Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'integrale

di Lebesgue-Stieltjes

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Ilaria Girotti

Anno Accademico 2023/2024

Solo la fedeltà al proprio rapimento rende la vita un'appassionante
esplorazione delle possibilità e le trasforma in nutrimento,
anche quando la realtà sembra sbarrarci la strada.
A. D'Avenia

Introduzione

L'argomento centrale di questa Tesi di laurea è l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes: definizione, proprietà principali e confronto con altri tipi di integrali, verranno approfonditi nella seconda parte del lavoro. Nella prima parte, invece, saranno ripresi alcuni concetti di Teoria della Misura, preparatori ed essenziali per procedere con disinvoltura nel cammino necessario a definire la misura di Lebesgue-Stieltjes.

Nato nella prima metà del XX secolo, l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes prende il nome da due matematici illustri: Henri Lebesgue (1875-1941) e Thomas Stieltjes (1856-1894), protagonisti, insieme a tanti altri, della storia dell'integrale. Entrambi contribuirono in maniera determinante all'evolversi della teoria della integrazione, in primis formalizzata da Bernhard Riemann (1826-1866), e in seguito ampliata da molti tra cui Stieltjes nel 1894 con il suo integrale di Riemann-Stieltjes. Una decina d'anni dopo Lebesgue propose una nuova chiave di lettura dell'integrale, basata su concetti di Teoria della Misura: non si trattava più di integrare rispetto a una funzione, come nel caso di Riemann-Stieltjes, ma rispetto a una misura. Ed è seguendo il suo stesso approccio che, molti anni più tardi, si ebbe l'intuizione che la Misura di Lebesgue non fosse l'unica misura rispetto alla quale poter integrare. Si cominciò a valutare l'ipotesi di poter integrare rispetto a misure astratte, ed è proprio in questo contesto che si collocano le Misure di Lebesgue-Stieltjes.

L'obiettivo della Tesi è poter definire un integrale dal seguente aspetto: data F una funzione definita su $\mathbb{R}$, monotona crescente e continua da destra, ci interessa definire

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu_F,$$

dove μ_F è una misura di Lebesgue-Stieltjes, A è un insieme μ_F-misurabile e f è una funzione μ_F-misurabile. La somiglianza con l'integrale di Lebesgue è ben visibile, più avanti chiariremo il perché di tanta affinità, tuttavia per il momento ci concentriamo sulla misura di Lebesgue-Stieltjes, senza la quale non è lecito definire l'integrale. Le misure di Lebesgue-Stieltjes che saranno oggetto del nostro studio sono definite su $\mathbb{R}$, dunque lavoreremo con integrali unidimensionali, ma è possibile definire, con le dovute accortezze, anche misure di Lebesgue-Stieltjes in $\mathbb{R}^n$ con i relativi integrali in più dimensioni.

Illustriamo l'idea alla base del lungo percorso che ci porterà a definire la nostra nuova misura. Facendo un passo indietro pensiamo alla misura di Lebesgue, $\mathcal{L}$, che su un intervallo limitato coincide con la lunghezza dell'intervallo stesso, ovvero

$$\mathcal{L}([a,b]) := b - a, \qquad \text{per } a, b \in \mathbb{R}.$$

In maniera simile partendo da una funzione F monotona crescente e continua da destra, chiamiamo F-lunghezza di un intervallo $(a,b]$, per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|(a,b]|_F = F(b) - F(a); \quad (\heartsuit)$$

la monotonia di F la rende una quantità non negativa, proprio come una lunghezza. Cominciando da $(\heartsuit)$ arriviamo a definire la misura μ_F passando per diversi step intermedi:

1. Estendiamo il concetto di F-lunghezza, $|(a,b]|_F$, definito solo sugli intervalli semichiusi a destra, all'algebra $\mathcal{A}$, che ha come elementi le unioni finite, volendo disgiunte, di intervalli di questa forma. A questo scopo si definisce la seguente funzione

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}} : \quad & \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] \\ & A \longmapsto \sum_{j=1}^{n} (F(b_j) - F(a_j)) \end{aligned}$$

   dove $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, con $I_j = (a_j, b_j]$ disgiunti. Vedremo che $\mu_{\mathcal{A}}$ è una funzione ben posta ed è una pre-misura sull'algebra $\mathcal{A}$.

2. Definiamo una funzione $\mu_F^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$, chiamata misura esterna indotta dalla pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$, tale che, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu_F^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n A_n,\ A_n \in \mathcal{A} \right\};$$

   proveremo che μ_F^* è una misura esterna e coincide con la pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ sugli elementi dell'algebra $\mathcal{A}$.

3. Consideriamo la misura esterna μ_F^* ristretta alla sigma-algebra $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, formata dagli insiemi misurabili alla Carathéodory; verrà provato che la restrizione di μ_F^* è una misura. La indichiamo con

$$\mu_F = (\mu_F^*)_{|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}},$$

   e dal momento che $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ contiene la sigma-algebra di Borel, μ_F sarà una misura boreliana.

La misura μ_F è detta misura di Lebesgue-Stieltjes (associata ad F). Dopo aver riassunto brevemente tutti i passi che conducono da $|(a,b]|_F$ a μ_F è chiaro il motivo per cui le misure così definite richiamano Lebesgue nel loro nome; infatti il percorso per definire la misura di Lebesgue $\mathcal{L}$ è molto simile. Nel caso in cui la funzione F corrisponda all'identità, la F-lunghezza dell'intervallo è la lunghezza dell'intervallo stesso, che corrisponde alla misura di Lebesgue sugli intervalli. Gli step da 1 a 3 con questa scelta di F, definiscono la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$; quindi la misura di Lebesgue si può pensare come un caso particolare di misura di Lebesgue-Stieltjes, seguendo la notazione data è equivalente a scrivere

$$\mu_{Id} = \mathcal{L}.$$

Abbiamo così definito un nuovo Spazio di Misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$ su cui integreremo.

Tuttavia, prima di procedere in questa direzione, seguiamo una breve digressione sulle funzioni di distribuzione, F_μ, generate da una data misura boreliana μ. Definita come

$$F_\mu(y) = \begin{cases} -\mu((y,0]) & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ \mu((0,y]) & y > 0. \end{cases}$$

Ci accorgiamo, analizzando questa classe di funzioni, che tra le diverse proprietà che le caratterizzano sono comprese la crescente monotonia e la continuità da destra. Sorge spontanea la seguente domanda: dal momento che ad ogni F monotona crescente e continua da destra possiamo associare una misura boreliana μ_F, e ad ogni misura boreliana μ possiamo associare la funzione di distribuzione F_μ come appena definita, è possibile che le due strade descritte siano una l'inversa dell'altra? Ovvero se $\mathbb{F}$ è l'insieme delle funzioni monotone crescenti e continue da destra e $\mathbb{M}$ è l'insieme delle misure di Borel su $\mathbb{R}$, allora la funzione

$$\begin{gathered} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{M} \\ F \overset{(2.1)}{\longmapsto} \mu_F\,, \end{gathered}$$

è una biezione? La risposta è affermativa a patto di restringersi a funzioni monotone crescenti, continue da destra e nulle nell'origine, in modo da non perdere l'iniettività. Infatti due funzioni monotone crescenti, continue da destra, che differiscono tra loro per una costante, generano la stessa misura di Lebesgue-Stieltjes, perché il contributo dato dalla costante additiva si cancella; ovvero siano $F, G \in \mathbb{F}$, tali che $F = G + c$, per $c \in \mathbb{R}$, allora

$$|(a,b]|_F = F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = |(a,b]|_G.$$

Le F-lunghezze e G-lunghezze coincidono sugli intervalli $(a, b]$; ripercorrendo gli step appena visti per definire μ_F e μ_G, è facile intuire che siano la stessa misura: infatti la pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ è identica per entrambe le funzioni (perché costruendosi sulle rispettive F-lunghezze e G-lunghezze non potrebbe essere altrimenti), dunque dalla definizione la misura esterna indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$ sarà la stessa e così pure la sigma-algebra degli insiemi misurabili alla Carathéodory, $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_G(\mathbb{R})$; questo ci porta a dire che la restrizione sarà identica, perciò $\mu_F = \mu_G$. L'iniettività non sussiste, perché F e G sono due funzioni distinte ma generano la stessa misura boreliana. La richiesta che siano nulle nell'origine evita che ciò accada, se infatti F è nulla nell'origine, la funzione $G = F - c$ non lo è se $c \neq 0$, quindi non viene presa in cosiderazione. La suriettività è sempre garantita in ogni caso, perché sappiamo che ad ogni misura boreliana reale si può associare la sua funzione di distribuzione, F_μ, che è monotona crescente, continua da destra e nulla nell'origine. Perciò per ogni funzione monotona crescente, continua da destra e nulla nell'origine, si associa una e una sola misura di Borel reale.

Conoscere μ_F è fondamentale per poter definire l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes; noi daremo la definizione in quest'ordine: prima per le funzioni semplici, poi per le funzioni non negative e infine per le funzioni a segno qualunque. In questo tipo di percorso l'integrale di Lebesgue-Stieltjes non si distacca dall'integrale di Lebesgue, l'unica vera differenza è data dalla misura rispetto alla quale si integra, che ovviamente incide sul calcolo. Vediamo ad esempio l'integrale di una funzione semplice rispetto alla misura μ_F (gli altri casi si deducono da questo e verranno definiti dettagliatamente nel Capitolo 3). Sia $\varphi : E \to [0, +\infty]$ con $E \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, una funzione semplice così definita

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \chi_{(a_j, b_j]}, \qquad c_j \geq 0 \quad \text{e} \ \ (a_j, b_j] \, \text{disgiunti in } E;$$

l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes di φ è equivalente a

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu_F \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mu_F((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} c_j \ \cdot (F(b_j) - F(a_j)) \,. \tag{$\diamond$}$$

Trattandosi di argomenti e dimostrazioni già studiate nei corsi di Analisi per l'integrale di Lebesgue, rivedremo un po' velocemente le proprietà classiche di linearità, monotonia, disuguaglianza triangolare, monotonia e additività della funzione integranda. Mentre porremo un po' più di attenzione su una caratteristica molto importante che questi integrali, come già l'integrale di Lebesgue, possiedono: il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Rivedremo dunque come si riformulano il Teorema di Convergenza Monotona, il Lemma di Fatou e il Teorema di Convergenza Dominata, per gli integrali di Lebesgue-Stieltjes; questo sarà l'ultimo argomento sulle prorietà, prima di procedere con qualcosa che non è parte della Teoria dell'Integrale di Lebesgue.

Per coloro che già conoscono le somme di Riemann-Stieltjes, avranno notato una certa somiglianza tra queste e l'integrale ($\diamond$). Infatti, una somma di Riemann-Stieltjes delle funzioni F e g, con g limitata, si presenta come

$$R_\Gamma \equiv \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)),$$

con $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ partizione di $[a, b]$, dominio di entrambe le funzioni, e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ sono punti arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Una differenza importante è data dai coefficienti $g(\xi_i)$ che possono anche essere negativi, perché non è richiesta alcuna condizione sul segno di g , inoltre in questo caso si è su un intervallo compatto $[a, b]$ e non un generico insieme E μ_F-misurabile. Tuttavia l'intuizione è corretta e non è molto lontana da un risultato importante che proveremo al termine del Capitolo 3, quando per una funzione continua g e una funzione F monotona crescente e continua da destra, scopriremo che le somme di Riemann-Stieltjes R_Γ approssimano l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di g rispetto alla misura μ_F. Il termine approssimazione usato in questo contesto acquisisce il seguente significato: per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ partizione di $[a, b]$ con $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ punti intermedi arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, si ha

$$\left| \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F - R_\Gamma \right| < \epsilon.$$

Le somme di Riemann-Stieltjes sono protagoniste anche nella teoria alla base di un altro integrale già citato in questo testo, ovvero l'Integrale di Riemann-Stieltjes. Guardando le somme di Darboux, utilizzate per stabilire quando una funzione è Riemann integrabile, Stieltjes ebbe l'intuizione di sostituire la classica distanza tra un nodo e l'altro di una partizione $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ di $[a, b]$, il dominio su cui vogliamo integrare, con la F-distanza tra i nodi, dove F è una funzione monotona crescente. Quindi mentre le somme di Darboux dal basso e dall'alto si presentano rispettivamente come

$$L_\Gamma = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)(x_{i+1} - x_i),$$
$$U_\Gamma = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)(x_{i+1} - x_i);$$

le somme di Riemann-Stieltjes-Darboux equivalgono invece a

$$L(\Gamma, F) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)),$$
$$U(\Gamma, F) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i));$$

anche queste ultime assomigliano all'integrale ($\diamond$) per ragioni simili a quelle già dette prima. Il concetto di F-lunghezza di cui abbiamo parlato e che abbiamo visto essere il punto di partenza per definire la misura μ_F, nasce da qui, nasce dal lavoro di Stieltjes, che per primo ebbe l'idea di sostituire delle distanze con delle F-distanze; per questo motivo l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes porta anche il suo nome.

Vedremo due diverse definizioni di integrale di Riemann-Stieltjes: la prima sfrutterà le somme di Riemann-Stieltjes R_Γ per stabilire quando g, una funzione limitata, sia Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a F una funzione reale. Mentre la seconda, con la richiesta che F sia monotona crescente, si servirà delle somme di Riemann-Stieltjes-Darboux. Abbiamo già detto che l'integrale di Riemann-Stieltjes estende l'integrale di Riemann, mentre quello di Lebesgue-Stieltjes estende l'integrale di Lebesgue; e dal corso di Analisi 2 sappiamo che con opportune richieste gli integrali di Lebesgue e di Riemann coincidono. Il nostro compito finale sarà quello di indagare se sotto opportune ipotesi sulle funzioni g e F sia possibile confrontare l'Integrale di Riemann-Stieltjes con quello di Lebesgue-Stieltjes. Infine con l'esempio di una funzione Lebesgue-Stieltjes integrabile ma non Riemann-Stieltjes integrabile chiuderemo la Tesi, a conferma del fatto che l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes allarga il campo di funzioni integrabili.

Indice

Introduzione **i**

1 Preliminari e Notazioni **1**

1.1 Teoria della Misura 1

1.2 Estensione unica di premisure a misure 5

1.3 Funzioni di distribuzione 8

2 Misure di Borel reali **11**

2.1 Funzioni di distribuzione da misure di Borel 19

2.2 Caratterizzazione delle misure di Borel 23

3 Gli integrali di Lebesgue-Stieltjes **27**

3.1 Passaggio al limite sotto il segno di integrale 32

3.2 Approssimare con somme di Riemann-Stieltjes 35

4 Confronto con l'integrale di Riemann-Stieltjes **41**

Bibliografia **55**

Capitolo 1

Preliminari e Notazioni

Impieghiamo il primo capitolo a ricordare alcune definizioni legate alla Teoria della Misura. Prestiamo particolare attenzione agli esempi riportati, l'algebra generata dagli intervalli semi-chiusi a destra e la sigma algebra di Borel, giacché saranno continuamente richiamati in seguito. Nella seconda parte del capitolo, invece, apriamo un discorso sulle funzioni di distribuzione illustrandone le principali proprietà; specialmente la crescente monotonia e la continuità da destra rendono questa classe di funzioni la più adatta ad introdurre nuove misure su $\mathbb{R}$, come verrà meglio approfondito nel secondo capitolo.

1.1 Teoria della Misura

Definizione 1.1 (Algebra di insiemi). *Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi su un insieme X. Chiamiamo $\mathcal{A}$ un'algebra di insiemi su X se rispetta le proprietà:*

1. *$\varnothing \in \mathcal{A}$;*
2. *se A è un elemento di $\mathcal{A}$, allora il complementare di A appartiene ad $\mathcal{A}$;*
3. *se A e B sono elementi di $\mathcal{A}$, allora $A \cup B$ appartiene ad $\mathcal{A}$.*

Esempio 1.2. Consideriamo la famiglia di insiemi:

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \right\},$$

per $a_j, b_j \in \overline{\mathbb{R}}$. Sono dunque ammessi elementi come $(-\infty, +\infty), (-\infty, b_j], (a_j, +\infty)$ con la seguente convenzione notazionale: $(a_j, +\infty) \equiv (a_j, +\infty]$ e $(a; a] = \varnothing$. Si può provare che $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi su $\mathbb{R}$. Tralasciando le formali verifiche mirate ad evidenziare la struttura di algebra, osserviamo che ogni elemento di $\mathcal{A}$ non necessariamente si esprime tramite unione digiunta di intervalli $(a_j, b_j]$, ma la si può rendere tale.

Osservazione 1.3. Un'algebra di insiemi è chiusa per intersezioni finite. Infatti, siano $A, B \in \mathcal{A}$; dalle leggi di De Morgan segue $A \cap B = \left(A^C \cup B^C\right)^C$; poiché un'algebra è chiusa per complementare e per unioni finite segue quanto detto.

Definizione 1.4 (**Sigma-algebra**). *Una sigma-algebra $\mathcal{F}$ su un insieme X, è un'algebra di insiemi di X chiusa per unioni numerabili di insiemi.*

Osservazione 1.5. Sia $\{X_i\}$ una collezione non vuota di sottoinsiemi di X; indichiamo con $\sigma(\{X_i\})$ la più piccola sigma-algebra contenente $\{X_i\}$.

Esempio 1.6 (**Sigma algebra di Borel**). Indicata brevemente con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, è definita come la più piccola sigma-algebra su $\mathbb{R}$ contenente gli intervalli aperti. Gli elementi che ne fanno parte si dicono insiemi boreliani.

Osservazione 1.7. Se una sigma-algebra $\mathcal{F}$ contiene l'algebra $\mathcal{A}$ dell'Esempio 1.2, conterrà gli intervalli aperti. Infatti, sfruttando la chiusura della σ-algebra per unione numerabile, vediamo che:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \right\}, \quad (-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right] \right\}.$$

Ma allora $\mathcal{F}$ contiene sicuramente $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, poiché questa è definita come la più piccola sigma-algebra avente la proprietà di contenere gli intervalli aperti.

Qui e nel seguito, dato un insieme X, indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.

Definizione 1.8 (**Misura esterna**). *Sia X un insieme. Chiamiamo misura esterna su X ogni funzione μ^* definita su $\mathcal{P}(X)$ a valori in $[0, +\infty]$ con le seguenti proprietà:*

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$,
2. *se $A, B \subset X$ con $A \subset B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;*
3. *per ogni $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ si ha*

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n);$$

in tal caso μ^* si dice σ-subadditiva.

Definizione 1.9 (**Misura**). *Sia $\mathcal{F}$ una sigma-algebra su un insieme X. Una misura μ è una funzione a valori in $[0, +\infty]$ definita sugli insiemi della sigma-algebra e che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$,

2. *se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una collezione di insiemi in $\mathcal{F}$, a due a due disgiunti, allora*

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu\left(A_j\right);$$

   in tal caso μ si dice σ-additiva.

In generale $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prende il nome di spazio di misura, e un insieme A si dice μ-misurabile se $A \in \mathcal{F}$.

Osservazione 1.10 (**Misura di Borel**). Una misura di Borel μ è una funzione definita sugli insiemi della sigma-algebra di Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, a valori in $[0, +\infty]$, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mu(\varnothing) = 0$,

2. se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una collezione di insiemi in $\mathcal{F}$, a due a due disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu\left(A_j\right),$$

3. per ogni insieme compatto, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha $\mu(A) < +\infty$.

   Quest'ultima proprietà si estende a tutti gli insiemi boreliani limitati, infatti se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è un insieme limitato, allora la chiusura di A, $\bar{A}$, dal Teorema di Heine-Borel è compatta e quindi ha misura finita; per la monotonia di μ si conclude che

$$\mu(A) \leq \mu(\overline{A}) < +\infty.$$

Definizione 1.11 (**Pre-misura**). *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra su un insieme X. Una pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ è una funzione definita sugli insiemi dell'algebra, a valori in $[0, +\infty]$, con le seguenti proprietà:*

1. $\mu_{\mathcal{A}}(\varnothing) = 0$,

2. *se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una collezione di insiemi in $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, tali che $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$, allora*

$$\mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu_{\mathcal{A}}\left(A_j\right). \tag{1.1}$$

Osservazione 1.12. Il nome pre-misura su un'algebra sottolinea una certa familiarità con il concetto di misura su una sigma-algebra. In effetti le definizioni risultano identiche ad eccezione dell'insieme di definizione. In particolar modo è bene prestare attenzione alla proprietà (1.1) comunemente chiamata additività numerabile o σ-additività. Mentre vale sempre per una misura su una sigma-algebra, nel caso di una pre-misura vale soltanto per le collezioni di insiemi dell'algebra la cui unione numerabile è un elemento dell'algebra stessa; fatto non scontato dal momento che un'algebra di insiemi è chiusa soltanto per unioni finite.

Corollario 1.13 (**Subadditività di una pre-misura**). *Una pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ di un'algebra $\mathcal{A}$ è numerabilmente subadditiva: ossia, se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ è una collezione numerabile di insiemi, per ogni $A \in \mathcal{A}$ tale che $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ allora vale che*

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) \leq \sum_j \mu_{\mathcal{A}}(A_j). \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\begin{aligned}
A'_1 &= A \cap A_1, \\
A'_2 &= A \cap A_2 \cap A_1^C, \\
&\vdots \\
A'_j &= A \cap A_j \cap A_{j-1}^C \cap \cdots \cap A_1^C.
\end{aligned}$$

Allora $\left\{A'_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ sono disgiunti, $A'_j \in \mathcal{A}$ e $A'_j \subseteq A_j$ per ogni j; inoltre $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j$. Dalla additività numerabile e dalla monotonia di $\mu_{\mathcal{A}}$, segue

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(A'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(A_j).$$

Questo conclude la prova. □

A conclusione di questo breve riepilogo di definizioni legate alla Teoria della Misura, riportiamo due importanti proprietà di continuità di μ, particolarmente usate nelle dimostrazioni del capitolo successivo.

Proposizione 1.14. *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura.*

1. *Continuità dal basso: se $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni n, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

2. *Continuità dall'alto: se $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni n e $\mu\left(A_1\right) < +\infty$, allora*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

La prova è ben nota dal corso di Analisi 2 e la omettiamo.

1.2 Estensione unica di premisure a misure

Nella precedente sezione abbiamo chiarito la differenza tra una pre-misura su un'algebra e una misura su una sigma-algebra. Parliamo di "estensione" di una pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ quando si ha una misura μ definita su una sigma-algebra contenente $\mathcal{A}$, tale che $\mu(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. I teoremi di estensione di Carathéodory e Hahn-Kolmogorov forniscono in modo concreto una possibile estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$.

Definizione 1.15 (**Spazio di misura completo**)**.** *Sia* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio di misura. Esso si dice completo se vale quanto segue: se* $A \in \mathcal{F}$ *è tale che* $\mu(A) = 0$*, allora per ogni* $B \subseteq A$ *si ha che* $B \in \mathcal{F}$*.*

Osservazione 1.16. La completezza è una proprietà riguardante non la misura, ma la sigma-algebra dello spazio di misura completo; infatti dalla definizione vediamo che tutti i sottoinsiemi di un insieme misurabile avente misura nulla, sono misurabili. Tuttavia per brevità si usa dire solamente che la misura μ è completa.

Definizione 1.17 (**Criterio di misurabilità alla Carathéodory**)**.** *Sia* μ^* *una misura esterna su* X*. Dato* $A \subseteq X$ *diciamo che* A *è* μ^**- misurabile nel senso di Carathéodory se per ogni* $E \subseteq X$ *vale*

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^C \cap E). \tag{1.3}$$

Teorema 1.18 (**Primo teorema di estensione di Carathéodory**)**.** *Sia* μ^* *una misura esterna su* X*. Denotiamo* $\mathcal{C}(X)$ *la collezione di insiemi* μ^**-misurabili nel senso di Carathéodory. Allora* $\mathcal{C}(X)$ *è una sigma-algebra completa e, se* μ *è la restrizione di* μ^* *a* $\mathcal{C}(X)$*, allora* μ *è una misura e dunque* $(X, \mathcal{C}(X), \mu)$ *è uno spazio di misura completo.*

Restringere il dominio di μ^* a $\mathcal{C}(X)$ consente di ottenere una misura. Non lo dimostriamo nel suo caso generale,[1] ma lo riprendiamo nel prossimo capitolo applicandolo alle misure di Lebesgue-Stieltjes. Il prossimo teorema, invece, collega una pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ data su un'algebra $\mathcal{A}$ a una misura esterna μ^*, la quale, per il Teorema 1.18, è associata a una misura μ. Cruciale è mostrare che μ è proprio una estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$.

Teorema 1.19 (**Teorema di estensione di Hahn-Kolmogorov**)**.** *Sia* $\mathcal{A}$ *un'algebra di insiemi su* X *e* $\mu_{\mathcal{A}}$ *una pre-misura su* $\mathcal{A}$*. Allora* $\mu_{\mathcal{A}}$ *dà origine a una misura esterna* $\mu^*_{\mathcal{A}}$ *su* $\mathcal{P}(X)$*, la quale fornisce una estensione di* $\mu_{\mathcal{A}}$ *a una misura* μ *sulla sigma-algebra completa* $\mathcal{C}(X)$ *definita sopra, con* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$*.*

[1] Al Capitolo 6 di [1] per la dimostrazione completa del Teorema 1.18 nel caso generale.

Dimostrazione. Innanzitutto, partendo da $\mu_{\mathcal{A}}$ (che è data) indichiamo con $\mu^*_{\mathcal{A}}$ la seguente funzione: per $A \in \mathcal{P}(X)$, poniamo

$$\mu^*_{\mathcal{A}}(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n A_n,\ A_n \in \mathcal{A} \right\}; \tag{1.4}$$

se A non ammette un tale ricoprimento $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, allora in tal caso poniamo $\mu^*_{\mathcal{A}}(A) = +\infty$. Dimostriamo che $\mu^*_{\mathcal{A}}$ è una misura esterna, anche detta misura esterna indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$. Verifichiamo che $\mu^*_{\mathcal{A}}(\varnothing) = 0$. Da (1.4) sappiamo che $\mu^*_{\mathcal{A}}(A) \leq \mu_{\mathcal{A}}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, dunque $\mu^*_{\mathcal{A}}(\varnothing) \leq \mu_{\mathcal{A}}(\varnothing)$ e $\mu_{\mathcal{A}}(\varnothing) = 0$ poiché $\mu_{\mathcal{A}}$ è una pre-misura. Per la monotonia e la subadditività numerabile rimandiamo alla Proposizione 2.10 del prossimo capitolo, poiché la tecnica di dimostrazione è identica. Infatti anche se in quel caso l'algebra di riferimento è quella dell'Esempio 1.2 e $\mu_{\mathcal{A}}$ è opportunamente definita come vedremo dettagliatamente nel Capitolo 2, ciò non è rilevante ai fini della tesi: la dimostrazione di monotonia e subadditività numerabile è valida per un contesto più generale di quello specificato. Appurato che $\mu^*_{\mathcal{A}}$ è una misura esterna, dal Teorema 1.18 otteniamo μ una misura su $\mathcal{C}(X)$, sigma-algebra completa, e μ è la restrizione di $\mu^*_{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{C}(X)$. Resta ora da provare solamente che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$ e $\mu(A) \equiv \mu^*_{\mathcal{A}}(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)$ per $A \in \mathcal{A}$.

Se $A \in \mathcal{A}$, proviamo che A è un insieme $\mu^*_{\mathcal{A}}$- misurabile alla Carathéodory. Basta dimostrare che

$$\mu^*_{\mathcal{A}}(E) \geq \mu^*_{\mathcal{A}}(A \cap E) + \mu^*_{\mathcal{A}}(A^C \cap E) \quad (\text{per ogni}\, E \subseteq X), \tag{1.5}$$

poiché l'altra disuguaglianza segue dalla subadditività della misura esterna. Dalla caratterizzazione dell'inf segue che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una famiglia di insiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ per cui $E \subseteq \bigcup_n A_n$ e

$$\sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) < \mu^*_{\mathcal{A}}(E) + \epsilon.$$

Essendo $\mu_{\mathcal{A}}$ una pre-misura su $\mathcal{A}$, è finitamente additiva, e quindi

$$\mu_{\mathcal{A}}(A_n) = \mu_{\mathcal{A}}(A_n \cap A) + \mu_{\mathcal{A}}(A_n \cap A^C), \quad \text{per ogni}\, n.$$

Inoltre, poiché $E \subseteq \bigcup_n A_n$ allora,

$$E \cap A \subseteq \bigcup_n (A_n \cap A) \quad \text{e} \quad E \cap A^C \subseteq \bigcup_n \left(A_n \cap A^C\right).$$

Per monotonia e subadditività di $\mu_{\mathcal{A}}$ traiamo le ultime conclusioni:

$$\begin{aligned}
\mu^*_{\mathcal{A}}(E) + \epsilon &> \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n \cap A) + \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n \cap A^C) \\
&\geq \mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_n (A_n \cap A)\right) + \mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_n (A_n \cap A^C)\right) \\
&\geq \mu_{\mathcal{A}}(E \cap A) + \mu_{\mathcal{A}}\left(E \cap A^C\right) \\
&\geq \mu^*_{\mathcal{A}}(E \cap A) + \mu^*_{\mathcal{A}}\left(E \cap A^C\right),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta alla definizione di $\mu^*_{\mathcal{A}}$. Dall'arbitrarietà di ϵ segue (1.5). Infine proviamo che per $A \in \mathcal{A}$ vale

$$\mu^*_{\mathcal{A}}(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)\,. \tag{1.6}$$

Avendo $A \in \mathcal{A}$ e prendendo $A_n = A$ in (1.4) per ogni n, banalmente si avrà

$$\mu^*_{\mathcal{A}}(A) \leq \mu_{\mathcal{A}}(A).$$

D'altra parte se $A \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq \bigcup_n A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$, dalla subadditività numerabile di $\mu_{\mathcal{A}}$ si ha

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) \leq \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n).$$

Essendo vera per tutte le famiglie di insiemi $\{A_n\}$ con le proprietà suddette, allora

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) \leq \inf \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) \equiv \mu^*_{\mathcal{A}}(A).$$

Dunque misura esterna e pre-misura coincidono sugli elementi di $\mathcal{A}$, il che comporta, come già detto, l'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ a μ, misura completa. □

Passiamo ora ad analizzare se sotto particolari richieste sia possibile estendere in maniera unica una pre-misura a una misura. Restringendo il campo a pre-misure σ-finite l'unicità della estensione è garantita su $\sigma(\mathcal{A})$, ovvero sulla più piccola sigma-algebra contenente $\mathcal{A}$.

Definizione 1.20 (Pre-misura σ-finita). *Sia X un insieme, $\mu_{\mathcal{A}}$ una pre-misura su un'algebra $\mathcal{A}$ di X. Si dice che $\mu_{\mathcal{A}}$ è una pre-misura σ-finita, se X si può esprimere come unione numerabile di insiemi di pre-misura finita. Ovvero esiste una famiglia $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ tale che*

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad \text{con } \mu_{\mathcal{A}}(X_j) < +\infty.$$

Osservazione 1.21. Anche un generico spazio di misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$ si definisce σ-finito, o μ si dice misura σ-finita, sempre se esiste una famiglia $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ in $\mathcal{F}$ tale che

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad \text{con } \mu(X_j) < +\infty.$$

Esempio 1.22. Le misure di Lebesgue e di Borel su $\mathbb{R}$ sono misure σ-finite.

Teorema 1.23 (**Unicità della estensione**). *Sia $\mu_{\mathcal{A}}$ una pre-misura σ-finita su un'algebra $\mathcal{A}$ e μ l'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$, ottenuta come nella dimostrazione del Teorema 1.19. Se μ' è una qualunque altra estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ allora $\mu(B) = \mu'(B)$ per ogni $B \in \sigma(\mathcal{A})$, dove $\sigma(\mathcal{A})$ denota la più piccola sigma-algebra contenente $\mathcal{A}$.*

Per la dimostrazione del teorema e per ulteriori approfondimenti rimandiamo al Capitolo 6 di [1], dove viene discussa con maggiore chiarezza e completezza l'intera procedura per estendere in maniera unica una misura partendo da una pre-misura data.

Osservazione 1.24. Mentre sappiamo come costruire l'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ alla misura μ, nulla sappiamo su μ' se non che è una estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$. Ciò significa che μ' è definita su una sigma-algebra $\mathcal{F}$, tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, e per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $\mu'(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)$. Senz'altro μ' è definita anche su $\sigma(\mathcal{A})$, la più piccola sigma-algebra contenente $\mathcal{A}$. Su questa specifica sigma-algebra tutte le possibili estensioni di $\mu_{\mathcal{A}}$ devono coincidere.

1.3 Funzioni di distribuzione

Definizione 1.25. *Sia f una funzione misurabile a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e definita sullo spazio di misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Denotiamo con D_f la funzione di distribuzione associata ad f e la definiamo come segue:*

$$D_f(y) = \mu(X_f(y)) \quad \textit{ove } X_f(y) = f^{-1}((-\infty, y]), \textit{ per } y \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Osservazione 1.26. Prima della definizione appena data sarebbe stato forse più corretto ricordare cosa intendiamo quando diciamo che una funzione è misurabile. Trattandosi però di un concetto strettamente legato alla definizione di integrale abbiamo preferito approfondire l'argomento parlando degli Integrali di Lebesgue-Stieltjes al Capitolo 3. Nella Definizione 1.25 la misurabilità di f è fondamentale affinché D_f sia ben posta, ovvero garantisce che $X_f(y) \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1.27. La funzione D_f assume valori in $[0, +\infty]$, infatti se $X_f(y) = \varnothing$ allora per definizione $D_f(y) = 0$, mentre se $X_f(y) = X$ e X non ha misura finita, allora $D_f(y) = +\infty$.

Proposizione 1.28. *Sia f una funzione misurabile a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ definita sullo spazio di misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$. La funzione distribuzione associata ad f ha le seguenti proprietà:*

1. *D_f è una funzione definita su $\mathbb{R}$ non negativa, crescente, Borel misurabile.*
2. *Se $D_f(z_0) < +\infty$ per un qualche z_0, allora:*
   (a) *per ogni $y < z_0$, si ha*
   $$\lim_{z \to y^+} D_f(z) = D_f(y);$$
   (b) *per ogni $y < z_0$, si ha*
   $$\lim_{z \to y^-} D_f(z) = D_f(y) - \mu(\{x \mid f(x) = y\});$$
   (c) *esiste il limite di $D_f(y)$ per $z \to -\infty$, ed esso è dato da*
   $$\lim_{z \to -\infty} D_f(z) = \mu(\{x \mid f(x) = -\infty\}).$$
3. *Se $\mu(X)$ è finita, esiste il limite di D_f per $z \to +\infty$, ed esso è dato da*
$$\lim_{z \to +\infty} D_f(z) = \mu(X) - \mu(\{x \mid f(x) = +\infty\}).$$

Dimostrazione. Il fatto che D_f è una funzione non negativa, segue da μ che è a valori non negativi, mentre la monotonia è conseguenza della monotonia di μ, osservando anche che per $y < z$ allora $X_f(y) \subseteq X_f(z)$. Proviamo inoltre che $D_f^{-1}((-\infty, z]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per ogni z. Osserviamo preliminarmente che

$$D_f^{-1}((-\infty, z]) = \{y \mid D_f(y) \leq z\} = \left\{y \mid \mu\left(f^{-1}((-\infty, y])\right) \leq z\right\}.$$

Se $\mu(f^{-1}((-\infty, y])) > z$ per ogni y allora $D_f^{-1}((-\infty, z]) = \varnothing$, un insieme di Borel. Altrimenti se $y_0 \in D_f^{-1}((-\infty, z])$ si ha $(-\infty, y_0] \subseteq D_f^{-1}((-\infty, z])$ perché, per $y < y_0$, $D_f(y) \leq D_f(y_0)$. Se $D_f^{-1}((-\infty, z]) = (-\infty, y_0]$, avremmo concluso la prova della Borel-misurabilità; invece se $y_0' \in D_f^{-1}((-\infty, z])$ con $y_0' > y_0$, da un ragionamento analogo al precedente segue che $(-\infty, y_0'] \subseteq D_f^{-1}((-\infty, z])$ e riscrivendo $D_f^{-1}((-\infty, z]) = \bigcup_{y_0' > y_0} (-\infty, y_0']$. Rendiamo quest'ultima una unione numerabile indicizzando solo sui razionali y_0' e vediamo quindi chiaramente che $D_f^{-1}((-\infty, z])$ è un Boreliano, da cui D_f è Borel misurabile.

Per (2.a) notiamo che $X_f(y) = \bigcap_{r > y} X_f(r)$ intersezione numerabile sui razionali $y < r < z_0$. Dal momento che $\mu(X_f(z_0)) < +\infty$, per la continuità dall'alto della misura si ha che

$$\mu(X_f(y)) = \lim_{r \to y^+} \mu(X_f(r)),$$

che equivale alla tesi, perché $D_f(z)$ è crescente. Usando un'argomentazione analoga per l'unione numerabile $X_f(y^-) = \bigcup_{r<y} X_f(r)$, segue che

$$\mu(X_f(y^-)) = \lim_{z\to y^-} \mu(X_f(z)). \quad (\heartsuit)$$

Poiché $\mu(X_f(y)) = \mu(X_f(y^-)) + \mu(\{x \,|\, f(x) = y\})$ segue che $\mu(\{x \,|\, f(x) = y\}) < +\infty$ perché $y < z_0$ e $D_f(z_0) < +\infty$ per ipotesi; allora

$$\begin{aligned} D_f(y) - \mu(\{x \,|\, f(x) = y\}) &= \mu(X_f(y)) - \mu(\{x \,|\, f(x) = y\}) = \\ &= \mu(X_f(y^-)) \overset{(\heartsuit)}{=} \lim_{z\to y^-} \mu(X_f(z)). \end{aligned}$$

Uno stesso ragionamento per $X_f(-\infty) = \bigcap_r X_f(r)$ implica che

$$\mu(X_f(-\infty)) = \lim_{z\to -\infty} \mu(X_f(z)).$$

Infine per 3, osserviamo che $X_f(+\infty^-) = \bigcup_{r<+\infty} X_f(r)$ e per continuità dal basso della misura risulta

$$\mu(X_f(+\infty^-)) = \lim_{z\to +\infty} \mu(X_f(z)). \quad (\diamond)$$

Poiché $\mu(X) = \mu(\{x \,|\, f(x) < +\infty\}) + \mu(\{x \,|\, f(x) = +\infty\})$ e $\mu(X)$ è finita per ipotesi, segue che $\mu(\{x \,|\, f(x) = +\infty\}) < +\infty$; allora

$$\begin{aligned} \mu(X) - \mu(\{x \,|\, f(x) = +\infty\}) &= \mu(\{x \,|\, f(x) < +\infty\}) = \\ = \mu(X_f(+\infty^-)) &\overset{(\diamond)}{=} \lim_{z\to +\infty} \mu(X_f(z)) = \lim_{z\to +\infty} D_f(X_f(z)), \end{aligned}$$

questo conclude la prova. □

Osservazione 1.29. La precedente proposizione mette in risalto la continuità destra e l'esistenza dei limiti sinistri di D_f. Da (2.b) vediamo che per raggiungere anche la continuità sinistra basterebbe che l'insieme $\{x \,|\, f(x) = y\}$ avesse misura nulla, ma non sempre questo è garantito. Deduciamo allora: in generale nel grafico di D_f possono presentarsi delle discontinuità di tipo "salto", la cui ampiezza misura esattamente $\mu(\{x \,|\, f(x) = y\})$. Ciascuno di questi salti contiene un numero razionale sempre diverso, data la monotonia crescente della funzione, pertanto risulterà una quantità al più numerabile di discontinuità.

Capitolo 2

Misure di Borel reali

In questo capitolo scopriamo come nascono nuove misure boreliane reali, a partire da funzioni monotone crescenti e continue da destra F. Le misure così costruite sono chiamate misure di Lebesgue-Stieltjes, indicate μ_F, per sottolinearne la dipendenza dalla funzione F da cui discendono.

Definizione 2.1. *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e continua da destra. Definiamo, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$,*

$$|(a, b]|_F = F(b) - F(a), \tag{2.1}$$

detta la F-lunghezza dell'intervallo $(a, b]$.

Osservazione 2.2. L'espressione (2.1) è una riformulazione del concetto di "lunghezza" di un intervallo reale; in particolare se $F(x) = x$ la F-lunghezza appena definita coincide con la misura di Lebesgue sugli intervalli $(a, b]$.

Nel Capitolo 1 abbiamo definito un'algebra di insiemi indicandola con la lettera $\mathcal{A}$; da questo momento in poi useremo questo stesso simbolo per indicare esclusivamente l'algebra generata dagli intervalli $(a, b]$, anticipata nell'Esempio 1.2.

Proposizione 2.3. *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente, continua da destra. Allora è ben definita una funzione non negativa $\mu_{\mathcal{A}}$, dall'algebra $\mathcal{A}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ con la seguente proprietà: se $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ con $I_j = (a_j, b_j]$ disgiunti[1] e $a_j, b_j \in \overline{\mathbb{R}}$, allora*

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{j=1}^{n} \left(F(b_j) - F(a_j)\right); \tag{2.2}$$

[1] Come scritto nell'Esempio 1.2 sappiamo che è ammissibile la richiesta di una unione disgiunta.

specificando che nel caso in cui I_j sia uguale a $(-\infty, b_j]$ o $(a_j, +\infty)$ o ancora $(-\infty, +\infty)$ per un qualche j poniamo

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) \tag{2.3}$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x). \tag{2.4}$$

Osservazione 2.4. Dal corso di Analisi 1 sappiamo dell'esistenza dei limiti unilateri per ogni punto del dominio di una funzione monotona. La funzione F della Proposizione 2.3 è monotona crescente ed è definita su tutto $\mathbb{R}$ perciò i limiti (2.3) e (2.4) sono ben definiti.

Dimostrazione. Dall'espressione (2.2), $\mu_{\mathcal{A}}(A)$ risulta somma delle F-lunghezze degli intervalli disgiunti che compongono l'insieme A:

$$\mu_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{j=1}^{n} (F(b_j) - F(a_j)) = \sum_{j=1}^{n} |I_j|_F\,; \tag{2.5}$$

quindi vediamo che $\mu_{\mathcal{A}}$ è una estensione di (2.1), dagli intervalli $(a, b]$, all'intera algebra da essi generata. Nel caso in cui A contenesse un intervallo illimitato, almeno uno degli addendi della sommatoria (2.2) equivarebbe a uno dei seguenti:

$$F(+\infty) - F(a_j),\ F(b_j) - F(-\infty),\ F(+\infty) - F(-\infty), \tag{2.6}$$

che potrebbero dare $\mu_{\mathcal{A}}(A) = +\infty$ qualora F fosse una funzione crescente illimitata. Dunque $\mu_{\mathcal{A}}$ assume valori in $\overline{\mathbb{R}}$ ed è non negativa per la monotonia di F. Mancherebbe solamente da provare la buona positura di $\mu_{\mathcal{A}}(A)$ mostrando che non dipende dalla scelta degli intervalli $I_j = (a_j, b_j]$; tralasciamo i dettagli trattandosi di una parte puramente tecnica e non indispensabile ai fini della tesi[2]. □

Ora $\mu_{\mathcal{A}}$ è una funzione definita sull'intera algebra $\mathcal{A}$: proviamo che è una pre-misura.

Proposizione 2.5. *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente, continua da destra. Sia $\mu_{\mathcal{A}}$ la funzione definita nella Proposizione 2.3; allora $\mu_{\mathcal{A}}$ è una pre-misura sull'algebra $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. La verifica di $\mu_{\mathcal{A}}(\varnothing) = 0$ è banale: ricordandosi che $\varnothing \in \mathcal{A}$ scritto come $(a, a]$, segue quanto detto. Proviamo la monotonia: siano $A', A \in \mathcal{A}$ con $A' \subseteq A$; allora dobbiamo provare che

$$\mu_{\mathcal{A}}(A') \leq \mu_{\mathcal{A}}(A)\,. \tag{2.7}$$

[2]Se di interesse consultare il Capitolo 5.2 di [1] dove è presente la dimostrazione per intero.

Poiché A', A sono elementi di $\mathcal{A}$, ciascuno si può riscrivere come unione finita disgiunta di intervalli I'_j, I_l tali che $A' = \bigcup_{j=1}^{n} I'_j$ e $A = \bigcup_{l=1}^{m} I_l$. Poiché $A' \subseteq A$, vale $A = A' \cup \left(A \cap A'^C\right)$ con $A \cap A'^C \in \mathcal{A}$, dunque a sua volta si ha $A \cap A'^C = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$. Dal momento che $\mu_{\mathcal{A}}(A)$ non dipende dalla scelta dei sottointervalli disgiunti in cui A si spezza, possiamo allora prendere

$$A = \bigcup_{l=1}^{m} I_l \quad \text{con } I_l = \begin{cases} I'_l & l = 1, 2, \ldots, n \\ K_{l-n} & l = n+1, n+2, \ldots, n+r = m. \end{cases}$$

Dalla (2.5) vediamo che

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{l=1}^{m} |I_l|_F &= \sum_{l=1}^{n} |I'_l|_F + \sum_{l=n+1}^{n+r} |K_{l-n}|_F \\ &= \mu_{\mathcal{A}}(A') + \sum_{l=n+1}^{n+r} |K_{l-n}|_F \geq \mu_{\mathcal{A}}(A'), \end{aligned}$$

da cui segue la monotonia di $\mu_{\mathcal{A}}$. Dimostriamo infine l'additività numerabile, partendo dalla finita additività: sia $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ con $A_j \in \mathcal{A}$ disgiunti, allora dobbiamo provare che

$$\mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{\mathcal{A}}(A_j). \tag{2.8}$$

A_j si scriverà come unione finita disgiunta di intervalli semi-chiusi a destra, per ogni $j = 1, \ldots, n$; dunque anche A è unione finita disgiunta di intervalli semi-chiusi a destra. Se $\mu_{\mathcal{A}}(A_j) = +\infty$ per un qualche j, allora $\mu_{\mathcal{A}}(A) = +\infty$ per monotonia, il che prova la finita additività in questo caso. Assumiamo quindi $\mu_{\mathcal{A}}(A_j) < +\infty$ per ogni j. Dal momento che A è unione finita disgiunta di intervalli semi-chiusi a destra, $\mu_{\mathcal{A}}(A)$ è ben definita da (2.2) ed è la somma finita delle F-lunghezze degli intervalli che lo compongono. I termini di questa somma finita si possono riordinare in modo da ottenere la somma in j di $\mu_{\mathcal{A}}(A_j)$, da cui la finita additività (2.8) è provata.

Assumiamo ora che $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ sia una famiglia numerabile disgiunta di insiemi per cui $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Dalla definizione di $\mathcal{A}$ segue:

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{n_j} I_k^{A_j}, \quad \text{con} \quad I_k^{A_j} \quad \text{disgiunti} \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{r=1}^{m} I_r, \quad \text{con} \quad I_r \quad \text{disgiunti.}$$

Da questo ragionamento risulta:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} I_k^{A_j}\right),$$

o equivalentemente rinumerando e rinominando diversamente,

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} I'_l \quad \text{con} \quad I'_l \quad \text{intervalli semi-chiusi a destra tutti disgiunti.}$$

Poiché A è sia unione finita disgiunta di intervalli I_r, sia unione numerabile disgiunta di intervalli I'_l, inevitabilmente questo comporta che ogni intervallo I_r debba essere equivalente alla unione finita o numerabile di I'_l. Sulla base di ciò l'additività numerabile, ossia

$$\mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(A_j), \tag{2.9}$$

seguirà dalla validità della seguente uguaglianza per gli intervalli disgiunti prima nominati:

$$\mu_{\mathcal{A}}(I_r) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l); \quad \text{ove} \quad I_r = \bigcup_{l=1}^{\infty} I'_l. \tag{2.10}$$

Se $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l) = +\infty$, dalla monotonia e finita additività di $\mu_{\mathcal{A}}$ si ha $\mu_{\mathcal{A}}(I_r) = +\infty$, infatti

$$\mu_{\mathcal{A}}(I_r) \geq \mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{l=1}^{n} I'_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l).$$

Ora assumiamo $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l) < +\infty$. Denotiamo $I_r = (a, b]$ e $I'_l = (a_l, b_l]$; per uno di questi si avrà $b_l = b$ dal momento che se $b_l < b$ per tutte le l, allora $\bigcup_{l=1}^{\infty} I'_l \subseteq (a, b)$, il che è contraddittorio. Chiamiamo $\overline{I'_1} = (\overline{a_1}, b]$ e scegliamo $\overline{I'_2} = (\overline{a_2}, \overline{a_1}]$. La scelta è legittima poiché, ragionando come in precedenza, se per tutte le l valesse $b_l < \overline{a_1}$ allora $(\bigcup_{l=1}^{\infty} I'_l) \smallsetminus \overline{I'_1} \subseteq (a, \overline{a_1})$, in contraddizione con il fatto che I_r è un intervallo. Andando avanti otteniamo un riordinamento di $\{I'_l\}$ in $\{\overline{I'_l}\} = \{(\overline{a_l}, \overline{b_l}]\}$ con $\overline{b_1} = b$ e $\overline{b_{l+1}} = \overline{a_l}$. Inoltre $\bigcup_{l=1}^{n} \overline{I'_l} = (\overline{a_n}, b]$ per ogni n, perciò per $n \longrightarrow +\infty$ si avrà $\overline{a_n} \longrightarrow a$. Poiché $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l) < +\infty$ è una serie a termini non negativi la si può riordinare. Per cui $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(\overline{I'_l})$ e dalla finita additività si ha:

$$\sum_{l=1}^{n} \mu_{\mathcal{A}}\left(\overline{I'_l}\right) = \mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{I'_l}\right) = F(b) - F(\overline{a_n}). \tag{2.11}$$

Per $n \longrightarrow +\infty$ otteniamo $\sum_{l=1}^{n} \mu_{\mathcal{A}}(\overline{I'_l}) \longrightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l)$ e per la continuità destra di F abbiamo $F(\overline{a_n}) \longrightarrow F(a)$. E (2.10) segue, infatti

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(I'_l) = F(b) - F(a) = \mu_{\mathcal{A}}(I_r). \tag{2.12}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Come ultimo passo rimane estendere la pre-misura $\mu_{\mathcal{A}}$ dall'algebra $\mathcal{A}$ a una misura μ_F su una σ-algebra contenente $\mathcal{A}$, in modo tale che $\mu_{\mathcal{A}}(A) = \mu_F(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. La misura ottenuta sarà una misura boreliana perché, come già ricordato nell'Osservazione 1.7, una sigma-algebra contenente $\mathcal{A}$ include automaticamente l'intera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Basandoci sui teoremi di estensione di Carathéodory e Hahn-Kolmogorov, riportati nel Capitolo 1.2, definiamo la misura esterna μ_F^* indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$ alla maniera di (1.4), precisando che in questo caso $\mu_{\mathcal{A}}$ è la pre-misura definita nella Proposizione 2.3.

Definizione 2.6 (Misura esterna). *Sia F una funzione monotona crescente, continua da destra e sia $\mu_{\mathcal{A}}$ la pre-misura definita da* (2.2) *sull'algebra $\mathcal{A}$. Chiamiamo misura esterna indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$ la seguente funzione: se A è un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$,*

$$\mu_F^*(A) = \inf\left\{ \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n A_n,\ A_n \in \mathcal{A} \right\}. \tag{2.13}$$

Osservazione 2.7. La definizione è ben posta dal momento che ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ammette un ricoprimento $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$.

Osservazione 2.8. Possiamo esprimere la misura esterna μ_F^* indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$ in termini di intervalli semi-chiusi a destra. Infatti se $A_n \in \mathcal{A}$ allora

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^n, \quad \text{con } I_j^n = (a_j^n, b_j^n] \text{ disgiunti.}$$

Per l'additività finita di $\mu_{\mathcal{A}}$ si ha

$$\mu_{\mathcal{A}}(A_n) = \mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^n\right) = \sum_{j=1}^{m_n} \mu_{\mathcal{A}}\left(I_j^n\right),$$

dunque sommando in n

$$\sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) = \sum_n \left(\sum_{j=1}^{m_n} \mu_{\mathcal{A}}\left(I_j^n\right)\right) = \sum_l \mu_{\mathcal{A}}(B_l),$$

con $B_l = (c_l, d_l] = I_j^n$ per n, j opportuni. Allora la definizione (2.13) è equivalente alla seguente

$$\begin{aligned}\mu_F^*(A) &= \inf\left\{ \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n A_n,\ A_n = (a_n, b_n] \right\} \\ &= \inf\left\{ \sum_n (F(b_n) - F(a_n)) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n A_n,\ A_n = (a_n, b_n] \right\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Osservazione 2.9. La misura esterna μ_F^* coincide con la funzione $\mu_{\mathcal{A}}$ sugli insiemi dell'algebra $\mathcal{A}$. Per la dimostrazione rimandiamo al Teorema 1.19 del capitolo precedente, teorema di estensione di Hahn-Kolmogorov, nel quale viene mostrato che $\mu^*_{\mathcal{A}}(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ (ove $\mu_{\mathcal{A}}$ è una generica pre-misura definita su un'algebra $\mathcal{A}$ qualsiasi e $\mu^*_{\mathcal{A}}$ è la misura esterna indotta da $\mu_{\mathcal{A}}$). Il ragionamento si ripete identico, pertanto non lo riportiamo nuovamente.

Evidenziamo le proprietà essenziali di μ^*_F che la rendono una misura esterna.

Proposizione 2.10. *Sia F una funzione monotona crescente, continua da destra, e μ^*_F la misura esterna definita in* (2.13)*. Allora:*

1. *$\mu^*_F(\varnothing) = 0$,*
2. *se $A \subseteq B$, allora $\mu^*_F(A) \leq \mu^*_F(B)$;*
3. *dato un insieme A e una famiglia numerabile di insiemi $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, se $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ allora*
$$\mu^*_F(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_F(A_n),$$
ossia vale la sub-additività numerabile di μ^*_F.

Dimostrazione. 1. Poniamo $A_1 = (a, a+\epsilon]$ e $A_n = (a,a] = \varnothing$ per $n \neq 1$; banalmente osserviamo che $\varnothing \subseteq \bigcup_n A_n$ e quindi per definizione di estremo inferiore come richiesto in (2.13) si ha
$$\mu^*_F(\varnothing) \leq \sum_n \mu_{\mathcal{A}}(A_n) = F(a+\epsilon) - F(a),$$
per ogni a e per ogni $\epsilon > 0$. Dall'arbitrarietà di ϵ e dalla continuità a destra di F segue la tesi.

2. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq \bigcup_n B_n$, allora $A \subseteq \bigcup_n B_n$. Secondo questo ragionamento deduciamo che
$$\left\{ \bigcup_n B_n \,\middle|\, B \subset \bigcup_n B_n,\, B_n \in \mathcal{A} \right\} \subseteq \left\{ \bigcup_n A_n \,\middle|\, A \subset \bigcup_n A_n,\, A_n \in \mathcal{A} \right\},$$
da cui concludiamo che $\mu^*_F(A) \leq \mu^*_F(B)$ poiché l'estremo inferiore cresce se calcolato su insiemi più piccoli.

3. Se $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e per un qualunque n si ha $\mu^*_F(A_n) = +\infty$, allora segue la tesi. Assumiamo dunque $\mu^*_F(A_n) < +\infty$ per ogni n. Dalla caratterizzazione dell'estremo inferiore possiamo dedurre che, dato $\epsilon > 0$, esiste per ogni n una famiglia numerabile di insiemi $\{A_{n,m}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ con $A_n \subseteq \bigcup_m A_{n,m}$ e tale che
$$\sum_m |A_{n,m}|_F < \mu^*_F(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{2.15}$$

Essendo $A \subseteq \bigcup_{n,m} A_{n,m}$, dalla Definizione 2.6 si ha

$$\mu_F^*(A) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |A_{n,m}|_F. \tag{2.16}$$

Sommando su n nella precedente disuguaglianza (2.15) otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |A_{n,m}|_F < \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(A_n) + \epsilon; \tag{2.17}$$

mettiamo insieme (2.16) e (2.17) per concludere che

$$\mu_F^*(A) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |A_{n,m}|_F < \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(A_n) + \epsilon, \tag{2.18}$$

e dall'arbitrarietà di ϵ otteniamo la tesi. □

Osservazione 2.11. Sottolineiamo una notevole differenza tra la misura esterna di Lebesgue e μ_F^*: secondo la misura esterna di Lebesgue i singoletti $\{a\}$, con $a \in \mathbb{R}$, hanno tutti misura nulla; nel nostro caso invece è importante distinguere tra punti di continuità e discontinuità della funzione F. Infatti, usando un'argomentazione simile a quella già vista per dimostrare che $\mu_F^*(\varnothing) = 0$, è semplice verificare che $\mu_F^*(\{a\}) = 0$ se a è un punto in cui F è continua. Tuttavia in generale si può dedurre molto di più, ossia

$$\mu_F^*(\{a\}) = F(a) - F(a^-), \tag{2.19}$$

dove $F(a^-)$ indica il limite sinistro di F in a; vediamo bene il motivo. Essendo $\{a\} \subseteq (a-\epsilon, a+\epsilon] \in \mathcal{A}$ e μ_F^* una funzione monotona, allora $\mu_F^*(\{a\}) \leq \mu_F^*((a-\epsilon, a+\epsilon]) = F(a+\epsilon) - F(a-\epsilon)$; la monotonia e la continuità a destra della funzione F ci lasciano concludere che

$$\mu_F^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a^-).$$

D'altro canto, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ contenente il singoletto $\{a\}$, si ha

$$(a-\epsilon_1, a+\epsilon_2] \subseteq A \quad \text{per opportuni } \epsilon_1 > 0 \text{ e } \epsilon_2 \geq 0 \, \text{(che dipendono da A)},$$

e dalla monotonia della funzione μ_F^* si deduce che

$$\mu_F^*(A) \geq \mu_F^*((a-\epsilon_1, a+\epsilon_2]) = F(a+\epsilon_2) - F(a-\epsilon_1) \quad \text{per ogni}\, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 \geq 0.$$

A quest'ultima disuguaglianza aplicchiamo l'estremo inferiore variando sui possibili insiemi A contenenti $\{a\}$ per cui risulta

$$\mu_F^*(\{a\}) = \inf_A \mu_F^*(A) \geq \inf_{\epsilon_j} (F(a+\epsilon_2) - F(a-\epsilon_1)) = F(a) - F(a^-),$$

terminando così la dimostrazione di (2.19).

Definizione 2.12 (**Criterio di misurabilità alla Carathéodory**). *Sia F una funzione monotona crescente, continua da destra e μ_F^* la misura esterna definita in (2.13). Un insieme A è misurabile alla Carathéodory rispetto a μ_F^* se per un qualunque insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ vale*

$$\mu_F^*(E) = \mu_F^*(A \cap E) + \mu_F^*(A^C \cap E). \tag{2.20}$$

In tal caso diciamo che $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$.

Osservazione 2.13. In generale, per verificare il criterio di misurabilità alla Carathéodory è sufficiente dimostrare la sola disuguaglianza

$$\mu_F^*(E) \geq \mu_F^*(A \cap E) + \mu_F^*(A^C \cap E), \tag{2.21}$$

poiché l'altra segue dalla subadditività numerabile della misura esterna μ_F^*.

La collezione di insiemi $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ racchiude tutti e soli gli insiemi misurabili secondo Carathéodory. Dal Teorema 1.18 prendiamo per buono che $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è una sigma-algebra[3], inoltre seguendo lo stesso ragionamento di quello visto nel Teorema 1.19 per provare che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$, si verifica che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$. Di più, in merito all'Osservazione 1.7, sappiamo anche che $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ contiene l'intera sigma-algebra di Borel e per tale ragione la funzione μ_F di cui parleremo poco sotto è una misura di Borel, perché verificheremo essere una misura definita sulla sigma-algebra $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$.

Concentriamoci dunque sul seguente risultato, conseguenza del Teorema 1.18.

Proposizione 2.14. *Sia μ_F la restrizione di μ_F^* a $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$. Allora μ_F è una misura e $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$ è uno spazio di misura completo.*

Osservazione 2.15. Osserviamo che μ_F^*, in quanto misura esterna, è definita in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, tuttavia ristretta alla sigma-algebra $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ diventa una misura.

Osservazione 2.16. Potremmo dedurre la tesi dal Teorema 1.18, ma abbiamo scelto appositamente di non vedere la dimostrazione nel capitolo precedente, per poterla applicare direttamente al nostro caso specifico.

Dimostrazione. La verifica di $\mu_F(\varnothing) = 0$ è banale dal momento che $\varnothing \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, μ_F e μ_F^* coincidono (per definizione) su questa sigma-algebra e $\mu_F^*(\varnothing) = 0$ dalla Proposizione 2.10. Basta allora provare l'additività numerabile, ovvero presa una famiglia di insiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ a due a due disgiunti, allora

$$\mu_F^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu_F^*(A_n).$$

[3]Nel Capitolo 6 di [1] è riportata la dimostrazione completa del Teorema 1.18.

Sarà sufficiente mostrare la sola disuguaglianza

$$\mu_F^*\left(\bigcup_n A_n\right) \geq \sum_n \mu_F^*(A_n), \tag{2.22}$$

perché l'altra segue dalla sub-additività numerabile di μ_F^*. Dapprima dimostriamo per induzione l'additività finita di μ_F^*, ossia presa una famiglia finita di insiemi a due a due disgiunti $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, con $k = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu_F^*(A_k). \tag{2.23}$$

Il passo base è banalmente vero quindi concentriamoci sul passo induttivo: supponiamo vero (2.23) per $k = 1, \ldots, n-1$ e dimostriamo il passo successivo. Vediamo allora che

$$\begin{aligned}\mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &\overset{(2.20)}{=} \mu_F^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_n\right) + \mu_F^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_n^C\right) \\ &= \mu_F^*(A_n) + \mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = \mu_F^*(A_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_F^*(A_k);\end{aligned}$$

per arrivare a questa scrittura abbiamo usato nella prima uguaglianza il criterio di misurabilità alla Carathéodory per $A_n \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, con $E = \bigcup_{k=1}^n A_k$, e nell'ultima uguaglianza l'additività finita per $k = n-1$, che è verificata per il passo induttivo. Con ciò deduciamo l'additività finita di μ_F^*. Da ultimo, dalla monotonia di μ_F^* si ha

$$\mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \geq \mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \overset{(2.23)}{=} \sum_{k=1}^n \mu_F^*((A_k);$$

il passaggio di n al limite termina la dimostrazione di (2.22) e di conseguenza la numerabile additività di μ_F. Resta soltanto da verificare la completezza dello spazio di misura, ossia se $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mu_F^*(A) = 0$, allora $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$. Proviamo (2.21) per A: per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ poiché $E \cap A \subseteq A$ e $\mu_F^*(A) = 0$, dalla monotonia di μ_F^* segue che $\mu_F^*(E \cap A) = 0$; analogamente da $E \cap A^C \subseteq E$ si ha $\mu_F^*(E \cap A^C) \leq \mu_F^*(E)$. E allora

$$\mu_F^*(E) \geq \mu_F^*(E \cap A^C) + \mu_F^*(E \cap A),$$

per cui $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$ è uno spazio di misura completo. □

2.1 Funzioni di distribuzione da misure di Borel

Nel precedente capitolo abbiamo ricordato la definizione di funzione di distribuzione, che abbiamo indicato con D_f, associata a una qualsiasi funzione misurabile f su uno spazio di misura fissato. Ora invece partiamo da μ, misura boreliana, e studiamo le proprietà di F_μ la funzione di distribuzione ad essa associata.

Definizione 2.17. *Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ assegnata. Definiamo la funzione di distribuzione associata a μ, denotata F_μ, nel seguente modo:*

$$F_\mu(y) = \begin{cases} -\mu((y,0]) & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ \mu((0,y]) & y > 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Osservazione 2.18. La funzione F_μ assume valori in $[0, +\infty)$, perché intervalli limitati come $(y, 0]$ o $(0, y]$ per $y \in \mathbb{R}$, hanno μ-misura boreliana finita[4].

Osservazione 2.19. La funzione F_μ è ben definita poiché gli insiemi $(0, y], (y, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per ogni y, e μ è una misura boreliana. Il motivo per cui è chiamata funzione di distribuzione è dovuto alla somiglianza con la Definizione 1.25 cui si accennava precedentemente. Se infatti μ è una misura Boreliana finita, ovvero $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$, la funzione F_μ si può riscrivere come

$$F_\mu(y) = D_f(y) - D_f(0), \quad \text{per } f(x) = x. \tag{2.25}$$

Proviamolo per $y > 0$: dalla Definizione 2.17 $F_\mu(y) = \mu((0, y])$, poiché μ è finitamente additiva si ha

$$\mu((0, y]) + \mu((-\infty, 0]) = \mu((-\infty, y]),$$

inoltre dalla monotonia della misura risulta che $\mu((-\infty, 0]) < \mu(\mathbb{R}) < +\infty$; pertanto è lecito scrivere

$$\mu((0, y]) = \mu((-\infty, y]) - \mu((-\infty, 0]). \tag{2.26}$$

Consideriamo la funzione identità $f(x) = x$ e, associata a questa, calcoliamo la funzione di distribuzione definita secondo (1.7), per cui

$$D_f(y) = \mu(f^{-1}((-\infty, y])) = \mu((-\infty, y]), \quad \text{per } y \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Sostituiamo opportunamente in (2.26) e vediamo allora che

$$F_\mu(y) \overset{(2.24)}{=} \mu((0, y]) \overset{(2.27)}{=} D_f(y) - D_f(0),$$

concludendo così la prova nel caso in cui $y > 0$; i restanti casi si dimostrano con argomentazioni analoghe. Se μ non fosse una misura finita, potrebbero verificarsi casi in cui $D_f(y) = +\infty$; nell'Osservazione 1.27 abbiamo spiegato che ciò può succedere, per cui (2.25) potrebbe non avere senso.

Proposizione 2.20. *Sia μ una misura di Borel e F_μ definita come in* (2.24)*. Allora valgono le seguenti proprietà:*

[4]Si vede la proprietà 3 ricordata nella definizione di misura di Borel, Capitolo 1, Osservazione 1.10.

1. *F_μ è una funzione monotona crescente, Borel misurabile.*

2. *F_μ è una funzione continua da destra e con limiti sinistri.*

3. *F_μ ha al più una quantità numerabile di punti di discontinuità.*

4. *F_μ è continua in b se e solo se $\mu(\{b\}) = 0$.*

5. *La misura di un intervallo della forma $(a, b]$ equivale a*

$$\mu((a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a). \tag{2.28}$$

Dimostrazione. 1. La monotonia di F_μ segue dalla monotonia di μ e osservando che per $0 < y' < y$ si ha $(0, y'] \subseteq (0, y]$, e quindi $F_\mu(y') \leq F_\mu(y)$. Il caso $y' < y < 0$ è analogo, mentre se $y' < 0 < y$ allora risulta per definizione che $F_\mu(y') < 0 < F_\mu(y)$. Inoltre è Borel misurabile poiché essendo F_μ una funzione crescente la preimmagine di $(-\infty, y]$ è uguale a $(-\infty, x)$ o $(-\infty, x]$ per un qualche x.

2. Per la continuità destra di F_μ dobbiamo verificare che

$$F_\mu(y) = \lim_{z \to y^+} F_\mu(z). \tag{2.29}$$

Grazie alla monotonia della funzione in questione, possiamo restringerci a considerare una successione di razionali $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tale che $z_n \to y^+$. Supponiamo $y > 0$ (ragionamento analogo per i casi in cui $y = 0$ o $y < 0$) e scriviamo $(0, y] = \bigcap_n (0, z_n]$ per poter sfruttare la continuità dall'alto della misura. Dalla proprietà 3 dell'Osservazione 1.10 risulta che $\mu((0, z_1]) < +\infty$ e allora

$$\mu((0, y]) = \lim_{z_n \to y^+} \mu((0, z_n]),$$

che equivale a (2.29). Per l'esistenza dei limiti sinistri ragioniamo diversamente. Per mostrare che

$$\lim_{z \to y^-} F_\mu(z) \in \mathbb{R}, \tag{2.30}$$

sfruttiamo la monotonia crescente della funzione. Secondo un teorema visto nel corso di Analisi 1, sull'esistenza dei limiti unilateri di funzioni monotone, per $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ funzione monotona crescente, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \sup_{]a, x_0[} f \; (\in \overline{\mathbb{R}}) \qquad \text{per } x_0 \in]a, b[. \tag{2.31}$$

Essendo F_μ monotona crescente e definita su tutto $\mathbb{R}$, riscriviamo il precedente limite come

$$\lim_{z \to y-} F_\mu(z) = \sup_{]-\infty, y[} F_\mu \; (\in \overline{\mathbb{R}}) \qquad \text{per } y \in \mathbb{R};$$

escludiamo con certezza il caso in cui l'estremo superiore sia illimitato perché dalla monotonia crescente della funzione vediamo che

$$\sup_{]-\infty,y[} F_\mu < F_\mu(y)$$

e $F_\mu(y) \in \mathbb{R}$ come sottolineato precedentemente nella Osservazione 2.18. Con questo chiudiamo la dimostrazione di (2.30).

3. Se la funzione F_μ ha un punto di discontinuità in y, questo implica che

$$\lim_{z_n \to y^-} F_\mu(z_n) \equiv F_\mu(y^-) < F_\mu(y).$$

L'intervallo $[F_\mu(y^-), F_\mu(y)]$ contiene senz'altro un numero razionale, e ogni altro intervallo così costruito, ovvero nato in corrispondenza dei punti di discontinuità della funzione F_μ, conterrà un numero razionale sempre diverso vista la monotonia crescente della funzione F_μ. Con questa strategia vediamo che i punti di discontinuità di F_μ sono in quantità al più numerabile. Questo è un argomento valido per tutte le funzioni monotone.

4. Sfruttiamo ancora una volta la continuità dall'alto di μ: vediamo che $\{b\} = \bigcap_n \left(b - \frac{1}{n}, b\right]$, osserviamo che per $n = 1$ si ha $\mu((b-1, b]) < +\infty$, pertanto è lecito concludere che

$$\mu(\{b\}) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left(b - \frac{1}{n}, b\right]\right) = F_\mu(b) - \lim_{n\to+\infty} F_\mu\left(b - \frac{1}{n}\right).$$

Da questa espressione risulta evidente che $\mu(\{b\}) = 0$ se e solo se F_μ è continua da sinistra in b, ovvero se e solo se F_μ è continua in b essendo F_μ sempre continua da destra.

5. Proviamo (2.28) avvalendoci dell'additività finita della misura μ e del seguente ragionamento: assumiamo $b > a > 0$; poiché $(0, a] \cup (a, b] = (0, b]$, allora

$$\mu((0, a]) + \mu((a, b]) = \mu((0, b]);$$

inoltre, trattandosi di intervalli limitati, essi avranno misura finita, secondo la proprietà 3 dell'Osservazione 1.10, pertanto è lecito scrivere

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b]) - \mu((0, a]) = F_\mu(b) - F_\mu(a).$$

Analoghi sono i casi $a < b < 0$ e $a < 0 < b$; mentre se $a = 0$ o $b = 0$, allora (2.28) è vero per definizione. $\square$

2.2 Caratterizzazione delle misure di Borel

In questo paragrafo conclusivo riflettiamo sulla possibile esistenza di una corrispondenza biunivoca tra funzioni monotone crescenti, continue da destra, e misure boreliane reali. La domanda sorge spontanea dal momento che nel corso del capitolo abbiamo seguito due percorsi opposti: nella prima parte ci siamo concentrati su come ricavare misure boreliane partendo da funzioni monotone crescenti e continue da destra, mentre nella seconda parte da una misura boreliana data abbiamo definito funzioni monotone crescenti e continue da destra. La richiesta è la seguente: possono i due percorsi dirsi uno l'inverso dell'altro? Se così fosse la loro composizione corrisponderebbe all'identità.

Verifichiamo però immediatamente come questo non sia del tutto vero. Per facilitare il discorso chiariamo prima alcune notazioni: indichiamo con $\mathbb{F}$ l'insieme delle funzioni monotone crescenti e continue da destra, e con $\mathbb{M}$ l'insieme delle misure di Borel su $\mathbb{R}$. Consideriamo G una funzione monotona crescente, continua da destra e chiamiamo μ_G la misura boreliana ad essa associata, come spiegato nella prima parte del capitolo. Successivamente definiamo F_{μ_G} secondo (2.24), ma, contrariamente a quanto sperato, le funzioni G e F_{μ_G}, non sempre coincidono su $\mathbb{R}$. Basta infatti sfruttare le definizioni già date per accorgersi che

$$F_{\mu_G}(y) \overset{(2.24)}{=} \mu_G((0,y]) \overset{(2.1)}{=} G(y) - G(0) \quad \text{per}\, y > 0.$$

Le due funzioni coincidono se e solo se $G(0) = 0$: l'abbiamo constatato per $y > 0$, ma analoghi sono i restanti casi. Possiamo concludere che in generale tra F_{μ_G} e G vi è una costante additiva di differenza, ovvero $F_{\mu_G} = G + c$, per $c \in \mathbb{R}$. L'idea di una biezione tra $\mathbb{F}$ e $\mathbb{M}$ sembrerebbe già da escludere. Proviamo a comporre i due percorsi in ordine inverso: sia μ una misura boreliana qualsiasi; tramite (2.24) definiamo F_μ e in seguito ricaviamo μ_{F_μ} usando (2.1). Verifichiamo se μ e μ_{F_μ} coincidono sull'intera sigma-algebra di Borel. Cominciamo confrontando il comportamento delle due misure sugli intervalli $(a, b]$: per $(a, b] \subseteq (0, +\infty)$ (analoghi sono i restanti casi)

$$\mu_{F_\mu}((a,b]) \overset{(2.1)}{=} F_\mu(b) - F_\mu(a) \overset{(2.24)}{=} \mu((0,b]) - \mu((0,a]) = \mu((a,b]).$$

Se le due misure boreliane coincidono sugli intervalli $(a, b]$, come si è verificato, allora grazie all'additività finita delle due misure possiamo dire che

$$\mu(A) = \mu_{F_\mu}(A) \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{A}.$$

Per poter valutare se le due misure coincidono sull'intera sigma-algebra di Borel occorre il Teorema 1.23 che riguarda l'unicità dell'estensione di una pre-misura σ-finita. La misura

μ_{F_μ}, per quanto detto nel corso del Capitolo 2, è l'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$, secondo il percorso tracciato dai teoremi di estensione di Carathéodory e Hahn-Kolmogorov. Anche μ è una estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$, perché, come appena constatato, $\mu(A) = \mu_{F_\mu}(A) = \mu_{\mathcal{A}}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Inoltre $\mu_{\mathcal{A}}$ è una pre-misura σ-finita perché

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1] \quad \text{con } \mu_{\mathcal{A}}((n, n+1]) = F_\mu(n+1) - F_\mu(n) < +\infty.$$

Stanti tutte le ipotesi del Teorema 1.23 possiamo con certezza dire che $\mu(B) = \mu_{F_\mu}(B)$ per ogni $B \in \sigma(\mathcal{A})$, ma quest'ultima sigma-algebra, secondo l'Osservazione 1.7, coincide con la sigma-algebra di Borel; dunque μ e μ_{F_μ} sono la stessa misura boreliana.

Osservazione 2.21. Il dominio della misura μ è $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ma il dominio di μ_{F_μ} è invece molto più ampio, perché corrisponde a $\mathcal{M}_{F_\mu}(\mathbb{R})$. L'unicità della estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ è confinata alla sola sigma-algebra di Borel.

Con l'intento di risultare più chiari riassumiamo il discorso fatto con uno schema:

$$\mu \xrightarrow{(2.24)} F_\mu \xrightarrow{(2.1)} \mu_{F_\mu} \qquad \text{otteniamo } \mu \equiv \mu_{F_\mu}, \tag{2.32}$$

$$G \xrightarrow{(2.1)} \mu_G \xrightarrow{(2.24)} F_{\mu_G} \qquad \text{otteniamo } G \neq F_{\mu_G}. \tag{2.33}$$

Come già anticipato non siamo di fronte a una corrispondenza biunivoca, ma con una piccola accortezza vediamo come "aggiustare" (2.33). Quanto osservato in precedenza sulla differenza tra le funzioni F_μ e G per via della costante additiva $G(0)$, fornisce un suggerimento importante a quello che diremo in seguito. Chiamiamo $\mathbb{F}'$ l'insieme delle funzioni monotone crescenti, continue da destra, e nulle nell'origine; verichiamo che la seguente funzione è una biezione:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}' &\longrightarrow \mathbb{M} \\ F &\overset{(2.1)}{\longmapsto} \mu_F. \end{aligned}$$

Per l'iniettività dobbiamo provare che per $F, G \in \mathbb{F}'$, se $\mu_G = \mu_F$ allora $F = G$. Due misure boreliane sono identiche se e solo se coincidono su tutti gli insiemi dell'algebra di Borel, vale dunque che per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$\mu_G((0, y]) = \mu_F((0, y]).$$

Inoltre, dal momento che $F, G \in \mathbb{F}'$, si ha che $G(0) = F(0) = 0$, con ciò deduciamo che

$$\begin{aligned} \mu_G((0, y]) &\overset{(2.1)}{=} G(y) - G(0) = G(y) \\ \mu_F((0, y]) &\overset{(2.1)}{=} F(y) - F(0) = F(y); \end{aligned}$$

perciò le due funzioni coincidono su tutto $\mathbb{R}$. Per quanto concerne la suriettività invece, proviamo che per ogni misura boreliana reale, $\mu \in \mathbb{M}$, esiste una funzione $G \in \mathbb{F}$, tale che $\mu = \mu_G$. Questo è già stato provato in precedenza, infatti se definiamo

$$G := F_\mu$$

si tratterebbe di verificare che $\mu = \mu_{F_\mu}$, che abbiamo già provato essere vero. Si può allora confermare la biezione tra $\mathbb{F}'$ e $\mathbb{M}$ che equivalentemente riformuliamo nel seguente modo: ad ogni funzione monotona crescente, continua da destra, e nulla nell'origine è associata una ed una sola misura boreliana reale, secondo la definizione data da (2.1), enunciata all'inizio del capitolo.

Capitolo 3

Gli integrali di Lebesgue-Stieltjes

Il precedente capitolo è servito ad introdurre lo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$. Vogliamo ora ripercorrere la stessa strada con cui solitamente si definisce l'integrale di Lebesgue, usando però la misura μ_F; allarghiamo gli orizzonti definendo l'integrale di Lebesgue-Stieltjes, di cui l'integrale di Lebesgue non è che un caso particolare.

Prima di enunciare la definizione di funzione integrabile rispetto alla misura μ_F, forniamo un breve richiamo notazionale sui concetti di funzione semplice, parte positiva e parte negativa di una funzione e funzione misurabile. Trattandosi di una notazione comunemente usata, lasciamo indicato con $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un generico spazio di misura.

Definizione 3.1 (**Funzione semplice**). *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura. Chiamiamo funzione semplice una funzione $\varphi : D \to [0, +\infty]$, dove D è un insieme μ- misurabile, definita come*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x), \tag{3.1}$$

con $c_i \geq 0$ per ogni i, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi μ-misurabili a due a due disgiunti in D e χ_{A_i} è la funzione caratteristica sull'insieme A_i, ossia

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \notin A_i. \end{cases}$$

Definizione 3.2. *Data una funzione f, denotiamo la parte positiva e la parte negativa di f rispettivamente con f^+, f^- e le definiamo come*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Osservazione 3.3. Dalle definizioni appena date è sempre vero che

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Definizione 3.4 (Funzione misurabile). *Fissato* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio di misura, sia* $f : D \to [-\infty, +\infty]$ *una funzione definita su* D*,* $D \in \mathcal{F}$*. Diciamo che* f *è una funzione* μ*- misurabile se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:*

1. *per ogni numero reale* y*, l'insieme* $f^{-1}((-\infty, y))$ *è* μ*- misurabile,*
2. *per ogni numero reale* y*, l'insieme* $f^{-1}((-\infty, y])$ *è* μ*- misurabile,*
3. *per ogni numero reale* y*, l'insieme* $f^{-1}((y, +\infty))$ *è* μ*- misurabile,*
4. *per ogni numero reale* y*, l'insieme* $f^{-1}([y, +\infty))$ *è* μ*- misurabile,*
5. *per ogni insieme boreliano* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $f^{-1}(A)$ *è* μ*- misurabile.*

Osservazione 3.5. Come ricordato nel Capitolo 1 nella Definizione 1.9, fissato uno spazio di misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$, un insieme A si dice μ- misurabile se $A \in \mathcal{F}$.

Esempio 3.6. Le funzioni semplici, per come sono state definite precedentemente, sono delle funzioni misurabili. Proviamolo verificando la condizione 5 della Definizione 3.4: dimostriamo che se $\varphi : D \to [0, +\infty]$ è una funzione semplice come nella Definizione 3.1, allora $\varphi^{-1}(A)$ è un insieme μ- misurabile, per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Osserviamo innanzitutto che se l'insieme A non contiene alcun valore assunto dalla funzione φ, allora $\varphi^{-1}(A) = \varnothing$, che è un insieme μ- misurabile. Continuando il nostro ragionamento controlliamo invece quali sono i valori assunti dalla funzione φ. Dalla definizione è evidente che gli unici possibili sono $\{0, c_1, \ldots, c_n\}$, infatti

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x) = \begin{cases} c_i & x \in A_i \\ 0 & x \in D \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i^C\right). \end{cases}$$

Questo ragionamento ci aiuta ad intuire subito che aspetto ha $\varphi^{-1}(A)$ se A contiene uno o più valori dell'immagine di φ. I casi possibili sono i seguenti:

$$\begin{aligned} &\text{se}\, 0 \in A, \text{ allora}\, \varphi^{-1}(A) = D \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C\right), \\ &\text{se}\, c_i \in A, \text{ allora}\, \varphi^{-1}(A) = A_i, \\ &\text{se}\, 0, c_i \in A, \text{ allora}\, \varphi^{-1}(A) = A_i \cup D \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C\right). \end{aligned}$$

Poiché D, A_i dalla Definizione 3.1 sono insiemi μ-misurabili, allora $\varphi^{-1}(A)$ è un insieme μ- misurabile, concludendo così la dimostrazione.

Proposizione 3.7. *Fissato* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio di misura, sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni* μ*-misurabili,* $f_n : D \to [-\infty, +\infty]$*, con* D *un insieme* μ*- misurabile. Allora sono misurabili anche le seguenti funzioni:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n\to+\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n,$$

e, se esiste, anche

$$\lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Siamo ora pronti per enunciare la tanto attesa definizione dell'Integrale di Lebesgue-Stieltjes. Partiamo dall'integrare le funzioni semplici.

Definizione 3.8. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona crescente e continua da destra. Fissiamo* $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$ *come spazio di misura definito in 2.14. Sia* E *un insieme* μ_F*-misurabile, ovvero* $E \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$*, e* $\varphi : E \to [0, +\infty]$ *la funzione semplice*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{(a_j,b_j]}, \tag{3.2}$$

con $c_j \geq 0$ *per ogni* j *e* $(a_j, b_j]$ *a due a due disgiunti in* E*. Definiamo l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes di* φ *nel seguente modo:*

$$\int_E \varphi\, \mathrm{d}\mu_F \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu_F((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (F(b_j) - F(a_j))\,, \tag{3.3}$$

con la convenzione che $0 \cdot (+\infty) = 0$*.*

Definizione 3.9. *Nelle ipotesi precedenti, sia* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *una funzione* μ_F*-misurabile. Distinguiamo due casi:*

- *se* f *ha valori in* $[0, +\infty]$*, chiamiamo l'integrale di* f *nella misura* μ_F *il seguente*

  $$\int_E f\, \mathrm{d}\mu_F := \sup_{\varphi\leq f} \left\{ \int_E \varphi\, \mathrm{d}\mu_F \right\},$$

  con φ *una funzione semplice come in* (3.2)*. Quando l'estremo superiore è finito, diciamo che* f *è* μ_F*-integrabile, mentre se è* $+\infty$ *poniamo coerentemente*

  $$\int_E f\, \mathrm{d}\mu_F := +\infty,$$

  e f *si dirà* μ_F*-integrabile in senso esteso.*

- *Se f ha valori in $\overline{\mathbb{R}}$, allora ragioniamo calcolando separatamente gli integrali di f^+ e f^-, che sono funzioni non negative. Se entrambi gli integrali risultano finiti definiamo l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes di f nel seguente modo*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_F := \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu_F - \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Dunque diciamo che f è μ_F-integrabile se f^+ e f^- lo sono. In tal caso anche $|f|$ è μ_F-integrabile su E e risulta

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu_F = \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu_F + \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Se una sola tra f^+ e f^- è μ_F-integrabile in senso esteso poniamo coerentemente

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_F = +\infty, \qquad \text{se } f^+ \text{ è } \mu_F\text{-integrabile in senso esteso;}$$
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_F = -\infty, \qquad \text{se } f^- \text{ è } \mu_F\text{-integrabile in senso esteso.}$$

Se entrambe sono μ_F-integrabili in senso esteso, in tal caso $\int_E f \,\mathrm{d}\mu_F$ non è definito. Mentre è sempre definito, in ogni caso, $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu_F = +\infty$.

Osservazione 3.10. In questo contesto l'integrale di Lebesgue si colloca come caso particolare di un integrale di tipo Lebesgue-Stieltjes, infatti avevamo già intuito nel precedente capitolo che per $F(x) = x$ la misura μ_F corrisponde alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Da questo momento in poi lo spazio di misura su cui lavoreremo sarà sempre

$$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F).$$

Senza esplicitarlo, tutti i risultati che analizzeremo in seguito saranno da intendersi validi in questo spazio di misura. Ricordiamo qui di seguito le principali proprietà dell'integrale. Trattandosi di affermazioni molto semplici da dimostrare ci limitiamo soltanto ad esporle, e invitiamo a leggere il Capitolo 2 di [3] se si è interessati a cenni di dimostrazione o idee e suggerimenti in merito.

Proposizione 3.11. *Siano f e g funzioni μ_F-integrabili definite su un insieme E μ_F-misurabile. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. ***Linearità:*** *per $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\int_E (af(x) + bg(x)) \,\mathrm{d}\mu_F = a \int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu_F + b \int_E g(x) \,\mathrm{d}\mu_F; \tag{3.4}$$

2. ***Monotonia:*** *se $f(x) \leq g(x)$ q.d., allora*

$$\int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu_F \leq \int_E g(x) \,\mathrm{d}\mu_F; \tag{3.5}$$

3. ***Disuguaglianza triangolare integrale:***

$$\left| \int_E f(x)\, \mathrm{d}\mu_F \right| \leq \int_E |f(x)|\ \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.6}$$

Osservazione 3.12. La sigla *q.d.* ha il significato di "quasi dappertutto". Una proprietà si dice valida *q.d.*, quasi dappertutto, se l'insieme dei punti dove essa non vale ha misura nulla; nel nostro caso la misura di riferimento sarà μ_F.

Elenchiamo inoltre una serie di proposizioni su alcune proprietà specifiche riguardanti però la funzione integrale. Torneranno utili nel corso della prossima sottosezione per la dimostrazione del teorema di convergenza monotona dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes.

Definizione 3.13. *Sia f una funzione misurabile non negativa (definita sull'insieme A μ_F- misurabile), oppure misurabile a segno qualunque e μ_F-integrabile. Dato $B \subseteq A$, μ_F- misurabile, poniamo:*

$$\int_B f\, \mathrm{d}\mu_F := \int_A f\, \chi_B\, \mathrm{d}\mu_F \tag{3.7}$$

Proposizione 3.14 (**Monotonia della funzione integrale**). *Sia $f : A \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Se A_1, A_2 sono sottoinsiemi di A μ_F-misurabili, tali che $A_1 \subseteq A_2$, allora*

$$\int_{A_1} f\, \mathrm{d}\mu_F \leq \int_{A_2} f\, \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.8}$$

Proposizione 3.15 (**Additività della funzione integrale**). *Sia f una funzione misurabile non negativa, oppure misurabile a segno qualunque e μ_F-integrabile. Siano A_1, A_2 insiemi μ_F-misurabili disgiunti contenuti nel dominio di f. Allora*

$$\int_{A_1 \cup A_2} f\, \mathrm{d}\mu_F = \int_{A_1} f\, \mathrm{d}\mu_F + \int_{A_2} f\, \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.9}$$

L'ultimo risultato che presentiamo è meno banale e per dimostrarlo si sfrutta il buon comportamento della misura con successioni monotone di insiemi.

Proposizione 3.16. *Siano A_k, per $k \in \mathbb{N}$, insiemi μ_F-misurabili, tali che $A_k \subseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Infine sia $\varphi : A \to [0, +\infty]$ una funzione semplice come in* (3.2)*. Allora è vero che*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{A_k} \varphi\, \mathrm{d}\mu_F = \int_A \varphi\, \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Integrare sull'insieme A_k una funzione semplice φ definita come in (3.2) equivale a calcolare

$$\begin{aligned} \int_{A_k} \sum_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{(a_j, b_j]}\, \mathrm{d}\mu_F &\overset{(3.4)}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{A_k} \chi_{(a_j, b_j]}\, \mathrm{d}\mu_F \overset{(3.7)}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j \int_A \chi_{(a_j, b_j]} \cdot \chi_{A_k}\, \mathrm{d}\mu_F = \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \int_A \chi_{(a_j, b_j] \cap A_k}\, \mathrm{d}\mu_F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F\left((a_j, b_j] \cap A_k\right). \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ otteniamo

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{A_k} \varphi \, \mathrm{d}\mu_F = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F \left((a_j, b_j] \cap A_k \right). \tag{3.11}$$

Davanti a una somma finita come questa il limite passa all'interno del simbolo di sommatoria per linearità, perciò

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F \left((a_j, b_j] \cap A_k \right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \lim_{k\to+\infty} \mu_F \left((a_j, b_j] \cap A_k \right). \tag{3.12}$$

Concentriamoci sulla successione di insiemi $\{(a_j, b_j] \cap A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; notiamo che è una successione monotona crescente data la monotonia crescente di $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ per ipotesi, e sfruttando la continuità dal basso della misura μ_F giungiamo alle ultime conclusioni:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \lim_{k\to+\infty} \mu_F \left((a_j, b_j] \cap A_k \right) &= \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_j, b_j] \cap A_k \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F \left((a_j, b_j] \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \mu_F \left((a_j, b_j] \cap A \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \int_A \chi_{(a_j,b_j]} \, \mathrm{d}\mu_F \overset{(3.4)}{=} \int_A \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{(a_j,b_j]} \, \mathrm{d}\mu_F.
\end{aligned}$$

Ricordando come è definita φ in (3.2), comprendiamo che l'ultimo termine nella catena di uguaglianze appena esposta corrisponde esattamente all'integrale di φ su A, dunque abbiamo dimostrato (3.10). □

3.1 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Doveroso è dedicare una sezione ai noti teoremi di passaggio al limite sotto il segno dell'integrale, già familiari dalla teoria di integrazione di Lebesgue. Dimostriamo il Teorema di convergenza monotona, mentre del Lemma di Fatou e del Teorema di Convergenza Dominata riportiamo solo l'enunciato.[1]

Teorema 3.17 (**Teorema di convergenza monotona**). *Sia E un insieme μ_F- misurabile e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni μ_F-misurabili con $f_n : E \to [0, +\infty]$ per ogni n. Chiamata f la funzione limite puntuale di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sull'insieme E, allora vale il seguente risultato*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_F = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.13}$$

[1] Le dimostrazioni dei teoremi qui solo enunciati sono riportate nel Capitolo 2 di [3].

Osservazione 3.18. Il motivo per cui il Teorema 3.17 fa parte dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno dell'integrale diventa evidente se riscriviamo (3.13) diversamente. Esplicitiamo la funzione f come limite di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per cui $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, e sostituiamo in (3.13) ottenendo

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu_F = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu_F. \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente successione reale $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$i_n := \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente anche $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, grazie alla proprietà di monotonia dell'integrale ricordata in (3.5), acquisisce lo stesso tipo di monotonia. Pertanto ha limite: denotiamolo L. Essendo f limite di successione di funzioni misurabili non negative, è a sua volta non negativa e μ_F- misurabile, dunque μ_F-integrabile in senso esteso. Questo conclude la buona positura dell'asserto (3.13), che, riformulato equivalentemente, diventa

$$L = \int_E f \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Poiché $f_n \leq f$ per ogni n, allora dalla monotonia dell'integrale deduciamo che

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu_F \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu_F \quad \overset{(\heartsuit)}{\Longrightarrow} \quad L \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu_F.$$

In ($\heartsuit$) abbiamo usato il teorema del confronto. Resta solo da provare la disuguaglianza opposta, ovvero

$$L \geq \int_E f \,\mathrm{d}\mu_F. \tag{3.15}$$

Consideriamo una costante c, $0 < c < 1$, e φ una funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. Chiamiamo E_n la successione di insiemi definiti come

$$E_n := \{x \in E \,|\, c\varphi(x) \leq f_n(x)\}.$$

E_n sono insiemi μ_F-misurabili; inoltre, per come sono definiti questi insiemi, essi formano una successione crescente, infatti $E_n \subseteq E_{n+1}$. Poniamo $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, e vediamo che l'insieme $E \cap F^C$ ha misura nulla, perché $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ e $0 \leq c\varphi \leq f$. Dunque, dal momento che $E_n \subseteq E$, dalla Proposizione 3.14 sulla monotonia della funzione integrale segue che

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu_F \overset{(3.8)}{\geq} \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu_F \overset{(3.5)}{\geq} \int_{E_n} c\varphi \,\mathrm{d}\mu_F = c\int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Facendo il limite per $n \to +\infty$,

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu_F \geq c \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu_F \overset{(3.10)}{=} c\int_F \varphi \,\mathrm{d}\mu_F = c\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu_F.$$

L'ultima uguaglianza è supportata dal seguente ragionamento: scriviamo

$$E = (E \cap F^C) \cup F$$

e sfruttiamo l'additività dell'integrale della Proposizione 3.15, concludendo così

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu_F = \int_{E \cap F^C} \varphi \, \mathrm{d}\mu_F + \int_F \varphi \, \mathrm{d}\mu_F = \int_F \varphi \, \mathrm{d}\mu_F,$$

dato che $E \cap F^C$ ha misura nulla e integrare su insiemi di misura nulla restituisce zero. Quindi per ogni $0 < c < 1$ abbiamo

$$L \geq c \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu_F;$$

passando al limite per $c \to 1^-$ si ha:

$$L \geq \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu_F \,, \quad \text{con}\, 0 \leq \varphi \leq f.$$

Così L è un maggiorante dell'insieme

$$\left\{ \int_E \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu_F \,|\, 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \, \text{funzione semplice} \right\},$$

il cui sup è proprio $\int_E f \, \mathrm{d}\mu_F$ come visto nella Definizione 3.9. Essendo il sup il minimo dei maggioranti, si ha la disuguaglianza cercata (3.15), con cui termina la dimostrazione. □

Corollario 3.19 (**Lemma di Fatou**). *Sia E un insieme μ_F- misurabile e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ_F-misurabili tale che $f_n : E \to [0, +\infty]$ per ogni n. Vale allora il seguente risultato:*

$$\int_E \liminf_{n \to +\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu_F \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu_F.$$

Teorema 3.20 (**Teorema di convergenza dominata**). *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ_F-misurabili, convergenti puntualmente su un insieme E μ_F- misurabile. Poniamo $f \equiv \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ e supponiamo che esista g una funzione μ_F-integrabile tale che*

$$|f_n| \leq g, \qquad \textit{per ogni } n.$$

Allora f è integrabile sull'insieme E e vale che

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_F = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu_F.$$

Inoltre è vero il seguente risultato

$$\int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu_F \to 0, \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

3.2 Approssimare con somme di Riemann-Stieltjes

Abbiamo imparato a conoscere l'integrale di Lebesgue-Stieltjes mediante teoremi e proposizioni già familiari dalla teoria dell'integrale di Lebesgue, argomento del corso di Analisi 2. Lasciamo momentaneamente da parte la teoria e concentriamoci invece sul seguente problema pratico: per una funzione continua g sull'intervallo $[a,b]$, studiamo come si approssima l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di g attraverso le somme di Riemann-Stieltjes. Accertiamoci innanzitutto che g sia una funzione μ_F-integrabile. Consideriamo la funzione $|g|$, che è continua sul compatto $[a,b]$ e pertanto, dal Teorema di Weierstrass, possiede massimo e minimo, dunque

$$|g| \leq K, \quad \text{con}\, K = \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \in \mathbb{R}.$$

In virtù di ciò e della motonia dell'integrale, deduciamo allora che

$$\int_{[a,b]} |g| \,\mathrm{d}\mu_F \leq K \int_{[a,b]} 1 \,\mathrm{d}\mu_F = K \cdot \mu_F([a,b]),$$

da cui segue che g è μ_F-integrabile, essendo $K \in \mathbb{R}$ e $\mu_F([a,b]) < +\infty$ per la proprietà 3 delle misure boreliane[2].

Definizione 3.21 (Partizione). *Dato un intervallo $[a,b]$, con $a<b$ in $\mathbb{R}$, chiamiamo partizione di $[a,b]$ ogni insieme Γ tale che*

$$\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n, \quad \textit{con}\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

I punti x_i che compongono la partizione sono detti nodi. Denotiamo con $\Omega([a,b])$ l'insieme di tali partizioni.

Definizione 3.22 (Finezza di una partizione). *Siano Γ, Γ' due partizioni di $[a,b]$; diciamo che Γ' è più fine di Γ, o Γ' è un raffinamento di Γ, se $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Inoltre chiamiamo calibro o parametro di finezza di una partizione la massima distanza tra tutti i nodi consecutivi, ossia*

$$|\Gamma| = \max_{1\leq i\leq n} \{x_i - x_{i-1}\}.$$

Definizione 3.23 (Somma di Riemann-Stieltjes). *Siano g una funzione limitata e F una funzione a valori reali, entrambe definite sull'intervallo compatto $[a,b]$, per $a,b \in \mathbb{R}$. Data una partizione $\Gamma \equiv \{x_i\}_{i=0}^n$ di $[a,b]$, e i punti $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, definiamo somma di Riemann-Stieltjes*

$$R_\Gamma \equiv \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)). \tag{3.16}$$

[2] Nell'Osservazione 1.10 del Capitolo 1 abbiamo ricordato la definizione e le proprietà di una misura di Borel.

Osservazione 3.24. Le somme di Riemann-Stieltjes R_Γ dipendono naturalmente dalla partizione Γ utilizzata, ma anche dai punti intermedi ξ_i, dalle funzioni F e g, e dall'intervallo $[a, b]$. Tuttavia per non appesantire la notazione scegliamo di lasciare indicata solo la dipendenza da Γ, come scritto nella definizione appena data.

Visto che vogliamo approssimare $\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu_F$, dobbiamo assumere ipotesi più restrittive rispetto alla Definizione 3.23: supponiamo che g sia una funzione continua e F una funzione monotona crescente e continua da destra. Sotto queste condizioni, (3.16) diventa l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di una funzione g_n definita sull'intervallo $[a, b]$ come

$$g_n := \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\chi_{(x_i,x_{i+1}]}. \tag{3.17}$$

Ne segue allora

$$\int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\mu_F \overset{(3.4)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \int_{[a,b]} \chi_{(x_i,x_{i+1}]}\mathrm{d}\mu_F = \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)). \tag{3.18}$$

Osservazione 3.25. La funzione g è continua su un dominio compatto, quindi per il Teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua. Usiamo questa proprietà per provare che $g_n \longrightarrow g$ puntualmente per $n \longrightarrow +\infty$, se $|\Gamma| \longrightarrow 0$, dove $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Infatti per ogni $x \in [a, b]$ fissato, si ha

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \sup_J |g(x) - g(x')| \,,$$

con $x, x' \in J \equiv [x_i, x_{i+1}]$, che è un intervallo di lunghezza al più $|\Gamma|$. Di conseguenza se $|\Gamma| \to 0$ allora dalla uniforme continuità di g segue che $g_n(x) \to g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

L'osservazione fatta tornerà utile nella dimostrazione della proposizione a seguire, in cui si enuncia il risultato cardine dell'intera sezione. Prima di proseguire, ci teniamo a sottolineare che la dimostrazione sulla convergenza puntuale di g_n è approssimativa e imprecisa, poiché g_n non è una vera successione di funzioni. Tuttavia al momento prendiamo per buono quanto detto, enunciamo e dimostriamo il prossimo risultato, e successivamente ci preoccupiamo di chiarire con rigore matematico il giusto metodo di ragionamento.

Proposizione 3.26. *Sia F una funzione monotona crescente e continua da destra e g una funzione continua; entrambe sono definite sull'intervallo $[a, b]$. Per ogni $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ partizione di $[a, b]$, e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ con $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ punti intermedi arbitrariamente scelti, se $|\Gamma| \longrightarrow 0$ allora vale il seguente risultato:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) \longrightarrow \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu_F. \tag{3.19}$$

Dimostrazione. Cominciamo mostrando subito che il limite, se esiste, non dipende dalla scelta dei punti intermedi $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ e il motivo è legato alla uniforme continuità di g. Siano $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ e $\{\zeta_i\}_{i=0}^{n-1}$ punti intermedi arbitrariamente scelti, tali che $\xi_i, \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, associati a una stessa partizione $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$; stimiamo

$$|R_\Gamma(\xi) - R_\Gamma(\zeta)| \qquad \text{per } |\Gamma| \longrightarrow 0,$$

e dimostriamo che tende a zero. Grazie alla disuguaglianza triangolare possiamo fare una prima stima, ovvero

$$\begin{aligned}
|R_\Gamma(\xi) - R_\Gamma(\zeta)| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) - \sum_{i=0}^{n-1} g(\zeta_i)\left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right)\right| = \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(g(\xi_i) - g(\zeta_i)\right)\left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_i) - g(\zeta_i)| \cdot |F(x_{i+1}) - F(x_i)|\,;
\end{aligned}$$

poiché ξ_i e ζ_i sono punti intermedi arbitrariamente scelti nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, maggioriamo la distanza $|g(\xi_i) - g(\zeta_i)|$ con $\sup_{J_i} |g(y') - g(y'')|$ per $y', y'' \in J_i \equiv [x_i, x_{i+1}]$, sottointervallo di lunghezza al più $|\Gamma|$. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_i) - g(\zeta_i)| \cdot |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} |g(y') - g(y'')| \cdot |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \\
&\le \sup_{0\le i\le n-1} \left\{\sup_{J_i} |g(y') - g(y'')|\right\} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \\
&= \sup_{0\le i\le n-1} \left\{\sup_{J_i} |g(y') - g(y'')|\right\} \cdot \left(F(b) - F(a)\right).
\end{aligned}$$

Usando l'uniforme continuità di g si ha il risultato sperato, ovverosia per $|\Gamma| \to 0$ segue che $R_\Gamma(\xi)$ e $R_\Gamma(\zeta)$ hanno lo stesso limite, supposto che esista. Proviamo ora l'esistenza del limite. Poniamo $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tale che $g(\xi_i) = \inf_J g(x)$, per $J \equiv [x_i, x_{i+1}]$, la cui esistenza è garantita dalla continuità di g sul compatto $[x_i, x_{i+1}]$. Denotiamo g_n una funzione definita come in (3.17), scegliendo i punti intermedi ξ_i come stabilito. Per definizione risulta chiaro che $g_n \le g$ e dall'Osservazione 3.25 si ha che $g_n(x) \to g(x)$ per $|\Gamma| \to 0$. Inoltre $|g_n| \le K$, con $K = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$, che è una funzione μ_F-integrabile su $[a, b]$ in quanto

$$\int_{[a,b]} K \mathrm{d}\mu_F = K \cdot \mu_F([a, b]) = K \cdot (F(b) - F(a)) < +\infty.$$

Valgono tutte le ipotesi per poter applicare il Teorema della Convergenza Dominata, pertanto

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) \overset{(3.18)}{=} \int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\mu_F \longrightarrow \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu_F,$$

che equivale alla tesi. □

Osservazione 3.27. Abbiamo già anticipato che $(g_n)_n$ non è una successione di funzioni, infatti una funzione definita come in (3.17) non dipende da n, il numero di nodi, ma dalla partizione $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ ad essa associata e dai punti intermedi $E = \{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$. La giusta scrittura quindi sarebbe

$$g_{\Gamma,E} := \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\chi_{(x_i,x_{i+1}]}; \tag{3.20}$$

non essendoci dunque la dipendenza da n, il limite per $n \longrightarrow +\infty$ non sussiste. Ciò comporta che la dimostrazione della Proposizione 3.26 così come è stata data non è più valida: quest'ultima infatti si fonda sull'appliccare il Teorema di Convergenza Dominata alle funzioni g_n, ma, come motivato finora, si tratta di una successione malposta, perciò è necessario seguire un'altra strada.

Pensiamo a una diversa dimostrazione della Proposizione 3.26 cominciando dalla seguente osservazione sull'enunciato.

Osservazione 3.28. La tesi della Proposizione 3.26 è espressa come limite rispetto al calibro delle partizioni $\Gamma \in \Omega([a,b])$. Si tratta di un limite informale in quanto le partizioni non sono funzioni del calibro, pertanto non è corretto trattarlo come se fosse una variabile. Più propriamente quel limite sta a significare che, posto

$$I = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu_F,$$

si ha che per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ in $\Omega([a,b])$ con $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$punti intermedi arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, allora vale

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) \right| < \epsilon.$$

Vediamo dunque la stessa proposizione di prima nella sua forma più corretta e con una nuova dimostrazione.

Proposizione 3.29. *Sia F una funzione monotona crescente e continua da destra e g una funzione continua; entrambe sono definite sull'intervallo $[a,b]$. Sia R_Γ una somma di Riemann-Stieltjes associata a $\Gamma \in \Omega([a,b])$, definita come in* (3.16) *e poniamo*

$$I = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ in $\Omega([a,b])$ con $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ punti intermedi arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, si ha

$$|I - R_\Gamma| = \left| I - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \right| < \epsilon.$$

Dimostrazione. Teniamo presente le seguenti considerazioni: indichiamo con $J_i = [x_i, x_{i+1}]$ i sottointervalli di $[a, b]$ con estremi i nodi di una partizione Γ come nell'enunciato, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Inoltre chiamando g_1 e g_2 le seguenti funzioni

$$g_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot \chi_{[x_j, x_{j+1}]}, \quad g_2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot \chi_{[x_j, x_{j+1}]}, \tag{3.22}$$

possiamo concludere, per la monotonia dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes, che

$$\int_{[a,b]} g_1 \, \mathrm{d}\mu_F \leq \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F \leq \int_{[a,b]} g_2 \, \mathrm{d}\mu_F; \tag{3.23}$$

mentre dalla linearità dell'Integrale di Lebesgue-Stieltjes e dal modo in cui si integra una funzione semplice sappiamo già che

$$\int_{[a,b]} g_1 \, \mathrm{d}\mu_F \overset{(3.4)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot \int_{[a,b]} \chi_{[x_j, x_{j+1}]} \, \mathrm{d}\mu_F = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)), \tag{3.24}$$

$$\int_{[a,b]} g_2 \, \mathrm{d}\mu_F \overset{(3.4)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot \int_{[a,b]} \chi_{[x_j, x_{j+1}]} \, \mathrm{d}\mu_F = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)). \tag{3.25}$$

Questo ci consente di dire che

$$\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \leq \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)). \tag{3.26}$$

Possiamo notare da (3.21) e (3.26) che entrambi i termini

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F \tag{3.27}$$

sono limitati, rispettivamente dal basso e dall'alto, da (3.24) e (3.25); per comodità denotiamo questi estremi semplicemente B, la stima dal basso, e A la stima dall'alto. Se proviamo che per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ in $\Omega([a, b])$ con $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ e $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ punti intermedi arbitrariamente scelti in modo tale che $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, si ha $|A - B| < \epsilon$, abbiamo finito, perché

$$|A - B| \geq \left| \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \right|$$

portandoci così a dedurre la tesi. Ciò che resta da provare è presto dimostrato, perché

$$|A-B| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \sup_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{J_i} g \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))\right|$$
$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{J_i} g - \inf_{J_i} g\right) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|\sup_{J_i} g - \inf_{J_i} g\right| \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i));$$

sfruttiamo ora l'uniforme continuità di g, la quale è continua e definita su un dominio compatto quindi per il Teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua. Se per $\epsilon > 0$ consideriamo il δ_ϵ che deriva dalla definizione di uniforme continuità di g, allora per ogni partizione $\Gamma \in \Omega([a,b])$ con calibro $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ si ha

$$\left|\sup_{J_i} g - \inf_{J_i} g\right| < \epsilon. \tag{3.28}$$

Tornando alle precedenti disuguaglianze si può procedere dicendo che

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|\sup_{J_i} g - \inf_{J_i} g\right| \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) < \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$
$$= \epsilon \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \epsilon \cdot (F(b) - F(a));$$

dall'arbitrarietà di ϵ segue esattamente quanto restava da provare. Dunque a maggior ragione, stanti tutte le considerazioni fatte per ogni ϵ su δ_ϵ, e considerando le partizioni Γ con calibro fine a sufficienza, si avrà che

$$\left|\int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))\right| \leq |A-B| < \epsilon. \tag{3.29}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Capitolo 4

Confronto con l'integrale di Riemann-Stieltjes

Nei precedenti capitoli abbiamo sottolineato ampiamente la centralità e l'importanza sia della Teoria della Misura, sia nell'Integrale di Lebesgue, sia nella realizzazione del nuovo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}), \mu_F)$ e nella definizione di Integrale di Lebesgue-Stieltjes. Giunti ormai al termine di questa Tesi non possiamo concludere senza fare riferimento all'Integrale di Riemann-Stieltjes e al suo legame con l'Integrale di Lebesgue-Stieltjes.

Definizione 4.1. *Siano g una funzione limitata e F una funzione a valori reali, entrambe definite sull'intervallo compatto $[a, b]$, con $a < b$ in $\mathbb{R}$. Sia R_Γ la somma di Riemann-Stieltjes associata alla partizione $\Gamma \in \Omega([a, b])$, definita come in* (3.16). *Chiamiamo I l'Integrale di Riemann-Stieltjes di g rispetto ad F sull'intervallo $[a, b]$ e lo denotiamo*

$$I = \int_a^b g \, \mathrm{d}F, \tag{4.1}$$

se verifica quanto segue: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|I - R_\Gamma| < \epsilon$ per ogni partizione Γ che soddisfi $|\Gamma| = \sigma \leq \delta_\epsilon$, e comunque siano scelti i punti intermedi ξ_i.

Osservazione 4.2. Talvolta la definizione appena data viene espressa sottoforma di "limite" rispetto al calibro nel seguente modo: diciamo che g è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto ad F, sull'intervallo $[a, b]$, se

$$\lim_{\sigma \to 0} R_\Gamma = I < +\infty; \tag{4.2}$$

dove il limite è preso su tutte le partizioni Γ con parametro di finezza pari a σ. Si tratta di un abuso di notazione in quanto le partizioni, da cui dipendono le somme di Riemann-Stieltjes R_Γ, non sono funzioni del calibro, quindi è da intendersi come un limite informale. Nonostante l'imprecisione di questa scrittura, in seguito terremo fede a questa notazione[1], indicando con (4.2) una funzione g Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.1. Giustifichiamo questa scelta con la seguente motivazione: un "limite", sebbene informale, è un'espressione concisa e di immediata comprensione, mentre la definizione più fine che fa uso di ϵ e δ_ϵ appare più lunga e contorta. Ci teniamo però a sottolineare che, da questo momento in poi, ogni volta che ci serviremo di (4.2), vorremo in realtà intendere la definizione corretta con ϵ e δ_ϵ data precedentemente.

In alternativa, per provare che una funzione sia Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.1 si può sfruttare il seguente Criterio di Cauchy.

Proposizione 4.3 (**Criterio di Cauchy**). *Siano g una funzione limitata e F una funzione a valori reali, entrambe definite sull'intervallo compatto $[a, b]$, con $a < b$ in $\mathbb{R}$. Sia R_Γ la somma di Riemann-Stieltjes associata alla partizione $\Gamma \in \Omega([a, b])$, definita come in* (3.16)*. Condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di* (4.1) *è il seguente criterio di Cauchy: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|R_\Gamma - R_{\Gamma'}| < \epsilon$ per ogni Γ, $\Gamma' \in \Omega([a, b])$ con $|\Gamma|$, $|\Gamma'| < \delta_\epsilon$.*

Dimostrazione. Partiamo dalla dimostrazione dell'implicazione più semplice: sapendo dell'esistenza di (4.1) verifichiamo che valga il criterio di Cauchy. Sia $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ (preso come nella Definizione 4.1) per cui

$$|R_\Gamma - R_{\Gamma'}| \leq |R_\Gamma - I| + |I - R_{\Gamma'}| < \epsilon + \epsilon,$$

per ogni Γ, $\Gamma' \in \Omega([a, b])$ con $|\Gamma|$, $|\Gamma'| < \delta_\epsilon$. E il criterio di Cauchy è così dimostrato.

L'implicazione inversa invece richiede un po' più di sforzo. Sia $\epsilon > 0$, (dal criterio di Cauchy) esiste $\delta_\epsilon > 0$; definiamo $\overline{n} = \overline{n}_{\delta_\epsilon} \in \mathbb{N}$ e costruiamo una partizione $\Gamma_{\overline{n}} = \{x_i\}_{i=0}^{\overline{n}}$ con nodi equispaziati in $[a, b]$ e tale che $|\Gamma_{\overline{n}}| = \frac{b-a}{\overline{n}} < \delta_\epsilon$. Consideriamo $\mathbb{R}_{\Gamma_{\overline{n}}}$ la somma di Riemann-Stieltjes associata alla partizione $\Gamma_{\overline{n}}$, con punti intermedi $\xi_i = x_i$ per $i = 0, 1, \ldots, \overline{n} - 1$ e verifichiamo che $(\mathbb{R}_{\Gamma_n})_n$ è una successione di Cauchy. Ovvero proviamo

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \overline{n}_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \text{tale che} \quad |R_{\Gamma_n} - R_{\Gamma_m}| < \epsilon \quad \forall\, n, m \geq \overline{n}_\epsilon; \tag{4.3}$$

dal momento che Γ_n e Γ_m sono partizioni di $[a, b]$ con calibro inferiore a δ_ϵ, allora (4.3) segue direttamente dal criterio di Cauchy, che stiamo supponendo vero per ipotesi. Essendo una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}_{\Gamma_n})_n$ è convergente; chiamato I il suo limite sappiamo dunque che

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N_\epsilon > 0, \quad \text{tale che} \quad |R_{\Gamma_n} - I| < \epsilon \quad \forall\, n \geq N_\epsilon. \tag{4.4}$$

[1]Nel Capitolo 4 di [2] si fa uso di questa notazione, ma è da intendersi sempre con il significato dato nella Definizione 4.1.

Arrivati a questo punto non resta che accertarsi che I sia il candidato ideale perché verifichi la Definizione 4.1: per $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ (preso come nel criterio di Cauchy) tale che per ogni partizione $\Gamma \in \Omega([a,b])$ con $|\Gamma| < \delta_\epsilon$ e scelta di punti intermedi arbitraria, si ha: sfruttando la disuguaglianza triangolare stimiamo

$$|I - R_\Gamma| \le |I - R_{\Gamma_{\widetilde{n}}}| + |R_{\Gamma_{\widetilde{n}}} - R_\Gamma| \quad \text{per } \widetilde{n} = \max\{\overline{n}_\epsilon, N_\epsilon\}\,; \tag{4.5}$$

inoltre

$$|I - R_{\Gamma_{\widetilde{n}}}| \overset{(4.4)}{<} \epsilon \tag{4.6}$$

$$|R_{\Gamma_{\widetilde{n}}} - R_\Gamma| \overset{(\heartsuit)}{<} \epsilon, \tag{4.7}$$

dove $(\heartsuit)$ è vera per il criterio di Cauchy. Mettendo insieme le diverse stime intuiamo che I è proprio l'integrale di Riemann-Stieltjes che stavamo cercando. □

Quando F è una funzione monotona crescente anche un'altra strada è percorribile per stabilire se g sia una funzione Riemann-Stieltjes integrabile. Al riguardo diamo alcune definizioni e proposizioni preliminari.

Definizione 4.4. *Sia $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partizione di $[a,b]$. Siano g una funzione limitata e F una funzione monotona crescente, entrambe definite su $[a,b]$; definiamo somme di Riemann-Stieltjes rispettivamente dal basso e dall'alto*

$$L(g,\Gamma,F) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(F(x_{i+1}) - F(x_i)),$$
$$U(g,\Gamma,F) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(F(x_{i+1}) - F(x_i)), \tag{4.8}$$

con $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} g(x)$ e $M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} g(x)$.

Osservazione 4.5. Vengono anche chiamate somme di Riemann-Stieltjes-Darboux, perché facilmente riconducibili alle note somme di Darboux, incontrate nella teoria dell'integrale di Riemann, ponendo in (4.8) $F(x) = x$. Benché vi sia dipendenza da g e F, da ora in poi le indicheremo più semplicemente L_Γ e U_Γ.

Proposizione 4.6. *Siano g una funzione limitata e F una funzione monotona crescente, entrambe definite su $[a,b]$. Allora, prese due partizioni qualunque Γ_1 e Γ_2 di $[a,b]$,*

$$L_{\Gamma_1} \le U_{\Gamma_2}. \tag{4.9}$$

Corollario 4.7. *Siano g una funzione limitata e F una funzione monotona crescente, entrambe definite su $[a,b]$. Allora, prese due partizioni qualunque Γ_1 e Γ_2 di $[a,b]$, e i rispettivi raffinamenti Γ_1' e Γ_2', si ha*

$$L_{\Gamma_1} \le L_{\Gamma_1'} \le U_{\Gamma_2'} \le U_{\Gamma_2}. \tag{4.10}$$

La dimostrazione del Corollario 4.7 è conseguenza immediata della Proposizione 4.6, ma non trattiamo nel dettaglio questa parte, consigliando di leggerla al Capitolo 4 di [2]. Diamo invece un'altra definizione di Integrale di Riemann-Stieltjes.

Definizione 4.8. *Siano g una funzione limitata e F una funzione monotona crescente, entrambe definite su $[a, b]$. Assumiamo che*

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma = \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma = I < +\infty, \tag{4.11}$$

dove l'estremo superiore e inferiore sono definiti su tutte le possibili partizioni Γ dell'intervallo $[a, b]$. In tal caso definiamo I come l'integrale di Riemann-Stieltjes di g rispetto a F su $[a, b]$, ovvero

$$\int_a^b g \, \mathrm{d}F = I.$$

Osservazione 4.9. Dall'espressione (4.10) potevamo già osservare come il raffinamento delle partizioni Γ_1 e Γ_2 producesse per L_{Γ_1} un andamento crescente e per U_{Γ_2} un andamento decrescente. Questa seconda definizione richiede che al "limite", ovvero al raffinarsi via via delle partizioni Γ, le due successioni numeriche convergano allo stesso risultato, indipendentemente dalla partizione di partenza. Ancora una volta sottolineiamo come le partizioni non siano funzioni del calibro, pertanto anche se talvolta useremo la seguente notazione

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma = \lim_{\sigma\to 0} L_\Gamma,$$
$$\inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma = \lim_{\sigma\to 0} U_\Gamma;$$

i limiti rispetto al calibro σ delle partizioni Γ sono da intendersi sempre come limiti informali.

Osservazione 4.10. Quando $F(x) = x$ l'Integrale di Riemann-Stieltjes si riduce all'Integrale di Riemann. In questo caso particolare $\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma$ e $\inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma$ corrispondono rispettivamente all'integrale dal basso e dall'alto di Riemann, ossia "la migliore approssimazione" dall'alto e dal basso mediante somme di Darboux dell'integrale di Riemann. Alcuni libri, come [6], forniscono una versione analoga di questi concetti per gli integrali di Riemann-Stieltjes, definendo

$$\underline{\int_a^b} g \, \mathrm{d}F = \sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma,$$
$$\overline{\int_a^b} g \, \mathrm{d}F = \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma.$$

Per tali definizioni, g è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.8 quando

$$\underline{\int_a^b} g\,\mathrm{d}F = \overline{\int_a^b} g\,\mathrm{d}F. \tag{4.12}$$

Vediamo ora un criterio equivalente a dimostrare l'esistenza di $\int_a^b g\,\mathrm{d}F$ secondo la definizione appena data.

Proposizione 4.11. *Una funzione limitata g è Riemann-Stieltjes integrabile, secondo la Definizione 4.8, rispetto alla funzione monotona crescente F sull'intervallo $[a,b]$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione P tale che*

$$0 \leq U_P - L_P < \epsilon, \tag{4.13}$$

per U_P e L_P definiti come (4.8). Se (4.13) è vero per P, allora è vero anche per ogni raffinamento di P.

Dimostrazione. Supponiamo sia vero (4.13), dunque $U_P < \epsilon + L_P$. Dalla definizione di estremo superiore e inferiore deduciamo che

$$\inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma \leq U_P \overset{(4.13)}{<} \epsilon + L_P \leq \epsilon + \sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma \qquad \text{per ogni } \epsilon > 0. \tag{4.14}$$

Ma dall'arbitrarietà di ϵ segue direttamente che $\inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma \leq \sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma$. Allo stesso tempo, grazie alla Proposizione 4.6, si ha invece la disuguaglianza opposta, ossia

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma \leq \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma; \tag{4.15}$$

per cui secondo (4.11) la funzione g è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.8. Per l'altra implicazione ragioniamo in questo modo: dalla caratterizzazione dell'estremo inferiore e superiore sappiamo che esistono due partizioni di $[a,b]$, Γ_1 e Γ_2, tali che

$$0 < U_{\Gamma_1} - \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.16}$$

$$0 < \sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma - L_{\Gamma_2} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.17}$$

Sommiamo membro a membro (4.16) e (4.17), tenendo in considerazione anche (4.11) dal momento che stiamo supponendo g Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.8, perciò otteniamo

$$0 < U_{\Gamma_1} - L_{\Gamma_2} < \epsilon. \tag{4.18}$$

Scegliere una nuova partizione P più fine di Γ_1 e Γ_2, ad esempio $P = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, e sostituire con U_P e L_P le somme di Riemann-Stieltjes U_{Γ_1} e L_{Γ_2} in (4.18), non comporta la modifica di alcuna disuguaglianza; questo fatto è giustificato dalla monotonia delle somme dal basso e dall'alto di Riemann-Stieltjes, come intuito nel Corollario 4.7. Grazie allo stesso corollario possiamo concludere che provare (4.13) per una partizione P equivale, implicitamente, a provarlo per ogni suo raffinamento; infatti per $P \subseteq P'$

$$L_P \overset{(4.10)}{\leq} L_{P'} \overset{(4.9)}{\leq} U_{P'} \overset{(4.10)}{\leq} U_P,$$

e se $0 \leq U_P - L_P < \epsilon$ a maggior ragione si avrà anche $0 \leq U_{P'} - L_{P'} < \epsilon$. Questo termina la dimostrazione. □

Le due definizioni sulle funzioni Riemann-Stieltjes integrabili non sono equivalenti. Infatti se g è una funzione limitata e Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a F, che è monotona crescente, secondo la Definizione 4.1, allora g è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto ad F anche secondo la Definizione 4.8; nella successiva proposizione lo vedremo meglio. Tuttavia non è detto il viceversa, perché si possono trovare esempi di funzioni Riemann-Stieltjes integrabili per la Definizione 4.8, ma non per la Definizione 4.1. L'argomento viene approfondito e corredato di esempi nel Capitolo 4 di [2], ma per rimanere concentrati sul nostro obiettivo, ovvero il confronto tra Lebesgue-Stieltjes e Riemann-Stieltjes, preferiamo sorvolare gli esempi e dimostrare solo la seguente proposizione.

Proposizione 4.12. *Siano g una funzione limitata e F una funzione monotona crescente, entrambe definite su $[a, b]$. Supponiamo che g sia Riemann-Stieltjes integrabile nel senso dato dalla Definizione 4.1, e denotiamo con I il suo integrale. Allora g è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a F nel senso dato dalla Definizione 4.8 e*

$$I = \sup_{\Gamma \in \Omega([a,b])} L_\Gamma = \inf_{\Gamma \in \Omega([a,b])} U_\Gamma. \tag{4.19}$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 4.1 sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|R_\Gamma - I| < \epsilon$ per ogni partizione Γ di calibro $|\Gamma| = \sigma \leq \delta_\epsilon$. Sia $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partizione di $[a, b]$ tale che $|P| \leq \delta_\epsilon$, con δ_ϵ di cui sopra; scegliamo i punti intermedi ξ_i e ζ_i in $[x_i, x_{i+1}]$, in modo tale che per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-1$, si abbia

$$0 \leq M_i - g(\xi_i) < \frac{\epsilon}{F(b) - F(a)} \quad \text{e} \quad 0 \leq g(\zeta_i) - m_i < \frac{\epsilon}{F(b) - F(a)}, \tag{4.20}$$

per $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)$ e $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)$. Poniamo

$$R_P(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) \quad \text{e} \quad R_P(\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} g(\zeta_i) \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right),$$

due somme di Riemann-Stieltjes associate alla partizione P. Dunque per quanto appena detto si avrà $|R_P(\xi) - I| < \epsilon$ e $|R_P(\zeta) - I| < \epsilon$. Sfruttiamo la Proposizione 4.11

per dimostrare che g è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a F nel senso dato dalla Definizione 4.8. Dalla disuguaglianza triangolare segue

$$\begin{aligned} U_P - L_P &\leq |R_P(\xi) - I| + |I - R_P(\zeta)| + |U_P - R_P(\xi)| + |R_P(\zeta) - L_P| \\ &< \epsilon + \epsilon + |U_P - R_P(\xi)| + |R_P(\zeta) - L_P|\,. \end{aligned}$$

Grazie a (4.20) abbiamo modo di stimare

$$\begin{aligned} |U_P - R_P(\xi)| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - g(\xi_i))\,(F(x_{i+1}) - F(x_i))\right| < \epsilon, \\ |R_P(\zeta) - L_P| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} (g(\zeta_i) - m_i)\,(F(x_{i+1}) - F(x_i))\right| < \epsilon, \end{aligned}$$

quindi concludiamo che $U_P - L_P < 4\epsilon$. Dunque g è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.8, ovvero $\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma = \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma = \tilde{I}$. Per concludere la dimostrazione occorre anche provare che $\tilde{I} = I$. Sfruttiamo nuovamente la disuguaglianza triangolare per vedere che

$$\begin{aligned} |U_P - I| &\leq |U_P - R_P(\xi)| + |R_P(\xi) - I| < 2\epsilon, \\ |I - L_P| &\leq |R_P(\zeta) - L_P| + |I - R_P(\zeta)| < 2\epsilon, \end{aligned}$$

inoltre $L_P \leq \sup_\Gamma L_\Gamma = \tilde{I} = \inf_\Gamma U_\Gamma \leq U_P$ per cui anche $|\tilde{I} - I| < 2\epsilon$ e la dimostrazione si conclude. □

Arrivati a questo punto siamo pronti ad enunciare un primo teorema di confronto tra l'integrale di Lebesgue-Stieltjes e l'integrale di Riemann-Stieltjes.

Teorema 4.13. *Siano F, g due funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$ dove F è una funzione monotona crescente e continua da destra e g è una funzione limitata e Borel misurabile. Se esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes di g rispetto a F nel senso dato dalla Definizione 4.1, allora*

$$\int_a^b g\,\mathrm{d}F = \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\mu_F. \tag{4.21}$$

Dimostrazione. Innanzitutto preoccupiamoci della buona positura dell'enunciato: dal momento che $\int_a^b g\,\mathrm{d}F$ esiste per ipotesi, l'unica verifica riguarda la μ_F-integrabilità di g, ovvero provare che

$$\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\mu_F < +\infty. \tag{4.22}$$

Poiché g è una funzione limitata esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $g \leq K$. Sfruttando la monotonia dell'integrale si ha

$$\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\mu_F \leq \int_{[a,b]} K\,\mathrm{d}\mu_F = K \cdot \mu_F([a, b]);$$

ma $K \in \mathbb{R}$ e $\mu_F([a,b]) < +\infty$ per le proprietà delle misure boreliane, dunque (4.22) è verificato, concludendo sulla buona positura di (4.21).

Sia $\Gamma = \{x_j\}_{j=0}^n$ una partizione dell'intervallo $[a,b]$. Indichiamo con m_j e M_j rispettivamente $\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} g(x)$ e $\sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} g(x)$ e definiamo le somme di Riemann-Stieltjes L_Γ e U_Γ come in (4.8). Seguendo un ragionamento analogo a quello visto alla fine del precedente capitolo per approssimare gli integrali di Lebesgue-Stieltjes con somme di Riemann-Stieltjes, poniamo

$$g_1 = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \chi_{[x_j,x_{j+1}]}, \quad g_2 = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \chi_{[x_j,x_{j+1}]};$$

i rispettivi integrali erano già stati calcolati in (3.24) e (3.25), ed equivalgono a

$$\int_{[a,b]} g_1 \, \mathrm{d}\mu_F = L_\Gamma, \quad \int_{[a,b]} g_2 \, \mathrm{d}\mu_F = U_\Gamma.$$

Dal momento che $g_1 \leq g \leq g_2$, allora per la monotonia dell'integrale segue che

$$L_\Gamma \leq \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F \leq U_\Gamma, \quad \text{per } \Gamma \in \Omega([a,b]). \tag{4.23}$$

Poiché è vera per una generica partizione Γ, allora (4.23) sarà vera per ogni $\Gamma \in \Omega([a,b])$, dunque $\int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F$ è rispettivamente un maggiorante e un minorante per gli insiemi

$$\{ L_\Gamma \mid \Gamma \in \Omega([a,b])\} \quad \text{e} \quad \{ U_\Gamma \mid \Gamma \in \Omega([a,b])\},$$

perciò possiamo concludere che

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma \leq \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F \leq \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma. \tag{4.24}$$

Per ipotesi sappiamo che g è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.1, inoltre F è monotona, dunque grazie alla Proposizione 4.12 possiamo dedurre che g è Riemann-Stieltjes integrabile anche nel senso dato dalla Definizione 4.8, ovvero

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma = \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma = \int_a^b g \, \mathrm{d}F.$$

Dal momento che i due estremi di (4.24) sono uguali, allora valgono tutte uguaglianze, in particolare

$$\sup_{\Gamma\in\Omega([a,b])} L_\Gamma = \inf_{\Gamma\in\Omega([a,b])} U_\Gamma = \int_a^b g \, \mathrm{d}F = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F.$$

Questo conclude la prova. $\square$

In questo primo teorema di confronto non è richiesta alcuna condizione extra alle funzioni F e g, ad eccezione di quelle fondamentali affinché siano ben definiti entrambi gli integrali: F è monotona crescente e continua da destra affinché sia ben definita la misura μ_F rispetto alla quale si integra; g è limitata, al fine di essere Riemann-Stieltjes integrabile, mentre la Borel-misurabilità è fondamentale al fine di poter integrare la funzione alla maniera di Lebesgue-Stieltjes. Tra le ipotesi del teorema vi è anche l'esistenza di $\int_a^b g\,\mathrm{d}F$ secondo la Definizione 4.1. Qui di seguito vediamo alcune condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di questo integrale, che ci porteranno a un secondo teorema di confronto tra l'integrale di Lebesgue-Stieltjes e l'Integrale di Riemann-Stieltjes.

Proposizione 4.14. *Siano F, g due funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, con F monotona crescente. Se g è continua allora è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.8.*

Dimostrazione. Troviamo una partizione $P \in \Omega([a, b])$ che soddisfi (4.13). Se $F(b) = F(a)$ qualunque partizione $P \in \Omega([a, b])$ verifica

$$L_P = U_P = 0,$$

pertanto l'integrale di Riemann-Stieltjes di g rispetto ad F esiste ed è nullo. Valutiamo il caso in cui $F(b) > F(a)$. La funzione g è continua sul compatto $[a, b]$, dunque dal Teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua; grazie a questo possiamo dire che per $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ allora $|g(x_i) - g(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{(F(b)-F(a))}$. Scegliamo una partizione P in modo tale che $|P| \leq \delta$; ne segue

$$\begin{aligned} U_P - L_P = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,(F(x_{i+1} - F(x_i)) < \\ < \frac{\epsilon}{(F(b) - F(a))} \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1} - F(x_i)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Avendo scelto P con calibro inferiore a δ, è lecito maggiorare $(M_i - m_i)$, per $i = 0, 1, \ldots, n-1$, con $\frac{\epsilon}{(F(b)-F(a))}$. Trovata una partizione che soddisfi (4.13), grazie alla Proposizione 4.11 concludiamo che g è Riemann-Stieltjes integrabile nel senso dato dalla Definizione 4.8. $\square$

Proposizione 4.15. *Siano F, g due funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, con F monotona crescente. Se g soddisfa le stesse ipotesi della Proposizione precedente allora esiste $\int_a^b g\,\mathrm{d}F$ nel senso dato dalla Definizione 4.1.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.14 sappiamo che g è Riemann-Steiltjes integrabile nel senso dato dalla Definizione 4.8, ovvero esiste una partizione P che soddisfi (4.13);

anzi nel corso della dimostrazione precedente abbiamo verificato che (4.13) è valido per ogni partizione P di calibro $|P| = \sigma \leq \delta$. Consideriamo ora R'_P e R''_P due somme di Riemann-Stieltjes associate alla partizione P; usando solamente le definizioni è semplice intuire che

$$L_P \leq R'_P \leq U_P \quad \text{e} \quad L_P \leq R''_P \leq U_P,$$

da cui

$$|R''_P - R'_P| \leq U_P - L_P \overset{(4.13)}{<} \epsilon.$$

Verificandosi dunque il criterio di Cauchy, allora per quanto dimostrato nella Proposizione 4.3 sappiamo che esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes di g rispetto ad F nel senso dato dalla Definizione 4.1. □

Teorema 4.16. *Siano F, g due funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, con F monotona crescente e g continua. Allora l'integrale di Lebesgue-Stieltjes e l'integrale di Riemann-Stieltjes di g coincidono, ossia*

$$\int_a^b g \, \mathrm{d}F = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\mu_F. \tag{4.25}$$

Dimostrazione. Come primo accorgimento accertiamoci dell'esistenza di entrambi gli integrali. Dalle ultime due proposizioni abbiamo verificato che quando g è continua il suo integrale di Riemann-Stieltjes esiste secondo entrambe le definizioni date. Per l'integrale di Lebesgue-Stieltjes invece dobbiamo domandarci se g è μ_F-integrabile e per questo è sufficiente verificare che $\int_{[a,b]} |g| \, \mathrm{d}\mu_F$ sia finito. Lo stesso problema si era già posto all'inizio della Sezione 3.2 e si era giunti alla conclusione che

$$\int_{[a,b]} |g| \, \mathrm{d}\mu_F \leq K \int_{[a,b]} 1 \, \mathrm{d}\mu_F = K \cdot \mu_F([a, b]) < +\infty,$$

da cui g è μ_F-integrabile[2]. Arrivati a questo punto la dimostrazione del teorema risulta quasi banale avendo già in mano tutti gli strumenti per poter concludere. Infatti essendo g una funzione continua, grazie alla Proposizione 4.15 sappiamo che g è Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.1, ovvero si ha che

$$\begin{aligned} &\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \overline{\delta}_\epsilon > 0, \quad \text{tale che} \quad |R_\Gamma - I| < \epsilon, \\ &\forall\, \Gamma \in \Omega([a, b]) \, \text{con} \, |\Gamma| < \delta_\epsilon \, \text{e scelta arbitraria di punti intermedi;} \end{aligned} \tag{4.26}$$

e dove

$$I = \int_a^b g \, \mathrm{d}F. \tag{4.27}$$

[2]Il ragionamento si ripete identico; invitiamo a leggere l'incipit del Capitolo 3.2 per maggiori dettagli.

Inoltre sono verificate anche tutte le ipotesi della Proposizione 3.29 per cui vale anche che

$$\begin{aligned}&\forall\,\epsilon>0\quad\exists\,\widetilde{\delta}_\epsilon>0,\quad \text{tale che}\quad |R_\Gamma-\widetilde{I}|<\epsilon,\\&\forall\,\Gamma\in\Omega([a,b])\,\text{con}\,|\Gamma|<\widetilde{\delta}_\epsilon\,\text{e scelta arbitraria di punti intermedi;}\end{aligned}\tag{4.28}$$

e dove

$$\widetilde{I}=\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\mu_F.\tag{4.29}$$

Infine mostriamo che $I=\widetilde{I}$. Consideriamo una partizione Γ con calibro $|\Gamma|<\delta_\epsilon$, dove $\delta_\epsilon=\min\left\{\widetilde{\delta}_\epsilon,\overline{\delta}_\epsilon\right\}$, sfruttando la disuguaglianza triangolare si prova che

$$|I-\widetilde{I}|\leq|I-R_\Gamma|+|R_\Gamma-\widetilde{I}|\overset{(4.26)}{<}\epsilon+|R_\Gamma-\widetilde{I}|\overset{(4.28)}{<}\epsilon+\epsilon,\tag{4.30}$$

e questo conclude la prova. □

Concludiamo il capitolo con l'esempio di una funzione Lebesgue-Stieltjes integrabile ma non Riemann-Stieltjes integrabile, per sottolineare come l'integrale di Lebesgue-Stieltjes allarghi le possibilità di integrabilità di una funzione.

Esempio 4.17. Siano F una funzione monotona crescente e continua da destra, e g una funzione limitata, definite come

$$F(x)=g(x)=\begin{cases}0 & -1\leq x<0\\ 1 & 0\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Valutiamo l'esistenza di $\int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}F$ secondo la Definizione 4.1. Sia $\Gamma=\{x_i\}_{i=0}^n$ una partizione dell'intervallo $[-1,1]$, con $i_0\in\{1,2,\dots,n-1\}$ tale che $x_{i_0}<0$ e $x_{i_0+1}\geq 0$. Dalla definizione di F segue che una qualunque somma di Riemann-Stieltjes equivale a

$$R_\Gamma=\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(F(x_{i+1})-F(x_i))=g(\xi_{i_0})\quad\text{per }\xi_{i_0}\in[x_{i_0},x_{i_0+1}],\tag{4.31}$$

tutti i termini della sommatoria si annullano perché se $i\neq i_0$, allora

$$(F(x_{i+1})-F(x_i))=0.$$

Raffinare la partizione non produce alcun cambiamento su R_Γ, perché esiste sempre un indice i_0 che verifichi quanto richiesto. Inoltre $g(\xi_{i_0})\in\{0,1\}$ per $\xi_{i_0}\in[x_{i_0},x_{i_0+1}]$, pertanto per verificare se g sia Riemann-Stieltjes integrabile secondo la Definizione 4.1 cerchiamo un valore finito I tale che

$$|I-R_\Gamma|=|I-g(\xi_{i_0})|<\epsilon.$$

Tuttavia $g(\xi_{i_0})$ oscilla arbitrariamente tra i valori 0 e 1, pertanto non è possibile trovare I come desiderato. Se infatti $I < \frac{1}{2}$, allora per $\epsilon = \frac{1}{3}$ e per ogni $\delta > 0$ esiste una partizione Γ di calibro $|\Gamma| < \delta$ tale che

$$|I - R_\Gamma| = |I - g(\xi_{i_0})| > \epsilon.$$

L'esistenza di una tale partizione Γ è garantita per costruzione: posso sempre definire una partizione Γ con calibro piccolo a piacere, in modo tale che $\xi_{i_0} \geq 0$; per cui $g(\xi_{i_0}) = 1$ e dunque

$$|I - g(\xi_{i_0})| = |I - 1| > \epsilon = \frac{1}{3}.$$

In modo analogo se $I \geq \frac{1}{2}$, allora per $\epsilon = \frac{1}{3}$ e per ogni $\delta > 0$ esiste una partizione Γ di calibro $|\Gamma| < \delta$ tale che

$$|I - R_\Gamma| = |I - g(\xi_{i_0})| > \epsilon.$$

Basta infatti definire Γ con calibro piccolo a piacere, in modo tale che $\xi_{i_0} < 0$, per cui $g(\xi_{i_0}) = 0$ e dunque

$$|I - g(\xi_{i_0})| = |I| \geq \frac{1}{2} > \epsilon = \frac{1}{3}.$$

Quindi g non è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a F nel senso dato dalla Definizione 4.1. Verifichiamo se è Riemann-Stieltjes integrabile nel senso dato dalla Definizione 4.8. Consideriamo L_Γ e U_Γ definite come al solito[3] e vediamo subito che

$$L_\Gamma = \inf_{x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]} g(x) \cdot (F(x_{i_0+1}) - F(x_{i_0})) = 0,$$

$$U_\Gamma = \sup_{x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]} g(x) \cdot (F(x_{i_0+1}) - F(x_{i_0})) = 1.$$

Rimpicciolire il calibro di Γ, o modificare i nodi della partizione non cambierebbe nulla, perché esisterebbe sempre un indice i_0 tale che $x_{i_0} < 0$ e $x_{i_0+1} \geq 0$; 0 è un punto di discontinuità comune a g e F e causa della diversità tra $\sup_\Gamma L_\Gamma$ e $\inf_\Gamma U_\Gamma$. Da ultimo calcoliamo l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di g rispetto a F. Riscrivere g in forma di funzione semplice, ovvero

$$g(x) = 0 \cdot \chi_{[-1,0[} + 1 \cdot \chi_{[0,1]},$$

rende più intuitivo il seguente calcolo:

$$\int_{[-1,1]} g \, \mathrm{d}\mu_F = \int_{[0,1]} 1 \, \mathrm{d}\mu_F = \mu_F([0,1]);$$

sfruttando l'additività di μ_F e altre proprietà già osservate di questa misura abbiamo

$$\begin{aligned}\mu_F([0,1]) &= \mu_F(\{0\}) + \mu_F(]0,1]) \overset{(2.19)}{=} (F(0) - F(0^-)) + \mu_F(]0,1]) \\ &\overset{(2.1)}{=} (F(0) - F(0^-)) + (F(1) - F(0)) = F(1) - F(0^-) = 1.\end{aligned}$$

[3]Si fa riferimento alla Definizione 4.4 in cui sono comparse per la prima volta.

Integrare g rispetto a se stessa, visto che $F = g$, non è compatibile con l'esistenza dell'integrale di Riemann-Stieltjes secondo nessuna delle due definizioni date. Invece g è integrabile alla maniera di Lebesgue-Stieltjes nella misura boreliana $\mu_F = \mu_g$. L'integrale di Lebesgue-Stieltjes si conferma una estensione dell'integrale di Riemann-Stieltjes.

Bibliografia

[1] R. R. Reitano: "Foundation of Quantitative Finance: 1. Measure Spaces and Measurable Functions". Brandeis International Business School: Waltham, October 2017.

[2] R. R. Reitano: "Foundation of Quantitative Finance: 3. The Integrals of Lebesgue and (Riemann-)Stieltjes". Brandeis International Business School: Waltham, December 2017.

[3] R. R. Reitano: "Foundation of Quantitative Finance: 5. General Measure and Integration Theory". Brandeis International Business School: Waltham, May 2018.

[4] M. Carter, B. van Brunt: "The Lebesgue-Stieltjes Integral. A Pratical Introduction". Springer-Verlag: New York, 2000.

[5] R. L. Wheeden, A. Zygmund: "Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis". CRC press: Boca Raton, 2015.

[6] T. M. Apostol: "Mathematical Analysis". Addison-Wesley: Massachusetts, 1974.