Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA E LA SCUOLA ITALIANA

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro Gimigliano

Presentata da:
Elena Cedrini

Anno Accademico 2023-2024

IV Sessione

Introduzione

La geometria, sin dalle sue origini nell'antichità classica, ha rappresentato una delle discipline fondamentali del sapere matematico e scientifico, evolvendosi nel corso dei secoli in risposta a nuovi problemi e scoperte. Tra le sue molteplici ramificazioni, la geometria proiettiva ha assunto un ruolo di grande rilievo a partire dal XVII secolo, con i primi lavori di Desargues e Pascal, e poi più decisamente nel XIX secolo, quando iniziò a emergere come campo autonomo e a sollevare questioni epistemologiche e metodologiche di grande portata. In particolare, il contributo della scuola italiana, attiva tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, ha lasciato un'impronta indelebile nello sviluppo dei fondamenti della geometria proiettiva.

Questa tesi si propone di ripercorrere, in una prospettiva storica, l'evoluzione dei fondamenti della geometria proiettiva, dall'opera di Euclide e la sua sistematizzazione del sapere geometrico fino al dibattito ottocentesco, culminando con l'approfondito contributo della scuola italiana. La scelta di focalizzarsi sulla geometria proiettiva non solo consente di tracciare lo sviluppo di un settore specifico della matematica, ma permette anche di comprendere come questo campo sia stato centrale nelle discussioni epistemologiche e filosofiche sui fondamenti della geometria in generale.

Nel primo capitolo l'analisi partirà dalle radici della geometria nella Grecia antica, concentrandosi su alcune opere di Euclide. I suoi *Elementi* rappresentano una pietra miliare nell'organizzazione della geometria, fornendo una struttura logica e rigorosa che ha dominato la matematica per oltre duemila anni ed è tuttora ampiamente studiata nelle scuole. Tuttavia, Euclide non

si limitò alla geometria piana e solida; un ruolo importante verrà dato anche alla sua *Ottica*, che costituisce un primo tentativo di applicare i principi geometrici alla rappresentazione prospettica e ai fenomeni visivi. Questo capitolo esplorerà quindi il modo in cui le prime concezioni della geometria si formarono e come esse posero le basi per sviluppi successivi.
Nel secondo capitolo l'attenzione si sposterà sul XIX secolo, un periodo caratterizzato da una profonda crisi della geometria come era stata concepita fino a quel momento, in cui i nuovi protagonisti furono le geometrie non euclidee. L'analisi dell'indipendenza del V postulato, a lungo considerato problematico, portò alla formulazione di nuove geometrie che infrangevano i paradigmi della geometria tradizionale e aprivano le porte a nuove possibili concezioni, contrarie all'intuizione data dall'osservazione del modo reale. In questo contesto si inserisce l'opera di Moritz Pasch, il quale con i suoi studi sui fondamenti della geometria cercò di eliminare le ambiguità logiche del sistema euclideo, proponendo un approccio più rigoroso basato sull'assiomatizzazione. L'approfondimento di questo capitolo sarà cruciale per comprendere come la geometria proiettiva, pur essendo nata in un contesto classico, sia diventata un campo fertile per nuove formulazioni e questioni epistemologiche.
Infine, il terzo capitolo sarà dedicato al contributo della scuola italiana, che si distinse per il suo lavoro innovativo sui fondamenti della geometria proiettiva. Matematici come Corrado Segre, Giuseppe Peano, Giuseppe Veronese, Gino Fano, Federigo Enriques e Mario Pieri svolsero un ruolo cruciale nel dare una struttura solida e rigorosa alla geometria proiettiva, contribuendo allo sviluppo di nuovi assiomi e metodi di dimostrazione. Questa scuola si caratterizzò per un approccio tanto teorico quanto costruttivo, elaborando concetti fondamentali che influenzarono profondamente lo sviluppo della geometria moderna. Il capitolo esaminerà in particolare le loro opere principali, mettendo in luce il contributo di ciascuno di questi matematici e le loro differenze nello stile, forma, concetti chiavi e approccio matematico alla disciplina.

In conclusione si vedrà quali sono i motivi che hanno portato alla messa in ombra dei contributi della scuola italiana in questo campo, per fare spazio invece ad Hilbert e la scuola tedesca. Occorre però ricordare che il progresso della geometria proiettiva e lo studio sui suoi fondamenti è frutto di una continua ricerca ed evoluzione, di cui la scuola italiana ha fatto decisamente parte e continua ancora oggi ad avere una grande valenza tanto didattica e storica, quanto geometrica e filosofica.

Indice

Elenco delle figure

Nozioni Preliminari

Questo capitolo preliminare presenta alcune definizioni e teoremi (senza dimostrazioni) di geometria proiettiva che verranno citati nel corso della tesi. Non si tratta in alcun modo di una trattazione completa ed esaustiva delle basi della geometria proiettiva, ma quanto basta per entrare nel vivo dei prossimi capitoli.

Definizione 0.1 (Spazio Proiettivo)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ su un campo fissato $\mathbb{K}$. Lo spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ associato a V è l'insieme $\mathbb{P}(V)$ i cui elementi sono le rette vettoriali di V. $\mathbb{P}(V)$ è anche chiamato proiettivizzato di V e la sua dimensione è $\dim(\mathbb{P}(V)) = n$.

Osservazione 0.2. Si può costruire una corrispondenza biunivoca naturale tra $\mathbb{P}(V)$ e il quoziente $(V \setminus \{0\})/\sim$, dove $\sim$ è la seguente relazione di proporzionalità definita su $V \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* : v = \lambda w.$$

Si può quindi identificare $\mathbb{P}(V)$ con $(V \setminus \{0\})/\sim$, e di conseguenza anche le rette vettoriali $< v >$ con le classi di equivalenza $[\, v\,]$.

Notazione. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ si utilizza la notazione $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Definizione 0.3 (Piano Proiettivo)**.** Lo spazio $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ o $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è detto piano proiettivo, e si può pensare come l'estensione dell'usuale piano euclideo con l'aggiunta di "punti all'infinito", detti punti impropri. Tali punti corrispondono alle direzioni delle rette del piano, dunque le rette parallele si intersecano in uno di questi punti. La retta impropria è la retta costituita da tutti i punti impropri.

Teorema 0.4 (di Desargues o dei triangoli omologici)**.** *Se in uno spazio proiettivo una coppia di triangoli ABC e $A'B'C'$ è tale che le rette congiungenti i vertici corrispondenti passano per uno stesso punto P (proprio o improprio), allora le coppie di rette AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$ si intersecano in tre punti allineati e viceversa.*

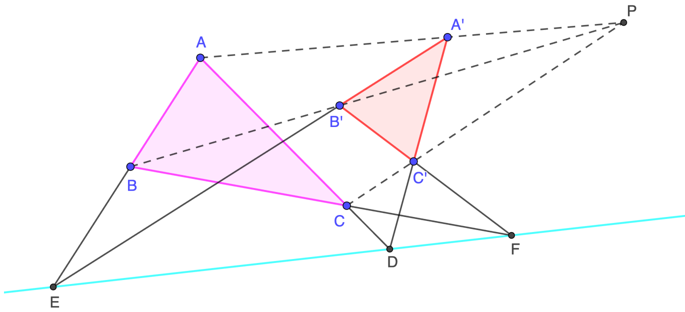


Figura 1: Teorema di Desargues

Notazione. Sia $\mathscr{B} = \{w_0, \dots, w_n\}$ una base di V e sia il vettore $v \in V$ uguale a $v = \lambda_0 w_0 + \cdots + \lambda_n w_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{K} \quad \forall i = 1, \dots, n$, allora indicheremo il vettore come $v = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathscr{B}}$.

Definizione 0.5 (Coordinate omogenee)**.** Sia $\mathscr{B} = (w_0, \dots, w_n)$ base di V, e $P \in \mathbb{P}(V)$. Sia inoltre $v = (\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathscr{B}}$ un rappresentante di P, cioè $P = [\,v\,]$. Diciamo che $\mu_0, \dots, \mu_n$ sono le coordinate omogenee del punto v rispetto a $\mathscr{B}$.

Definizione 0.6 (Morfismo proiettivo e proiettività)**.** Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensioni $n+1$ e $s+1$ rispettivamente. Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare iniettiva. Allora φ induce una applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(W) \\ [\,v\,] &\longrightarrow [\,\varphi(v)\,] \end{aligned}$$

detta morfismo proiettivo indotto da φ.

Nel caso in cui f sia un morfismo proiettivo da $\mathbb{P}(V)$ in sè stesso, allora si dice che f è una proiettività.

Teorema 0.7 (Fondamentale delle proiettività)**.** *Si considerino nello spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *due insiemi ordinati* $\{A_0, \ldots, A_{n+1}\}$ *e* $\{B_0, \ldots, B_{n+1}\}$*, ciascuno costituito da* $n+2$ *punti in posizione generale. Allora esiste un'unica proiettività* $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *tale che* $f(A_i) = B_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, n+1.$

Definizione 0.8 (Polimoni proporzionali)**.** Dato un campo $\mathbb{K}$, due polinomi $f, g \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ si dicono proporzionali se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $f = \lambda g$. Questa è una relazione di equivalenza su $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, che denotiamo con $f \sim_{prop} g$.

Definizione 0.9 (Curva algebrica piana proiettiva)**.** Una curva algebrica piana proiettiva su un campo $\mathbb{K}$ è la classe di equivalenza della relazione $\sim_{prop}$ di un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ con $\deg f \geq 1$.

Definizione 0.10 (Birapporto e gruppo armonico)**.** Siano A, B, C, D quattro punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ allineati; definiamo il birapporto di questa quaterna come:

$$\mathrm{b}(A, B, C, D) = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}$$

La quaterna di punti si dice gruppo armonico se $\mathrm{b}(A, B, C, D) = -1$. Dati tre punti A, B, C si dirà che il punto D è il quarto armonico se i quattro punti costituiscono un gruppo armonico.[1]

[1] Un'analisi ulteriore sarebbe necessaria, sia storica sia formale, per spiegare in modo rigoroso le questioni legate al quarto armonico. Non potendo dedicare ulteriore tempo all'argomento, si veda ad esempio [59] per un'ulteriore trattazione matematica.

Capitolo 1

Euclide

Euclide è stato uno dei più celebri matematici dell'antica Grecia, vissuto a cavallo tra il IV e il III secolo a.C. Venne chiamato ad Alessandria d'Egitto dal re Tolomeo I per insegnare matematica nel Museo, per secoli considerato il centro culturale più importante del mondo ellenistico. Durante la sua vita si interessò di innumerevoli materie, dalla geometria all'astronomia, dall'ottica alla musica. Ciononostante, le opere giunte fino a noi sono solo 5: i *Dati*, la *Divisione delle figure*, i *Fenomeni*, l'*Ottica* e infine i famosi *Elementi*. Alcune di esse ci sono pervenute in versione originale, mentre altre solo grazie a traduzioni arabe o latine.

1.1 Elementi

L'opera degli *Elementi* rappresenta un pilastro nella storia della matematica, essendo il primo trattato di geometria giunto fino a noi. Benché la maggior parte dei risultati siano riconducibili a matematici precedenti, l'originalità e il successo di Euclide risiede nella scelta di strutturare l'opera utilizzando un sistema assiomatico.
Essi costituiscono un unico sistema deduttivo di 465 teoremi che contengono, oltre ad un'enorme quantità di geometria elementare, numerosi elementi di algebra e teoria dei numeri.

L'opera è suddivisa in 13 libri: i primi 6 trattano la geometria piana, dal settimo al decimo si abbandona l'ambito geometrico per concentrarsi sull'aritmetica e infine gli ultimi 3 riguardano la geometria solida. Vediamo più nel dettaglio gli argomenti di ciascun libro:

I. Teoria dei triangoli, delle parallele e delle aree

II. Algebra geometrica

III. Teoria del cerchio

IV. Costruzioni di poligoni regolari inscritti e circoscritti

V. Teoria generale delle grandezze e delle proporzioni

VI. Teoria della similitudine

VII. Teoria fondamentale dei numeri

VIII. Proporzioni continue nella teoria dei numeri

IX. Ancora la teoria dei numeri

X. Teoria degli incommensurabili (irrazionali)

XI. Geometria solida

XII. Misurazioni delle figure solide

XIII. Solidi regolari

L'opera di Euclide, in particolare il primo libro, rappresenta uno dei più importanti testi di matematica e il più studiato dall'antichità fino ad oggi, dove risulta ancora materiale didattico nelle scuole. Questo mostra quanto l'opera di Euclide sia ancora influente; tuttavia, come vedremo meglio in seguito, gli *Elementi* vennero considerati per lungo tempo come il solo manuale che descrivesse l'unica e vera geometria possibile. Fino all'Ottocento, infatti, chiunque cercasse una via alternativa agli *Elementi* per costruire una nuova geometria veniva aspramente criticato e vedremo in seguito come questo

ritardò di molto la nascita e l'accettazione delle cosiddette geometrie non euclidee. Entreremo nel dettaglio solo del primo libro, il quale contiene i principi alla base della geometria euclidea.
Il primo libro si apre con 23 definizioni (chiamate *Termini*), 5 postulati e 8 nozioni comuni. Cominciamo riportando le prime 7 definizioni:

1. Punto è ciò che non ha parti.

2. Linea è lunghezza senza larghezza.

3. Estremi di una linea sono punti.

4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa.

5. Superficie e ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

6. Estremi di una superficie sono linee.

7. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa.

Euclide cercò di avvicinarsi il più possibile all'astrazione in queste espressioni, ma inevitabilmente conferiva agli oggetti descritti un senso fisico, probabilmente anche per renderle più intuitive. Vedremo poi come nell'assiomatica moderna si sentirà la necessità di tagliare questi legami con la realtà, rendendo le definizioni più generali e astratte possibili. Seguono poi alcune definizioni riguardanti gli angoli (da 8 a 12), la definzione di termine (estremo di qualcosa) e di figura (ciò che è compreso tra uno o più termini); le definizioni da 15 a 18 riguardano invece il cerchio e suoi elementi, mentre da 19 a 22 alcuni poligoni come triangoli e quadrilateri. L'ultima definizione riguarda invece le rette parallele:

23. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Questa definizione perderà di senso nel campo della geometria proiettiva, dove non esistono più rette parallele; nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ infatti le rette parallele del piano euclideo hanno un punto in comune all'infinito, detto *punto improprio*, dunque qualunque coppia di rette si interseca in un punto, proprio o improprio.
Per poter operare con più facilità nelle sue dimostrazioni, Euclide utilizzò alcuni assiomi (che oggi chiamiamo *Nozioni comuni*) che risultano evidenti poichè legati all'esperienza comune. Le 8 nozioni comuni utilizzate sono le seguenti:

- Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.
- E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
- E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
- E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.
- E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.
- E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.
- E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
- Ed il tutto è maggiore della parte.

Il punto cruciale degli *Elementi* si trova nell'uso di postulati, ossia asserzioni da assumere come verità fondamentali, che non necessitano dunque di alcuna giustificazione. Su questi 5 postulati si basano tutte le 48 proposizioni del primo libro.
Risulti postulato che:

I. Si possa condurre una linea retta da un qua1siasi punto ad ogni altro punto.

II. Una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.

IV. Tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

V. Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e da1la stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

L'ultimo postulato, detto anche postulato delle parallele, è storicamente il più controverso. Sembra che anche lo stesso Euclide non ne fosse pienamente convinto, infatti nelle prime 28 proposizioni non fece mai uso di tale postulato, anche se avrebbe semplificato alcune dimostrazioni.
Nei secoli che si sono susseguiti innumerevoli matematici e studiosi hanno tenetato di dimostrare il V postulato come fosse un teorema; infatti, a differenza degli altri postulati enunciati come affermazioni, la struttura del quinto è del tipo "se... allora..." e ricorda quella di un teorema. Inoltre la proposizione 17 risulta essere l'inversa del postulato:

Proposizione 17. *In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.*

Qui si ha come ipotesi tre rette che si incontrano (costruendo un triangolo) e come tesi risulta che la somma di una coppia di angoli è minore di 180°, mentre nel V postulato è l'inverso, ovvero si scambiano ipotesi e tesi. Questo ulteriore dettaglio fece lungamente dubitare della necessità di avere tra i postulati anche quello delle parallele.
Nessuno è mai chiaramente giunto alla tanto ricercata dimostrazione, ma con tutti questi tentativi si sono generate svariate formulazioni equivalenti di tale postulato. La più utilizzata nell'assiomatica moderna è l'assioma di Playfair.

Assioma di Playfair. *Dati una qualsiasi retta r e un punto P non appartenente a essa, è possibile tracciare per P una e una sola retta parallela alla retta r data.*

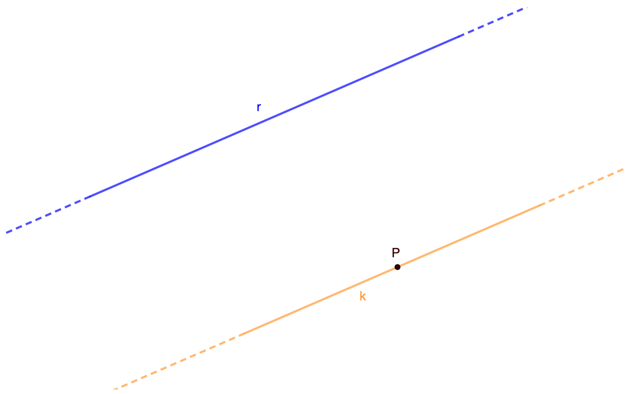


Figura 1.1: Assioma di Playfair

Per lo scopo di questa tesi non occorre addentrarci oltre nell'analisi dell'opera, quindi non vedremo altre proposizioni o teoremi presenti nel primo libro, nonostante alcune di esse siano storicamente molto importanti, come il Teorema di Pitagora o di Talete.
Gli *Elementi* sono stati rilevanti anche nell'ambito della geometria proiettiva: ad esempio il matematico francese Girard Desargues (1591-1661), considerato uno dei fondatori della geometria proiettiva, si occupò a lungo dello studio delle opere di Euclide. In particolare, grazie anche a numerosi studi sulla prospettiva, ampliò la geometria euclidea descritta negli *Elementi* con l'utilizzo dei punti all'infinito, oscurando quindi il concetto di rette parallele. Molti teoremi validi in geometria euclidea rimasero validi anche in geometria proiettiva, e anzi non necessitavano più di alcune ipotesi e limitazioni, grazie proprio alla presenza di nuovi punti, quelli impropri o "punti all'infinito". Con questo ampliamento (o semplificazione) della geometria euclidea si trovarono nuovi teoremi, come ad esempio il Teorema di Desargues, o dei triangoli omologici (si veda il Teorema 0.4). Questo infatti risulta valido anche in caso di triangoli con corrispondenti lati a due a due paralleli, poichè infatti questi risultano in prospettiva rispetto ad un punto all'infinito.
Possiamo riscontrare l'influenza di Euclide nella geometria proiettiva anche nell'approccio assiomatico; questa descrizione assiomatica è dovuta in particolar modo ai matematici della scuola italiana della seconda metà del XIX

secolo, influenzati anche dal lavoro di revisione degli *Elementi* fatto da Moritz Pasch, come vedremo nei prossimi capitoli. La nascita della geometria proiettiva poggia dunque le basi proprio sulla geometria euclidea, e solo nel XX secolo cambierà direzione e si ricondurrà principalmente all'algebra lineare. Per questo motivo inizialmente molte tecniche dimostrative della geometria proiettiva erano simili a quelle utlizzate da Euclide. Vedremo come anche un'altra opera di Euclide, l'*Ottica*, influenzò in particolar modo lo studio della prospettiva e successivamente anche quello della geometria proiettiva.

1.2 Ottica

L'*Ottica* di Euclide risale agli inizi del 300 a.C. ed è il primo trattato di geometria della visione giunto fino a noi; si ritiene inoltre che questa opera, a differenza degli *Elementi*, sia esclusivamente frutto del lavoro di Euclide. La struttura dell'opera è molto simile a quella degli *Elementi*, dove i risultati vengono elaborati a partire da una serie di assiomi tramite un processo logico deduttivo. La trattazione dell'*Ottica* rappresenta una chiara applicazione della geometria euclidea, in cui la visione non viene descritta in termini filosofici come la tradizione ellenistica prevedeva, bensì analizzata attraverso basi geometriche con cui studiare il rapporto tra l'occhio e la realtà che ci circonda.
Lo studio dell'*Ottica* è basato su alcuni concetti fondamentali, i *raggi visuali* e gli *angoli visivi*. I primi sono rappresentati geometricamente come semirette uscenti dall'occhio, corrispondenti alle possibili direzioni dello sguardo; tutti questi raggi sono quindi racchiusi all'interno del cosiddetto *cono visuale*, ossia la porzione di spazio osservabile dall'occhio umano. Con *angolo visuale* si intende invece l'angolo formato da due raggi passanti per gli estremi di un segmento. L'ottica non va dunque intesa nel senso moderno di teoria della luce, ma come teoria della percezione visiva, anche se è possibile reinterpretare risultati di Euclide in termini dell'ottica moderna. Euclide ad esempio descrivendo i *raggi visuali* parla solo di direzione, non di verso di percorren-

za della semiretta; interpretandoli come semirette entranti nell'occhio ci si avvicina di più alla teoria della luce più moderna.
Entrando nel vivo dell'opera, Euclide postula 7 premesse, su cui baserà tutti i suoi risultati, insieme ad alcuni teoremi degli *Elementi*.

I. Sia posto che i segmenti rettilinei a partire dall'occhio si portino a una distanza tra di loro di dimensioni sempre maggiori.

II. E che la figura formata dai raggi visuali sia un cono avente il vertice nell'occhio e la base sui contorni delle cose viste.

III. E che siano viste quelle cose sulle quali incidono i raggi visuali, mentre non siano viste quelle sulle quali i raggi visuali non incidono.

IV. E che le cose viste sotto angoli più grandi appaiano più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli più piccole, uguali quelle viste sotto angoli uguali.

V. E che le cose viste sotto raggi più alti appaiano più in alto, quelle viste sotto raggi più bassi, più in basso.

VI. E allo stesso modo che le cose viste sotto raggi più a destra appaiano più a destra, quelle viste sotto raggi più a sinistra appaiono più a sinistra.

VII. E che le cose viste sotto un maggior numero di angoli appaiano con miglior risoluzione.

Viene quindi postulata la stima della dimensione apparente e descritto il collegamento fra l'angolo visuale e la posizione dei raggi; inoltre, dall'ultima premessa, segue che l'insieme dei raggi visivi è discreto. Vediamo ora qualche teorema, per avere più chiaro il contenuto dell'opera; i seguenti teoremi riguardano la visione di oggetti uguali.

Teorema 4. *Tra segmenti uguali e giacenti sulla stessa retta, quelli visti da distanza più grande appaiono più piccoli.*

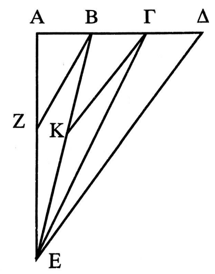


Figura 1.2: Teorema 4 dell'*Ottica*

Teorema 5. *Grandezze uguali poste a distanze diverse appaiono diverse, e più grande appare quella che sta più vicino all'occhio.*

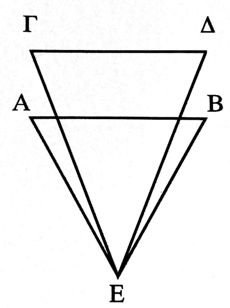


Figura 1.3: Teorema 5 dell'*Ottica*

Teorema 7. *Grandezze uguali che siano sullo stesso segmnento rettilineo non adiacenti e poste a distanze diverse dall'occhio appaiono disuguali.*

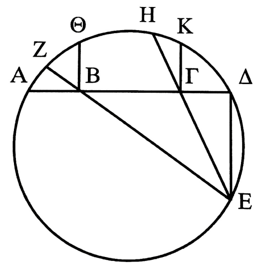


Figura 1.4: Teorema 7 dell'*Ottica*

Nel rinascimento la prospettiva subì una distinzione in *perspectiva naturalis*, la quale indicava proprio la teoria della visione, e in *perspectiva artificialis*,

ossia le tecniche di rappresentazione dello spazio su un piano bidimensionale, che sarà poi chiamata semplicemente prospettiva. I trattati che meglio racchiudono le regole e applicazioni, specialmente pittoriche, di quel periodo sono il "*De pictura*" (1435) di Leon Battista Alberti e il "*De prospectiva pingendi*" (ca. 1475-77) del pittore Piero della Francesca, entrambi con chiari riferimenti all'*Ottica* di Euclide.
L'ultimo passo della geometria della visione è la geometria proiettiva, in cui possiamo vedere un legame con la prospettiva dei quadri rinascimentali grazie al punto di fuga. Questo punto altro non è che un punto improprio, poichè nelle rappresentazioni bidimensionali pittoriche questo era il punto in cui le rette parallele rappresentate andavano a convergere. Tale punto appartiene alla cosiddetta linea dell'orizzonte (linea posta all'altezza dell'occhio che guarda la scena), che corrisponde in chiave proiettiva alla retta all'infinito costituita da tutti i punti impropri, ossia tutte le direzioni del piano.

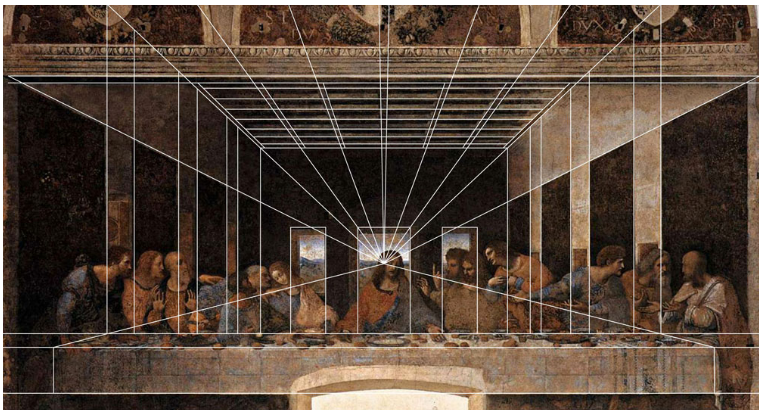
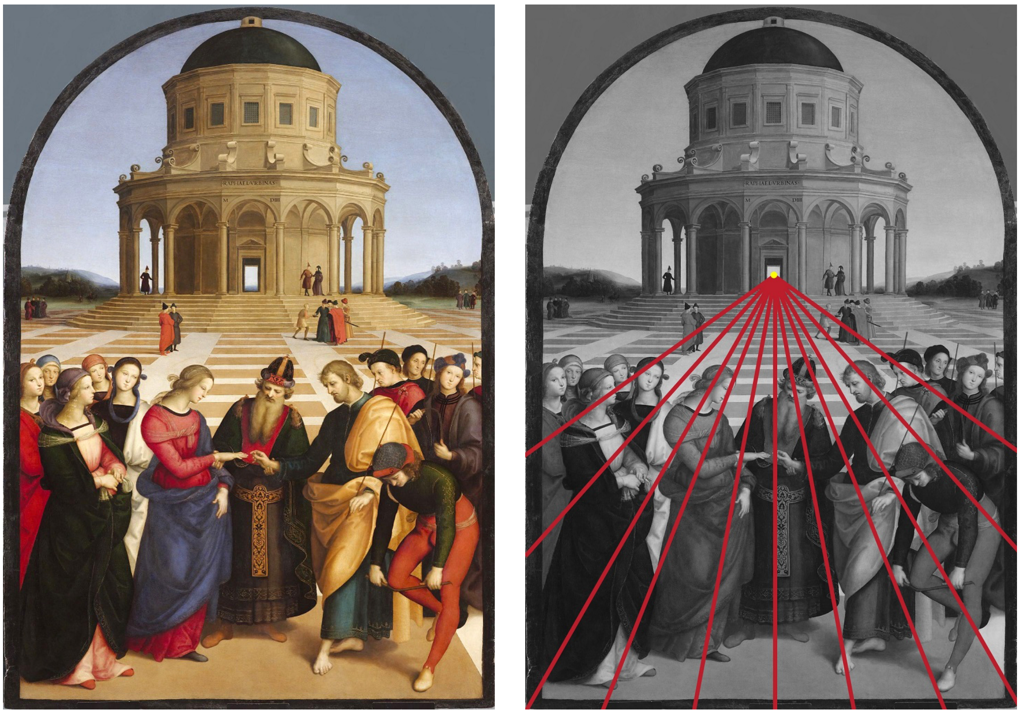


Figura 1.5: "Ultima cena", Leondardo da Vinci, 1495-1498

Figura 1.6: "Annunciazione", Sandro Botticelli, 1489



(a) (b)

Figura 1.7: "Sposalizio della Vergine", Raffaello Sanzo, 1504

Capitolo 2

Dibattito nell'Ottocento

L'Ottocento fu un periodo estremamente fertile e ricco di nuove scoperte nel campo della geometria, ma non solo: fu anche un momento di riflessioni, critiche e dibattiti, i quali ruotavano principalmente attorno alla geometria euclidea. Il XIX secolo segnò la crisi degli *Elementi* di Euclide e della sua geometria; venne infatti reputata incompleta, e soprattutto perse il primato come unica geometria possibile. In questi anni nacquero le geometrie non euclidee e si svilupparono ulteriormente le geometrie n-dimensionali e la geometria proiettiva.

2.1 Geometrie non euclidee

La geometria euclidea fino agli inizi dell'Ottocento era ritenuta l'unica vera geometria, in quanto fondata su assiomi evidenti e legati all'esperienza, con una struttura assiomatica non contraddittoria. Dapprima criticate, le geometrie non euclidee segnarono una svolta non solo per la geometria e l'assiomatica, ma anche per lo stesso concetto di verità: infatti fu possibile costruire nuove geometrie facendo scelte arbitrarie tra gli assiomi, su cui elaborare teorie coerenti e nuovi risultati, senza più la necessità di avere un legame con la realtà fisica. La scoperta delle geometrie non euclidee segnò un punto cruciale nella storia della geometria in quanto fornì nuovi punti di

vista su un mondo che non vedeva più al centro Euclide e i suoi *Elementi*.
È interessante notare come queste nuove geometrie siano nate contemporaneamente in luoghi diversi dalle menti di più persone, spesso senza nemmeno confrontarsi fra loro; questo deriva probabilmente da un bisogno comune di riformare la geometria studiata fino ad allora. Per citare Farkas Bolyai, matematico e padre di János Bolyai, questo è un esempio eclatante di come «le cose hanno un epoca, nella quale esse sono trovate nello stesso tempo in più luoghi, precisamente come in primavera le violette da ogni parte vengono alla luce».

2.1.1 Gauss

Carl Friedrich Gauss, nato a Braunschweig nel 1777, fu uno dei più influenti matematici tedeschi dell'Ottocento, definito il *Principe dei matematici*; i suoi campi di interesse furono molteplici, dall'analisi matematica alla statistica, uscendo anche dal campo della matematica e studiando questioni di fisica e astronomia. Il suo contributo alla geometria non euclidea fu noto a tutta comunità scientifica solo dopo la sua morte nel 1855; vennero ritrovate innumerevoli note mai pubblicate e anche una vasta corrispondenza con i suoi amici e colleghi, a cui esponeva scoperte e osservazioni che aveva talvolta timore di pubblicare. Questo è il caso del suo studio sul V postulato di Euclide e della conseguente negazione, con cui cercò di dare vita a una nuova geometria. Nell'arco di 20 anni Gauss tentò più volte di dimostrare il V postulato a partire dagli altri quattro, idea di cui i matematici dell'epoca come i suoi colleghi di Gottinga erano piuttosto convinti, senza però avere mai successo.
Attorno al 1830 Gauss fu in grado, dopo svariati studi, di teorizzare una geometria coerente e non contraddittoria in cui il V postulato veniva negato, e negli anni seguenti riucì a svilupparne i dettagli e a ricavare un certo numero di nuovi teoremi. La sua visione era estremamente innovativa per l'epoca, in quanto metteva fortemente in discussione il ruolo centrale della

geometria euclidea. In una lettera al matematico e astronomo Schumacher del 17 maggio 1831 scrisse:

> *In questo senso la geometria non euclidea non contiene assolutamente nulla di contraddittorio, sebbene molti dei suoi risultati debbano sulle prime essere ritenuti paradossali; tuttavia scambiare ciò per una contraddizione sarebbe unicamente un'illusione, provocata dalla vecchia abitudine a considerare la geometria euclidea come strettamente vera.*

Come detto prima, preferì non pubblicare questi risultati, per paura che non fossero compresi e del clamore che avrebbero suscitato; ne parlò ad esempio con il matematico Bessel in una lettera del 27 gennaio 1829.

> *Nelle ore libere ho pensato anche a un altro tema, che per me è già vecchio di quasi quarant'anni, e cioè ai primi fondamenti della geometria: non so se Le ho mai parlato delle mie vedute in proposito. Anche qui ho consolidato ulteriormente molte cose, e la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria completamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, non mi deciderò ancora per molto tempo a elaborare per una pubblicazione le mie molto estese ricerche sull'argomento, e ciò forse non avverrà mai durante la mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute...*

Qualche anno più tardi Gauss sembrava essersi convinto a pubblicare quanto aveva scoperto. Infatti nella sua lettera a Schumacher del 17 maggio 1931 scriveva:

> *Da qualche settimana ho cominciato a metter per iscritto qualche risultato delle mie meditazioni su questo soggetto, che risalgono in parte a quarant'anni, e di cui non avevo mai nulla redatto;*

cosa che mi ha costretto tre o quattro volte a ricominciare tutto il lavoro nella mia testa. Non vorrei pertanto che tutto ciò perisse con me.

Il suo lavoro si interruppe, quando nel 1832 ricevette dall'amico Farkas Bolyai una copia di un'opera che aveva scritto sulla didattica della matematica; aveva inserito come appendice del primo volume i risultati il figlio, János Bolyai. In questa appendice, come vedremo meglio nella prossima sezione, János Bolyai riuscì a sviluppare una geometria che negasse il V postulato per eccesso di parallele, in cui Gauss ritrovò molti dei suoi risultati. Difatti rispose all'amico con una lettera, di cui è qui riportato un estratto:

Se comincio col dire che non posso lodare un tale lavoro tu certamente per un istante rimarrai meravigliato; ma non posso dire altro; lodarlo significherebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dello scritto, la via seguita da tuo figlio, i risultati ai quali egli perviene coincidono quasi interamente con le meditazioni che ho intrapreso in parte già da trenta-trentacinque anni. Perciò sono rimasto del tutto stupefatto. Anzi, era mia idea scrivere, col tempo, tutto ciò, perché almeno non perisse con me. E' dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può essermi ora risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in un modo tanto notevole.

Rassicuratosi che vi era già qualcuno che aveva messo per iscritto quanto lui aveva teorizzato anni prima, decise di non andare oltre con la scrittura e di non pubblicare nulla a riguardo.

2.1.2 Bolyai

János Bolyai (1802-1860), figlio del matematico ungherese Wolfgang Farkas Bolyai, venne influenzato dagli interessi del padre fin da bambino. Sviluppò quasi un'ossessione per il postulato delle parallele di Euclide, cercando di dimostrare, come già altri prima di lui, che questo dipendesse dagli altri assiomi euclidei. Il padre tentò di ragguagliarlo in una lettera:

> *Per amor di Dio, te ne supplico, lascialo stare. Devi temerlo non meno di una passione carnale, perché anch'esso può prendersi tutto il tuo tempo e privarti del benessere, della tranquillità della mente e della felicità nella vita.*

Insistendo nella sua ricerca arrivò però ad un traguardo diverso da quello previsto: si rese infatti conto che il V postulato era effettivamente indipendente dagli altri assiomi della geometria euclidea, ed iniziò ad indagare la geometria che non faceva uso di questo postulato, ovvero la geometria assoluta.
A partire dal 1825 cominciò a formalizzare una nuova geometria, in cui veniva negato il V postulato sulle rette parallele, verificando che fosse non contraddittoria. In una lettera al padre risalente al 1823 scriveva:

> *Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose così belle che ne sono rimasto abbagliato, e si dovrebbe sempre rimpiangere se andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: ho creato dal nulla un nuovo universo. Tutto ciò che vi ho comunicato fino ad ora non è che un edificio di carta di fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi farà onore come se ciò fosse già avvenuto.*

Il suo lavoro venne poi pubblicato come appendice nel libro del padre nel 1832[1]. Bolyai era convinto di essere il primo ad essere giunto a tali straordinari risultati; rimase quindi estramamente deluso dalla risposta di Gauss,

[1] Si veda [6]

il quale non era colpito dai suoi risultati, e Bolyai incredulo cominciò a sospettare che volesse appropiarsi della sua teoria. Con altrettanto sospetto giudicò l'opera di Lobaĉevskij pubblicata 3 anni dopo la sua, dove le ricerche del russo erano così simili alle sue che pensò le avesse copiate. In realtà si trattò di un caso, poichè Lobaĉevskij aveva elaborato la sua teoria anni prima dell'effettiva pubblicazione del suo libro.
Bolyai, a differenza di Lobaĉevskij e della sua attenzione ai dettagli analitici della costruzione della geometria non euclidea, si concentrò più sullo studio della geometria assoluta, ottenendo una serie di teoremi validi anche per le geometrie in cui il postulato delle parallele è falso. Di seguito sono riportati i principali risultati dell'opera di Bolyai.

- Definizione chiara del concetto di parallelismo, mostrando le proprietà delle rette parallele indipendenti dal V postulato,

- Studio del cerchio e sfera di raggio infinito, mostrando come la geometria sulla sfera di raggio infinito coincida con l'ordinaria geometria piana.

- Indipendenza della trigonometria sferica dal postulato di Euclide, con dimostrazione diretta delle formule.

- Trigonometria piana nel caso non-euclideo e applicazioni al calcolo delle aree e dei volumi.

- Problemi risolubili elementarmente. Costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio, nell'ipotesi della falsità del V postulato.

Vediamo ora brevemente il procedimento seguito da Bolyai per descrivere la sua nuova geometria. Partiamo con la sua definizione di rette parallele: se due rette AM e BN giacciono sullo stesso piano e AM non è tagliata da BN, ma ogni retta nell'angolo $A\hat{B}N$ taglia AM, allora la retta BN è parallela alla retta AM. A questo crea punto una distinzione fra rette parallele: infatti le rette parallele ad AM passanti per B sono due distinte, una a destra (BN) e una a sinistra (BN'), a differenza di quanto postulato da Euclide, in cui BN e BN' coincidono e si ha quindi un'unica retta parallela. Bolyai conclude inoltre che gli angoli $N\hat{B}A$ e $N'\hat{B}A$ sono uguali ad una quantità δ minore di un angolo retto, anche questo in contrapposizione con il postulato di Euclide, secondo cui δ coincide con l'angolo di 90°.

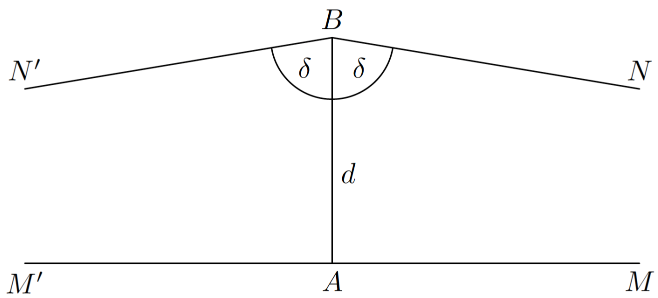


Figura 2.1: Costruzione rette parallele secondo Bolyai

Una costruzione molto simile venne eseguita anche da Lobaĉevskij in maniera del tutto indipendente da quella di Bolyai. Fu proprio a causa dei risultati così simili tra i due che Bolyai decise di non pubblicare più nulla, risentito e offeso di non aver ricevuto i meriti che gli spettavano e pensando di essere stato "derubato" della stua teoria. Per questo motivo a Lobaĉevskij spetta la maggior parte del merito di avere gettato le basi della geometria non euclidea.

2.1.3 Lobaĉevskij

Sia il grande Gauss che il giovane Bolyai erano all'oscuro del fatto che in Russia le loro stesse idee innovative erano da anni nella mente del matematico Nikolaj Ivanoviĉ Lobaĉevskij (1792-1856). Già attorno al 1817 aveva iniziato a rivedere con occhio critico i principi della geometria, presentando poi nel 1826 ai suoi colleghi dell'Univeristà di Kazan il testo *"Exposition succincte des principes de la géometrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles"*[2] di cui oggi resta solo il titolo, in quanto all'epoca

[2] "Esposizione sintetica dei principi della geometria, con una dimostrazione rigorosa della teoria delle parallele"

venne giudicata troppo rivoluzionaria e non fu pubblicata.
Lobaĉevskij decise di continuare con la sua ricerca nel campo della geometria e pubblicò altri due libri, *"Geometria immaginaria"* (1835) e *"Nuovi principi della geometria"* (1835-1838). Nel tentativo di riuscuotere più successo nell'Europa occidentale, decise di tradurre in francese la *"Geometria immaginaria"* e di pubblicare in tedesco l'opera *"Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"*.[3] Quest'ultima riuscì ad arrivare sotto gli occhi di Gauss, il quale rivedeva la sue stesse idee e convinzioni, ma con uno sviluppo diverso.
Alcune differenze sostanziali rispetto a Bolyai risiedono proprio nell'obiettivo delle loro opere: Bolyai infatti aveva dedicato più attenzioni alla questione delle parallele e all'accurata analisi della geometria neutrale, mentre Lobaĉevskij aveva come intento una vera e propria rifondazione della geometria.
L'approccio di Lobaĉevskij è di tipo empirista, come possiamo evincere da quanto lui stesso scrisse nell'introduzione ai *Nuovi principi della geometria*:

> *A tutti è noto che, fino ad oggi, nella geometria la teoria delle parallele era rimasta incompiuta. I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto da esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche.*

Ed è proprio ciò che fece, ad esempio effettuando alcune misurazioni astronomiche di un triangolo avente come vertici il Sole, la Terra e la stella Sirio, calcolandone la somma degli angoli interni. Giunse alla conclusione che la geometria euclidea concordava con i dati empirici da lui misurati, ma non escluse la possibilità che le usuali regole della geometria euclidea potessero non essere valide in una più vasta scala della realtà. Lobaĉevskij affermò, senza vederci nessuna contraddizione, che «talune forze della natura segnano

[3] "Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele", si veda [32]

una geometria, altre un'altra loro particolare geometria». Per il suo pensiero rivoluzionario venne poi definito il *Copernico della geometria* dallo storico Eric Bell.

Vediamo ora più nel dettaglio la negazione del V postulato, e quindi la costruzione della geometria non euclidea di Lobaĉevskij. Dati nel piano una retta r e un punto $A \notin r$, tracciamo la retta n perpendicolare ad r e passante per A. Facendo perno in A, facciamo ruotare la retta n in verso antiorario, facendo quindi spostare verso destra il punto B, intersezione fra r e n.

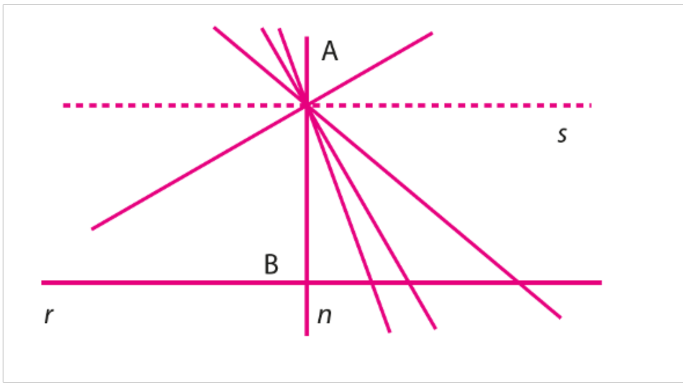


Figura 2.2: Costruzione rette parallele secondo Lobaĉevskij

Continuando a ruotare la retta n, ad un certo punto B ricompare a sinistra: quanto è grande l'intervallo in cui la retta n non interseca r né a destra né a sinistra?

Il V postulato euclideo ci dice che è fatto di una sola retta, s, ottenuta come la perpendicolare a n passante per A. Lobaĉevskij invece considera un intervallo più ampio; definisce quindi due tipologie di rette passanti per A, secanti e non secanti (*ultraparallele* nella terminologia moderna), a seconda che intersechino o meno la retta r. Queste due tipologie di rette sono divise in ciascuno dei due versi di r da un "elemento separatore", la prima delle rette a non intersecare r. Tali elementi separatori sono le uniche "parallele in ciascun verso", ossia le rette s' e s'' della figura 2.3.

Il contributo di Lobaĉevskij, ad oggi estremamente importante, non venne apprezzato a dovere durante la sua vita, specialmente dai suoi compatrioti.

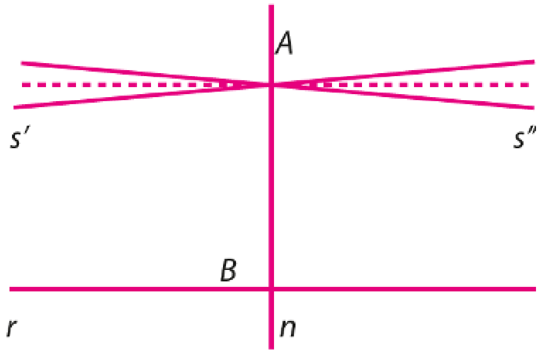


Figura 2.3: Rette parallele secondo Lobaĉevskij

L'isolamento nella città di Kazan e la lingua russa certamente non aiutarono la diffusione delle sue opere, ma le poche che riuscì a pubblicare in lingue europee lo resero certamente più conosciuto nell'Occidente. Tuttavia in Russia, anche a causa dell'ambiente politico in cui era immerso, fu duramente criticato. Il matematico Ostrogradskij suggerì alla rivista culturale *Figlio della patria* una dura recensione nei suoi confronti:

> *La geometria del signor Lobaĉevskij, professore titolare di matematica, non è che una farsa. Invece di sostenere che la somma degli angoli del triangolo non è uguale a due retti, avrebbe potuto allo stesso modo sostenere che il nero è bianco a il quadrato rotondo! Ci si domanda perché si scrivano e, ancora di più, perché si pubblichino simili assurde elucubrazioni.*

Nella prossima sezione vedremo alcuni esempi di modelli di geometria non euclidea, alcuni ispirati proprio dagli studi e scritti di Lobaĉevkij.

2.2 Modelli di geometrie non euclidee

2.2.1 Pseudosfera di Beltrami

Il matematico Eugenio Beltrami (1835-1900) fu il primo a presentare un modello euclideo di una geometria non euclidea, reinterpretando opportuna-

mente il concetto di retta come linea di minima distanza. Venne fortemente influenzato dagli scritti di Lobaĉevskij e con il suo modello riuscì a mostrare come la *Geometria immaginaria* (ossia iperbolica) di Lobaĉevskij avesse la stessa validità logico-matematica di quella euclidea.
Beltrami propose una superficie di rotazione, la *pseudosfera*, ottenuta dalla rotazione attorno all'asse x di una curva piana detta trattrice o curva delle tangenti costanti, definita come quella curva per la quale è costante il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e l'asse x.

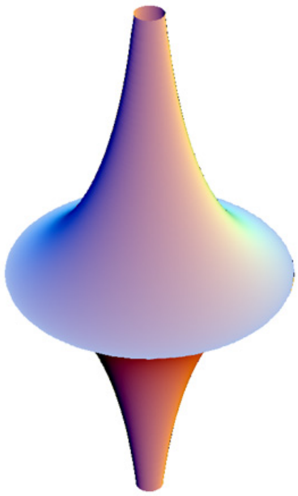


Figura 2.4: Pseudosfera di Beltrami

Beltrami dimostrò che localmente questa superficie soddisfa gli assiomi della geometria iperbolica, trasformando i concetti di geometria piana nei corrispondenti di geometria delle superfici, per esempio passando da linee rette del piano alle geodetiche della pseudosfera, ovvero il percorso più breve che unisce due punti.
Sarà poi Hilbert nel 1901 a dimostrare rigorosamente che il modello descritto da Beltrami ha un valore unicamente locale e non può dunque essere accettato come prova matematica. Il modello di Beltrami, pur non essendo molto rigoroso, rimane estremamente importante dal punto di vista storico; è stato il primo di diversi modelli che hanno permesso una rivoluzione del-

la geometria e ha fornito una visione più chiara sulle nuove geometrie non euclidee.

2.2.2 Modello di Klein

Un ulteriore esempio di geometria iperbolica è dato dal modello di Felix Klein (1849-1925): vengono considerati i punti interni alla circonferenza unitaria e le rette sono definite come le corde di tale circonferenza. Si può generalizzare il modello al caso n-dimensionale sostituendo alla circonferenza unitaria la palla $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Possiamo notare come in questo modello valgano i primi quattro postulati di Euclide, ma non il quinto, essendoci infinite rette parallele (in verde) rispetto ad una retta data (r in rosso), passanti per un punto P esterna ad essa.

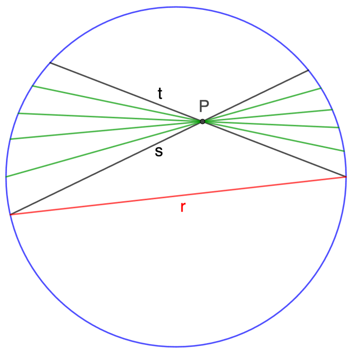


Figura 2.5: Modello di Klein

Il modello risulta inoltre non conforme, ossia gli angoli fra le rette non sono come quelli della usuale geometria euclidea. Viene anche chiamato modello di Cayley-Klein, poichè Klein riuscì a generalizzare le idee di Cayley sulla metrica e a definire su questo modello una distanza. Cayley aveva scoperto un modo in cui, iniziando con la geometria proiettiva, si poteva introdurre di nascosto l'idea della distanza euclidea. Klein basò tale distanza sul concetto di *birapporto*. Si consideri la corda PQ passante per i punti A e B come nella seguente figura.

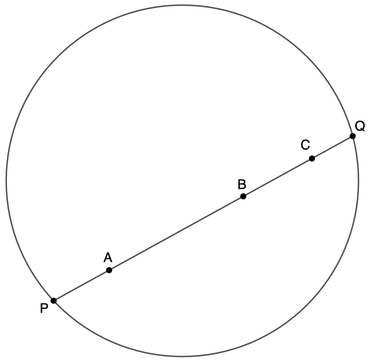


Figura 2.6: Modello di Klein, definizione di birapporto

Il birapporto dei punti P, A, B e Q è definito come:

$$\mathrm{b}(P, A, B, Q) = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QA}$$

Si può notare che considerando i punti A, B e C sulla corda PQ come nella figura 2.6, allora vale la seguente proprietà:

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(P, A, B, Q) \cdot \mathrm{b}(P, B, C, Q) &= \frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QB} \\ &= \frac{PA}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \\ &= \mathrm{b}(P, A, C, Q).\end{aligned}$$

A questo punto si può definire la distanza fra due punti A e B del modello come $d(A, B) = -\frac{1}{2}\log(\mathrm{b}(P, A, B, Q))$, dove P e Q sono le intersezioni fra la circonferenza e la retta passante per A e B. Inoltre, considerando A, B e C come sopra e la proprietà del birapporto, si ha

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Per definire correttamente una distanza occorre che questa non vari spostando il segmento; questo è garantito in quanto il birapporto è invariante tramite trasformazioni proiettive, e quindi anche la distanza fra due punti.

2.2.3 Disco e semipiano di Poincaré

Tra i numerosi studi e interessi del famoso matematico Jules Henri Poincaré (1854-1912), vi fu anche una attenta analisi delle geometriee non euclidee, in particolare di quella iperbolica. Presentò due modelli iperbolici, per il primo considerò come spazio l'interno di una circonferenza unitaria e viene chiamato disco di Poincaré, mentre per il secondo il semipiano $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$, detto semipiano di Poincaré. Entrambi i modelli sono generalizzabili al caso n-dimensionale. Analizziamo velocemente il modello del semipiano: qui le rette sono le semicirconferenze con centro sull'asse x oppure le semirette parallele al semiasse positivo y. Si tratta ovviamente di geometria iperbolica perchè esistono infnite rette parallele a una retta data passanti per un punto esterno ad essa. Possiamo notare un caso limite nella figura 2.7: considerando la semicirconferenza viola c e il punto P esterna ad essa, le due semicirconferenze d in rosso ed e in azzurro risultano parallele a c, in quanto l'unico punto di contatto, che in questo caso sarebbe di tangenza, si trova sull'asse x, escluso dal nostro semipiano.

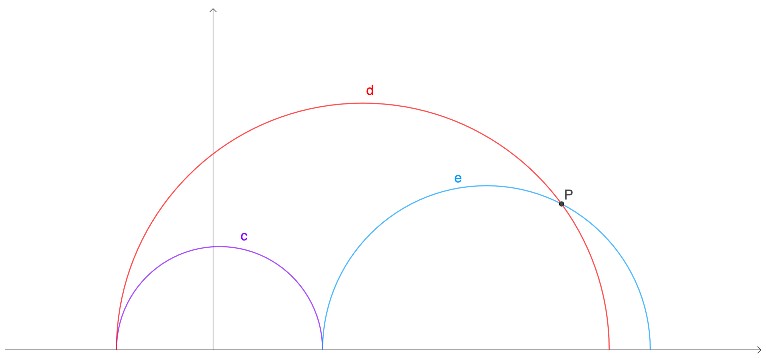


Figura 2.7: Semipiano di Poincaré

Vediamo ora più dettagliatamente il modello del disco: come Klein, Poincarè scelse un modello basato sul disco unitario senza bordo, ma con una diversa interpretazione delle rette. Qui infatti le rette sono di due tipi, i diametri del disco e gli archi di circonferenza contenuti nel disco e ortogonali al suo bordo. In [48], Poincaré presentò il modello come un racconto di fantasia: all'interno di un cerchio euclideo **C** di raggio R vive una popolazione di esseri bidimensionali e all'interno di questo cerchio accade un fenomeno strano che provoca la contrazione delle lunghezze. Se quindi uno di questi esseri partisse dal centro del cerchio con un regolo lungo un metro e si spostasse verso il bordo, noi da fuori lo vedremmo sempre più piccolo, così come il suo regolo, mentre gli abitanti del cerchio non percepirebbero nessun mutamento.

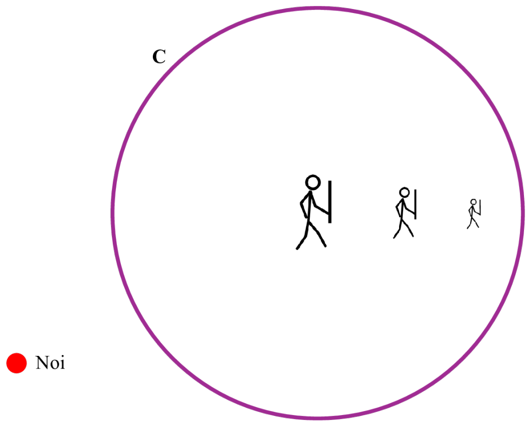


Figura 2.8: Disco di Poincaré

Il bordo risulta quindi irraggiungibile da parte degli esseri che subiscono questo fenomeno, i quali percepiscono il cerchio come un piano di estensione infinita.
Poincaré, a seguito della crisi della geometria euclidea con l'arrivo delle nuove geometrie non euclidee, decise di fare chiarezza sull'uso degli assiomi:

> *Poiché sono possibili parecchie geometrie, siamo sicuri che proprio la nostra sia quella vera? [...] Per rispondere è necessario che prima ci poniamo la domanda sulla natura degli assiomi della geometria.*
> *Sono essi giudizi a priori come vuole Kant? In tal caso ci si imporrebbero con tale forza che sarebbe impossibile concepire il contrario e quindi potremmo costruirvi sopra un edificio teorico;*

non ci sarebbero in tal caso geometrie non euclidee. [...] Gli assiomi della geometria sono dunque verità sperimentali? [...] Ma se la geometria fosse una scienza sperimentale, non potrebbe essere una scienza esatta; sarebbe soggetta a continue revisioni. [...] Gli assiomi della geometria non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti di esperienza. Sono invece delle convenzioni; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera e non trova dei limiti che nella necessità di evitare le contraddizioni. Per questo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche se le leggi sperimentali che ne hanno determinato l'adozione fossero solo approssimative. In altre parole, gli assiomi della geometria non sono che definizioni camuffate.

Poincaré ragionò anche su come le geometriee non euclidee fossero sullo stesso piano di quella euclidea, ritenuta in passato l'unica geometria coerente, essendo quella che descriveva il mondo fisico, e quindi non essendo contraddittoria. Per le geometrie non euclidee non c'era tale sicurezza, ma tramite un processo di modellizzazione, ossia interpretando enti primitivi e assiomi della nuova geometria in termini euclidei, la coerenza della geometria non euclidea era garantita.

Ed allora che cosa si deve pensare del problema se la geometria euclidea è vera? Tale problema è senza senso! Altrettanto varrebbe domandare se il sistema metrico è vero e false le misure antiche; se le coordinate cartesiane sono vere e le polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra; può essere soltanto più comoda.

2.3 Moritz Pasch

Il matematico tedesco Moritz Pasch (1843-1930) è considerato uno dei fondatori dell'assiomatica moderna e dedicò gran parte dei suoi studi ai fonda-

menti della geometria, guardando con occhio estremamente critico il lavoro di Euclide negli *"Elementi"*. Nella sua opera più famosa, *"Vorlesungen über neuere Geometrie"*[4], Pasch cercò di risolvere le incompletezze, imprecisioni e omissioni presenti negli *Elementi* di Euclide, il quale aveva basato fin troppi risultati sull'intuizione ed era quindi necessaria una accurata revisione. Pasch non volle utilizzare la geometria analitica, in quanto quest'ultima si discostava troppo dai concetti basilari che invece voleva esprimere; decise di scrivere il suo libro principalmente in termini di geometria proiettiva, probabilmente prechè questa non richiedeva l'uso di distanze come quella Euclidea. Pasch fu dunque il primo a fornire la prima rigorosa assiomatizzazione della geometria proiettiva, ottenendo una teoria basata esclusivamente sulle relazioni logiche, senza fare appello all'esperienza, come già Euclide aveva tentato di fare.
Entriamo ora più nel dettaglio delle *Vorlesungen*:
il primo elemento primitivo che viene definito è il segmento che congiunge due punti; secondo Pasch le nozioni elementari e gli assiomi dovevano basarsi sull'esperienza, su cui però non dovevano poi essere basate le dimostrazioni. Per questo motivo ad esempio non utilizza la definizione di retta, poichè essendo infinita è unicamente possibile osservarne una porzione, ossia il segmento. Seguono poi 8 assiomi (*Grundsätze*) sulle relazioni fra punti e segmenti, da cui ricava poi svariati teoremi (*Lehrsätze*). Dopodichè fornisce altri 4 assiomi, con cui formalizzò tutta la geometria piana e anche quella dello spazio; il quarto di questi assiomi prende proprio il nome di assioma di Pasch, formulato come segue in una versione più moderna e semplificata.

Assioma di Pasch. *Dati un triangolo e una retta in un piano, se la retta attraversa un lato del triangolo in un punto diverso dagli estremi, allora deve necessariamente attraversare uno degli altri due lati o passare per il loro vertice comune.*

Arrivato a questo punto per ottenere i punti all'infinito (o punti ideali usando le parole di Klein) Pasch mostrò rigorosamente come i due tipi di fasci di rette di un piano, ossia il fascio di rette passanti per un punto e il fascio di rette

[4]"Lezioni sulla nuova Geometria", si veda [36]

parallele, fossero equivalenti. Il primo può essere considerato per definire un punto "finito", l'altro per definirne uno "all'infinito". Da qui, distringuendo sempre in assiomi e teoremi ricavati da essi, si assicurò di illustrare tutti gli elementi della geometria proiettiva, tra cui le trasformazioni proiettive e la congruenza, il birapporto, il caso di una geometria rispetto ad una conica fissata, ecc.

Un ulteriore aspetto da evidenziare del lavoro di Pasch riguarda la dimostrazione del Teorema fondamentale delle proiettività (si veda teorema 0.7). Questo teorema fu introdotto inizialmente dal matematico tedesco K. G. Christian von Staudt (per questo viene chiamato Teorema di Staudt nel caso $n = 2$), il quale fornì una dimostrazione non del tutto convincente. Weierstrass fu il primo a notare delle mancanze nella dimostrazione di von Staudt, e da lì altri matematici fornirono nuove dimostrazioni, aggiungendo talvolta nuovi assiomi e alterando alcune definizioni. Pasch basò la sua sul carattere archimedeo dell'ordinamento sulla retta; definì infatti una mappa proiettiva come una qualsiasi composizione finita di proiezioni e sezioni e così facendo tale mappa risulta dunque ordinata. Questa dimostraione si contrappone a quella proposta da Klein, il quale riteneva necessario un assioma aggiuntivo rispetto a quelli di von Staudt. Questo assioma non si basò l'ordinamento come suggerì Pasch, bensì sulla continuità delle trasformazioni proiettive. Le idee di Klein vennero in seguito riprese da altri matematici, tra cui ricordiamo l'italiano Mario Pieri, mentre dimostrazioni come quella di Pasch o di Darboux vennero accantonate.

Pasch ebbe una forte influenza nel panorama della geometria proiettiva, specialmente per quanto riguarda i fondamenti. Sia Hilbert, che con il suo libro *"Grundlagen der Geometrie"* segnò il culmine dell'assiomatica moderna, che matematici della scuola italiana come Peano e Enriques che lo stesso Hilbert vennero influenzati e ispirati in un modo o nell'altro dai lavori Pasch. Per quanto riguarda la scuola italiana vedremo meglio nella prossima sezione come si sviluppò il pensiero sui fondamenti della geometria.

Capitolo 3

La scuola italiana

Nel contesto matematico dell'Italia tra Ottocento e primo Novecento, la geometria proiettiva trovò un fertile terreno di sviluppo, in particolare per quanto rigurda lo studio dei fondamenti. Questa fu una risposta alla crisi della geometria dell'Ottocento e lo sviluppo di una nuova analisi assiomatica da parte specialmente della scuola tedesca. I matematici italiani ne furono molto influenzati e divennero protagonisti di un periodo di straordinario rinnovamento scientifico, dando vita a contributi che influenzarono profondamente l'evoluzione della geometria moderna e delle sue basi teoriche.
La città Torino fu il centro di questo movimento, dove si svilupparono due approcci distinti alla geometria, guidati rispettivamente da Corrado Segre e Giuseppe Peano, i quali incarnavano due differenti sensibilità matematiche. Il primo si concentrò sull'approfondimento delle strutture geometriche, evidenziando la stretta connessione tra la geometria proiettiva e la geometria algebrica. Peano invece si distinse per il suo lavoro di formalizzazione e rigore logico, diventando uno dei pionieri nell'introduzione di un linguaggio simbolico preciso e rigoroso per la matematica, lavorando per definire i fondamenti logici e assiomatici della disciplina.
Queste due correnti e visioni della matematica furono cruciali per l'evoluzione dei fondamenti della geometria proiettiva, esercitando un'influenza significativa su matematici di spicco come Veronese, Fano, Enriques e Pieri. Tutti

questi studiosi si influenzarono reciprocamente, contribuendo anche a plasmare il contesto matematico europeo. Tuttavia, come vedremo in seguito, l'arrivo di Hilbert e la sua scuola tedesca mise piuttosto in ombra il lavoro di molti italiani sui fondamenti della geometria, nonostante la scuola italiana di geometria algebrica rimanesse di grande rilevanza internazionale nel settore, finchè (dopo la II guerra mondiale) non fu soppiantata dalla scuola bourbakista francese.

3.1 Corrado Segre

Corrado Segre nasce a Paluzzo nel 1863 e ad appena vent'anni consegue la laurea in Matematica all'Univerità di Torino; sempre a Torino nel 1888 diventa docente del corso di Geometria Superiore, ruolo che ricoprirà fino alla sua morte nel 1924. Viene considerato il fondatore della scuola italiana di

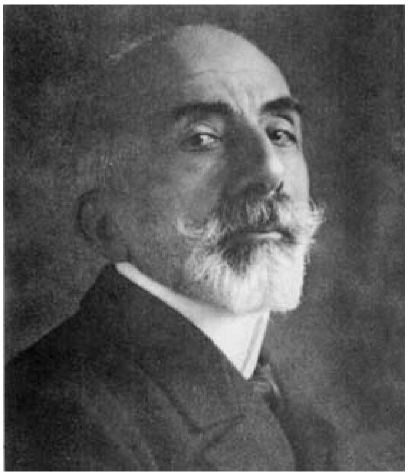


Figura 3.1: Corrado Segre

geometria algebrica, grazie ai suoi numerosi studi sulla materia, frutto dell'influenza di altrettanto importanti matematici italiani ed europei. Le sue doti vennero riconosciute fin da giovane, tanto che la sua tesi di laurea, pubblicata nelle due memorie [49] e [50], venne poi elogiata dal collega Guido Castelnuovo nel 1924 sostenendo che il suo lavoro sembra essere frutto "non

già ad un principiante, ma ad un matematico provetto".[1] L'intento di Segre nella sua tesi di laurea era quello di sviluppare una teoria completa sulla geometria proiettiva degli iperspazi, sfruttando risultati su questi ultimi ottenuti in precedenza da Weierstrass, Kronecker e Frobenius. Attraverso lo studio e l'utilizzo degli spazi vettoriali (al tempo chiamati "lineari") e nonostante la piena forma attuale dell'algebra lineare venga raggiunta solo attorno al 1920 con l'opera di Hermann Weyl, Segre notò il legame tra quest'ultima e la geometria proiettiva; non vi erano dunque più limiti per la dimensione degli oggetti in esame.
Per poter parlare liberamente di spazi n-dimensionali era necessario rompere i legami con la realtà osservabile e andare sempre più incontro all'astrazione. Segre infatti subì fortemente l'influenza di D'Ovidio, di cui fu allievo, e dei matematici tedeschi Plücker e Grassmann, i cui risultati furono fondamentali per tutta la scuola italiana di geometria.

> *La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti applicazioni alla geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che poi fa lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sè, la natura intima del quale si lascia indeterminata, non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perchè dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro.*[2]

È evidente come l'empirismo e il legame con la realtà osservabile siano stati messi da parte, per lasciare spazio all'astrazione e a tutto ciò che ne deriva.

[1] [11], p.353
[2] [49], p. 3

Come già scritto prima, Segre basa il suo studio della geometria proiettiva degli iperspazi sugli spazi ”lineari”, che definisce nel seguente modo:

> *Uno spazio qualunque ad m dimensioni dicesi lineare quando si possono attribuire a ciascun suo elemento i valori numerici (reali od imaginari) di m quantità in modo che, senza alcuna eccezione, ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio, e viceversa ad ogni elemento di questo corrisponda un solo determinato gruppo di valori di quelle. I valori di queste quantità corrispondenti a quell'elemento si dicono coordinate di questo. Rappresentandole coi rapporti di m altre quantità ad una (m+1)-esima, queste costituiranno le* $m+1$ *coordinate omogenee dell'elemento dello spazio considerato, cosicchè ogni elemento di questo, senza eccezioni, sarà individuato dai rapporti mutui di queste coordinate omogenee e servirà viceversa ad individuare questi loro rapporti.*[3]

Questa definizione, oltre ad essere leggermente nebulosa, è incompleta, in quanto non precisa che la m-upla di soli zeri non indica nessun punto. Segre decise di collocarla all'inizio della sua tesi, a indicare come questa fosse la base concettuale della geometria proiettiva degli iperspazi. A differenza sua Peano fornì una definizione più simile a quella moderna, e decise di lasciarla alla fine del suo lavoro, come fosse una sintesi del suo lavoro precedente, invece che una base fondamentale. Peano criticò duramente i lavori di Segre, sia dal punto di vista formale e del rigore, sia per aver considerato ipotesi contrarie all'esperienze nel definire nuove geometrie; parleremo dell'approccio di Peano e della sua scuola nella prossima sezione.
Proseguendo con il suo lavoro, Segre, grazie al concetto di isomorfismo tra spazi lineari, potè includere risultati algebrici avanzati, da intendere sempre in uno spazio lineare arbitrario, in quanto l'unico elemento necessario per distungere spazi lineari è la dimensione. Infatti secondo la definizione di Segre:

[3] [49], p. 4

> *Tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi, si possono riguardare come identici tra loro, poichè, come già notammo, nello studiarli non si considera la natura di quegli elementi, ma si tien solo conto della proprietà di linearità e del numero di dimensioni dello spazio formato dagli elementi stessi. [...] Quindi si potrà far uso, ad esempio, della teoria della proiettività, dei gruppi armonici, dell'involuzione, ecc., nelle forme di 1 specie.*[4]

Nonostanze il rigore insufficiente e il linguaggio poco chiaro di alcune definizioni, il punto di vista di Segre portò in seguito ad importanti sviluppi, sia per quanto riguarda i fondamenti della geometria proiettiva, sia per i risultati formali della geometria algebrica, campo che più lo interessò a quel tempo. Infatti, a partire dal 1886, influenzato da una nuova corrente di matematici tedeschi come Alexander Brill e Max Nöther e dalle idee di Felix Klein esposte nel suo *Programma di Erlangen* del 1872, Segre si distaccò sempre di più dalla visione esclusivamente proiettiva. Iniziò ad interessarsi delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, studiando quindi varietà algebriche e avvicinandosi sempre di più al campo della geometria algebrica.
Per quanto riguarda il contributo di Segre ai fondamenti della geometria proiettiva, nel 1891 lasciò la seguente affermazione nei suoi appunti:

> *Non è ancora stato assegnato e discusso (che io sappia) un sistema di postulati indipendenti che serva a caratterizzare lo spazio lineare ad n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate. Sarebbe conveniente che qualche giovane si occupasse di questa quistione (che non sembra difficile).*[5]

Tra gli allievi di Segre che cercarono di portare a termine questo compito si distinse in particolar modo Gino Fano con la sua opera [22]; il suo lavoro

[4] [49], p. 5
[5] [51], p. 61

venne elogiato in particolar modo dal matematico Freudenthal, come fosse un precursore dell'opera assiomatica di Hilbert. Oggi sappiamo bene come Fano sia stato influenzato dal maestro Segre, ma anche da altri come Peano, con cui collaborò, e Klein.

3.2 Peano e la scuola della logica

Giuseppe Peano (1858-1932) fu un grande matematico e logico italiano. Nel 1880 si laureò all'università di Torino, dove poi dieci anni più tardi diventò professore di Calcolo infinitesimale, anche se i suoi lavori non si limitarono a questo, ma spaziarono dall'analisi matematica alla logica, e contribuendo in particolar modo al dibattito sui fondamenti dell'aritmetica (basta pensare agli assiomi di Peano) e della geometria proiettiva.

Figura 3.2: Giuseppe Peano

Il contributo di Peano su quest'ultimo punto è stato assai prezioso e costituisce uno dei punti di riferimento per la storia dell'assiomatizzazione della geometria. Il lavoro di Peano iniziò con la traduzione dell'*Ausdehnungslehre* di Grassmann[6] in un linguaggio meno astratto e cercando di fornire una solida base per la geometria elementare; dopodiché i suoi scritti più importanti sui

[6] Si veda [37]

fondamenti della geometria sono *I principii di geometria logicamente esposti* del 1889 e *Sui fondamenti della geometria* del 1894.[7] Nel primo l'obiettivo di Peano era quello di trovare il numero minimo di enti primitivi con i quali poter definire tutti gli altri, e il numero più piccolo possibile di assiomi, grazie a quali si potevano dimostrare altre proposizioni; le parole chiave per ottenere ciò sono il rigore e il formalismo logico.
Come elementi originari delle sue opere considerò il *punto* e il *segmento*, definito più propriamente come la relazione ternaria $c \in ab$, ossia "c è interno al segmento ab".[8] Definendo prima con **1** la classe di tutti i punti, arriverà poi alla definizione di retta e piano, indicando con **2** e **3** le rispettive classi. Definisce successivamente due insiemi di punti chiamati *raggi*:

$$a'b = \{x \in \mathbf{1} \,|\, b \in ax\},$$

$$ab' = \{x \in \mathbf{1} \,|\, b \in ax\}.$$

Vediamo ora gli assiomi assunti da Peano che seguono, seppur con evidenti modifiche, quelli assunti da Pasch nelle sue *Vorlesungen*:
Assiomi preliminari sui segmenti

0.1. $a, b \in \mathbf{1} \implies ab \in \mathbf{1}$ (se a e b sono punti, il segmento ab è una classe di punti)

0.2. $a, b, c, d \in \mathbf{1},\ a = b,\ c = d \implies ac = bd$

Assiomi della geometria della retta

I. $\mathbf{1} \neq \varnothing$

II. $a \in \mathbf{1} \implies \exists\, x \in \mathbf{1},\ x \neq a$

III. $a \in \mathbf{1} \implies aa = \varnothing$

IV. $a, b \in \mathbf{1},\ a \neq b \implies ab \neq \varnothing$

[7] Si vedano rispettivamente [38] e [42]

[8] Nell'opera originale si trova ε al posto di $\in$; riporterò i vari assiomi e definizioni di Peano con il linguaggio di logica e insiemistica moderno.

V. $a, b \in \mathbf{1} \implies ab = ba$

VI. $a, b \in \mathbf{1} \implies a \notin ab$

VII. $a, b \in \mathbf{1},\ a \neq b \implies a'b \neq \varnothing$

VIII. $a, b, c, d \in \mathbf{1},\ c \in ad,\ b \in ac \implies b \in ad$

IX. $a, d \in \mathbf{1},\ b, c \in ad \implies b = c \lor b \in ac \lor c \in bd$

X. $a, b \in \mathbf{1},\ c, d \in a'b \implies c = d \lor d \in bc \lor c \in bd$

XI. $a, b, c, d \in \mathbf{1},\ b \in ac,\ c \in bd \implies c \in ad$

Aggiunge poi altri assiomi per la geometria del piano e dello spazio, arrivando ad un totale di 16 assiomi, più i 2 preliminari. Ricava una grande quantità di teoremi da questi, tutti espressi con il formalismo logico che lo contraddistingueva, così rigido e privo di parole o commenti da risultare talvolta estremamente difficile da decifrare. Nell'appendice Peano aggiunge importanti osservazioni, tra cui una sul V postulato di Euclide; fornirà infatti una definizione di rette parallele che discende da quella di Euclide nell'opera *Pangeometria*, dove egli non farà uso del suo postulato sulle parallele. Per non far venir meno tale postulato Peano aggiunse un diciassettesimo assioma, qui citato:

Assioma XVII. *Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente ad h, il secondo non, allora si può determinare un punto x, appartenente al segmento ab o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in h, e il segmento bx sia tutto fuori di h.*

Questo assioma, come scrive Peano, necessario e utile sotto molti aspetti, contiene la proprietà di continuità della retta; questa strada più "semplice" gli permetterà di raggiungere con più sicurezza i suoi risultati.
Peano in questo libro si concentrò sulla geometria di posizione, aggiungendo però che una volta arrivati al Teorema di Desargues sui triangoli omologici

ci si può spingere oltre (come aveva già fatto Pasch) introducendo la definizione di punti impropri o ideali, per passare effetivamente allo studio della goemetria proiettiva.
Proseguendo con il lavoro di Peano, l'opera *Sui fondamenti della geometria* si può considerare come un ampliamento del precedente libro. Qui l'uso degli strumenti logici è sempre presente, ma con dimostrazioni più intuitive e utilizzando anche un linguaggio comune più scorrevole. Nella seconda parte dell'opera viene introdotta la definizione di congruenza, ricondotta al concetto di moto, da intendere come un tipo di affinità. Sempre citando gli assiomi utilizzati da Pasch, formalizza 8 postulati del moto, descrivendo nello specifico particolari movimenti come le rotazioni, traslazioni, ecc.
La visione di Peano era fortemente legata all'empirismo, anche se sembrò discostarsi da questo punto di vista nelle prime note de *I principii.*

> *Si ha così una categoria di enti, chiamati punti. Questi enti non sono definiti. Inoltre, dati tre punti, si considera una relazione fra essi, indicata colla scrittura $c \in ab$, la quale relazione non è parimenti definita. Il lettore può intendere col segno **1** una categoria qualunque di enti, e con $c \in ab$ una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono. [...] Se un certo gruppo di assiomi è verificato, saranno pure vere tutte le proposizioni che si deducono, non essendo queste proposizioni che trasformazioni di quegli assiomi e delle definizioni.*[9]

Qui Peano cercò di generalizzare quanto scritto in precedenza, elevandolo ad un livello più astratto. Tuttavia anche a tal proposito non riuscì a rinunciare ad alcuni riferimenti più concreti legati all'esperienza, come possiamo leggere nelle prime pagine dei *Fondamenti.*

> *Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una pallina o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno, ... con un*

[9]Peano 1889, p. 24

> *segno fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica che un punto c giace tra a e b, quando una persona, posta in a, vede che l'oggetto c copre b. Dai disegnatori, fabbri, per riconoscere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto "rigo"; alcuna volta si usa una corda ben tesa...*

Un'ultima osservazione riguardante l'approccio empirista di Peano riguarda la scelta degli assiomi: sono derivati dall'esperienza del mondo fisico e proprio per questo motivo la loro evidenza risultava sufficiente per poter definire la sua teoria non contraddittoria. Ripudiava infatti le altre geometrie, per lui non definibili tali, che altri avevano esplorato a partire da postulati contro l'evidenza. A tal proposito, e non solo, vi fu un'accesa discussione fra Peano e Segre che affronteremo nella prossima sezione.

3.3 Il dibattito fra Segre e Peano

Come già visto in precedenza Peano si scontrò con le idee di Segre, tanto da generare un'accesa polemica fra i due, sia all'interno della *Rivista di Matematica* di cui Peano era direttore, sia all'interno della Facoltà di Scienze di Torino, dove entrambi erano professori. Peano si scontrò successivamente anche con il matematico Giuseppe Veronese per motivi molto simili a quelli di Segre.
Tutto ebbe inizio nel 1891 con un articolo di Segre dal titolo *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti* che era stato richiesto proprio dallo stesso Peano, in quanto direttore della rivista. In questo articolo esponeva alcune sue opinioni rivolte ai suoi allievi riguardanti la ricerca scentifica; in particolare consigliò agli studenti di imparare a distinguere fra questioni più importanti e fonte di arrichimento da altre più sterili e statiche. Questo spiegò poteva essere causato da un'eccessiva sedentarietà dei propri studi ed interessi, mentre secondo lui occorreva coltivare insieme vari interessi, come ad esempio l'analisi e la geometria. Tut-

tavia ciò che fece iniziare questa polemica fu quanto egli affermò sul metodo da seguire effettuando una ricerca scientifica:

> *Spesso converrà alternare fra loro il metodo sintetico che appare più penetrante, più luminoso, e quello analitico che in molti casi è più potente, più generale, o più rigoroso. [...] Allo stesso modo come, allorquando si tratta solo di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea, così accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrifizio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore. [...] Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo dopo la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione. Certamente anche qui il matematico non potrà essere veramente contento quando ad un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finché non avrà rigorosamente dimostrato. Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio: poiché la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto.* [10]

Segre fece poi alcune considerazioni sui vari punti di vista degli iperspazi della geometria n-dimensionale, ossia quello analitico, quello di Plücker e quello di Veronese, più intuitivo. Per Segre erano tutti e tre approcci validi e permettavo una più amplia rappresentazione e intepretazione dei risultati. La replica di Peano non tardò ad arrivare, completamente contrario a quanto affermato dal collega sulla questione del rigore, per lui aspetto indispensabile nel lavoro di un matematico. Criticò duramente anche l'approccio più intuitivo e che rompeva il legame con l'empirismo da lui tanto amato e seguito:

[10] [51] pp. 52-53

> *Il difetto di rigore in lavori di matematica, non si può, a nostro modo di vedere in alcun modo, difendere o scusare. [...] Il rigore assoluto che si esige in matematica non significa punto che non si possa studiare una scienza finché non siano analizzati tutti i suoi principii. Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono. [...] Fatta la scelta dei punti di partenza spetta alla matematica (che, secondo noi, è una logica perfezionata) dedurre le conseguenze; e queste debbono essere assolutamente rigorose.* [11]

Proseguì la sua critica attaccando in modo velato i lavori e pensieri di Giuseppe Veronese, che Segre aveva invece elogiato, sugli iperspazi (vedremo in modo più approfondito l'approccio di Veronese in un'altra sezione). Il problema che Peano aveva con questa nuova geometria non era solo legato alla questione del rigore, facilmente risolvibile, ma era più profondo e filosofico. Riteneva infatti inutile questo tipo di geometria e la ripudiava, nonostante gli innumerevoli studi che poi seguirono.

> *Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica. [...] Il rigore assoluto, se è condizione necessaria affinché un lavoro sia scientifico, non è ancora condizione sufficiente. Un'altra condizione sta nelle ipotesi da cui si parte. Se un autore parte da ipotesi contrarie all'esperienza, o da ipotesi non verificabili coll'esperienza, né esse, né le loro conseguenze, potrà, è vero, dedurre una qualche teoria meravigliosa, da far esclamare: quale vantaggio, se l'autore avesse applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche!* [12]

L'attacco di Peano non rimase inosservato e Segre non tardò a rispondere. Si sentì particolarmente preso in causa per una frase di Peano, il quale trovava

[11] [39] p. 66
[12] [39] p. 67

"strano che in giornali autorevoli, e trattandosi di matematica purissima, sia scritta" una certa frase attribuita a Segre. A tal proposito quest'ultimo si giustificò sostenendo che si vide costretto per poter pubblicare importanti risultati ad utilizzare una formula generale ottenuta da un'altro geometra, ma che poteva secondo lui lasciare spazio ad alcune eccezioni. Ribattè dunque alle osservazioni del collega con la seguente *Dichiarazione*:

> *Ma dove noi differiamo è nelle conseguenze che ne tragghiamo. Egli stupisce che una cosa siffatta si pubblichi, e giunge fino ad augurarsi di poter ben convincere i giovani suoi colleghi di questa verità, che i lavori in cui fa difetto il rigore non possono fare avanzare d'un passo la matematica. Io invece credevo [...] che in tutti i rami della matematica, nell'aritmetica come nell'analisi infinitesimale, nella geometria come nella meccanica teoretica, il periodo di scoperta avesse nella maggior parte dei casi preceduto quello del rigore [...] e che tutta una moltitudine di cognizioni a cui così si era giunti per vie non perfettamente rigorose non solo avessero fatto avanzare di qualche passo la matematica, ma avessero anzi costituito una gran parte dei materiali con cui essa s'è fatta, e sui quali poi si è proceduto, e finora solo in una parte di essa, al lavoro, critico atto a renderla assolutamente rigorosa.*

Peano ebbe l'ultima parola per quanto riguarda la polemica sulla *Rivista*, rispondendo che "un teorema in matematica è scoperto quando è dimostrato"; nonostante la pungente risposta, Segre non controbatté più nulla. Sappiamo però che ci fu anche un'altra occasione di scontro fra i due, nel 1910, quando Segre criticò le modalità di insegnamento e la didattica di Peano. Quest'ultimo era docente di due corsi di Analisi Superiore che, agli occhi di Segre, erano tropppo frammentari, privi di continuità e ripetitivi, e invece occorreva spingere le giovani menti verso ricerche sempre più elevate e originali. Ovviamente Peano, molto risentito, replicò che era solito proporre anche ricerche recenti e favorire negli studenti lavori originali, senza però mai venir meno al suo tanto amato rigore; "il rigore è primo, imprescindibile attributo di ogni ricerca matematica, e sono perciò da preferire quei metodi e quegli strumenti che meglio consentono di garantirsi contro la possibilità di venirvi meno".

3.4 Giuseppe Veronese

Il matematico veneto Giuseppe Veronese naque a Chioggia nel 1854, frequentò l'Istituto Tecnico di Venezia dove ebbe come professore Pietro Cassani, studioso della geometria n-dimensionale; questo e il grande interesse per le questioni pittoriche influenzarono molto le sue future ricerche. Si iscrisse nel 1873 al Politecnico di Zurigo, inizialmente nella Sezione Meccanica, che in seguito cambiò con la Sezione Matematica, visti i suoi interessi in ambito geometrico. Infatti ad appena vent'anni pubblicò il suo primo lavoro "Teoremi e costruzioni di Geometria Proiettiva", grazie alla vicinanza con matematici come Wilhelm Fiedler e Georg Frobenius. Grazie alle sue spic-

Figura 3.3: Giuseppe Veronese

cate doti riuscì a diventare assistente alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Roma ancor prima di laurearsi. Continuò poi nel 1881 la sua formazione a Lipsia, dove entrò in contatto con Felix Klein. Nello stesso anno ottenne la cattedra di Geometria analitica dell'Università

di Padova che mantenne (insieme a quella di Geometria superiore) fino alla sua morte nel 1917.
Veronese non fu solo un importante matematico, ma si interessò anche del mondo della politica: ricoprì inizialmente ruoli comunali per poi diventare deputato e infine senatore del Regno per meriti scentifici.
Il principale campo di interesse di Veronese fu la geometria n-dimensionale, in particolare può essere considerato tra i fondatori della geometria proiettiva degli iperspazi con n dimensioni, poichè fino ad allora si basava su una presentazione geometrica dell'algebra lineare, invece che una vera e propria geometria.
Veronese basò un qualunque possibile modello di geometria su un preciso programma scientifico costituito da due punti fondamentali:

a) stabilire un sistema di assiomi non contraddittorio e con assiomi fra loro indipendenti;

b) stabilire una relazione tra il precedente sistema di assiomi e la nostra "intuizione spaziale" della realtà.

Nell'ultimo punto quindi non occorre più avere una rappresentazione concreta della realtà per rendere valida una geometria, bensì è sufficiente avere quella percezione spaziale che rende una data geometria accettabile dal punto di vista intuitivo. Per questo per Veronese le geometrie non euclidee, sia iperbolica che ellittica, erano logicamente coerenti grazie alla costruzione di modelli euclidei.
Per fondare la geometria n-dimensionale dovette procedere con lo stesso criterio sopra elencato; il primo punto non appare problematico, mentre il secondo sembrerebbe a prima vista irrangiungibile. Come è possibile avere una percezione spaziale di oggetti che superano le dimensioni esperibili nella realtà? La costruzione di un modello euclideo per una tale geometria risultava quantomeno complicato, ma Veronese riuscì a trovare un modo per risolvere questo problema. Procedette tramite l'utilizzo di trasformazioni della geometria descrittiva, ossia proiezioni e sezioni, in modo da poter scomporre oggetti

appartenenti a uno spazio di dimensione n in spazi di dimenzione via via inferiore, fino ad arrivare a rappresentazioni tri- e bidimensionali.

> *La geometria descrittiva [...] serve per costruire modelli (projezioni) delle figure dello spazio a quattro e a n dimensioni nel nostro spazio, e per conseguenza anche le projezioni in un piano, foglio del disegno. Non si può dunque dubitare che le figure dedotte per projezione o per sezione da quelle dello spazio a n dimensioni non esistano. Si vede dunque che il mio punto di partenza non è soltanto sintetico, ma altresì rappresentativo senza alcun substrato analitico [...]. Non sono dunque più i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, ma sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando credo opportuno [...].*[13]

Per Veronese tutti gli enti appartenenti alla geometria iperspaziale sono dunque vere entità geometriche e non semplici risultati analitici. A differenza sua Segre, il quale lesse e ammirò i suoi lavori, riuscì a far conciliare idee analitiche nel campo della geometria degli iperspazi. Tuttavia condivise molti dei punti di vista di Veronese, infatti in [51] egli sostiene che "[...]i punti dell'iperspazio sono i punti tali quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario, e non più enti puramente analitici, od enti geometrici di qualunque natura". Questa affermazione ricorda molto quanto scritto da Veronese nello stesso anno ne *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (si veda [55]).

> *Qui il punto non è né un sistema di numeri, né un oggetto di natura qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; e gli oggetti composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata coll'astrazione, e quindi il metodo sintetico. Se ogni*

[13] [54] nota pp. 345-346

> *considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi, coll'ultima definizione ma non colle precedenti si ottiene questo risultato.*[14]

Vedremo in seguito le critiche mosse da Peano a tal riguardo, da lui raccolte in una recensione dell'opera di Veronese pubblicata sulla *Rivista di Matematica.*

Il metodo di proiezioni e sezioni fu utile anche per avere una visione più chiara della geometria proiettiva nel piano e nello spazio. Si potevano compiere trasformazioni per facilitare lo studio di elementi proiettivi; per esempio, Veronese fu in grado di trasformare una curva piana singolare in una curva liscia dello spazio e poté ottenere le proprietà della prima studiando quelle della seconda. Uno dei suoi risultati più famosi è una particolare superficie, chiamata appunto *superficie di Veronese*: si tratta dell'immagine del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ attraverso la mappa uniforme ottenuta mediante forme di secondo grado.

$$\nu : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$
$$[x : y : z] \longrightarrow [x^2 : y^2 : z^2 : yz : xz : xy]$$

Tornando all'opera [55], aveva uno scopo didattico come altri suoi libri, e in essa erano esposti non solo fondamenti della geometria degli iperspazi, ma anche dell'aritmetica e il primo esempio di geometria non archimedea. Cercò di fornire i fondamenti assiomatici della geometria n-dimensionale con un nuovo approccio avanzato, ma purtroppo il suo stile era contorto e antiquato; è piuttosto difficile stabilire un ordine fra gli assiomi e talvolta sono inserite riflessioni filosofiche che certamente non favoriscono la lettura lineare. Come Peano, anche lui era un empirista, anche se con un approccio molto differente (basta pensare alla quasi totale assenza di ordine e rigore nell'opera di Veronese). Egli infatti sosteneva che gli assiomi dovessero avere un qualche tipo di natura empirica, ma che potessero essere applicati anche ad oggetti

[14] [55] pp. 611-612

immaginari, in modo da poter create nuove soluzioni a problemi concreti.
Veronese giustificò il suo processo costruttivo di spazi n-dimensionali sul seguente principio:
($\star$) “Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A”.
Grazie a questa premessa, procedette a mostrare come arrivare via via a oggetti di dimensione sempre maggiore. Prendiamo l'esempio della definizione di *piano*:

Definizione. La figura [...] che si ottiene dal fascio di raggi, considerando come elemento [centro] il punto P, [che congiunge P con i punti della retta assegnata S^1], si chiama sistema a due dimensioni o superficie piana o, più semplicemente piano.[15]

Quindi generalizzando il procedimento, si può estendere a qualunque dimensione: "Dato lo spazio S^3 e un punto fuori di esso costruiamo lo spazio S^4, e così analogamente lo spazio S^n, assoggetandolo agli assiomi dello spazio generale.” [16]
Veronese fece una distinzione fra *spazio ordinario*, ossia la realtà tridimensionale esperibile a cui facciamo riferimento, e lo *spazio generale*, ovvero l'ambiente astratto descrivibile tramite assiomi e di dimensione via via sempre maggiore e potenzialmente infinita.

> *Tutto l'insieme dei punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali ce li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale. Questo spazio, considerato come già costruito o dato, ha un numero infinito attuale di dimensioni. Quindi la geometria è scienza dello spazio generale e perciò anche delle figure in esso contenute. [...] Lo spazio generale è geometricamente possibile, e quindi ha una realtà astratta, senza intendere*

[15] [55] p. 299
[16] [55] p. 611, con S^n si intende un generico spazio di dimensione n

> *con ciò che il mondo esteriore in sé ne sia una rappresentazione completa. Lo spazio ordinario [...] è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso. È poi per mezzo di operazioni mentali che io immagino dei punti fuori dello spazio a tre dimensioni.*[17]

Il criterio per costruire spazi di dimensione maggiore si basa su un principio di estensione dimensionale: la determinazione di spazi e oggetti n dimensionali è ottenuta tramite figure appartenenti allo spazio di dimensione $n-1$. Vediamo quindi un esempio di questa costruzione in successione:

- segmento (unidimensionale, determinato da 2 punti)
- triangolo (bidimensionale, determinato da 3 lati)
- tetraedro (tridimensionale, determinato da 4 triangoli non complanari)
- pentaedro (quadridimensionale, deterimato da 5 punti non giacenti sullo stesso iperpiano e 5 tetraedri)

Un'altro aspetto originale del lavoro di Veronese fu la scoperta di una nuova *non* geometria: la geometria non archimedea. Tale geometria si basa appunto sulla negazione del seguente assioma, detto assioma di Archimede:

Assioma di Archimede. *Dati due segmenti di lunghezza rispettivamente s_1 e s_2, con $s_1 \leq s_2$, esiste sempre un multiplo intero di s_1 maggiore o uguale a s_2.*

In campo più algebrico, abbiamo la definizione di campo archimedeo:

Definizione 3.1 (Campo archimedeo)**.** Dato un campo ordinato K, esso si dice archimedeo se $\forall\, x,\, y \in K$ con $0 < x \leq y\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $y \leq nx$.

Vediamo ora un modello presentato da Veronese in [55], in cui l'assioma appena descritto non è valido.
Si consideri in un piano α il fascio di rette parallele all'asse x, quindi della forma $y = h$ con $h \in \mathbb{R}$.
Viene ora definita una relazione d'ordine totale tra i punti del piano:

[17] [56] p. 43

– se due punti del piano A e B appartengono alla stessa retta $y = h$, allora $A \leq B \iff x_A \leq x_B$

– se due punti del piano A e B appartengono a rette differenti, allora $A \leq B \iff y_A < y_B$

Segue poi la definizione di segmento di estremi P, Q con $P \leq Q$:
$s(PQ) = \{A \in \alpha \,|\, P \leq A \leq Q\} = s(QP)$. Il confronto fra segmenti viene eseguito tramite inclusione.
Dopo aver definito il trasporto di segmenti in modo analogo a quello del piano ordinario, passiamo alla definizione di multiplo di un segmento. Dati $R, S \in \alpha$ appartenenti alla stessa retta $y = h$, con $R \leq S$, e dato $n \in \mathbb{N}$ si definisce il multiplo di $s(RS)$ secondo il numero n come il segmento $s(RX)$ dove X appartiene alla stessa retta $y = h$ ed è ottenuto trasportando $n - 1$ volte il segmento $s(RS)$ sulla retta $y = h$.
Possiamo quindi ora stabilire la falsità dell'assioma di Archimede: siano R, S come sopra e sia $T \in \alpha$ tale che $y_T > h$ (dunque $R \leq S \leq T$). Vale inoltre che $s(RS) \leq s(RT)$.
Siano ora $s(RX_2)$, $s(RX_3), \ldots,$ $s(RX_n)$ i multipli naturali del segmento $s(RS)$; nessuno di questi segmenti può essere maggiore del segmento $s(RT)$ poichè $X_i < T$, $\forall i \in \mathbb{N}$ in quanto $y_T > h$. Non è quindi valido l'assioma di Archimede.

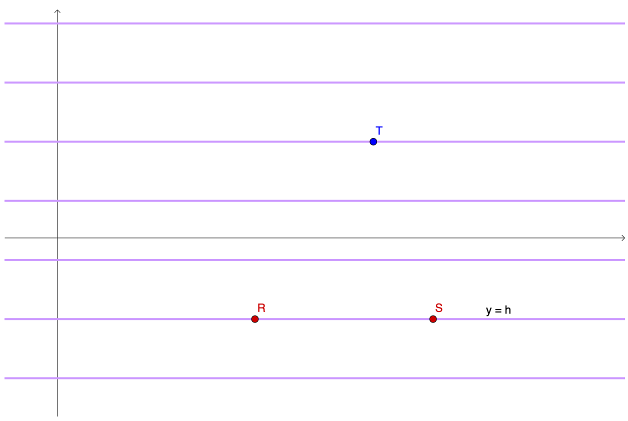


Figura 3.4: Modello di geometria non archimedea

Avendo quindi aperto la strada alla geometria non archimedea, potè parlare di *segmenti infiniti e infinitesimi* rispetto ad altri, senza considerare se questi potessero esistere o meno. A tal proposito Peano pubblicò nel 1892 un articolo, *Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti*, in cui dimostrà l'assurdità di tali concezioni, citando anche alcune idee esposte da Georg Cantor.
La diatriba fra i due però era iniziata già nel corso del 1891, anno in cui era in corso la polemica fra Segre e Peano; Veronese si sentì preso in causa quando Peano criticò il suo approccio, citato da Segre, per lo studio e la descrizione degli iperspazi e rispose a tono in una nota del suo libro.

> *Il sig. Peano ha torto nella forma e nella sostanza, ma per quanto non sia difficile rispondere alle sue affermazioni, siccome egli accusa di mancanza di buon senso quei geometri che non possono pensare come lui [...] è resa così impossìbile ogni dignitosa ed amichevole discussione. Io sono convinto che le questioni sui principi della matematica, e specialmente della geometria, siano già di per sé abbastanza difficili senza che vi sia bisogno dì aggiungervi nuove difficoltà di altra natura con polemiche appassionate ed, intolleranti, come sono altresì convinto che certe critiche pel modo con cui sono fatte portano chiaramente in sé la loro condanna.*[18]

Ritenne inoltre eccessiva la richiesta di Peano riguardo l'uso del linguaggio della logica, che riteneva lontano da quelli che dovevano essere i veri interessi di un matematico:

> *Non è escluso che anche col linguaggio comune, con la debita attenzione non si possa giungere ad un'espressione chiara dei principi e delle operazioni della logica stessa che occorrono per stabilire i concetti fondamentali della matematica. [...] E dobbiamo*

[18] [55],p. 613

esprimere subito la nostra convinzione che anche se si avesse un linguaggio completo di segni logici per esprimere tutte le verità conociute delle scienze matematiche nell'ordine che ci pare migliore e atto ad esprimere con semplicità le nuove vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l'interesse logico di questo sistema di segni e l'interesse matematico.[19]

Peano replicò con una lettera (si veda [40]), pubblicata nella *Rivista di Matematica* nel dicembre del 1891. Rispose alle critiche mosse da Veronese ritorcendogliele contro, come ad esempio la critica alla definizione data da Peano di numero razionale, che secondo lui Veronese non era stato in grado di decifrare per l'uso di simboli logici, rimprovendogli quindi una grande mancanza. L'anno seguente, oltre all'articolo già citato, Peano pubblicò anche una breve recensione all'opera di Veronese contestandone sia la forma che il contenuto. Inizia stroncando duramente alcune frasi imprecise e criptiche:

Queste sgrammaticature, abituali nell'autore, rendono assai diffìcile la lettura del libro ed inintelleggibili alcuni suoi punti. [...] (Per esempio) a pag. 2 l'A. ammette due principiì necessari, di cui il secondo e la negazione (cosi dice l'A.) del primo; e il cui insieme quindi costituisce l'assurdo.[20]

La brevità della recensione può essere dovuta alla scarsa considerazione che Peano aveva per il lavoro presentato da Veronese, tanto che concluse le sue osservazioni con il seguente appunto provocatorio:

E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro, tolgono ad esso ogni valore.[21]

[19] [55],p. 606
[20] [41], p. 143
[21] [41],p. 144

La discussione fra i due matematici proseguì con un altro paio di articoli, entrambi decisi e fermi sulle loro posizioni. Non entreremo ulteriormente nel dettaglio, ma possiamo invece eseminare un'osservazione fatta da Segre una quindicina d'anni più tardi, in merito ai risultati di Veronese.

> *Così a Veronese spetta il vanto di aver dato, dopo la grande invenzione della Geometria non-Euclidea, un secondo esempio di Geometria diversa da quella tradizionale: la Geometria non-Archimedea. I segmenti rettilinei che compaiono in questa Geometria possono essere, gli uni rispetto agli altri, infiniti o infinitesimi. Si ha una classe di numeri transfiniti* (diversi da quelli di G. Cantor).
> *La natura delicata dell'argomento, e un po' anche una certa oscurità e trascuranza nell'esposizione, hanno permesso che si elevassero dei dubbi sulla solidità dell'edificio non-Archimedeo dì Veronese. [... ma l'analisi di] Hilbert per via analìtica semplicissima ha pure mostrato la possibilità logica di una Geometria non-Archimedea, [facendo] tacere le discussioni che s'eran sollevate al riguardo.* [22]

Segre fa riferimento alla più importante opera di Hilbert, ossia i *Grundlagen der Geometrie*[23]. In questo stesso libro Hilbert descrive anche un altro tipo di *non-geometria*: la geometria non desarguesiana, ossia dove non vale il teorema di Desargues (0.4). Veronese, nonostante accettasse pienamente le geometrie non euclidee e avesse scoperto la geometria non archimedea, era ancora troppo in parte legato alle verità contenute nell'esperienza e rifiutò quindi questa nuova geometria.

> *Nelle* Grundlagen der Geometrie *di Hilbert il sistema di assiomi appare più come un sistema di verità arbitrarie ed astratte che*

[22] [53],p. 225
[23] *Fondamenti della geometria, si veda [25]*

> *di verità fornite in parte dall'esperienza e in parte fornite dallo svolgimento logico della geometria.*[24]

Questo è tra i tanti motivi che hanno favorito il successo dell'opera di Hilbert rispetto a quelle di Veronese e di tutti gli altri matematici italiani a proposito dei fondamenti della geometria, ma ne parleremo più nel dettaglio alla fine di questa tesi.

3.5 Gino Fano

Gino Fano (1871-1952) fu uno degli allievi di maggior rilievo di Corrado Segre, il quale fu suo docente e guida negli anni di studi universitari presso la facoltà di Scienze dell'Università di Torino. Si lauerò nel 1892 con una tesi in geometria iperspaziale (si veda [22]), in cui introdusse in maniera poco approfondita le geometrie finite, campo che si svilupperà in seguito e a cui contribuirà con la scoperta del famoso piano di Fano. Proseguì poi gli studi a Gottinga, dove ebbe modo di lavorare con Felix Klein.

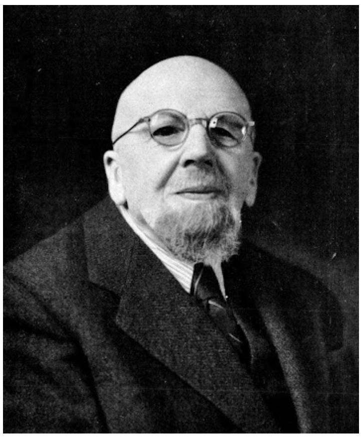


Figura 3.5: Gino Fano

Una volta tornato in Italia divenne nel 1899 professore ordinario di Algebra e Geometria analitica presso l'Università di Messina, ruolo che lasciò due anni

[24] [57],p. 202

più tardi per la cattedra all'Università di Torino di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno. Conservò questo ruolo fino al 1938, anno in cui fu costretto a lasciare l'insegnamento a causa all'emanazione delle leggi raziali, essendo lui ebreo. Si rifugiò poi in Svizzera dove continuò ad insegnare fino al 1946, anno in cui rientrò finalmente in Italia, anche se abbandonando quasi completamente la vita accademica. Il suo lavoro scientificò si concentrò principalmente sulla geometria proiettiva e su quella algebrica.
Entriamo ora più nel dettaglio della sua tesi di laurea, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*. Già dal titolo si può evincere come Fano volesse seguire il programma proposto da Segre ([51], p. 61): l'obiettivo era quello di trovare una serie di postulati indipendenti per la geometria proiettiva n-dimensionale. Possiamo riassumere il metodo scelto da Fano in 4 punti chiave:

- Il rifiuto di qualsiasi influenza da parte della realtà osservabile o di fatti legati alle percezioni per l'origine dei postulati.

- La natura totalmente astratta degli oggetti, ormai svincolati da un qualsiasi significato originario.

- L'indipendenza dei postulati è analizzata con sguardo diverso da quello della scuola di Peano, per permettere maggiore libertà nella ricerca di modelli adeguati.

- Gli assiomi devono essere i minimi indispensabili, tutto ciò che esce dagli obiettivi minimi prefissati è superfluo.

A differenza di quanto fatto fino ad allora da Segre non descrisse uno spazio proiettivo n dimensionale a partire dalle coordinate omogenee, bensì attraverso una serie di postulati da cui successivamente si poteva ricavare la rappresentazione con coordinate. L'obiettivo finale era quindi la ricerca di postulati indipendenti che garantissero la descrizione in coordinate di uno spazio proiettivo n-dimensionale. La dimostrazione dell'indipendenza fra postulati fu un aspetto originale, anche se ispirato da Segre.

Come già detto l'astrazione era ormai protagonista indiscussa e non più trascurabile, e si può subito notare dalle parole utilizzate da Fano per introdurre il proprio lavoro.

> *Una varietà [insieme] di enti di qualsiasi natura; enti che chiameremo, per brevità, punti, indipendentemente però, ben inteso, dalla loro stessa natura. [...] io preferisco addirittura riservare [...] il nome di postulati [... a quelle proprietà che] ci daranno le proprietà prime degli enti o punti della nostra varietà; quelle proprietà che (opportunamente scelte) dovremo ammettere per caratterizzare gli enti stessi e poterne poi dedurre nuove proprietà di questi.*[25]

Vediamo ora i primi 4 postulati:

I. Due punti qualunque determinano, e sempre in modo unico, un ente che chiamo *retta* (S_1).

II. La retta determinata da due punti qualunque di un piano giace tutta in questo.

III. Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto in comune.

IV. Ogni retta contiene più di due punti.

Per mostrare l'indipendenza tra i postulati procedette mostrando l'indipendeza dell'n-esimo postulato dai precdenti $n-1$, creando un modello in cui fossero validi i primi $n-1$ postulati, ma non l'n-esimo. Per dimostrare l'indipendenza del secondo postulato dal primo occorre riportare quindi la sua definizione di piano:

Definizione. Definisco come piano (S_2) l'insieme di tutti i punti contenuti nelle rette che congiungono i singoli punti di una retta data con un unico punto fisso ed assegnato ad arbitrio, purchè fuori della retta stessa [...].[26]

[25] [22],p. 108-109

[26] [22],p. 109

Per questo modello considerò quindi l'insieme di punti di una figura convessa e come rette le sue corde; consideriamo ad esempio un cerchio come nella figura sottostante. Due punti A e B sono congiunti una corda, quindi una

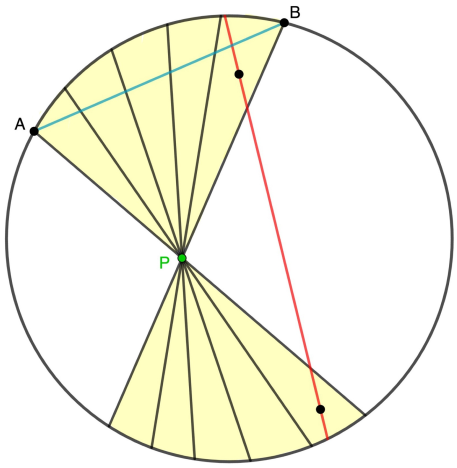


Figura 3.6: Modello per l'indipendenza del I e II postulato

retta, quindi il primo postulato è verificato. Considerando il punto P esterno alla retta AB possiamo determinare un piano, dato dall'area colorata in giallo. Presi ora due punti in questo piano come nella figura, la retta che li congiunge (in rosso) non giace interamente nel piano. Non è dunque verificato il secondo postulato, che risulta indipendente dal primo. Allo stesso modo è possibile costruire un modello simile rappresentato questa volta dai punti di un triangolo e ottenendo un piano proiettando un lato qualunque del triangolo dal vertice ad esso opposto (quindi tutta l'area del triangolo, come nella figura 3.7). In questo modo saranno verificati i primi due postulati, ma non il terzo, essendoci una coppia di rette contenute all'interno del triangolo che non hanno punti in comune.

Da questi primi 3 postulati è possibile identificare un piano attraverso 3 punti non allineati o equivalentemente da due rette incidenti. Proseguendo, Fano introdusse gli spazi r-dimensionare S_r:

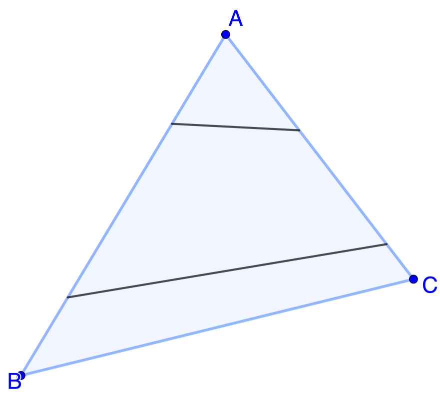


Figura 3.7: Modello per l'indipendenza del I, II e III postulato

Definizione. Possiamo definire i successivi spazi S_3, $S_4, \dots, S_{r-1}$, S_r ciascuno, dirò così, come proiezione del precedente da un punto esterno ad esso, dimostrando altresì, in generale, che un S_r è individualo da $r + 1$ suoi punti qualunque, purché indipendenti (ovvero anche da alcuni fra questi e dallo spazio determinato dai rimanenti); poi le diverse proposizioni relative alle intersezioni di spazi, ecc. ecc.; il tutto senza che occorra alcun nuovo postulato.[27]

Per quanto Fano abbia cercato di fondere le idee di Segre e Veronese con la chiarezza espositiva di Peano, il suo approccio era comunque insufficiente per quanto riguarda il rigore. Infatti è totalmente assente l'esigenza di postulare l'esistenza di un punto al di fuori di ciascun S_r nel costruire spazi di dimensione via via maggiore. La necessità del quarto postulato viene dal possibile modello in cui ciascuna retta contenga esattamente due punti o, equivalentemente, ogni spazio S_r esattamente $r + 1$ punti. Seguono poi altri 4 postulati che non vedremo nel dettaglio.

Nelle sue osservazioni, Fano si concentrò anche sul quarto armonico (si veda def. 0.10), in particolare osservando che questo doveva sempre coincidere con uno dei tre punti considerati o essere sempre distinto. Attraverso il quin-

[27] [22], p. 111

to postulato percorse la seconda strada, ma per dimostrarne l'indipendenza costruì un controesempio che divenne poi uno dei suoi risultati più famosi, ovvero il piano di Fano. È il primo esempio di geometria proiettiva finita: si tratta di un piano proiettivo finito costituito da 7 punti e 7 rette, dove ciascun punto è contenuto in 3 rette e ciascuna retta contiene esattamente 3 punti. Può essere studiato come il piano proiettivo sul campo finito $\mathbb{F}^2$, contenente solo gli elementi 0 e 1, e ciascun punto è descritto da una terna contenente solo questi due elementi, escluso $[0 : 0 : 0]$. In questo caso il

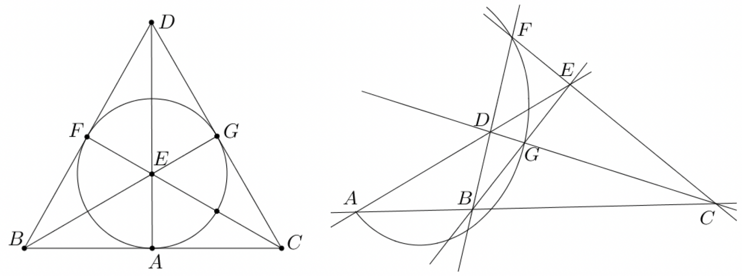


Figura 3.8: Due modelli equivalenti del piano di Fano

quarto armonico di tre punti coincide sempre con uno di essi, mentre valgono tutti i primi quattro postulati.
Questo, come gli altri modelli presentati, furono per Fano dei semplici controesempi per dimostrare l'indipendenza dei postulati e non il punto di partenza per ulteriori ricerche nel campo della geometria. Si dovranno attendere altri dieci anni per un completo sviluppo delle le potenzialità delle geometrie finite grazie alla scuola americana. Questo fu uno degli altri ostacoli che la scuola italiana si trovò ad affrontare e che ne limitarono la diffusione e riconoscimenti a livello internazionale.

3.6 Federigo Enriques

Il matematico Federigo Enriques nacque a Livorno nel 1871 da una famiglia ebraica di origini portoghesi; nel 1882 si trasferì a Pisa, città in cui conseguì a vent'anni la laurea in Matematica presso la Scuola Normale Superiore. Dopo qualche anno di perfezionamento nel 1894 si trasferì a Bologna per insegnare geometria proiettiva e descrittiva, ottenendo la cattedra ufficiale qualche anno più tardi. Mantenne questa carica fino al 1922 e questi furono gli anni più fertili per la sua produzione matematica (e non solo). Nel 1922 accettò presso l'Università la Sapienza di Roma la cattedra di Matematiche superiori e in seguito anche di Geometria superiore. A partire dello stesso anno e fino alla sua morte fu direttore del *Periodico di matematiche*, rivolto agli insegnanti delle scuole secondarie, che trasformò completamente elevandone il livello. Enriques non fu solo un importante e influente matematico, ma si occupò anche di filosofia, di storia della matematica e della scienza e in particolare anche di didattica della matematica.

Figura 3.9: Federico Enriques

A causa dell'emanazione delle leggi razziali del 1938 fu sospeso dall'insegnamento, anche se continuò ad insegnare a Roma nella scuola ebraica clandestina, fondata dal matematico, amico e cognato Guido Castelnuovo. Dopo la sua morte a Roma nel 1946 venne elogiato dai suoi colleghi e allievi con grande ammirazione e devozione e ricordato come una persona estremamente interessante e al contempo dagli innumerevoli interessi. Il matematico Luigi Campedelli, il quale fu suo allievo a Roma, lo ricorda con le seguenti parole:

> *Come insegnante, Enriques non amava niente di meglio che impegnarsi nelle sue piacevoli conversazioni peripatetiche con gli*

> *studenti, nei giardini pubblici di Bologna o sotto i suoi portici dopo la lezione. Quando si trasferì a Roma, la labirintica rete di sentieri di Villa Borghese divenne la sua destinazione preferita; si fermava lì ogni tanto, ricorda uno studente di quel tempo, "per tracciare figure misteriose per terra, con la punta del suo inseparabile bastone da passeggio".*[28]

Come già detto, nel 1894 iniziò a insegnare a Bologna i corsi di geometria proiettiva e descrittiva, e fu proprio mentre preparava le sue lezioni che iniziò a riflettere sui fondamenti della geometria. Possiamo ricostruire lo sviluppo dell'opera *Sui fondamenti della geometria proiettiva*[29] grazie alla ricca corrispondenza con l'amico e futuro cognato Guido Castelnuovo presente in [21], con quasi 700 lettere dal 1892 al 1906. Studiando la letteratura pubblicata fino ad allora incontrò alcuni problemi, tra cui la necessità di alcuni postulati per la dimostrazione del teorema fondamentale delle proiettività (0.7).

> *Sono immensamente occupato per la preparazione dei due corsi: dove (specie per la Proiettiva) incontro ad ogni passo delle difficoltà. [...] Dopo vengono le difficoltà più gravi, cioè i concetti di gruppi ordinati sulla retta (o forma) e di continuità pel teorema fondamentale della proiettiva. Per varie ragioni non mi piace fondarmi sulle considerazioni intuitive di movimento; mi pare che in tal modo resti il dubbio che alla conservazione dei gruppi armonici ammessa per la corrispondenza si aggiunga la continuità di questa anzichè della retta. [...]*
> *Spero di poter riunire le ricerche fatte pel teorema fondamentale di Proiettiva in un lavoretto "Sui fondamenti della geometria proiettiva" nel quale a differenza delle trattazioni di De Paolis e Pasch potrei stabilire quel teorema senza introdurre il concetto di segmenti uguali e con un ordine d'idee un po' diverso.*[30]

[28] [10]
[29] [14]
[30] [21] p. 73-74 e 76, Lettere del 29 gennaio e 19 febbraio 1894

Nei mesi successivi studiò anche le opere di Amodeo e Fano ([1] e [22]) e nonostante elogiasse i loro lavori riteneva di poter apportare delle migliorie e, soprattutto, decise di percorrere una strada diversa per la ricerca dei postulati.

> *I sigg. Amodeo e Fano occupandosi dei fondamenti della goemetria projettiva negli iperspazi si sono proposti appunto l'esclusione di ogni conetto non projettivo; però l'indirizzo da essi seguito è alquanto diverso da quello a cui noi intendiamo attenerci, specialmente per ciò che, mentre i due egregi autori si propongono di stabilire un qualunque sistema di ipotesi capace di definire uno spazio lineare al quale siano applicabili i risultati dell'ordinaria geometria, noi cerchiamo qui di stabilire i postulati desunti dall'intuizione sperimentale dello spazio che si presentano più semplici per definire l'oggetto della geometria projettiva.*[31]

Per quanto l'astrazione avesse già preso piede nel campo della geometria, Enriques era convinto che l'intuizione, soprattutto nella geometria proiettiva, fosse parte insostituibile del processo di scoperta matematica. Cercò comunque di integrare il rigore formale dell'assiomatizzazione con l'intuizione geometrica. Proseguendo con la precedente citazione infatti Enriques afferma che:

> *Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente di più che le loro relazioni logiche, sicchè la geometria così fondata può ancora ricevere una infinità di interpretazioni ove all'elemento "punto" di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata.*

[31] [14], p. 551

Entriamo ora più nel dettaglio della breve opera di Enriques; egli fa una premessa iniziale, in cui sostiene che a fondamento della geometria proiettiva ci siano due tipologie di gruppi di postulati. Il primo gruppo riguarda i postulati della geometria di posizione, già ampiamente trattati nello spazio ordinario (Pasch, Peano, Lindemann) sia in spazi n-dimensionali (Veronese, Amodeo, Fano). La seconda categoria di postulati riguarda la rappresentazione mediante coordinate degli spazi proiettivi e, in particolare, del teorema delle proiettività. Alcuni matematici si erano già occupati di trattare in maniera rigorosa la questione; tuttavia Enriques riteneva che l'utlizzo di concetti metrici fosse da evitare e anzi riteneva di aver trovato uno svolgimento più semplice e naturale. La trattazione di Enriques è abbastanza breve, appena 18 pagine, dando svariati concetti fondamentali per scontati, come la definzione di forma di forma di 1^a, 2^a, e 3^a specie, che in linguaggio moderno altro non sono che oggetti parametrizzati da $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$, e $\mathbb{P}^3$.
Iniziamo a vedere i primi 4 postulati:

I. In una forma di 3^a specie due elementi determinano *una* forma di 1^a specie cui appartengono.

II. In una forma di 3^a specie un elemento e una forma di 1^a specie determinano *una* forma di 2^a specie cui appartengono.

III. A questa forma di 2^a specie appartiene sempre la forma di 1^a specie determinata da due elementi di essa.

IV. In una certa forma di 1^a specie vi sono infiniti elementi.
Segue che: in ogni forma di 1^a specie vi sono infiniti elementi, in ogni forma di 2^a specie infinite forme di 1^a specie, ecc.

Quest'ultimo postulato non è subito necessario, in quanto la prima parte della geometria di posizione non lo necessità. Enriques decise di inserirlo solo per semplicità, dato che egli stesso si rese conto che il postulato V comprende il IV. Da questi primi postulati seguono alcuni teoremi e definizioni, come ad esempio quella di *forme riferite*, ossia due forme i cui gli elementi sono

associati tramite una corrispondenza biunivoca. Inoltre se due forme di 1^a specie sono riferite con un numero finito di proiezioni e sezioni vengono dette *proiettive*.
Passiamo ora al quinto postulato riguardante l'ordine degli elementi di una forma di 1^a specie.

V. In una (certa) forma di 1^a specie a si può stabilire un *ordine* degli elementi in modo che:

1) dati due elementi B, C l'uno dei due p. es. B *precede* C (ed allora C *segue* B);
2) se B, C, D sono tre elementi della forma tali che nel dato ordine B *precede* C e C *precede* D, sempre B *precede* D;
3) esiste un *primo* elemento A che precede ogni altro;
4) tra due elementi B e C che si susseguono nel dato ordine esiste sempre un elemento *intermedio* cioè precedente a C e conseguente a B (esistono quindi infiniti elementi intermedi fra B e C);
5) non esiste alcun *ultimo* elemento che consegua ad ogni altro nel dato ordine.

Questo ordine verrà denotato con (A), poichè A è il primo elemento. Enriques mostrò come per ogni ordine ne esista uno inverso (A'), così come infiti altri ottenuti tramite permutazioni circolari degli elementi di (A).
Enriques osservò che date due forme di 1^a specie riferite proiettivamente, una volta fissato un ordine nella prima, un ordine viene indotto sull'altra. Tuttavia, cambiando la corrispondenza fra le due forme viene modificato anche l'ordine indotto. Per evitare che una corrispondenza portasse ad avre diverse disposizioni circolari in una forma di 1^a specie Enriques richiese un nuovo postulato:

VI. Fra le disposizioni circolari soddisfacenti alle condizioni [del postulato V], che si possono porre nella forma di 1^a specie a, ne esiste una che diremo *naturale* la quale viene trasformata da ogni projettività su a.

> In altre parole: In a si può scegliere un ordine (naturale) soddisfacente al postulato V, il quale per una projettività posta in a subisca una permutazione circolare, o una permutazione circolare congiunta ad una inversione.

Segue poi l'ultimo postulato, necessario poi per la dimostrazione del teorema fondamentale delle proiettività, detto anche *postulato di continuità*:

VII. Se un segmento ordinato $\overline{AB}$ di una forma di 1^a specie è diviso in due parti in [modo] che:

1) ogni elemento del segmento $\overline{AB}$ appartenga ad *una* delle due parti;
2) l'estremo A appartenga alla *prima* parte, B alla *seconda*;
3) ogni elemento della prima parte preceda (in $\overline{AB}$) ad ogni elemento della seconda,

esiste *un* elemento C del segmento $\overline{AB}$ (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento di $\overline{AB}$ precedente a C (ove esista) appartiene alla prima parte, ed ogni elemento di $\overline{AB}$ conseguente a C (ove esista) appartiene alla seconda.

L'unicità di tale elemento C seguiva dalla stessa esistenza; inoltre osservò che bastava ammetere tale postulato per la retta e, mediante proiezioni e sezioni, seguiva per tutte le altre forme di 1^a specie. Non entreremo nel dettaglio della dimostrazione del teorema fondamentale delle proiettività, presentato nel caso di coppie di elementi di una forma di 1^a specie.
In conclusione Enriques fece alcune considerazioni sulla *legge della dualità* della geometria proiettiva.

> *Le proposizioni fondamentali I, II, III, IV, V, VI, VII bastano a fondare tutta l'ordinaria geometria projettiva; esse sono state enunciate sotto tal forma da fare apparrire immediatamente la* legge di dualità nello spazio*. Essa segue dall'osservare che in quelle proposizioni si parla soltato di elementi e di forme, e di*

questi elementi si può fissare indifferentemente che siano punti o piani.

Segue un principio analogo, per poter passare dalla geometria piana alla geometria del piano:

Insieme ad ogni teorema della geometria piana fondato sui postulati I, II, III, IV, V, VI, VII, sussiste un teorema correlativo nel piano *che si deduce dal primo collo scambio delle parole "punto" e "retta" e cogli scambi di parole che ne derivano di conseguenza.*

Il lavoro svolto da Enriques risulta molto simile a quanto fatto da Fano qualche anno prima; ciononostante, gli approcci usati dai due matematici sono molto diversi fra loro. Fano dedicò una buona parte della sua opera all'indipendenza dei suoi postulati, Enriques invece era più interessato le proprietà geometriche da postulati evidenti, in quanto legati all'intuzione spaziale. Fra i due ci fu anche una fertile corrispondenza nel 1895 ([15]), nella quale ciasuno dei due spiegava e puntualizzava l'uso e le scelte dei propri postulati.
Tale dibattito fu utile per la successiva pubblicazione di Enriques nel 1898, ossia un testo universitario dal titolo *Lezioni di geometria proiettiva*. Questo volume altro non era che un arricchimento della sua precedente opera, anche se con una esposizione più lineare e dettagliata. Enqirues riuscì a proporre una visione avanzata dell'assiomatica nella geometria proiettiva, permettendo agli studenti del primo anno di matematica di cimentarsi fin da subito in un modello assiomatico moderno. Nell'appendice di questo libro è possibile trovare la visione di Enriques riguardo la geometria proiettiva.

Noi abbiamo cercato di porre in luce come la geometria proiettiva si riferisca a concetti intuitivi, psicologicamente ben definiti. [...] D'altra parte però è stato avvertito [...] che tutte le deduzioni sono fondate soltanto sopra quelle proposizioni, desunte immediatamente dall'intuizione, le quali vengono enunciate come postulati.

> *Sotto questo punto di vista la geometria svolta, appare come un organismo logico, nel quale i concetti elementari di ”punto”, ”retta” e ”piano” (e quelli definiti mediante questi) figurano soltanto come elementi di alcune relazioni logiche primitive (i postulati) e di altre relazioni logiche che vengono dedotte. Il contenuto intuitivo di questi concetti resta perfettamente indifferente.[...]*
> *La geometria proiettiva può essere considerata come scienza astratta, e ricevere quindi interpretazioni diverse da quella intuitiva, fissando che gli elementi (punti, rette, piani) di essa siano concetti comunque determinati, tra i quali intercedono le relazioni logiche espresse dai postulati.*[32]

Come si può notare Enriques, che riteneva il legame fra geometria e intuzione inscindibile, non era affatto nemico della geometria astratta. Ne è un esempio il seguente passaggio tratto da un volume di storia della matematica in cui esalta le nuove visioni possibili degli oggetti geometrici:

> *[...] pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per contemplarne tante diverse trasfigurazioni; mentre l'unità dell'oggetto splende alla ragione così arricchita, che ci fa passare con semplicità dall'una all'altra forma.*[33]

L'opera di Enriques presenta quindi tutte le caratteristiche dell'assiomatica moderna, in cui l'astrazione stava prendendo sempre più piede, anche se occorre ribadire la sua convizione di non poter separarsi (almeno per i postulati) dall'intuizione spaziale geometrica. Il fatto che questi concetti fossero stati proposti ad allievi del primo anno richiamò su Enriques molta attenzione, in particolare dalla Germania. Felix Klein sosteneva le stesse posizioni in Enriques sia nel campo dei fondamenti della geometria, sia in quello della didattica; riteneva infatti che la scuola tedesca dovesse prendere spunto

[32] [16], pp. 347-348
[33] [19], p. 139

da lavori come quelli di Enriques. I due avevano già collaborato nel 1897, quando Klein chiese ad Enriques di scrivere un capitolo sui fondamenti della geometria proiettiva nella sua *Enciclopedia delle scienze matematiche*[34]. Non c'è quindi da stupirsi del fatto che fu Klein ad occuparsi dell'introduzione alla traduzione in tedesco delle *Lezioni* di Enriques, elogiandone il lavoro compiuto.

> *Negli ultimi due decenni l'Italia è stata il vero centro di ricerca avanzata nel campo della geometria proiettiva. Tra gli specialisti, questo è ben noto, [...] ma i ricercatori italiani sono andati ben oltre anche a livello pratico: non hanno disdegnato di trarre conclusioni didattiche dai propri studi. [...] Non ci mancano opere stimolanti che sarebbero adeguate per un'introduzione alla geometria proiettiva, ma non ne conosco nessuna che offra [come quella di Enriques] una costruzione sistematica di questa teoria, in una forma aggiornata e in modo altrettanto chiaro ed esaustivo. Inoltre, la presentazione è sempre intuitiva, ma completamente rigorosa, come poteva essere solo dopo le intelligenti ricerche sui fondamenti della geometria proiettiva presentate in precedenti saggi dello stesso autore.*[35]

Enriques e Klein condividevano anche la visione sulle basi fondanti del pensiero matematico. Entrambi non credevano possibile fare della matematica, e in particolare della geometria, senza intuizione. Enriques cercò inoltre di mantenere un equilibrio tra formalismo e intuizione, credendo che la geometria dovesse rimanere connessa a una visione più ampia della realtà matematica, in cui l'intuizione spaziale aveva ancora un ruolo centrale.
Tutt'altro aproccio ebbe invece Hilbert, il quale dava maggior importanza al rigore e coerenza logica. Nei suoi *Grundlagen* ridefinì i fondamenti della geometria, con l'obiettivo di fornire un sistema organizzato e con assiomi

[34]Enzyklopädie der matematischen Wissenschaften, si veda [28]
[35][17], p. III

indipendenti. Per lui la geometria era una scienza fondata esclusivamente su principi astratti e non soggetti all'intuizione o alle rappresentazioni visive. La visione di Hilbert fu largamente apprezzata a livello mondiale e divenne poi la base assiomatica del XX secolo, mentre la scuola italiana ebbe influeza quasi eslcusivamente sul territorio nazionale. Ad ogni modo la scuola italiana di geometria algebrica, inizialmente avviata da Segre e portata poi avanti da Enriques, Castelnuovo e Severi avrà un ruolo centrale nei primi 30 anni del '900.

3.7 Mario Pieri

Il matematico Mario Pieri naque a Lucca nel 1860. Frequentò per un anno l'Università di Bologna nel 1880, per poi ottenere una borsa di studio alla Scuola Normale Pisa dove si laureò nel 1884. Dopo la laurea iniziò a insegnare in una scuola secondaria a Livorno, poi tornò a Pisa nell'ottobre 1885 come docente alla Scuola Tecnica. L'anno seguente Pieri vinse il concorso per una cattedra all'Accademia Militare Reale di Torino, dove divenne professore di geometria proiettiva e descrittiva. Nel 1888 fu anche nominato assistente alla cattedra di geometria proiettiva all'Università di Torino. Rimase a Torino per quasi 15 anni, ottenendo nel 1891 la libera docenta di geometria proiettiva; qui fu collaboratore di Corrado Segre e Giuseppe Peano. Nel 1900 si trasferì all'Università di Catania sempre con una cattedra in geometria proiettiva e vi rimase per 8 anni. Nel 1903 inviò la propria partecipazione per il Premio Lobaĉevskij, vinto poi da Hilbert con la seconda edizione dei *Grundlagen der Geometrie*; ricevette però una menzione d'onore. Questo già ci fa capire quanto fossero avanzati e rigorosi i suoi studi e lavori, per potersi confrontare con un matematico come Hilbert, il quale già possedeva svariati riconoscimenti matematici. Nel 1808 fu nominato Cavaliere della Corona d'Italia e nello stesso anno passò all'Università di Parma dove rimarrà fino alla morte prematura a 52 anni nel 1913. Dopo la sua morte fu ampiamente elogiato; ad esempio il suo ex-studente Beppo Levi ne elogiò sia i lavori sia

Figura 3.10: Mario Pieri

la personalità:

> *L'opera scientifica del Pieri si distingue per la cura del metodo, dell'ordine, del rigore. E furono tali le note del suo carattere: fu in ogni occasione sincero, esatto, onesto senza transazione possibili.*[36]

Peano invece parlò dell'umiltà dell'ex collega:

> *Pieri era totalmente dedicato alla scienza e all'insegnamento. Era un lavoratore instancoso, onesto e di singolare modestia. Quando, circa vent'anni fa, i professori in Italia si agitavano per stipendi più alti, Pieri dichiarò che i loro stipendi erano già al di sopra del lavoro che facevano e del loro merito.*[37]

Mario Pieri fu una singolarità nel panorama italiano dello studio e visione dei fondamenti della geometria, riuscendo a distinguersi da tutti gli altri matematici italiani dei suoi tempi. Come abbiamo detto entrò in contatto sia con Segre che con Peano e seppe cogliere da entrambi caratterestiche

[36] [29], p.69
[37] [43], p.35

fondamentali per il suo lavoro. Inizialmente il suo campo di interesse fu la geometria algebrica secondo la strada aperta da Segre; tuttavia i suoi interessi mutarono in seguito all'avvicinamento all'opera di von Staudt *Geometrie der Lage*. Sotto la richiesta di Segre si occuppò della traduzione italiana dell'opera nel 1889 e iniziò a notare alcune problematiche, seppur ritendola un'opera magistrale. Fu così che decise di occuparsi di quella che sarebbe stata poi la sua opera più importante, dal titolo *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*.[38] Pubblicata nel 1897, è forse l'analisi più ricca e completa sui fondamenti della geometria proiettiva della scuola italiana. L'obiettivo di Pieri era di formulare un sistema assiomatico che fosse completamente indipendente dell'intuzione, sia nei postulati che nelle dimostrazioni dei vari teoremi. Si accertò che anche a livello formale e linguistico non vi fossero influenze dettate dall'esperienza, in modo da non generare fraintendimenti e ambiguità.

> *È generalmente riconosciuta l'utilità di un buon algoritmo ideografico, come strumento atto a prevenire e a disciplinare il pensiero [...]. Così è da tenere in gran conto l'uso metodico delle maniere e dei segni propri alla logica algebrica, [...] il più valido mezzo di cui si possa oggi disporre per l'analisi delle idee.*[39]

È evidente come la vicinanza a Peano abbia influenzato Pieri; tuttavia per i due matematici la logica aveva un ruolo diverso. Peano la vedeva solo come uno strumento linguistico, mentre per Pieri anche un valore epistemologico. Inoltre ricordiamo che Peano era ancora fortemente ancorato a un'idea di assiomatica basata sull'esperienza, visione da cui Pieri si distaccò completamente. Su questo punto di vista Pieri è più in sintonia con le idee di Segre, in quanto come lui riteneva di dover basare la geometria su elementi primitivi privi di concretezza. Prese infatti spunto dalla definizione di Segre di punto:

> *Nella definizione di C. Segre la vera natura dell'elemento generatore o "punto" rimane completamente indeterminata.*

[38] Si veda [45]

[39] [47], p. 104

Ma non sono solo gli enti primitivi ad essere astratti, bensì tutta la geometria proiettiva, e in generale qualsiasi indagine geometrica deve rimanere nel campo dell'astratto per poter essere ritenuta valida e non danneggiata.
Possiamo vedere quattro obiettivi fondamentali Pieri voleva raggiungere parlando dei fondamenti della geometria proiettiva:

- Utilizzare un linguaggio formale o semi-formale per favorirne la lettura.
- Analizare le relazioni fondamentali di una teoria in modo da ridurle al minor numero possibile.
- Stabilire un sistema di assiomi chiaro e minimo, non ulteriormente scomponibile.
- Provare che il sistema assiomatico proposto sia indipendente e non contraddittorio.

Queste quattro richieste vennero tutte soddisfatte dall'opera di Pieri [45], che altro non è che una modifica e ampliamento di 3 precedenti articoli pubblicati dal 1894 al 1896 (si veda [44]). Costituita da un sistema di 19 assiomi, [45] è il culmine dell'astrazione e del rigore nella scuola italiana, grazie ovviamente al contributo di un ambiente ricco e fertile sull'argomento. Pieri basò il suo lavoro su due enti primitivi: il *punto proiettivo* e la *congiungente di due punti proiettivi*. Riuscì a descrivere tutta la geometria proiettiva, senza alcuna limitazione dimensionale e permettendo quindi di generalizzare il sistema ad una dimensione sempre maggiore (per lo studio sugli iperspazi si veda [46]).
Vediamo ora i primi 11 postulati, validi anche per descrivere la geometria euclidea; il dodicesimo sarà il primo ad essere valido solo per la geometria proiettiva (e anche quella iperbolica).

1. [0] è la classe di partenza dei *punti proiettivi*

2. La classe [0] è non vuota (viene definita poi l'identità fra punti)

3. Dato $a \in [0]$ allora $\exists\, b \in [0]$ tale che $b \neq a$

4. Dati a, $b \in [0]$ con $b \neq a$ si denota con ab la classe detta *congiungente* di a e b

5. $ab \subset [0]$

6. $ab \subset ba$ (segue immediatamente $ab = ba$)

7. $a \in ab$ (garantisce che ab sia non vuoto)

8. ab deve contere almeno un altro punto diverso da a e b

9. $a, b, c \in ab \implies b \in ac$

10. $c \in ab \implies ac \subset ab$

11. Esistono almeno 3 punti non collineari (cioè non appartenenti alla stessa congiungente)

Viene poi definita una nuova classe, denotata con [1], e detta *retta proiettiva*: si tratta dell'insieme di tutte le congiungenti di tutti i punti proiettivi. Pieri utilizzerà questo termine indistintamente per indicare sia la classe che un suo oggetto.

12. Dati a, b, c punti non allineati, il punto $b' \in ac$ e il punto $a' \in bc$ allora le rette proiettive aa' e bb' hanno sempre un punto in comune.

Questo postulato non è ovviamente valido nella geometria euclidea poichè le rette aa' e bb' potrebbero essere parallele, mentre nella geometria proiettiva avrebbero un punto improprio in comune. Pieri fornisce inoltre la definizione di *visuale* di una forma (o figura) Ψ rispetto ad un punto b come l'insieme di punti sulle congiungenti tra b e tutti i punti di Ψ (distinti da b). Nel caso in cui la forma sia una retta proiettiva ab e $c \notin ab$ la visuale di ab da c è identificato dal piano abc.
Dati quindi tre punti a, b, c, si parla di *piano proiettivo* quando le tre visuali abc, bac e cab coincidono; tale classe è denotata con [2].

13. Dati a, b, c punti non allineati esiste almeno un punto $d \notin abc$.

Questo postulato permise a Pieri di aumentare nuovamente la dimensione; inoltre segue anche il teorema di Desargues. Da questo teorema deriva la dimostrazione dell'unicità del quarto armonico grazie a von Staudt 50 anni prima. Il quarto armonico (si veda def. 0.10) è denotato con $\mathrm{Arm}(a, b, c)$ e i tre punti considerati devono essere allineati. $\mathrm{Arm}(a, b, c)$ è quindi unico, ma come già aveva notato Fano nulla impedisce che questo coincida con uno dei tre punti considerati. Viene quindi postulato che:

14. $\mathrm{Arm}(a, b, c) \neq a, b, c$

Pieri utilizza poi un nuovo elemento, detto segmento proiettivo. Dati tre punti a, b, c allineati e preso y allineato con a, b, c e $y \neq a, c$, il segmento proiettivo (abc) è l'insieme dei punti x tali che $x = \mathrm{Arm}(y, \mathrm{Arm}(a, c, y), b)$. Ne consegue che per Pieri il concetto di segmento proiettivo è una nozione fondamentale da assumere come prerequisito rispetto all'idea di separazione tra coppie e di ordine tra elementi della stessa classe. Seguono poi altri cinque postulati, di cui il diciottesimo altro non è che il postulato di continuità di Dedekind, mentre l'ultimo garantisce l'esistenza di almeno un punto proiettivo al di fuori di un iperpiano generato da punti non appartenti allo stesso piano. Con questa tecnica si poteva quindi studiare qualsiasi geometria n-dimensionale, bastava solo supporre l'esistenza di un punto non appartente a un iperpiano di dimensione $n - 1$.

Pieri non si occupò solo dei fondamenti della geometria proiettiva, bensì anche di quella euclidea e iperbolica nel 1899, precedendo i *Grundlagen* di Hilbert di svariati mesi. Purtroppo però il lavoro di Pieri nel campo dei fondamenti della geometria rimase piuttosto circoscritto e ignorato, a differenza dei suoi lavori in geometria algebrica. Causa di ciò fu non solo il lavoro di Hilbert, che oscurò gran parte dei matematici della scuola italiana, ma anche la sua vicinanza alla scuola di Peano, della quale tuttavia non condivideva pienamente le scelte. Questa scuola infatti divenne poi obsoleta dopo i primi decenni del Novecento, non avendo ancora accettato la strada dell'astrazione, cosa che invece Pieri aveva già fatto. Pieri era inoltre un uomo piuttosto modesto, e spesso diede eccessivo credito ad altri nei suoi lavori, specialmente alla figura carismatica di Peano. Inoltre i problemi di salute e la morte prematura ostacolarono l'elaborazione di nuovi lavori, privandoci forse di innumerevoli risultati, visto come il suo impegno nei fondamenti abbia creato un perfetto equilibrio fra rigore formale, chiarezza espositiva e astrazione.

Conclusioni

Visti gli innumerevoli risultati e lavori nel campo dei fondamenti della geometria proiettiva, viene da chiedersi come mai i contributi della scuola italiana non riuscirono a rimanere impressi nella storia come quelli di Hilbert e di altri matematici della scuola tedesca. I motivi sono molteplici, uno fra tutti fu il fatto che Hilbert era già diventato una figura di grande rilievo nel campo matematico e geometrico e la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* aumentò notevolmente la sua notorietà e autorevolezza come accademico. Una delle principali cause, già accennata nel Capitolo 3, per cui la scuola italiana divenne obsoleta rispetto ad altre è dovuta al mancato passaggio a una disciplina autonoma come quella dei fondamenti della geometria. La scuola italiana considerava i fondamenti come la fine di un processo di costruzione di una teoria geometrica, una sistematizzazione di una teoria già esistente. Non riuscirono a cogliere le numerose opportunità di sviluppo di "geometrie diverse" o "geometrie bizzarre" (così definite da Fano e Enriques) che rimasero solo dei controesempi isolati. Hilbert era invece aperto alla creazione di nuove geometrie e nuove teorie che si dimostrarono molto fertili per le ricerche a venire.

Hilbert inoltre non si limitò al campo della geometria: ebbe un impatto straordinario anche sulla teoria dei numeri, l'analisi funzionale, la fisica matematica e, soprattutto, la logica e i fondamenti della matematica. Questo ampliamento del campo di influenza ha fatto sì che la scuola tedesca mantenesse una posizione di rilievo in molti più ambiti rispetto alla scuola italiana, il cui impatto fu più limitato a una specifica area della geometria, in partico-

lare a quella algebrica. L'unica eccezione potrebbe essere fatta parlando dei lavori di Peano e della sua scuola, dove tuttavia l'ostacolo fu di altro tipo, come già abbiamo visto. La tradizione di tipo empirista e talvolta un eccessivo rigore logico non fecero altro che allontarli dal panorama internazionale. Un altro problema per la scuola italiana fu la critica di Henri Poincaré, personaggio ormai di grande influenza nel mondo della matematica internazionale. Il suo interesse era quello di promuovere il rigore matematico, cosa che talvolta era assente nei lavori degli italiani, nonostante producessero risultati notevoli.
Vi furono anche alcuni fattori culturali, come ad esempio il forte legame che la tradizione italiana aveva con la didattica, che forse limitò i matematici del tempo a slegarsi da una visione ancora fortemente legata all'esperienza (come forma di giustificazione didattica) per prediligere l'astrazione ed elevare a un piano più sofisticato le ricerche sui fondamenti della geometria. Inoltre le università tedesche godevano di una certa fama e questo fece sì che divennero centri di eccellenza nella ricerca matematica e fisica, attirando molti dei più brillanti matematici da tutto il mondo. Sebbene entrambi i paesi affrontarono due guerre mondiali e un regime di dittatura, la Germania continuò a mantenere una forte tradizione scientifica anche grazie all'emigrazione di molti scienziati tedeschi (specialmente verso gli Stati Uniti) che portarono con sé l'influenza di Hilbert.
Come abbiamo visto, è difficile parlare di un'unica scuola italiana, dato che spesso le visioni erano molto differenti fra i matematici, generando vere e proprie liti tra colleghi. La scuola tedesca invece era più unificata sotto la figura chiave di Hilbert.
Ciò non significa che le opere dei matematici italiani nell'ambito dei fondamenti della geometria proiettiva siano state malviste; anzi, la matematica è fatta di scoperte e ricerche collettive, miglioramenti e errori. Forse, senza il loro lavoro, non si sarebbe giunti a una trattazione completa dell'assiomatica che abbiamo oggi.

Bibliografia

[1] Amodeo F., 1891, *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno S_r*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 26

[2] Avellone M., Brigaglia A. & Zappulla C., 2002, *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 56, pp. 363-425, Springer

[3] Beltrami E., 1868, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematiche, Vol. 6, pp. 284–312

[4] Benvenuti S., 2008, *Geometrie non euclidee*, Alpha Test

[5] Brigaglia A., 2005, *Foundations of Geometry in Italy before Hilbert*, Universitá degli Studi di Palermo, Dipartimento di Matematica

[6] Bolyai J., 1832, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, in W. and J. Bolyai [7], tr. G. Battaglini, *Sulla scienza della spazio assolutamente vera*, Giornale di matematiche 6, 1868, pp. 97–115

[7] Bolyai, W. and J., 1832, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Vol. 1, Maros-Vásérhely.

[8] Bonola R., 1906, *La geometria non-euclidea: Esposizione storico-critica del suo sviluppo - con 69 figure*, ed. Zanichelli, Bologna

[9] Bottazzini U., 2001, *I geometri italiani e i problemi dei fondamenti (1889-1899)*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-A (La matematica nella Società e nella Cultura), n.2, pp. 281-329

[10] Campedelli L., 1947, *Federigo Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche*, Periodico di Matematiche, Serie 4, Vol. 25, p. 95-114

[11] Castelnuovo G., 1924, *Commemorazione*, Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, Serie 5, Vol. 33_2, pp. 353-359

[12] Catastini L. & Ghione F., 2004, *Le Geometrie della Visione*, Springer, Milano

[13] Del Centina A. & Gimigliano A., *From Here to Infinity,Tracing the Origin and Development of Projective Geometry*, Springer (di prossima pubblicazione)

[14] Enriques F., 1894, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Serie II, Vol. 27, pp. 550-567

[15] Enriques F., 1895, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (correspondenza con G. Fano)*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 9, pp. 79–85

[16] Enriques F., 1898, *Lezioni di geometria proiettiva*, ed. Zanichelli, Bologna

[17] Enriques F., 1903, *Vorlesung über projektive Geometrie*, trad. tedesca a cura di H. Fleisher, ed. Teubner, Leipzig

[18] Enriques F., 1907, *Prinzipien der Geometrie*, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 3a, ed. Teubner, Leipzig

[19] Enriques F., 1922, *Per la storia della logica*, ed. Zanichelli, Bologna, (ristampato nel 1987, ed. Zanichelli, Bologna)

[20] Enriques F., 1925, *Gli Elementi di Euclide e la Critica Antica e Moderna (Libri I-IV)*, ed. Alberto Stock, Roma

[21] Enriques F. - Castelnuovo G., 1996, *Riposte armonie. Lettere di F. Enriques a G. Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini et al., ed. Bollati Boringhieri, Torino

[22] Fano G., 1892, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di matematica, Vol. 30, pp. 106-132

[23] Freguglia P., 1998, *I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese*, in *Seminari di Geometria 1996-1997*, a cura di S. Coen, Dip. di Matematica dell'Università di Bologna, pp. 254-277

[24] Gray J., 2007, *Worlds out of nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, Springer, London

[25] Hilbert D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*,ed. Teubner, Leipzig (versione italiana *Fondamenti della geometria, con i Supplementi di P. Bernays*, ed. Franco Angeli, 2012)

[26] Klein C.F., 1871 *Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie I*, Mathematische Annalen, Vol. 4, pp. 573–625 in F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. 1, pp. 254–305

[27] Klein C.F., 1873 *Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie II*, Mathematische Annalen, Vol. 6, in F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. 1, pp. 311–343

[28] Klein C.F. et al., 1898-1935, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften"*, ed. Teubner, Leipzig, 23 volumi

[29] Levi B., 1913, *Mario Pieri*, Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, Anno XV, pp. 65-74

[30] Lobaĉevskij N. I., 1835-38, *Novye naĉala geometrij s polnoj teoriej parallel'nyh*, Kazan, tr. di L. Lombardo Radice, *Nuovi principi della geometria: con una teoria completa delle parallele*, ed. Einaudi, 1955

[31] Lobaĉevskij N.I. 1837 *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 17, pp. 295–320

[32] Lobaĉevskij N. I., 1840, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, tr. di G.B. Halsted, *Geometric Researches in the Theory of Parallels*, Open Court, Chicago, 1914

[33] Manara C. F. & Spoglianti M., 1977, *La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese*, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena, Serie VI, Vol. 19

[34] Manara C. F., 1991, *Giuseppe Peano ed i fondamenti della Geometria*, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena

[35] Marchisotto E. A., 1997, *Mario Pieri and his contributions to Geometry and Foundations of Mathematics*, Historia Mathematica, Vol. 20, pp. 285-303

[36] Pasch M., 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig

[37] Peano G., 1888, *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, ed. Bocca, Torino

[38] Peano G., 1889, *I principii di geometria logicamente esposti*, ed. Bocca, Torino

[39] Peano G., 1891, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, in Rivista di Matematica, Vol. 1, pp. 66-69

[40] Peano G., 1891, *Lettera aperta al Prof. G. Veronese*, in Rivista di Matematica, Vol. 1, ed. Bocca, Torino, pp. 267-269

[41] Peano G., 1892, *Recensione al volume di G. Veronese, "Fondamenti di geometria a più dimerisioni e a più specie di unità rettilinee, ecc."*, Rivista di Matematica, Vol. 2, ed. Bocca, Torino, pp. 143-144

[42] Peano G., 1894, *Sui fondamenti della geometria*, in Rivista di Matematica, Vol. 4, pp. 51-90

[43] Peano G., 1913, *Mario Pieri (Discussiones)*, Academia pro Interlingua, ed. Bocca, pp. 31-35

[44] Pieri M., 1894, *Sui principii che reggono la geometria di posizione*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 30

[45] Pieri M., 1897, *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Vol. 48, pp. 1–62

[46] Pieri M., 1899, *Un sistema di postulati per la geometria proiettiva astratta degli iperspazi*, Rivista di Matematica, Vol. 6, pp. 9-16

[47] Pieri M., 1980, *Opere sui Fondamenti della Matematica*, ed. Cremonese, Bologna

[48] Poincaré H., 1902, *La science et l'hypothèse*, Paris

[49] Segre C., 1883, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Vol. 36, pp. 3–86

[50] Segre C, 1883, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Vol. 36, pp. 87–157

[51] Segre C., 1891, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, in Rivista di Matematica, Vol. 1, pp. 42–66

[52] Segre C., 1891, *Dichiarazione*, in Rivista di Matematica, Vol. 1, pp. 154-156

[53] Segre C., 1917, *Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Veronese*, Rend. della Accademia Nazionale dei Lincei, Vol. 26, Serie V, pp. 249-258.

[54] Veronese G., 1883-84, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, Serie III, Vol. 19

[55] Veronese G., 1891, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la scuola di magistero in matematica*, Tipografia del Seminario, Padova

[56] Veronese G., 1892, *A proposito di una lettera del prof. Peano*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 6

[57] Veronese G., 1909, *La geometria non archimedea*, Atti del 4° Congresso dei Matematici, Roma

Sitografia

[58] Geometria Proiettiva, Progettomatematica a cura di I. Civili, supervisione della prof.ssa M. Idà

[59] Harmonic Sets, Minnesota State University

[60] Euclide, Enciclopedia Treccani

[61] L'ottica o "l'errore di Euclide", a cura di F. Incardona, 2016

[62] Tesi di Laurea di F. M. Bernardix, "L'ottica di Euclide e la scienza della visione", 2008

[63] "L'antica ottica", CRF Uniroma2

[64] Geometrie non euclidee 1, Progettomatematica a cura di M. Romei, supervisione del prof. A. Gimigliano

[65] Geometrie non euclidee 2, Progettomatematica a cura di G. Laffi, supervisione del prof. A. Gimigliano

[66] Moritz Pasch encyclopedia.com

[67] Corrado Segre e la scuola italiana di geometria algebrica, a cura di L. Giacardi

[68] Corrado Segre, Torino Scienza

[69] Giuseppe Peano, Torino Scienza

[70] Polemica tra Segre e Peano

[71] Giuseppe Veronese, a cura di Paolo Freguglia

[72] Mac Tutor, Giuseppe Veronese

[73] Giuseppe Veronese encyclopedia.com

[74] Geometria non archimedea di Giuseppe Veronese

[75] Gino Fano, Torino Scienza

[76] Mac Tutor, Federigo Enriques

[77] Biografia di F. Enriques, ”Protagonisti della cultura italiana del Novecento” C. F. Manara

[78] Federigo Enriques - Università di Bologna

[79] Enriques, Enciclopedia Treccani

[80] Mac Tutor, Mario Pieri