mu + P_4^\mu - P_2^\mu\right) \\ &= 3(P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + (P_3^\mu)^2 + (P_4^\mu)^2 - 2P_{\mu 1}P_1^\mu \\ &= m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + m_3^2c^2 + m_4^2c^2 = \sum_{i=1}^{4} m_i^2c^2 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Questa relazione rappresenta un vincolo, dunque deduciamo che solo due delle tre variabili di Mandelstam saranno indipendenti. Tale risultato è concorde con la previsione fatta precedentemente sui parametri liberi del sistema cinematico.

3.3 Descrizione dello stato iniziale

In questa e nella prossima sezione vogliamo approfondire lo studio degli urti a due corpi. In particolare, nella presente, vogliamo studiare lo stato iniziale in alcuni sistemi di riferimento che risultano essere di particolare importanza nell'approccio sperimentale e nella trattazione teorica.

Sistema di riferimento del laboratorio

Il primo che consideriamo è il, cosiddetto, *sistema di riferimento del laboratorio* $\mathcal{K}_{LAB}$, rispetto al quale una delle due particelle urtanti risulta a riposo, come mostrato in Fig.3.

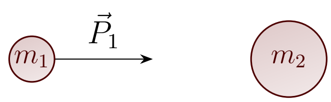

Figura 3: Stato iniziale osservato dal sistema di riferimento del laboratorio.

In tale situazione avremo che il momento associato alla particella a riposo sarà nullo, quindi l'energia di questa particella si ridurrà solamente a quella a riposo, secondo la (2.6.9):

$$\vec{P}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_2 = m_2 c^2 \tag{3.3.1}$$

Assumendo che la direzione di moto della particella 1 sia parallela all'asse z del sistema di riferimento, essa sarà caratterizzata dalle quantità:

$$\vec{P}_1 = P_1 \hat{k} \quad \Longrightarrow \quad E_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + P_1^2 c^2} \tag{3.3.2}$$

A partire dalle componenti possiamo costruire i rispettivi quadrimomenti:

$$\begin{gathered} P_1^\mu = \left(\frac{1}{c}\sqrt{m_1^2 c^4 + P_1^2 c^2}, 0, 0, P_1\right) \\ P_2^\mu = (m_2 c, 0, 0, 0) \end{gathered} \tag{3.3.3}$$

Sommandoli otteniamo il quadrimomento totale nel sistema del laboratorio

$$P_{LAB}^\mu = \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c, 0, 0, P_1\right) \tag{3.3.4}$$

Sistema di riferimento del centro di massa

Un secondo sistema rilevante viene detto *sistema di riferimento del centro di massa* $\mathcal{K}_{CM}$, nel quale il momento totale risulta nullo. Quindi, in generale, per masse diverse si avranno velocità diverse, come mostrato in Fig.4.

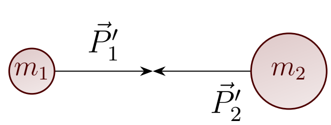

Figura 4: Stato iniziale osservato dal sistema di riferimento del centro di massa.

Per distinguere le quantità misurate in questo sistema di riferimento useremo, quando necessario, la notazione primata.
Dunque, per definizione, avremo che $\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0$ e fissando la direzione di moto lungo l'asse z, per semplicità, possiamo scrivere

$$P' = P'_1 = -P'_2 \tag{3.3.5}$$

Considerando la relazione (2.6.9) otteniamo le energie per le due particelle:

$$E'_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + P'^2 c^2} \qquad E'_2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + P'^2 c^2} \tag{3.3.6}$$

Analogamente a quanto fatto prima, a partire dalle componenti, possiamo costruire i rispettivi quadrimomenti:

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_1 &= \left(\frac{1}{c}\sqrt{m_1^2 c^4 + P'^2 c^2}, 0, 0, P'\right) \\ P'^{\mu}_2 &= \left(\frac{1}{c}\sqrt{m_2^2 c^4 + P'^2 c^2}, 0, 0, -P'\right) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Sommandoli otteniamo il quadrimomento totale nel sistema del centro di massa

$$P^{\mu}_{CM} = \left(\frac{E'_1 + E'_2}{c}, 0, 0, 0\right) \tag{3.3.8}$$

Relazione tra i sistemi di riferimento
Risulta spesso conveniente passare dal sistema di riferimento del laboratorio a quello del centro di massa, e viceversa. Ipotizzando che, per $t_{LAB} = 0$ e $t_{CM} = 0$, gli assi e le origini dei due sistemi di riferimento siano sovrapposti, ci si riconduce al caso di trasformazioni di velocità studiate nella sezione § 1.3 e rappresentato in Fig.2.
Pertanto avremo che tutti i quadrimomenti, nel passaggio da un sistema all'altro, saranno soggetti a trasformazioni di Lorentz, questo in virtù del formalismo covariante. Consideriamo i quadrmomenti totali, P^{μ}_{LAB} e P^{μ}_{CM}, i quali saranno legati dalla seguente trasformazione:

$$P^{\mu}_{LAB} \xrightarrow{\text{L}} P^{\mu}_{CM} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} P^{\nu}_{LAB} \tag{3.3.9}$$

ove la matrice associata alla trasformazione è facilmente ottenibile dalla (1.3.7)

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Ora, vogliamo determinare la velocità relativa dei sistemi di riferimento in funzione dei parametri del sistema del laboratorio, per farlo consideriamo la quarta componente della trasformazione (3.3.9)

$$P^3_{CM} = \gamma(P^3_{LAB} - \beta P^0_{LAB}) \tag{3.3.10}$$

ricordando i quadrimomenti (3.3.4), (3.3.8) e sostituendo le opportune componenti, otteniamo:

$$0 = \gamma\left[P_1 - \beta\frac{E_1 + m_2c^2}{c}\right] \tag{3.3.11}$$

esplicitiamo β

$$\beta = \frac{P_1}{\dfrac{E_1}{c} + m_2c} \tag{3.3.12}$$

Ricordando la definizione di quadrimomento (2.6.3), possiamo sostituire l'impulso e l'energia:

$$\beta = \frac{m_1\gamma\nu_1}{\gamma m_1c + m_2c} = \frac{1}{c}\frac{m_1\gamma\nu_1}{\gamma m_1 + m_2} \tag{3.3.13}$$

Concludiamo che la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento sarà data, vettorialmente, da:

$$\vec{v} = \frac{m_1\gamma}{\gamma m_1 + m_2}\vec{\nu}_1 = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{E_1 + E_2}c^2 \tag{3.3.14}$$

Da questa relazione comprendiamo, come potevamo aspettarci, che la direzione e il verso della velocità relativa saranno i medesimi della velocità della particella 1, ma il modulo sarà inferiore.

Per determinare la velocità relativa in funzione dei parametri del sistema del centro di massa, possiamo considerare la trasformazione del quadrimomento della particella 2

$$P'^{\mu}_2 \xrightarrow{\mathrm{L}} P^{\mu}_2 = \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)^{-1} P'^{\nu}_2$$

la matrice di trasformazione sarà l'inversa di quella determinata precedentemente, dunque:

$$\left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Considerando la quarta componente si ha

$$P^3_2 = \gamma(P'^3_2 + \beta P'^0_2) \tag{3.3.15}$$

ricordando le relazioni (3.3.3) e (3.3.7) e sostituendo le opportune componenti, otteniamo:

$$0 = \gamma\left[-P' + \beta\frac{E'_2}{c}\right] \tag{3.3.16}$$

esplicitando β

$$\beta = \frac{P'}{E'_2}c = \frac{1}{c}\frac{P'}{E'_2}c^2 \tag{3.3.17}$$

Concludiamo che la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento sarà data da:

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}'}{E'_2}c^2 = \vec{v}'_2 \tag{3.3.18}$$

Abbiamo trovato che la velocità relativa dei sistemi di riferimento, osservata da quello del centro di massa, sarà uguale alla velocità della particella 2.
Abbiamo mostrato come la descrizione del processo d'urto sia completamente equivalente in un sistema di riferimento o nell'altro, in conformità con il primo postulato della teoria.

3.4 Studio dello stato finale

Possiamo dedicarci a studiare come le quantità cinematiche evolvano a seguito dell'urto. La trattazione proseguirà, prima, con lo studio nel sistema del laboratorio e, poi, in quello del centro di massa. Il nostro obbiettivo sarà quello di determinare le equazioni -in funzione delle variabili di Mandelstam- dei momenti e degli angoli, poiché sono le quantità direttamente osservabili.

Sistema di riferimento del laboratorio
In continuità con la sezione precedente, consideriamo che l'urto avvenga lungo l'asse z e che il piano di propagazione delle particelle sia quello $x - z$. La conservazione del momento impone che la geometria del sistema, dopo l'urto, sia quella rappresentata in Fig.5.

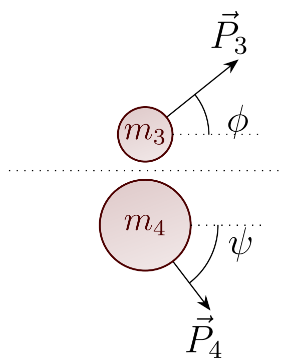

Figura 5: Stato finale osservato dal sistema di riferimento del laboratorio.

Per le particelle nello stato iniziale sappiamo che i quadrimomenti sono

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= \left(\frac{E_1}{c}, 0, 0, P_1\right) \\ P_2^\mu &= (m_2 c, 0, 0, 0) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

dall'immagine comprendiamo che i quadrimomenti delle particelle nello stato finale saranno

$$\begin{aligned} P_3^\mu &= \left(\frac{E_3}{c}, |\vec{P}_3| \sin\phi, 0, |\vec{P}_3| \cos\phi\right) \\ P_4^\mu &= \left(\frac{E_4}{c}, -|\vec{P}_4| \sin\psi, 0, |\vec{P}_4| \cos\psi\right) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

A questo punto possiamo determinare le variabili di Mandelstam nel sistema del laboratorio. Usiamo le definizioni dipendenti da P_2^μ, poiché le formule risulteranno più semplici

$$s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 E_1 \tag{3.4.3}$$

$$t = (P_2^\mu - P_4^\mu)^2 = m_2^2 c^2 + m_4^2 c^2 - 2 m_2 E_4 \tag{3.4.4}$$

$$u = (P_2^\mu - P_3^\mu)^2 = m_2^2 c^2 + m_3^2 c^2 - 2 m_2 E_3 \tag{3.4.5}$$

esplicitiamo le energie

$$E_1 = \frac{s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_2} \tag{3.4.6}$$

$$E_4 = \frac{m_2^2c^2 + m_4^2c^2 - t}{2m_2} \tag{3.4.7}$$

$$E_3 = \frac{m_2^2c^2 + m_3^2c^2 - u}{2m_2} \tag{3.4.8}$$

Dalla relazione energia-impulso (2.6.9) possiamo esplicitare la norma dei momenti e sostituire le energie appena trovate, ottenendo:

$$P_1 = \frac{1}{c}\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4} = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}}{2m_2} \tag{3.4.9}$$

$$P_4 = \frac{1}{c}\sqrt{E_4^2 - m_4^2c^4} = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(t, m_4^2c^2, m_2^2c^2)}}{2m_2} \tag{3.4.10}$$

$$P_3 = \frac{1}{c}\sqrt{E_3^2 - m_3^2c^4} = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(u, m_2^2c^2, m_3^2c^2)}}{2m_2} \tag{3.4.11}$$

dove, per semplicità, abbiamo definito la funzione:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \tag{3.4.12}$$

Per determinare gli angoli consideriamo le definizioni alternative delle variabili di Mandelstam t e u:

$$t = (P_1^\mu - P_3^\mu)^2 = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2\frac{E_1E_3}{c^2} + 2P_1P_3\cos\phi \tag{3.4.13}$$

$$u = (P_1^\mu - P_4^\mu)^2 = m_1^2c^2 + m_4^2c^2 - 2\frac{E_1E_4}{c^2} + 2P_1P_4\cos\psi \tag{3.4.14}$$

Sostituiamo sia le energie (3.4.6), (3.4.8) e i momenti (3.4.9), (3.4.11) nella (3.4.13), sia le energie (3.4.6), (3.4.7) e i momenti (3.4.9), (3.4.10) nella (3.4.14).
Così procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned} t = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2\frac{(s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(m_2^2c^2 + m_3^2c^2 - u)}{4m_2^2c^2} + \\ + 2\frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(u, m_2^2c^2, m_3^2c^2)}}{4m_2^2c^2}\cos\phi \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{aligned} u = m_1^2c^2 + m_4^2c^2 - 2\frac{(s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(m_2^2c^2 + m_4^2c^2 - t)}{4m_2^2c^2} + \\ + 2\frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(t, m_2^2c^2, m_4^2c^2)}}{4m_2^2c^2}\cos\psi \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

concludiamo esplicitando i coseni degli angoli

$$\cos\phi = \frac{2m_2^2c^2(t - m_1^2c^2 - m_3^2c^2) - (s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(u - m_2^2c^2 - m_3^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(u, m_2^2c^2, m_3^2c^2)}} \tag{3.4.17}$$

$$\cos\psi = \frac{2m_2^2c^2(t - m_1^2c^2 - m_4^2c^2) - (s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(t - m_2^2c^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(t, m_2^2c^2, m_4^2c^2)}} \tag{3.4.18}$$

Sistema di riferimento del centro di massa

Sappiamo che nel sistema del centro di massa il momento totale del sistema, prima dell'urto, è nullo $\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = 0$. Per la conservazione del momento avremo che, anche dopo l'urto, il momento sarà nullo $\vec{P}_3' + \vec{P}_4' = 0$, pertanto la geometria del sistema sarà quella rappresentata in Fig.6.

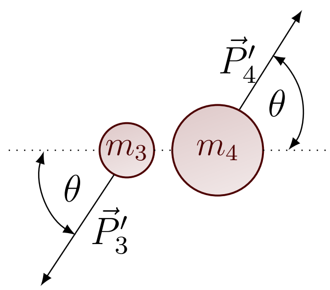

Figura 6: Stato finale osservato dal sistema di riferimento del centro di massa.

Per le particelle nello stato iniziale sappiamo che i quadrimomenti sono

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_1 &= \left(\frac{E_1}{c}, 0, 0, P'\right) \\ P'^{\mu}_2 &= \left(\frac{E_2}{c}, 0, 0, -P'\right) \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Dalla condizione di momento nullo possiamo ricavare che $P_4' = -P_3' = Q'$, quindi considerando l'immagine avremo che i quadrimomenti delle particelle nello stato finale saranno

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_4 &= \left(\frac{E_4}{c}, Q'\sin\theta, 0, Q'\cos\theta\right) \\ P'^{\mu}_3 &= \left(\frac{E_3}{c}, -Q'\sin\theta, 0, -Q'\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Inoltre, conosciamo la relazione energia-impulso che tutte le particelle devono soddisfare

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{c}\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{E_2^2 - m_2^2c^4} \\ Q' &= \frac{1}{c}\sqrt{E_3^2 - m_3^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{E_4^2 - m_4^2c^4} \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

A questo punto possiamo scrivere la prima variabile di Mandelstam, considerando la relazione appena scritta per la particella 1, otteniamo:

$$\begin{aligned} s = \left(P'^{\mu}_1 + P'^{\mu}_2\right)^2 &= m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + \frac{2E_2'E_1'}{c^2} + 2P'^2 \\ &= m_2^2c^2 - m_1^2c^2 + 2\frac{E_1'}{c^2}(E_2' + E_1') \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Ricordando il quadrimpulso totale (3.3.8), possiamo ottenere la relazione:

$$\sqrt{s} = \sqrt{\left(P'^{\mu}_{1} + P'^{\mu}_{2}\right)^2} = \frac{E'_1 + E'_2}{c} \tag{3.4.23}$$

Sostituendo questo risultato nella (3.4.22) possiamo esplicitare l'energia della particella 1

$$E'_1 = \frac{s + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.4.24}$$

Se nella (3.4.22) avessimo usato la relazione energia-impulso per la particella 2, procedendo in maniera analoga, avremmo potuto ottenere una relazione simile anche per E'_2. Inoltre, considerando la definizione alternativa della massa invariante $s = \left(P'^{\mu}_{3} + P'^{\mu}_{4}\right)^2$, potevamo ottenere le stesse formule anche per E'_3 e E'_4, che riportiamo di seguito:

$$E'_2 = \frac{s + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.4.25}$$

$$E'_3 = \frac{s + m_3^2c^2 - m_4^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.4.26}$$

$$E'_4 = \frac{s + m_4^2c^2 - m_3^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.4.27}$$

Riprendendo la relazione energia-impulso (3.4.21) per la particella 1, sostituendo l'energia con la (3.4.24) e ricordando la funzione (3.4.12), troviamo:

$$P' = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{(s + m_1^2 - m_2^2)^2c^2 - 4m_1^2sc^4}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{3.4.28}$$

Possiamo ripetere la medesima procedura per il momento nello stato finale considerando la particella 3

$$Q' = \frac{1}{c}\sqrt{{E'_3}^2 - m_3^2c^4} \tag{3.4.29}$$

sostituendo l'energia con la (3.4.26) e ricordando, l'ormai consueta, funzione (3.4.12), troviamo:

$$Q' = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{(s + m_3^2 - m_4^2)^2c^2 - 4m_3^2sc^4}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2c^2, m_4^2c^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{3.4.30}$$

Concludiamo considerando un'altra variabile di Mandelstam

$$t = \left(P'^{\mu}_{1} - P'^{\mu}_{3}\right)^2 = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2\frac{E_1E_3}{c^2} + 2P'Q'\cos\theta \tag{3.4.31}$$

sostituiamo le formule per le energie (3.4.24), (3.4.26) e dei momenti (3.4.28), (3.4.30)

$$\begin{aligned} t = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - \frac{(s + m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(s + m_3^2c^2 - m_4^2c^2)}{2s} + \\ + \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(s, m_3^2c^2, m_4^2c^2)}}{2s}\cos\theta \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

concludiamo esplicitando il coseno dell'angolo

$$\cos\theta = \frac{s^2 + s(2t - m_1^2c^2 - m_2^2c^2 - m_3^2c^2 - m_4^2c^2) + (m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(m_3^2c^2 - m_4^2c^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(s, m_3^2c^2, m_4^2c^2)}} \tag{3.4.33}$$

Ovviamente, partendo da $t = \left(P'^{\mu}_2 - P'^{\mu}_4\right)^2$, sostituendo le opportune energie e gli opportuni momenti, si ottiene lo stesso angolo.

Riassumendo: siamo riusciti a riscrivere le variabili cinematiche in funzione di invarianti di Mandelstam e masse a riposo. In particolare, per il sistema di riferimento del laboratorio abbiamo ottenuto i momenti (3.4.9), (3.4.11), (3.4.10) e gli angoli (3.4.17), (3.4.18). Mentre, per il sistema del centro di massa abbiamo ottenuto i momenti (3.4.28), (3.4.30) e l'angolo (3.4.33).

3.5 Urti elastici con variabili di Mandelstam

Vogliamo applicare la teoria degli urti a due corpi, formulata nella sezione precedente, al caso particolare in cui le particelle nello stato finale siano le stesse dello stato iniziale, ovvero per un urto elastico. Il processo d'urto sarà, dunque, rappresentabile nel modo seguente:

$$1 + 2 \rightarrow 1 + 2$$

Risulta banale affermare che si tratta di un urto esclusivo. Per una maggiore generalità assumiamo che le due particelle abbiano massa diversa, per cui -considerando la notazione precedente- avremo che $m_3 = m_1$ e $m_4 = m_2$. Tuttavia, continueremo ad usare per le quantità cinematiche i pedici 3 e 4 per evitare ambiguità tra lo stato iniziale e quello finale. Come di consueto partiremo da una trattazione nel sistema del laboratorio e, successivamente, tratteremo il caso del sistema del centro di massa.

Sistema di riferimento del laboratorio

Partiamo con il riconsiderare, alla luce del cambio di masse, le variabili di Mandelstam (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5)

$$s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2m_2E_1 \tag{3.5.1}$$

$$t = (P_2^\mu - P_4^\mu)^2 = 2m_2^2c^2 - 2m_2E_4 \tag{3.5.2}$$

$$u = (P_2^\mu - P_3^\mu)^2 = m_2^2c^2 + m_1^2c^2 - 2m_2E_3 \tag{3.5.3}$$

dal vincolo (3.2.18) otteniamo che:

$$s + t + u = 2m_1^2c^2 + 2m_2^2c^2 \implies u = 2m_1^2c^2 + 2m_2^2c^2 - s - t \tag{3.5.4}$$

A questo punto possiamo ricavare le energie. Partiamo dalla (3.4.6) che rimane invariata.

$$E_1 = \frac{s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_2} \tag{3.5.5}$$

Possiamo valutare la (3.4.8) considerando la (3.5.4)

$$E_3 = \frac{m_2^2c^2 + m_1^2c^2 - u}{2m_2} = \frac{s + t - m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2m_2} \tag{3.5.6}$$

Infine, la (3.4.7) diventa semplicemente

$$E_4 = \frac{2m_2^2c^2 - t}{2m_2} \tag{3.5.7}$$

Proseguiamo considerando i momenti (3.4.9) e (3.4.11), per questi sarà sufficiente sostituire le masse e solo nella (3.4.11) considerare il vincolo (3.5.4)

$$P_1 = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}}{2m_2} \tag{3.5.8}$$

$$P_3 = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(s + t, m_2^2c^2, m_1^2c^2)}}{2m_2} \tag{3.5.9}$$

Per il momento (3.4.10) ci si riconduce facilmente a

$$P_4 = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{\lambda(t, m_2^2c^2, m_2^2c^2)}}{2m_2} = \frac{1}{c}\frac{\sqrt{t^2 - 4tm_2^2c^2}}{2m_2} \tag{3.5.10}$$

Concludiamo con gli angoli (3.4.18), (3.4.17) per i quali possiamo fare le stesse sostituzioni fatte in precedenza

$$\cos\phi = \frac{2m_2^2c^2(t - 2m_1^2c^2) + (s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(s + t - m_2^2c^2 - m_1^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)\lambda(s + t, m_2^2c^2, m_1^2c^2)}} \tag{3.5.11}$$

$$\cos\psi = \frac{2m_2^2c^2(t - m_1^2c^2 - m_2^2c^2) - (s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(t - 2m_2^2c^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)(t^2 - 4tm_2^2c^2)}} \tag{3.5.12}$$

Sistema di riferimento del centro di massa
Cominciamo considerando le energie (3.4.24), (3.4.25), (3.4.26), (3.4.27) e notiamo che, sostituendo le masse, le energie saranno conservate rispettivamente

$$E_1' = E_3' = \frac{s + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.5.13}$$

$$E_2' = E_4' = \frac{s + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2\sqrt{s}}c \tag{3.5.14}$$

Anche i momenti (3.4.28), (3.4.30) -e quindi le velocità- sono conservati

$$P' = Q' = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{3.5.15}$$

Infine, l'angolo (3.4.33) si ridurrà alla forma seguente

$$\cos\theta = \frac{s^2 + s(2t - 2m_1^2c^2 - 2m_2^2c^2) + (m_1^2c^2 - m_2^2c^2)^2}{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)} \tag{3.5.16}$$

3.6 Studio energetico degli urti elastici

In questa sezione vogliamo ricavare le energie nello stato finale in funzione delle energie nello stato iniziale.

Sistema di riferimento del laboratorio

Consideriamo le rappresentazioni in Fig.3 e Fig.5. Vogliamo determinare l'energia della particella inizialmente in movimento. Per farlo partiamo con il considerare la conservazione del quadrimpulso (3.1.1) nella seguente forma:

$$P_1^\mu + P_2^\mu - P_3^\mu = P_4^\mu \tag{3.6.1}$$

considerando la norma quadra della relazione precedente, troviamo:

$$m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + m_1^2c^2 + 2P_{1\mu}P_2^\mu - 2P_{2\mu}P_3^\mu - 2P_{1\mu}P_3^\mu = m_2^2c^2 \tag{3.6.2}$$

semplificando le masse, dividendo per due ed esplicitando i prodotti scalari, otteniamo:

$$\begin{aligned} m_1^2c^2 + \frac{E_1E_2}{c^2} - \frac{E_2E_3}{c^2} - \frac{E_1E_3}{c^2} + \vec{P}_1\vec{P}_3 = 0 \\ m_1^2c^2 + \frac{E_1m_2c^2}{c^2} - \frac{m_2c^2E_3}{c^2} - \frac{E_1E_3}{c^2} + |\vec{P}_1||\vec{P}_3|\cos\phi = 0 \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

esplicitando il coseno dell'angolo otteniamo:

$$\cos\phi = \frac{E_3(E_1+E_2) - E_1E_2 - m_1^2c^4}{c^2|\vec{P}_1||\vec{P}_3|} \tag{3.6.4}$$

Per ricavare l'energia della particella 3, in funzione delle variabili delle particelle nello stato finale, consideriamo il momento $|\vec{P}_3| = \frac{1}{c}\sqrt{E_3^2 - m_1^2c^4}$ ed eleviamo al quadrato

$$\begin{aligned} \cos^2\phi &= \frac{[E_3(E_1+m_2c^2) - E_1m_2c^2 - m_1^2c^4]^2}{c^2|\vec{P}_1|^2(E_3^2 - m_1^2c^4)} \\ c^2|\vec{P}_1|^2(E_3^2 - m_1^2c^4)\cos^2\phi &= E_3^2(E_1+m_2c^2)^2 - 2E_3(E_1+m_2c^2)E_1m_2c^2 \\ &\quad - 2E_3(E_1+m_2c^2)m_1^2c^4 + (E_1E_2 + m_1^2c^4)^2 \\ E_3^2\left[\cos^2\phi - \frac{(E_1+m_2c^2)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2}\right] &+ E_3\frac{2(E_1+m_2c^2)(E_1m_2c^2+m_1^2c^4)}{c^2|\vec{P}_1|^2} \\ &\quad - \frac{(E_1m_2c^2+m_1^2c^4)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2} - m_1^2c^4\cos^2\phi = 0 \end{aligned}$$

ci siamo ricondotti ad un'equazione di secondo grado, pertanto possiamo utilizzare la formula risolutiva. Cominciamo con il determinare il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & 4\frac{(E_1+m_2c^2)^2\left(E_1m_2c^2+m_1^2c^4\right)^2}{c^4|\vec{P}_1|^4} \\ & - 4\left[\cos^2\phi - \frac{(E_1+m_2c^2)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2}\right]\left[-\frac{\left(E_1m_2c^2+m_1^2c^4\right)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2} - m_1^2c^4\cos^2\phi\right] \\ = {} & 4\left[\frac{\left(E_1m_2c^2+m_1^2c^4\right)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2}\cos^2\phi + m_1^2c^4\cos^4\phi - \frac{(E_1+m_2c^2)^2m_1^2c^4\cos^2\phi}{c^2|\vec{P}_1|^2}\right] \\ = {} & \frac{4}{|\vec{P}_1|^4}|\vec{P}_1|^4\cos^2\phi\left[m_2^2c^4 - m_1^2c^4\sin^2\phi\right] \end{aligned}$$

A questo punto possiamo scrivere la formula risolutiva

$$E_3 = \frac{-2\dfrac{(E_1 + m_2c^2)(E_1m_2c^2 + m_1^2c^4)}{c^2|\vec{P}_1|^2} \pm \sqrt{\Delta}}{2\left[\dfrac{c^2|\vec{P}_1|^2 \cos^2\phi - (E_1 + m_2c^2)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2}\right]} \tag{3.6.5}$$

Notiamo che il denominatore risultante sarà negativo, questo ci porta a considerare il segno meno prima della radice per ottenere un'energia positiva.

$$E_3 = \frac{2\dfrac{(E_1 + m_2c^2)(E_1m_2c^2 + m_1^2c^4)}{c^2|\vec{P}_1|^2} + \sqrt{\Delta}}{2\left[\dfrac{(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2|\vec{P}_1|^2 \cos^2\phi}{c^2|\vec{P}_1|^2}\right]} \tag{3.6.6}$$

sostituendo il discriminante determinato in precedenza e semplificando i termini comuni a numeratore e denominatore, otteniamo:

$$E_3 = \frac{(E_1 + m_2c^2)(E_1m_2c^2 + m_1^2c^4) + c^2|\vec{P}_1|^2 \cos\phi\sqrt{m_2^2c^4 - m_1^2c^4\sin^2\phi}}{(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2|\vec{P}_1|^2\cos^2\phi} \tag{3.6.7}$$

Infine, sostituendo il momento della particella 1 nello stato iniziale in funzione dell'energia troviamo:

$$E_3 = \frac{(E_1 + m_2c^2)(E_1m_2c^2 + m_1^2c^4) + (E_1^2 - m_1^2c^4)\cos\phi\sqrt{m_2^2c^4 - m_1^2c^4\sin^2\phi}}{(E_1 + m_2c^2)^2 - (E_1^2 - m_1^2c^4)\cos^2\phi} \tag{3.6.8}$$

Ora, concentriamoci sul determinare l'energia della particella 2, quella che -nello stato iniziale- è a riposo. Partiamo sempre dalla conservazione del quadrimomento

$$P_1^\mu + P_2^\mu - P_4^\mu = P_3^\mu \tag{3.6.9}$$

considerando la norma quadra della relazione precedente, troviamo:

$$m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + m_2^2c^2 + 2P_{1\mu}P_2^\mu - 2P_{2\mu}P_4^\mu - 2P_{1\mu}P_4^\mu = m_1^2c^2 \tag{3.6.10}$$

semplificando le masse, dividendo per due ed esplicitando i prodotti scalari, otteniamo:

$$\begin{gathered} m_2^2c^2 + \frac{E_1E_2}{c^2} - \frac{E_2E_4}{c^2} - \frac{E_1E_4}{c^2} + \vec{P}_1\vec{P}_4 = 0 \\ m_2^2c^2 + \frac{E_1m_2c^2}{c^2} - \frac{m_2c^2E_4}{c^2} - \frac{E_1E_4}{c^2} + |\vec{P}_1||\vec{P}_4|\cos\psi = 0 \end{gathered} \tag{3.6.11}$$

esplicitando il coseno dell'angolo ed effettuando un raccoglimento, si ha:

$$\cos\psi = \frac{(E_1 + m_2c^2)(E_4 - m_2c^2)}{c^2|\vec{P}_1||\vec{P}_4|} \tag{3.6.12}$$

Per esplicitare l'energia della particella 4, in funzione delle variabili delle particelle nello stato finale, consideriamo il momento $|\vec{P}_4| = \frac{1}{c}\sqrt{E_4^2 - m_2^2c^4}$ ed eleviamo al quadrato

$$\cos^2\psi = \frac{(E_1+m_2c^2)^2(E_4-m_2c^2)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2(E_4^2-m_2^2c^4)} = \frac{(E_1+m_2c^2)^2(E_4-m_2c^2)^2}{c^2|\vec{P}_1|^2(E_4+m_2c^2)(E_4-m_2c^2)} \tag{3.6.13}$$

semplificando ed esplicitando E_4, otteniamo:

$$\begin{aligned} c^2|\vec{P}_1|^2(E_4+m_2c^2)\cos^2\psi &= (E_1+m_2c^2)^2(E_4-m_2c^2) \\ E_4\left[c^2|\vec{P}_1|^2\cos^2\psi - (E_1+m_2c^2)^2\right] &= -c^2|\vec{P}_1|^2 m_2c^2\cos^2\psi - m_2c^2(E_1+m_2c^2)^2 \\ E_4 &= m_2c^2\frac{(E_1+m_2c^2)^2+(E_1^2-m_1^2c^4)\cos^2\psi}{(E_1+m_2c^2)^2-(E_1^2-m_1^2c^4)\cos^2\psi} \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito il momento della particella 1 nello stato iniziale in funzione dell'energia.

Sistema di riferimento del centro di massa

La trattazione in questo sistema di riferimento risulta assai più semplice. Consideriamo le rappresentazioni in Fig.4 e Fig.6. Dunque avremo che i quadrimomenti sono

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_1 &= \left(\frac{E_1}{c}, 0, 0, P'\right) \\ P'^{\mu}_2 &= \left(\frac{E_2}{c}, 0, 0, -P'\right) \\ P'^{\mu}_4 &= \left(\frac{E_4}{c}, Q'\sin\theta, 0, Q'\cos\theta\right) \\ P'^{\mu}_3 &= \left(\frac{E_3}{c}, -Q'\sin\theta, 0, -Q'\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

Inoltre, conosciamo le relazioni energia-impulso che tutte le particelle devono soddisfare

$$\begin{aligned} E'_1 &= \sqrt{m_1^2c^4 + P'^2c^2} \qquad & E'_2 &= \sqrt{m_2^2c^4 + P'^2c^2} \\ E'_3 &= \sqrt{m_1^2c^4 + Q'^2c^2} \qquad & E'_4 &= \sqrt{m_2^2c^4 + Q'^2c^2} \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

Dalla conservazione dell'energia totale abbiamo:

$$\begin{gathered} E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4 \\ \sqrt{m_1^2c^4 + P'^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + P'^2c^2} = \sqrt{m_1^2c^4 + Q'^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + Q'^2c^2} \end{gathered} \tag{3.6.17}$$

Si evince come la relazione precedente sia vera se $P' = Q'$, inoltre questo risultato è concorde con la trattazione fatta in sezione § 3.5. Comprendiamo, quindi, che -in questo sistema di riferimento- non solo il quadrimomento totale viene conservato, ma anche gli impulsi delle rispettive particelle.

Riferimenti bibliografici

[1] Barone, Vincenzo: *Relatività, princìpi e applicazioni.* Bollati Boringhieri, 2023.

[2] Landau L.D., Lifsits E.M.: *Teoria dei campi.* Editori Riuniti University Press, 2020.

[3] Pauli, Wolfgang: *Teoria della relatività.* Bollati Boringhieri, 2008.

[4] Einstein, Albert: *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento.* Annalen der Physik, 1905.

[5] Landau L.D., Lifsits E.M.: *Meccanica.* Editori Riuniti University Press, 2020.

[6] Poincaré, Jules Henri: *La scienza e l'ipotesi.* Bompiani, 1902.

[7] Heisenberg, Werner: *Fisica e filosofia.* ilSaggiatore, 1958.

[8] Einstein, Albert: *Relatività. Esposizione divulgativa.* Bollati Boringhieri, 1959.

[9] Focardi, Sergio *et al.*: *Fisica generale. Meccanica e termodinamica.* Casa Editrice Ambrosiana, 2014.