Alma Mater Studiorum \cdot Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE Corso di Laurea in Matematica

MODELLI MATEMATICI COMPARTIMENTALI NELLE SCIENZE SOCIALI: ANALISI QUALITATIVA DEI SISTEMI DINAMICI PER LA DIFFUSIONE E IL CONTROLLO DELLA CRIMINALITÀ, DELL'ALCOL E DEL FUMO

Tesi di Laurea Magistrale in Metodi Matematici per la Meccanica dei Continui

Relatore: Chiar.ma Prof. FRANCA FRANCHI Presentata da: ANITA ZAVATTA

IV Sessione di Laurea Anno Accademico 2023-2024

Indice

Abstract					
Introduzione					
1	Din	amica	delle popolazioni: dai Sistemi Dinamici alle PDEs	9	
	1.1	Sistem	i dinamici e studio delle loro configurazioni d'equilibrio	9	
	1.2 Modelli di diffusione e reazione				
		1.2.1	Nozioni generali sulle PDEs	15	
		1.2.2	Struttura costitutiva dei modelli di diffusione e reazione	17	
		1.2.3	Configurazioni d'equilibrio, analisi della stabilità e li-		
			nearizzazione del modello attorno ad esse	20	
	1.3	Model	lo preda-predatore di Lotka-Volterra	23	
		1.3.1	Configurazioni d'equilibrio e studio della stabilità $\ .\ .$	25	
		1.3.2	Generalizzazione con diffusione spaziale e nuovo studio		
			della stabilità	27	
2	Mo	dello c	rimo-tattico a due specie	31	
	2.1	2.1Modelli matematici2.2Configurazioni d'equilibrio e analisi della stabilità			
	2.2				
		2.2.1	Modello basico	35	
		2.2.2	Modello logistico	36	
		2.2.3	Modello delle forze dell'ordine	39	
3	Mo	dello c	rimo-tattico a tre specie	43	

	3.1	Modello crimo-tattico originario				
	0.1					
	3.2	Sistema dinamico: configurazioni d'equilibrio e stabilità				
	3.3	Variante del modello crimo-tattico				
		3.3.1 Sistema dinamico, configurazioni d'equilibrio e stabilità	53			
		3.3.2 Analisi degli effetti diffusivi e instabilità di Turing	57			
1	Con	ofronto dei modelli sociali per l'alcol, il fumo e la droga	63			
4	COL	finionto del modeni sociali per l'alcoi, il funio e la droga				
	4.1	Modello per la diffusione dell'alcol				
	4.2	Modello per la diffusione del fumo: tabacco e sigarette elet-				
		troniche \ldots	70			
	4.3	Confronto dei modelli sociali	75			
Co	Conclusioni					
Bibliografia						
Ri	Ringraziamenti					

Abstract

Questa tesi si propone di analizzare alcuni modelli matematici utilizzati per descrivere e prevedere la diffusione di fenomeni sociali problematici, come il consumo di droghe, alcol e fumo, attraverso un approccio epidemiologico. I modelli dinamici forniscono infatti un utile strumento per lo studio della diffusione di comportamenti sociali. Il lavoro si concentra in particolare sul modello crimo-tattico, adattato dalla teoria preda-predatore di Lotka-Volterra, e poi esteso per modellare l'interazione tra cittadini, criminali e polizia.

Si discute prima il modello crimo-tattico semplificato, a due sole specie interagenti, mentre successivamente viene evidenziato il ruolo importante delle forze dell'ordine nel contenimento della criminalità, introducendo la polizia come terza specie. La formulazione matematica del modello nel formalismo dei sistemi dinamici, riesce a descrivere come i cittadini suscettibili possano diventare criminali e come l'intervento delle forze dell'ordine possa influenzare la stabilità, riducendo anche la possibilità del crimine. In entrambi i casi, vengono presentate le configurazioni d'equilibrio del sistema, discutendone la stabilità anche in presenza di diffusione spaziale, sia classica che incrociata. Vengono poi introdotti modelli similari per la diffusione dell'alcol e del fumo, che a loro volta evidenziano forti analogie con i processi epidemiologici, individuando una soglia critica di biforcazione che assicura l'asintotica stabilità degli stati di equilibrio endemici. I modelli proposti non solo permettono di descrivere in modo realistico l'evoluzione temporale delle popolazioni coinvolte, ma anche di testare l'efficacia delle possibili e varie politiche di prevenzione, inclusa la totale rimozione dei "contagiati".

Parole chiave: modelli compartimentali; sistemi dinamici; equilibrio e stabilità; legge di Fick; instabilità di Turing.

Introduzione

Negli ultimi anni, l'applicazione di modelli matematici alle scienze sociali ha acquisito crescente importanza, poiché consente di analizzare, comprendere e controllare fenomeni complessi delle nostre società attraverso strumenti matematici formali. Problematiche come la criminalità, l'abuso di alcol e droghe, e le dipendenze da sostanze come il fumo possono essere interpretate come processi di diffusione sociale, comparabili alla diffusione di epidemie da virus. In modo simile alle malattie infettive, queste dipendenze si propagano nella popolazione tramite le interazioni sociali, rendendo i modelli dinamici particolarmente utili non solo per studiare tali fenomeni, ma anche per progettare strategie di intervento e di prevenzione.

Il lavoro presentato in questa tesi si concentra sull'analisi di modelli matematici volti a descrivere la diffusione del crimine, dell'alcol e del fumo, con un approccio basato sui sistemi dinamici. In particolare, viene studiato il modello crimo-tattico, derivato dai modelli ecologici del tipo preda-predatore, per rappresentare l'interazione tra cittadini, criminali e forze dell'ordine. A questo modello sono affiancati poi altri due modelli, che analizzano la diffusione dell'alcolismo e del fumo, con lo scopo di identificare analogie e differenze tra le dinamiche di tali comportamenti sociali.

Il primo capitolo introduce le basi teoriche necessarie per comprendere meglio i modelli dinamici in studio, descritti generalmente con dei sistemi dinamici o con equazioni alle derivate parziali paraboliche del tipo diffusione e reazioni, in presenza di effetti spaziali 1D e 3D. Vengono esaminati gli aspetti generali dei sistemi dinamici autonomi, con particolare attenzione alla ricerca delle posizioni d'equilibrio e all'analisi della loro stabilità, elementi fondamentali per le nostre successive discussioni dei modelli. Seguono poi alcuni preliminari sulle equazioni alle derivate parziali, mettendo in evidenza il ruolo strategico della Legge sperimentale di Fick, stazionaria e istantanea, nella creazione della struttura costitutiva dei modelli parabolici di diffusione e reazione, detti anche modelli del tipo "flusso gradiente", per la descrizione di fenomeni che si sviluppano non solo nel tempo ma anche nello spazio. Abbiamo anche evidenziato delle possibili generalizzazioni della Legge di Fick, per tener conto per esempio di possibili ritardi di risposta, che portano a modelli di diffusione e reazione iperbolici (correzione alla Cattaneo). Inoltre, visto il nostro interesse verso i modelli compartimentali, abbiamo voluto mettere in evidenza che oltre agli aspetti di diffusione classica, di "auto-diffusione, la Legge di Fick può giustificare effetti di "diffusione incrociata" per tener conto conto di comportamenti chemiotattici, "attraenti" o "respingenti" da parte delle altre specie coinvolte. Come ultima cosa, viene presentato e analizzato il modello pionieristico preda-predatore di Lotka-Volterra, in quanto "padre" di tutti i modellamenti matematici di questo genere, approfondendo in particolare il caso con effetti logistici sulle prede che presenta un problema di soglia critica.

Nel secondo capitolo viene presentato il modello crimo-tattico a due specie, ispirato proprio alle dinamiche del tipo preda-predatore di Lotka-Volterra. Il modello descrive le interazioni tra cittadini ordinari e criminali, concentrandosi su come i cittadini possano "contagiarsi" con la criminalità attraverso le possibili interazioni con criminali già presenti. Vengono discusse tre realistiche varianti di questo modello, da quella basica, a quella contenente l'effetto logistico e infine quella con l'influenza delle forze dell'ordine. In ciascuno dei tre modelli, viene fornita un'analisi dettagliata della stabilità lineare delle configurazioni d'equilibrio, con particolare enfasi sull'impatto delle forze di polizia nel ridurre il crimine.

Il terzo capitolo estende il modello crimo-tattico includendo una terza specie: le forze dell'ordine. Attraverso questa generalizzazione, il modello

INTRODUZIONE

consente di analizzare in maniera più dettagliata le dinamiche che intercorrono tra cittadini, criminali e polizia. Si studiano le configurazioni d'equilibrio del sistema e l'influenza delle forze dell'ordine nel contenimento del crimine, analizzando anche fenomeni di instabilità che emergono dalla diffusione spaziale, di tipo incrociato. Viene introdotto il concetto di instabilità di tipo Turing, analizzando come le interazioni spaziali possano influire sulla stabilità del sistema.

Il quarto capitolo in primo luogo introduce ed analizza due nuovi modelli di diffusione: dell'alcol e del fumo. Vengono trovate le rispettive configurazioni d'equilibrio, analizzandone la loro stabilità, con una particolare attenzione all'introduzione dei numeri di riproduzione basici, i "famosi errezero" tipici dei modelli. Viene poi effettuato un confronto tra i tre modelli di droga, alcol e fumo, tutti ispirati alle teorie epidemiologiche. Si evidenziano le somiglianze strutturali tra i modelli, come la divisione tra "suscettibili" e "infetti", e le differenze nei meccanismi di diffusione e recupero. In particolare, vengono analizzati i fattori che influenzano la propagazione del comportamento dipendente, come la pressione sociale e la presenza di programmi di intervento o regolamentazioni. Infine, viene fatta una comparazione anche delle configurazioni d'equilibrio e della loro stabilità, mettendo in luce anche sotto questo aspetto i punti in comune e le differenze tra il fenomeno della criminalità e quello delle dipendenze da sostanze.

Capitolo 1

Dinamica delle popolazioni: dai Sistemi Dinamici alle PDEs

Introduciamo alcune notazioni e prerequisiti utili per la comprensione dell'elaborato, facendo riferimento all'opera di Morris W. Hirsch e Stephen Smale "Differential equations, dynamical systems, and linear algebra" [1]. Abbiamo inoltre unificato le notazioni, adattando quelle presenti nelle fonti alla nostre necessità.

1.1 Sistemi dinamici e studio delle loro configurazioni d'equilibrio

Definizione 1.1. Definiamo come sistema dinamico evolutivo nel tempo un sistema fisico governato da una ODE vettoriale in \mathbb{R}^n del tipo

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \mathbf{f}(\vec{u}(t), t) \tag{1.1}$$

dove la funzione incognita $\vec{u} = \vec{u}(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I è un intervallo di \mathbb{R}^+ con estremo inferiore $t_0 = 0$, e la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si richiede essere di classe almeno $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$. La scelta della lettera t come variabile non è casuale, come neanche le sue limitazioni di dominio: nel corso di tutto l'elaborato infatti essa rappresenterà in tempo.

I sistemi dinamici possono definirsi:

- 1. *autonomi* se **f** non dipende esplicitamente da t, cioè $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\vec{u}(t));$
- 2. non autonomi se \mathbf{f} dipende esplicitamente da t.

In questa tesi sono sempre stati presi in considerazione sistemi autonomi, cioè della forma

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \mathbf{f}(\vec{u}(t)). \qquad (1.2)$$

Definizione 1.2. Definiamo anche un generico problema di Cauchy ai dati iniziali per un sistema dinamico autonomo non lineare come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u} = \mathbf{f}\left(\vec{u}(t)\right) & \forall t > 0\\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 & \forall \vec{u}_0 > 0 \end{cases}$$

Definizione 1.3. Dato un sistema dinamico come in (1.2), diremo che $\vec{u}_c \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione d'equilibrio (o configurazione d'equilibrio) se e solo se $\mathbf{f}(\vec{u}_c) = 0$. Quindi le soluzioni d'equilibrio sono stazionarie.

Vogliamo studiare se le soluzioni d'equilibrio del sistema dinamico in esame sono stabili, asintoticamente stabili o instabili, come definito di seguito. Questo perché è la stabilità delle soluzioni a renderle significative, dal punto di vista fisico.

Definizione 1.4. La configurazione d'equilibrio \vec{u}_c è stabile secondo Lyapunov se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall \vec{u}(0), \ 0 < ||\vec{u}(0) - \vec{u}_c|| < \delta_{\varepsilon}$, si ha $||\vec{u}(t) - \vec{u}_c|| < \varepsilon \ \forall t > 0.$

Se inoltre che $\lim_{t\to+\infty} ||\vec{u}(t) - \vec{u}_c|| = 0$, cioè $\vec{u}(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \vec{u}_c$, allora \vec{u}_c è asintoticamente stabile secondo Lyapunov.

La configurazione \vec{u}_c sarà detta *instabile* se non è soddisfatta la condizione primaria.

Inoltre, la configurazione d'equilibrio \vec{u}_c è detta *neutralmente stabile* se si verifica $||\vec{u}(t) - \vec{u}_c|| = \text{costante } \forall \vec{u}(0), \forall t > 0.$

Per studiare la stabilità di queste soluzioni d'equilibrio, dobbiamo prima linearizzare il nostro sistema dinamico in un intorno delle singole \vec{u}_c ; l'analisi della stabilità è infatti legata al problema agli autovalori della matrice di stabilità che definiamo qui di seguito.

Definizione 1.5. Data una configurazione d'equilibrio \vec{u}_c definiamo il suo vettore di perturbazione istantanea, considerato piccolo, come segue:

$$\vec{0} \neq \delta \vec{u}(t) := \vec{u}(t) - \vec{u}_c, \quad \forall t > 0.$$

Introdotta poi la matrice jacobiana di \mathbf{f} ,

$$\mathcal{M} = \nabla_{\vec{u}} \mathbf{f}(\vec{u}(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}(\vec{u}),$$

definiamo la matrice di stabilità (di Lyapunov) per la configurazione d'equilibrio \vec{u}_c :

$$\mathcal{L} := \mathcal{M}(\vec{u}_c).$$

Si osserva che per ogni \vec{u}_c la matrice di stabilità \mathcal{L} descrive l'evoluzione temporale del vettore perturbazione, supposto piccolo.

Andando a sostituire in (1.2) la scrittura di $\vec{u}(t) = \vec{u}_c + \delta \vec{u}(t)$, con $\vec{u}_c > 0$ e costante, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{u}(t) = \mathbf{f}\left(\vec{u}_c + \delta\vec{u}(t)\right)$$

e, con uno sviluppo di Taylor troncato al 1° ordine del membro di destra otteniamo la versione linearizzata del sistema dinamico in un intorno di u_c , data da:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{u}(t) = \mathcal{L}\delta\vec{u}(t). \tag{1.3}$$

Abbiamo così un sistema dinamico lineare a coefficienti costanti e omogeneo, caratterizzato proprio dalla sua matrice di stabilità.

Per questa classe di sistemi dinamici sappiamo che possiamo ricercare soluzioniperturbazioni della forma

$$\vec{0} \neq \delta \vec{u}(t) = \vec{u}_1 e^{\lambda t},$$

dove $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ e costante è detto *ampiezza*.

La teoria spettrale permette poi di individuare la coppia (λ, \vec{u}_1) , che rappresenta la coppia di autovalore e relativo autovettore per la matrice \mathcal{L} , cioé una soluzione per

$$(\mathcal{L} - \lambda \mathbb{I})\vec{u}_1 = \vec{0}.$$

A questo punto facciamo uso del seguente criterio, anche detto *metodo indiretto* o *della stabilità linearizzata*, per studiare la stabilità delle singole configurazioni d'equilibrio.

Proposizione 1.6. (1° criterio di stabilità di Lyapunov)

Se gli autovalori della matrice di stabilità \mathcal{L} sono tutti a parte reale negativa (o, se reali, sono autovalori negativi), allora la soluzione d'equilibrio $\vec{u_c}$ è **asintoticamente stabile** e mantiene la stessa classificazione topologica della singolarità nulla dell'associato sistema dinamico linearizzato.

Basta che ci sia un autovalore con parte reale positiva (o, se reale, un autovalore positivo) per dichiarare l'**instabilità** di \vec{u}_c ; anche in questo caso mantiene la stessa classificazione topologica della singolarità nulla del corrispondente sistema dinamico linearizzato.

Il criterio fallisce per autovalori con parte reale nulla (o, se reali, autovalori nulli).

In particolare, per i sistemi dinamici di due equazioni è possibile stilare una classificazione di punti d'equilibrio, stabili e instabili, sulla base degli autovalori della loro matrice di stabilità.

Si ha quindi che una configurazione d'equilibrio è detta:

- *fuoco stabile*, se ha autovalori complessi coniugati con parte reale negativa;
- *fuoco instabile*, se ha autovalori complessi coniugati con parte reale positiva;
- nodo stabile, se ha autovalori reali, distinti o no, tutti di segno negativo;

- *nodo instabile*, se ha autovalori reali, distinti o no, tutti di segno positivo;
- centro, se ha autovalori complessi puri;
- sella, se ha autovalori reali, di segno opposto.

Definizione 1.7. La soluzione d'equilibrio $\vec{u_c}$ è *iperbolica* se e solo se la sua matrice di stabilità $\mathcal{L} := \mathcal{M}(\vec{u_c})$ non ammette autovalori con parte reale nulla (o, se reali, autovalori nulli).

Da questa definizione deriva quindi il seguente corollario di (1.6).

Corollario 1.8. Una soluzione d'equilibrio iperbolica può essere o instabile o asintoticamente stabile.

Nel caso speciale n = 1, la funzione incognita u(t) può rappresentare una densità di popolazione, dipendente solo dal tempo e comunemente denotata con $\rho = \rho(t)$, sempre di classe C^1 ma a valori reali positivi. In dinamica delle popolazioni, la funzione $\mathbf{f}(u(t)) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ descrive il termine di reazione e sarà solitamente denotato $r(\rho(t))$; la legge di evoluzio-

ne temporale della grandezza $\rho(t)$ dipende solo da r.

Il caso più banale di termine di reazione è quello Malthusiano, che prende il nome dall'economista Thomas Robert Malthus (1766-1834), che per primo lo presentò.

Consideriamo la seguente ODE del 1°ordine scalare, lineare, a coefficienti costanti e omogenea

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = a\rho(t) \quad \forall t > 0, \ a > 0.$$
(1.4)

L'effetto prodotto dal termine di reazione $a\rho$ è un effetto di *crescita esponenziale infinita*, che possiamo subito etichettare come irrealistico nell'ambito della dinamica delle popolazioni. Il primo studioso a muovere una critica nei confronti della crescita esponenziale malthusiana fu Darwin, il quale affermò che, nella realtà, tale crescita non sia possibile, per la popolazione umana e non, a causa di eventi esterni come guerre, epidemie, disastri naturali, etc...

Fu quindi il matematico Pierre François Verhulst (1804-1849) ad apportare la prima modifica sostanziale al modello, introducendo quello che oggi è chiamato *effetto logistico/di controllo di Verhulst*. L'idea è quella di imporre un controllo sulla crescita esponenziale, detto *controllo ambientale*, a rappresentare l'ostilità dell'habitat nei confronti della specie.

Si considera quindi la seguente ODE del 1° ordine non lineare di Bernoulli, a coefficienti costanti e omogenea:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = a\rho(t)\left(1 - \frac{\rho(t)}{b}\right) \quad \forall t > 0, \ a > 0, \ b > 0.$$

$$(1.5)$$

Il parametro b è chiamato *carrying capacity* e descrive appunto la capacità dell'ambiente di supportare le necessità della specie. Spesso si preferisce esprimere la carrying capacity come un denominatore, così da riscrivere (1.5) come

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = a\rho(t) - \frac{\rho^2(t)}{\kappa}, \quad \forall t > 0, \ a > 0, \ \kappa > 0,$$

dove $\kappa = \frac{b}{a}$.

1.2 Modelli di diffusione e reazione

Parliamo ora di *modelli di diffusione e reazione*, ossia aggiungiamo effetti di diffusione spaziale nella dinamica delle popolazioni. In particolare, consideriamo il caso in cui le nostre specie si muovono in uno spazio unidimensionale.

Denoteremo in forma compatta il vettore densità delle specie interagenti con $\vec{u} = \vec{u}(x,t) \in C^2(\Omega_t^+; \mathbb{R}^n)$, dove $\Omega_t^+ = \Omega \times \{t > 0\}$, con $\Omega = (-\infty, +\infty)$ oppure $\Omega = (0, M)$, M > 0.

In forma compatta, il modello classico di diffusione e reazione è governato

dalla seguente PDE del secondo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t) = \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u}(x,t) + \vec{r}\left(\vec{u}(x,t)\right) \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \tag{1.6}$$

dove:

- $\mathcal{D}_{\partial x^2}^{\partial^2} \vec{u}(x,t)$ rappresenta l'effetto classico di diffusione spaziale;
- la matrice \mathcal{D} è detta matrice di diffusione e, in assenza di effetti di diffusione incrociata, risulta essere una matrice di ordine n in forma diagonale, del tipo $\mathcal{D}_i \delta_{ij}$, dove $\mathcal{D}_i > 0 \ \forall i = 1, ..., n$, rappresentano le mobilità diffusive costanti delle singole specie e δ_{ij} è il simbolo di Kronecker;
- $\vec{r}(\vec{u}(x,t))$ rappresenta il *vettore di reazione*, la cui dipendenza, anche non lineare, dal campo si considera a coefficienti costanti.

In questo contesto, il modello è governato da n PDEs del secondo ordine paraboliche semilineari.

1.2.1 Nozioni generali sulle PDEs

Diamo prima alcune definizioni e nozioni generali per le equazioni alle derivate parziali, anche conosciute come PDEs (dall'inglese *Partial Differential Equations*).

Consideriamo una generica equazione alle derivate parziali della forma:

$$F(x, y, t, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, \dots) = 0,$$

dove F è una funzione a valori reali scalari dipendente da un gruppo di variabili indipendenti reali x, y, \ldots , da una funzione incognita $u = u(x, y, \ldots)$ e dalle sue potenziali derivate parziali rispetto a x, y, \ldots prime, seconde, ...

Definizione 1.9. Data F come sopra, si dice *ordine di* F il massimo ordine di derivazione parziale presente per la funzione incognita u = u(x, y, t, ...).

Definizione 1.10. Data *F* come sopra, questa si dirà:

- *lineare* se è lineare nella funzione incognita u e in tutte le sue derivate parziali presenti. Sarà *omogenea* o *non omogenea* se ammette o non ammette la soluzione u = 0;
- *semilineare* se è lineare soltanto nelle derivate parziali d'ordine massimo, con coefficienti dipendenti al più dalle variabili indipendenti reali;
- quasi lineare se è lineare soltanto nelle derivate di ordine massimo, con i rispettivi coefficienti che possono dipendere anche dal campo incognito u e dalle sue derivate parziali fino all'ordine massimo meno uno.

Limitandoci per semplicità ad una generale PDE del 2° ordine in due variabili indipendenti reali $x \in y > 0$, con il possibile ruolo di tempo t per y, verso modelli evolutivi 1D, per una funzione incognita $u = u(x, y) \in C^2$ di tipo quasi lineare, $\forall (x, y) \subseteq \Omega \in \mathbb{R}^{2+}$, si ha

$$a(\cdot)u_{xx}(x,y) + 2b(\cdot)u_{xy}(x,y) + c(\cdot)u_{yy}(x,y) = d(\cdot), \qquad (1.7)$$

dove $(\cdot) = (x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$ e le funzioni a, b, c, d sono almeno continue a valori reali, in aperti regolari di \mathbb{R}^5 .

La forma (1.7) permette di definire una matrice simmetrica A, detta matrice principale della PDE, come segue:

$$A := \begin{pmatrix} -a(\cdot) & -b(\cdot) \\ -b(\cdot) & -c(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Lo studio del determinante di A ci dà subito una rapida possibile classificazione della PDE e di conseguenza del modello, come visto in [2]:

- se det(A) = 0, allora la matrice è singolare e il modello è detto parabolico;
- se det(A) < 0, allora la matrice è indefinita in segno e il modello è detto iperbolico;
- se det(A) > 0, allora la matrice è definita negativa di segno e il modello è detto *ellittico*.

In alcuni casi è possibile per un modello cambiare di classificazione, come avviene per esempio per l'equazione di Tricomi.

Dato $u = u(x, y) \in C^2$, è detta equazione di Tricomi la seguente PDE del secondo ordine:

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0. (1.8)$$

La matrice principale di (1.8), data da $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$, è quindi:

- singolare per y = 0, da cui segue che il relativo modello è *parabolico*;
- indefinita in segno per y < 0, da cui segue che il relativo modello è *iperbolico*;
- definita negativa di segno per y > 0, da cui segue che il relativo modello è *ellittico*.

1.2.2 Struttura costitutiva dei modelli di diffusione e reazione

Consideriamo ora per comodità l'equazione (1.6) nel caso scalare; in particolare, utilizziamo come notazione per la funzione incognita $\rho = \rho(x, t)$. Tale equazione è una PDE nella funzione $\rho = \rho(x, t)$, in due variabili reali indipendenti $x \in t$, di ordine 2. Tralasciando gli argomenti, la riscriviamo come segue:

$$\rho_t = D\rho_{xx} + r(\rho) \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante.}$$
(1.9)

Per questa PDE la matrice principale risulta essere $A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cioè una matrice singolare, il che significa che il modello (1.9) è un modello *parabolico* generalmente semilineare, visto che il termine di reazione può dipendere dal campo ρ in modo non lineare.

In letteratura, modelli come (1.9) sono noti come modelli di diffusione (e reazione) del tipo flusso gradiente.

L'equazione (1.9) si può riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} \rho_t = -\frac{\partial}{\partial x} J_\rho(x,t) + r(\rho) \\ J_\rho(x,t) \coloneqq -D\frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) \end{cases} \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante.} \tag{1.10}$$

Così facendo si passa da un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine a due equazioni alle derivate parziali del 1° ordine, la prima evolutiva e la seconda stazionaria.

La funzione J_{ρ} così definita è detta flusso (scalare) associato alla densità ρ .

La prima equazione di (1.10) è la forma locale di una generale legge di bilancio per la densità ρ ; come detto prima, si tratta di una PDE *evolutiva* in quanto include la derivata parziale del campo rispetto al tempo t. La coppia formata dal flusso J_{ρ} , di classe almeno C^1 , e dal supply $r(\rho)$, almeno continuo, rappresenta il cosiddetto "inflow" associato a ρ . La seconda equazione di (1.10) è la nota *equazione costitutiva di Fick per il flusso*; si tratta di una legge sperimentale di tipo istantanea e *stazionaria*.

Possiamo svolgere un ragionamento analogo nel caso di mobilità diffusive non costanti: $D = D(\rho(x, t)) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, con $D' = \frac{\partial D}{\partial \rho}$.

L'equazione del modello (1.9) per le mobilità sopra descritte può essere anch'essa espressa come (1.10):

$$\begin{cases} \rho_t = -\frac{\partial}{\partial x} J_\rho(x,t) + r(\rho) \\ J_\rho(x,t) := -D(\rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) \end{cases} \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante.} \tag{1.11}$$

Da (1.11) possiamo ricostruire la PDE del 2° ordine del modello:

$$\rho_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + r(\rho),$$

cioè

$$\rho_t = D(\rho)\rho_{xx} + D'(\rho)\rho_x^2 + r(\rho)$$

Anche in questo caso il modello è *parabolico* ma, dato che il coefficiente del termine principale dipende dal campo ρ , sarà di tipo quasilineare.

Da queste leggi possiamo sempre ricondurci a un problema sperimentale di *ritardo di risposta (delay time/relaxation time)*, dove tale tempo di ritardo è denotato con τ , $\tau > 0$ e $\tau << 1$. Da qui seguono quelle che in letteratura vengono chiamate le *leggi di Fick* del tipo "ritardato":

$$J_{\rho}(x,t+\tau) = -D\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante.}$$
(1.12)

La presenza del tempo di ritardo di risposta nella legge di Fick ha portato ad una correzione di tale legge, detta *correzione alla Cattaneo* (o *alla Maxwell-Cattaneo*). Grazie ad uno sviluppo di Taylor al 1° ordine, (1.12) si riscrive come segue, omettendo gli argomenti:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} J_{\rho} + J_{\rho} = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante}, \tag{1.13}$$

ovvero un'equazione alle derivate parziali *evolutiva* del 1° ordine, anche detta *equazione costitutiva di tipo "rate*".

Con questo cambiamento costitutivo, il modello di diffusione e reazione (1.10) viene descritto da due PDEs evolutive del 1° ordine come segue:

$$\begin{cases} \rho_t = -\frac{\partial}{\partial x} J_\rho + r(\rho) \\ \tau \frac{\partial}{\partial t} J_\rho + J_\rho = -D \frac{\partial}{\partial x} \rho \end{cases} \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante.} \tag{1.14}$$

Andando ad eliminare il flusso scalare J_{ρ} attraverso i seguenti passaggi otterremo una nuova PDE del 2° ordine:

- richiedo le funzioni ρ e J_{ρ} almeno di classe C^2 in entrambe le variabili, oltre ad una regolarità appropriata per r;
- derivo parzialmente la prima equazione di (1.14) rispetto al tempo e la seconda rispetto allo spazio e, applicando l'uguaglianza del teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 J_{\rho}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 J_{\rho}}{\partial t \partial x}$$

ottengo il sistema riscritto come

$$\begin{cases} \rho_{tt} = -J_{\rho xt} + r'(\rho)\rho_t \\ \tau J_{\rho xt} = -J_{\rho x} - D\rho_{xx} \end{cases} \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+, \ D > 0 \text{ costante}; \end{cases}$$

• isolo $J_{\rho xt}$ nella 2° equazione e lo sostituisco nella 1°, insieme alla scrittura $J_{\rho} = r(\rho) - \rho_t$ ottenuta dalla legge di bilancio, ricavando così

$$\rho_{tt} = \frac{D}{\tau} \rho_{xx} + \frac{1}{\tau} r(\rho) - \frac{\rho_t}{\tau} + r'(\rho) \rho_t$$

Il nuovo modello di diffusione e reazione, sempre semilineare, è quindi descritto dalla seguente PDE del 2° ordine:

$$\rho_{tt} - \frac{D}{\tau} \rho_{xx} = -\frac{\rho_t}{\tau} + \frac{1}{\tau} r(\rho) + r'(\rho) \rho_t, \qquad (1.15)$$

dove l'eventuale semilinearità è dovuta alla scelta del termine di reazione $r(\rho)$.

In questo caso la matrice principale è data da $A = \begin{pmatrix} \frac{D}{\tau} & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ di determinante negativo, cioè A è indefinita in segno, e si ottiene così un modello *iperbolico* da parabolico che era. Mandando $\tau \to 0$, la matrice A tornerà ad essere singolare e il modello ritorna parabolico.

Questa correzione mostra come il modello parabolico, dopo osservazioni sperimentali come appunto quella del tempo di ritardo di risposta, si possa trasformare in un modello iperbolico.

Considerazioni analoghe si possono mettere in campo per mobilità diffusive non costanti verso modelli di diffusione e reazione iperbolici quasi lineari, con immediate generalizzazioni al caso 3D.

1.2.3 Configurazioni d'equilibrio, analisi della stabilità e linearizzazione del modello attorno ad esse

Preso un modello di diffusione e reazione come (1.6), le sue configurazioni d'equilibrio saranno le stesse del modello considerato in assenza di diffusione spaziale. Questo perché cerco soluzioni del tipo $\vec{u} = \vec{u}_c$ costanti nel tempo e nello spazio, ottenendo così la condizione d'equilibrio $\vec{r}(\vec{u}_c) = \vec{0}$. Come abbiamo visto nella sezione 1.1, le configurazioni d'equilibrio dipendono quindi solo dal termine di reazione.

Per poter studiare l'eventuale stabilità di tali soluzioni, linearizziamo il sistema intorno a ciascuna di esse. Diamo quindi una definizione analoga alla definizione (1.5), ma in questo caso in versione con due variabili indipendenti.

Definizione 1.11. Data una configurazione d'equilibrio \vec{u}_c definiamo una sua *perturbazione istantanea*, considerata piccola, come segue:

$$0 \neq \delta \vec{u}(x,t) := \vec{u}(x,t) - \vec{u}_c, \quad \forall (x,t) \in \Omega_t^+.$$

Sostituisco in (1.6) la scrittura $\vec{u}(x,t) = \vec{u}_c + \delta \vec{u}(x,t)$, con $\vec{u}_c \ge 0$ costante, ottenendo così la versione linearizzata del modello, omessi gli argomenti:

$$\delta \vec{u}_t = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta \vec{u} + \mathcal{L} \delta \vec{u}, \quad \forall (x, t) \in \Omega_t^+.$$
(1.16)

Il termine di reazione è stato linearizzato con lo stesso processo del caso senza diffusione spaziale visto nella sezione 1.1.

In generale, otterrò una PDE vettoriale del 2° ordine in $\delta \vec{u}(x,t)$ parabolica lineare, a coefficienti costanti e omogenea.

Cerco quindi soluzioni-perturbazioni spazio-tempo $\delta \vec{u}(x,t)$ della forma delle onde dispersive o dei modi normali di Fourier,

$$0 \neq \delta \vec{u}(x,t) = \vec{u}_1 e^{i(kx - \omega t)}, \qquad (1.17)$$

dove:

- $k \in \mathbb{R}$ è detto numero d'onda, sempre reale;
- ω è detta frequenza o pulsazione;
- $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ e costante è detto *ampiezza della perturbazione*.

Definiamo poi un ulteriore parametro $\sigma := -i\omega$, detto parametro di stabilità. Data la soluzione-perturbazione in questa forma, si osserva che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} \delta \vec{u}_t = \sigma \delta \vec{u} \\ \delta \vec{u}_{xx} = -k^2 \delta \vec{u} \end{cases}$$
(1.18)

Andando a sostituire la soluzione nella forma (1.17) e le identità di (1.18) in (1.16), si ottiene:

$$\sigma \delta \vec{u} = -\mathcal{D}k^2 \delta \vec{u} + \mathcal{L} \delta \vec{u} \quad \forall (x, t) \in \Omega_t^+.$$

Ma essendo $e^{i(kx-\omega t)} \neq 0 \ \forall (x,t) \in \Omega_t^+$ e presente in tutti gli addendi, posso raccoglierlo e semplificarlo, ottenendo l'equazione algebrica che segue:

$$\sigma \vec{u}_1 = -\mathcal{D}k^2 \vec{u}_1 + \mathcal{L} \vec{u}_1.$$

Quest'ultima la posso riscrivere a sua volta come il seguente sistema di Cramer omogeneo in \mathbb{R}^n :

$$(\sigma \mathbb{I} + \mathcal{D}k^2 - \mathcal{L})\vec{u}_1 = \vec{0}. \tag{1.19}$$

Per il Teorema di Cramer, condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ è che

$$det(\sigma \mathbb{I} + \mathcal{D}k^2 - \mathcal{L}) = 0.$$
(1.20)

L'equazione (1.20) è detta equazione di dispersione; si tratta di un'equazione algebrica di grado n in σ a coefficienti reali.

Andando a studiare le soluzioni di (1.20), quando otterremo valori di $\sigma \in \mathbb{R}^-$ o valori complessi con parte reale in \mathbb{R}^- , ricordando che quest'ultimo è definito come $\sigma := -i\omega$, si avrà che per le perturbazioni della forma (1.17) vale

$$\delta \vec{u}(x,t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

cioè

$$\vec{u}(x,t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} \vec{u}_c(x,t),$$

il che mi dice che la soluzione d'equilibrio \vec{u}_c è asintoticamente stabile.

Negli esempi dei vari modelli che analizzeremo in seguito, vedremo in particolare come la presenza di effetti diffusivi spaziali classici aiuti sempre la stabilità delle soluzioni.

1.3 Modello preda-predatore di Lotka-Volterra

Consideriamo il caso in cui la popolazione studiata non è sola nell'habitat e andiamo ad illustrare il più famoso modello di questo genere presente in moltissima letteratura, tra cui [1], da cui poi si sono sviluppati essenzialmente tutti i modelli studiati al giorno d'oggi.

La paternità del modello preda-predatore è stata attribuita sia al chimico e statistico Lotka, che al matematico Volterra, i quali studiarono il problema ecologico dell'interazione tra la popolazione dei predatori con quella delle prede. In maniera indipendente l'uno dall'altro, essi produssero le equazioni alle derivate ordinarie che diedero poi vita a questo modello, conosciuto come modello Lotka-Volterra.

Definizione 1.12. (Modello a 2 specie interagenti di tipo preda-predatore) Poniamo N(t) la densità della *preda* e P(t) la densità del *predatore*, dipendenti solo dal tempo, entrambe funzioni di classe almeno $C^1(\mathbb{R}^+)$ e tali che N(t) > 0 e P(t) > 0 per ogni t > 0. Si definisce il **modello basico preda-predatore di Lotka-Volterra** come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = N(t)(a - bP(t)) \\ \frac{d}{dt}P(t) = -P(t)(c - dN(t)) \end{cases},$$
(1.21)

con i coefficienti a, b, c, d > 0, dove $a \in c$ rappresentano rispettivamente gli effetti di crescita e decrescita malthusiana, mentre $b \in d$ rappresentano gli effetti degli incontri tra le due specie.

Possiamo riscrivere il modello in forma compatta/vettoriale con:

•
$$\vec{u}(t) := \begin{pmatrix} N(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$$
 come vettore incognito;

•
$$\vec{r}(\vec{u}(t)) := \begin{pmatrix} N(t)(a-bP(t)) \\ -P(t)(c-dN(t)) \end{pmatrix}$$
 come vettore che descrive l'effetto reazione.

Un generico problema di Cauchy alle condizioni iniziali per il modello (1.21) si scrive come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \vec{r}(\vec{u}(t)) \quad \forall t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \equiv \begin{pmatrix} N(0) \\ P(0) \end{pmatrix} \quad \forall \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$
(1.22)

Questo modello può essere generalizzato in vario modo, per renderlo sempre più realistico sperimentalmente, introducendo effetti logistici sulle prede e/o sui predatori, effetti cosidetti "di pesca" e numerose altre variazioni.

Ci focalizziamo sul modello preda-predatore in presenza di un effetto logistico sulla preda: introduciamo un parametro $\kappa > 0$, detto *carrying capacity* per le prede, che rappresenta la capacità dell'ambiente di supportare le necessità della specie.

Allora il sistema (1.21) con questa variazione si può generalizzare come segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = N(t) \left(a - bP(t)\right) - a \frac{N^2(t)}{\kappa} \\ \frac{d}{dt}P(t) = -P(t) \left(c - dN(t)\right) \end{cases}$$
(1.23)

Lavorando sempre con la forma compatta del modello, il nuovo vettore reazione sarà dato da

$$\vec{r}(\vec{u}(t)) := \begin{pmatrix} N(t)(a - bP(t)) - a\frac{N^2(t)}{\kappa} \\ -P(t)(c - dN(t)) \end{pmatrix}.$$
(1.24)

1.3.1 Configurazioni d'equilibrio e studio della stabilità

Le configurazioni d'equilibrio per (1.23) saranno le $\vec{u}_c = \begin{pmatrix} N_c \\ P_c \end{pmatrix}$ tali che $\vec{r}(\vec{u}_c) = \vec{0}$ per il vettore reazione (1.24), ovvero:

- 1. $\vec{u}_c^{(0)} = (0, 0)$, stato banale;
- 2. $\vec{u}_c^{(1)} = (\kappa, 0)$, stato "predatori-free";
- 3. $\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\left(1 \frac{c}{d\kappa}\right)\right)$, stato endemico, di coesistenza delle due specie.

L'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$ è vincolata alla condizione $P_c > 0$, cioè $\frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{d\kappa}\right) > 0$, che equivale a chiedere $\kappa > \frac{c}{d}$. Questa condizione definisce la *soglia critica/di biforcazione della carrying capacity*, che si denota $\kappa_c := \frac{c}{d}$, al di sotto della quale ho due configurazioni d'equilibrio e al di sopra della quale ne ho tre.

Per studiare la stabilità di queste soluzioni d'equilibrio calcoliamo prima di tutto la matrice jacobiana del sistema, che vediamo essere

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial N} r_N & \frac{\partial}{\partial P} r_N \\ \frac{\partial}{\partial N} r_P & \frac{\partial}{\partial P} r_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bP - 2\frac{a}{\kappa}N & -bN \\ dP & dN - c \end{pmatrix},$$

e la valutiamo nelle varie configurazioni d'equilibrio, ovvero calcoliamo le varie matrici di stabilità:

1.
$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{M}\left(\vec{u}_c^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & -c \end{pmatrix}$$
, con autovalori $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -c < 0$;

2.
$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{M}\left(\vec{u}_{c}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -a & -b\kappa \\ 0 & d\kappa - c \end{pmatrix}$$
, con autovalori $\lambda_{1} = -a < 0$ e $\lambda_{2} = d\kappa - c$;

3. $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{M}\left(\vec{u}_c^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{ac}{d\kappa} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{a}{b}(d-\frac{c}{\kappa}) & 0 \end{pmatrix}$ ha una forma più complicata, per cui non siamo in grado di riconoscere immediatamente gli autovalori, che andremo a studiare in seguito.

Per lo studio che andremo a svolgere sugli autovalori di $\mathcal{L}^{(2)}$ è necessario ricordare il seguente risultato.

Proposizione 1.13. (Regola di Cartesio)

Dato un polinomio a coefficienti reali e non tutti nulli

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

allora la regola di Cartesio ci dice che il massimo numero di radici reali e positive di tale polinomio è dato dal numero di variazioni di segno tra coefficienti consecutivi, ignorando eventuali coefficienti nulli.

Per quanto enunciato in (1.6) vediamo quindi che:

- 1. $\mathcal{L}^{(0)}$ ha un autovalore positivo e uno negativo, quindi è una soluzione d'equilibrio *instabile*, del tipo sella;
- 2. $\mathcal{L}^{(1)}$ ammette due autovalori reali e negativi se $\kappa < \kappa_c$, rendendo $\vec{u}_c^{(1)}$ una soluzione *asintoticamente stabile*, del tipo nodo di prima specie e in questo caso non esiste la soluzione $\vec{u}_c^{(2)}$, mentre se $\kappa > \kappa_c$ allora è una soluzione d'equilibrio *instabile*, del tipo sella;
- 3. per $\mathcal{L}^{(2)}$ calcoliamo il polinomio caratteristico e lo imponiamo uguale a 0, ovvero calcoliamo $det(\mathcal{L}^{(2)} \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ e da qui otteniamo

$$p_{\mathcal{L}^{(2)}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{ac}{d\kappa}\lambda + ac - \frac{ac^2}{d\kappa} = 0.$$
 (1.25)

Ricordando ora che ci troviamo nel vincolo $\kappa > \kappa_c := \frac{c}{d}$, si osserva che i coefficienti di grado 1 e 0, ovvero $\frac{ac}{d\kappa}$ e $ac - \frac{ac^2}{d\kappa}$, sono positivi, per cui per (1.13) abbiamo che le due radici di (1.25) sono entrambe negative. Questo significa che $\mathcal{L}^{(2)}$ ha due autovalori negativi, cioè $\vec{u}_c^{(2)}$ è soluzione d'equilibrio *asintoticamente stabile*. Naturalmente, in base al segno del discriminante, può variare la classificazione topologica.

1.3.2 Generalizzazione con diffusione spaziale e nuovo studio della stabilità

Aggiungiamo ora le mobilità diffusive costanti positive al modello (1.23), ponendoci in uno spazio unidimensionale $\Omega \subset \mathbb{R}$. Le due funzioni incognite saranno N = N(x, t), P = P(x, t) e il modello si riscriverà come:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}N = D_N \frac{\partial^2}{\partial x^2}N + N(a - bP) - a\frac{N^2}{\kappa}\\ \frac{\partial}{\partial t}P = D_P \frac{\partial^2}{\partial x^2}P - P(c - dN) \end{cases},$$
(1.26)

 $\operatorname{con} D_N, D_P > 0$ e costanti.

Definiamo la matrice di diffusione del modello, per poter presentare il problema in forma compatta:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_N & 0\\ 0 & D_P \end{pmatrix}.$$

Assegnamo poi una distribuzione iniziale al campo, per poter ottenere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t) = \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u}(x,t) + \vec{r}\left(\vec{u}(x,t)\right) & \forall (x,t) \in \Omega_t^+\\ \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$
(1.27)

con il vettore reazione $\vec{r}(\vec{u}(x,t))$ come in (1.24).

Osserviamo che, se consideriamo un intervallo spaziale limitato del tipo $0 \le x \le M$, si devono aggiungere per il campo in gioco delle condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann, generalmente omogenee.

Sappiamo che le configurazioni d'equilibrio del modello con l'aggiunta di diffusione spaziale coincidono con quelle del modello di sola reazione. Procedendo come visto nella sezione 1.2.3, limitandoci sempre al caso $x \in \mathbb{R}$, cerchiamo soluzioni-perturbazioni nella forma (1.17) per il nostro sistema linearizzato. Arriviamo così a studiare l'equazione di dispersione del modello per le varie soluzioni d'equilibrio \vec{u}_c , ossia

$$det \begin{bmatrix} \sigma + D_N k^2 & 0\\ 0 & \sigma + D_P k^2 \end{bmatrix} - \mathcal{L} = 0$$

al variare di \mathcal{L} .

Osserviamo brevemente cosa succede per la soluzione banale $\vec{u}_c^{(0)}$ e la soluzione "predatori-free" $\vec{u}_c^{(1)}$:

- per $\vec{u}_c^{(0)}$, cioè $\mathcal{L}^{(0)}$, l'equazione di dispersione è data dall'equazione algebrica $(\sigma + D_N k^2 - a)(\sigma + D_P k^2 + c) = 0$. La presenza dell'autovalore positivo $\lambda_1 = a$ porta sempre a un risultato di instabilità per la soluzione in considerazione. Questo perché, per ogni scelta di parametri, esisterà un modo normale con $k^2 < \frac{a}{D_N}$, ossia per il quale si ha $\sigma = -D_N k^2 + a > 0$, e di conseguenza le perturbazioni $\delta \vec{u}(x, t)$ come in (1.17) divergeranno;
- per $\vec{u}_c^{(1)}$, cioè $\mathcal{L}^{(1)}$, l'equazione di dispersione è data dall'equazione algebrica $(\sigma + D_N k^2 + a)(\sigma + D_P k^2 + c - d\kappa) = 0$. Per il primo fattore moltiplicativo si ha $\sigma = -D_N k^2 - a < 0$ per ogni $k^2 > 0$. Distinguiamo poi due casi al variare di κ :
 - se $\kappa < \kappa_c$, allora $\sigma = -D_P k^2 c + d\kappa < 0$ per ogni $k^2 > 0$, da cui $\delta \vec{u}(x,t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ e ho che la soluzione $\vec{u}_c^{(1)}$ è asintoticamente stabile;
 - se $\kappa > \kappa_c$, allora $\sigma = -D_P k^2 c + d\kappa > 0$ per $k^2 < \frac{d\kappa c}{D_P}$ e, per ogni scelta di parametri del problema, esisteranno modi normali con k^2 così definito, da cui l'instabilità della soluzione.

Abbiamo quindi visto come, per queste soluzioni, la discussione della loro stabilità non varia con l'aggiunta delle diffusioni spaziali non incrociate.

Focalizziamoci quindi sulla soluzione endemica $\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{d\kappa}\right)\right)$, con $\kappa > \kappa_c$. L'equazione di dispersione che andiamo a studiare in questo caso,

considerando $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)}$ definita in precedenza, è

$$det \begin{pmatrix} \sigma + D_N k^2 + \frac{ac}{d\kappa} & \frac{bc}{d} \\ -\frac{a}{b}(d - \frac{c}{\kappa}) & \sigma + D_P k^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcolando questo determinante si ottiene un'equazione algebrica di 2° grado in σ della forma

$$\sigma^2 + a_1 \sigma + a_2 = 0, \tag{1.28}$$

dove:

•
$$a_1 = D_P k^2 + D_N k^2 + \frac{ac}{d\kappa};$$

•
$$a_2 = D_N D_P k^4 + D_P k^2 \frac{ac}{d\kappa} + \frac{ac}{d} (d - \frac{c}{\kappa});$$

• $a, b, c, d, \kappa, D_N, D_P, k^2 > 0.$

È immediato riconoscere che $a_1 > 0 \ \forall k^2 > 0$ e, sotto l'ipotesi $\kappa > \kappa_c$, anche $(d - \frac{c}{\kappa}) > 0$, cioè $a_2 > 0 \ \forall k^2 > 0$. In base alla Regola dei Segni di Cartesio (1.13), l'equazione di dispersione (1.28) ammette sempre due soluzioni negative o con parte reale negativa, per ogni scelta di k^2 , assicurando l'asintotica stabilità dello stato endemico. Ovviamente, la classificazione topologica dipenderà dal segno del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$, sotto le ipotesi sperimentali di validità del modello.

Possiamo quindi vedere come la presenza di effetti diffusivi classici aiuti la stabilità: in base ai nostri risultati segue che $\forall k^2 > 0$ si ha

$$\delta \vec{u}(x,t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

cioè

$$\vec{u}(x,t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} \vec{u}_c^{(2)}(x,t).$$

Capitolo 2

Modello crimo-tattico a due specie

In letteratura è da tempo riconosciuto il fatto che le interazioni tra criminali e cittadini ordinari possono essere rappresentate come le interazioni tra predatori e prede. È possibile costruire quindi un modello per rappresentare queste situazioni, basandosi sul noto modello di Lotka-Volterra (1.21) e le successive generalizzazioni, come fatto in [3].

Il modello originale per lo studio delle interazioni di una popolazione con la criminalità va fatto risalire a Vanag ed Epstein ([4]), i quali nello specifico hanno considerato come popolazione criminale quella degli *spacciatori e consumatori di sostanze stupefacenti*, che per comodità continueremo a chiamare criminali. Più realisticamente, il loro modello prevedeva la presenza di tre specie interagenti: cittadini, criminali e forze dell'ordine. Il nostro principa-le obiettivo è presentare e commentare con tutti i dettagli possibili questo modello nel prossimo capitolo, mentre ora ci limiteremo al caso di sole due specie interagenti.

Inoltre, per motivazioni che chiariremo meglio in seguito, restringiamo la nostra attenzione allo studio del sistema dinamico, cioè in assenza di diffusione spaziale. Ciò nonostante, è stata mantenuta la dicitura di *modello* *crimo-tattico*, coniata da Vanag ed Epstein nel loro primo lavoro, che nella parola *tattico* (traduzione del termine inglese originale *taxis*) richiama all'idea dei movimenti delle specie, dovuti a stimoli esterni di vario tipo.

2.1 Modelli matematici

Il modello crimo-tattico a due specie interagenti può essere generalizzato in varie misure, inserendo più o meno parametri, con l'obiettivo di descrivere al meglio la situazione reale.

Posta N = N(t) la densità dei *cittadini ordinari* (o non-criminali, da cui la notazione) e C = C(t) la densità dei *criminali* (cioè gli spacciatori/tossicodipendenti), con N(t), $C(t) > 0 \forall t \ge 0$, si parte dal modello basico, cioè del tipo Lotka-Volterra classico:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = \mu N(t) - aN(t)C(t) \\ \frac{d}{dt}C(t) = -\gamma C(t) + aN(t)C(t) \end{cases}, \qquad (2.1)$$

con $\mu, a, \gamma > 0$ e costanti. Nello specifico tali parametri rappresentano:

- μ il tasso di proliferazione di N;
- *a* il tasso di conversione tra le due specie;
- γ il tasso di mortalità naturale di C.

In questo modello partiamo dall'assunto che l'unico modo per un soggetto criminale di diventare tale è tramite l'interazione con degli spacciatori/tossicodipendenti già esistenti; non si può quindi direttamente nascere dentro a questa classe.

A differenza di (1.21), dove per rappresentare le interazioni tra prede e predatori nelle due equazioni erano stati considerati due parametri b, d > 0potenzialmente differenti, in questo caso questi parametri sono presi uguali tra loro, di valore a > 0. Questo perché si considerano come interazioni solo quelle che portano i cittadini ordinari e fare uso di sostanze e quindi a "convertirsi".

Aggiungendo un effetto logistico sui cittadini possiamo poi evitare un'irrealistica crescita di questi ultimi in assenza di criminali, come è stato fatto anche in (1.23) con la popolazione delle prede:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = \mu N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) - aN(t)C(t) \\ \frac{d}{dt}C(t) = -\gamma C(t) + aN(t)C(t) \end{cases}, \qquad (2.2)$$

dove il parametro $\kappa > 0$ e costante, rappresenta la carrying capacity dell'ambiente nei confronti dei bisogni dei cittadini.

Successivamente è possibile inserire anche un effetto che indichi la presenza delle forze dell'ordine nell'ambiente, come illustrato in [5], giungendo quindi al modello che segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = \mu N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) - aN(t)C(t) \\ \frac{d}{dt}C(t) = -\gamma C(t) + aN(t)C(t) - L_C C(t) \end{cases},$$
(2.3)

dove il parametro $L_C > 0$ e costante descrive l'effetto che le forze dell'ordine (in inglese *law enforcement effect*, da cui la notazione) hanno sui criminali C. Si tratta di un effetto che possiamo definire "di rimozione", in quanto non consideriamo un eventuale reinserimento di questi criminali all'interno della popolazione dei cittadini ordinari.

Paragonando questa situazione al caso preda-predatore in un ambiente marittimo in cui è presente l'azione dell'uomo nel ruolo di pescatore, l'effetto di L_C corrisponde a quello che è generalemnte chiamato *effetto "pesca"*, con la differenza che agisce solo sul predatore.

Un'ulteriore generalizzazione potrebbe prevedere poi il reintegro nella società dei criminali rimossi dall'azione delle forze dell'ordine, tenendo conto anche di un problema di tempo di risposta. In [5] è proposto un sistema dinamico più generale per descrivere situazioni di questo genere, a sua volta preso da [6]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = \mu \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) - a \frac{N(t)C(t)}{\sigma + N(t)} \\ \frac{d}{dt}C(t) = -\gamma C(t) + b \frac{N(t)C(t)}{\sigma + N(t)} - L_C C(t) \end{cases},$$
(2.4)

con $\mu, a, b, \gamma, \sigma, \kappa, L_C > 0$ e costanti. In questo caso vengono considerati due diversi tassi di incontro $a \in b$: a rappresenta il tasso a cui i criminali C vittimizzano i cittadini N, mentre b descrive il tasso di conversione dei non-criminali N in criminali C. Inoltre, N(t) viene sostituito dal rapporto $\frac{N(t)}{\sigma+N(t)}$, dove σ è detto parametro di mezza saturazione, in modo che per esempio la funzione $\Phi = a \frac{N(t)}{\sigma+N(t)}$ rappresenti il tasso al quale i criminali hanno vittimizzato/catturato i non-criminali.

Tale sistema dinamico rappresenta il punto di partenza per un successivo sviluppo di modellamenti continui di diffusione e reazione, più idonei a descrivere problemi sociali di questa natura. Per quanto riguarda gli aspetti riguardanti la diffusione spaziale 1D e 3D, sia auto/self che incrociata/cross, verranno analizzati nel prosieguo di questo elaborato.

2.2 Configurazioni d'equilibrio e analisi della stabilità

Per ciascuno dei sistemi dinamici non lineari in \mathbb{R}^2 sopra definiti ((2.1), (2.2), (2.3)))è possibile procedere con la ricerca delle rispettive configurazioni d'equilibrio $\vec{u}_c = \begin{pmatrix} N_c \\ C_c \end{pmatrix}$ e lo studio qualitativo della loro stabilità tramite la tecnica di linearizzazione degli intorni delle soluzioni d'equilibrio.

2.2.1 Modello basico

Dal sistema basico (2.1), uguagliando a zero i termini di destra, si ha subito:

$$\begin{cases} N(t) \left(\mu - aC(t)\right) = 0\\ -C(t) \left(\gamma + aN(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Otteniamo così due configurazioni d'equilibrio:

1. $\vec{u}_{c}^{(0)} = (0, 0)$, equilibrio banale;

2. $\vec{u}_c^{(1)} = (\frac{\gamma}{a}, \frac{\mu}{a})$, equilibrio interno o endemico.

La matrice jacobiana del sistema è data da

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu - aC & -aN \\ aC & -\gamma + aN \end{pmatrix};$$

andandola a calcolare nelle due configurazioni d'equilibrio otteniamo le relative matrici di stabilità, di cui studiamo gli autovalori.

Per lo stato banale abbiamo la matrice di stabilità $\mathcal{L}^{(0)}$ definita come

$$\mathcal{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

di autovalori banalmente osservabili $\lambda_1 = \mu \in \lambda_2 = -\gamma$. Per quanto visto in (1.6) abbiamo quindi che $\vec{u}_c^{(0)}$ è uno stato d'equilibrio instabile, del tipo a sella.

Per lo stato endemico abbiamo la matrice di stabilità $\mathcal{L}^{(1)}$ definita come

$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Troviamo i suoi autovalori dalle radici del suo polinomio caratteristico:

$$p_{\mathcal{L}^{(1)}}(\lambda) = \lambda^2 + \mu\gamma = (\lambda + i\sqrt{\mu\gamma})(\lambda - i\sqrt{\mu\gamma}).$$
Otteniamo così $\lambda_1 = -i\sqrt{\mu\gamma}$ e $\lambda_2 = i\sqrt{\mu\gamma}$; trattandosi di due autovalori complessi coniugati e puramente immaginari, il criterio (1.6) fallisce. Sappiamo però che, nel caso di autovalori complessi puri, la versione linearizzata del modello avrebbe un centro stabile, con orbite di fase ellittiche. Come nel caso di Lotka-Volterra, possiamo concludere che lo stato d'equilibrio endemico mantiene la classificazione topologica di centro stabile, con orbite di fase, limitate e chiuse, omeomorfe a ellissi ([8]).

2.2.2 Modello logistico

Per la ricerca delle configurazioni d'equilibrio del modello (2.2) cerchiamo le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} N(t)\left(\mu - \mu \frac{N(t)}{\kappa} - aC(t)\right) = 0\\ C(t)\left(-\gamma + aN(t)\right) = 0 \end{cases}$$
(2.5)

Annullando un fattore moltiplicativo per volta, otteniamo tre configurazioni d'equilibrio distinte:

1. $\vec{u}_{c}^{(0)} = (0, 0)$, equilibrio banale;

2. $\vec{u}_c^{(1)} = (\kappa, 0)$, equilibrio "criminal-free";

3. $\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{\gamma}{a}, \frac{\mu}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{\kappa a}\right)\right)$, equilibrio interno o endemico.

Osserviamo che l'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$ è soggetta alla richiesta $\frac{\mu}{a} \left(1 - \frac{\gamma}{\kappa a}\right) > 0$, cioè $\kappa > \frac{\gamma}{a}$. La maggiorazione stretta che imponiamo è dovuta al fatto che le densità devono essere sempre non negative e, in aggiunta, il caso con $C_c = 0$ è già descritto da $\vec{u}_c^{(1)}$. Indichiamo tale valore di *soglia critica/biforcazione della carrying capacity* con $\kappa_c := \frac{\gamma}{a}$, al di sotto della quale ho due configurazioni d'equilibrio e al di sopra della quale ne ho tre.

Calcoliamo la matrice jacobiana del modello, che andremo poi a valutare nelle configurazioni d'equilibrio:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu - 2\mu \frac{N}{\kappa} - aC & -aN \\ aC & -\gamma + aN \end{pmatrix}.$$

Per l'equilibrio banale la matrice di stabilità è data da

$$\mathcal{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

come era stato nel caso del modello lineare (2.1). Come ci potevamo aspettare, partendo dall'assenza di entrambe le specie, la crescita della popolazione dei cittadini non risente di alcun effetto dato dal fattore logistico a loro riferito, mentre per quanto riguarda la popolazione dei criminali nulla è cambiato nell'equazione che ne descrive l'evoluzione temporale. Il punto d'equilibrio $\vec{u}_c^{(0)}$ rimane quindi instabile, del tipo sella, per gli stessi ragionamenti fatti per (2.1).

Per lo stato d'equilibrio privo di criminali abbiamo come matrice di stabilità

$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\mu & -a\kappa \\ 0 & -\gamma + a\kappa \end{pmatrix},$$

di autovalori $\lambda_1 = -\mu \in \lambda_2 = a\kappa - \gamma$. Sappiamo che $\lambda_1 < 0$ per definizione, mentre il segno di λ_2 varia in funzione di κ :

- se $\kappa < \frac{\gamma}{a} = \kappa_c$, allora $\lambda_2 < 0$ ed avendo entrambi gli autovalori negativi $\vec{u}_c^{(1)}$ sarà un equilibrio asintoticamente stabile, del tipo nodo di prima specie. In questo caso però è violata la richiesta per l'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$, dato che assumerebbe valori negativi;
- se $\kappa > \kappa_c$, allora $\lambda_2 > 0$ e lo stato $\vec{u}_c^{(1)}$ diventa un equilibrio instabile, del tipo sella, e ci si trova di nuovo nelle condizioni per l'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$.

Infine, per l'equilibrio endemico $\vec{u}_c^{(2)}$ abbiamo come matrice di stabilità

$$\mathcal{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\gamma}{a\kappa} & -\gamma\\ \mu(1-\frac{\gamma}{a\kappa}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolarne gli autovalori ci riconduciamo allo studio delle radici del polinomio caratteristico:

$$p_{\mathcal{L}^{(2)}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu\gamma}{a\kappa}\lambda + \mu\gamma(1 - \frac{\gamma}{a\kappa}) = 0.$$

Come nel caso preda-predatore con effetto logistico, la Regola dei Segni di Cartesio (1.13) garantisce l'asintotica stabilità dello stato d'equilibrio in studio. Entriamo però nei dettagli algebrici.

Dalle radici di $p_{\mathcal{L}^{(2)}}(\lambda)$ otteniamo gli autovalori

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu\gamma}{2a\kappa} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu\gamma}{a\kappa}\right)^2 - 4\mu\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{a\kappa}\right)},$$

che andiamo a studiare al variare del segno del discriminante

$$\Delta = \left(\frac{\mu\gamma}{a\kappa}\right)^2 - 4\mu\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{a\kappa}\right)$$

Analizziamo i seguenti tre casi, ricordando che la discussione va portata avanti sotto la richiesta $\kappa > \kappa_c := \frac{\gamma}{a}$ per assicurare l'esistenza della configurazione d'equilibrio:

• se $\Delta = 0$ avremo due autovalori reali e negativi, quindi per (1.6) l'equilibrio $\vec{u}_c^{(2)}$ è asintoticamente stabile, del tipo nodo di seconda specie. In particolare, possiamo vedere che per $\Delta = 0$ la richiesta di $\kappa > \kappa_c$ è rispettata: infatti, svolgendo esplicitamente i calcoli, otteniamo

$$\kappa_{\pm} = \frac{2\mu\gamma^2 a \pm \sqrt{4\mu^2\gamma^4 a^2 + 4\mu^3\gamma^3 a^2}}{4\mu\gamma a^2}$$
$$= \frac{2\mu\gamma^2 a \pm 2\mu\gamma^2 a \sqrt{1 + \frac{\mu}{\gamma}}}{4\mu\gamma a^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\gamma}{a} \pm \frac{1}{2}\frac{\gamma}{a}\sqrt{1 + \frac{\mu}{\gamma}}.$$
(2.6)

Avendo richiesto $\kappa>0$ ed essendo $\sqrt{1+\frac{\mu}{\gamma}}>1$ (dati $\mu,\gamma>0$ per definizione), l'unica soluzione accettabile è

$$\kappa_{+} = \frac{\gamma}{2a} + \frac{\gamma}{2a}\sqrt{1 + \frac{\mu}{\gamma}} = \frac{\gamma}{2a}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu}{\gamma}}\right),$$

da cui segue

$$\kappa_+ > \frac{\gamma}{2a}(1+1) = \frac{\gamma}{a} = \kappa_c;$$

- se $\Delta < 0$, ovvero per $\kappa > \kappa_+$ avremo due autovalori complessi coniugati con parte reale negativa, rispettando così la condizione necessaria e suffiente di (1.6) per l'asintotica stabilità di $\vec{u}_c^{(2)}$. In particolare la configurazione $\vec{u}_c^{(2)}$ è del tipo fuoco;
- se $\Delta > 0$, ovvero $\kappa_c < \kappa < \kappa_+$, otteniamo due autovalori entrambi reali e negativi. Osserviamo che λ_2 è banalmente negativo, mentre per λ_1 si ha che, essendo $\left(1 - \frac{\gamma}{a\kappa}\right) > 0$ per ipotesi, avremo

$$0 < \left(\frac{\mu\gamma}{a\kappa}\right)^2 - 4\mu\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{a\kappa}\right) < \left(\frac{\mu\gamma}{a\kappa}\right)^2,$$

da cui $\lambda_1 < -\frac{\mu\gamma}{2a\kappa} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu\gamma}{a\kappa}\right)^2} = 0$. Anche in quest'ultimo caso, grazie a (1.6), possiamo osservare che la configurazione d'equilibrio $\vec{u}_c^{(2)}$ è asintoticamente stabile, del tipo nodo di prima specie.

Dall'analisi della stabilità delle configurazioni d'equilibrio non banali possiamo avanzare alcune considerazioni:

- per κ < κ_c, la quantità massima raggiungibile dalla popolazione dei cittadini N non è sufficiente per assicurare l'esistenza nel tempo dei criminali C, portandoci dunque all'equilibrio asintoticamente stabile "criminal-free";
- per $\kappa > \kappa_c$, l'unica configurazione d'equilibrio asintoticamente stabile diventa quella endemica.

2.2.3 Modello delle forze dell'ordine

L'ultima variante del modello per le interazioni tra spacciatori/tossici e cittadini ordinari che analizziamo prevede l'aggiunta di un parametro regolatorio L_C nell'equazione evolutiva dei criminali, mantenendo invariata rispetto al modello logistico l'equazione dei cittadini. Le configurazioni d'equilibrio di questo modello sono da ricercare negli zeri del seguente sistema:

$$\begin{cases} N(t)\left(\mu - \mu \frac{N(t)}{\kappa} - aC(t)\right) = 0\\ C(t)\left(-\gamma + aN(t) - L_C\right) = 0 \end{cases}$$

Come nel caso logistico ritroviamo anche qua tre soluzioni d'equilibrio:

- 1. $\vec{u}_{c}^{(0)} = (0, 0)$, equilibrio banale;
- 2. $\vec{u}_c^{(1)} = (\kappa, 0)$, equilibrio "criminal-free";
- 3. $\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{L_C + \gamma}{a}, \frac{\mu}{a^2 \kappa} \left(a\kappa (L_C + \gamma)\right)\right)$, equilibrio endemico o interno, modificato da L_C .

Anche in questo caso, l'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$ sottostà a una specifica richiesta sui parametri in gioco: affinché si abbia $\vec{u}_c^{(2)} > 0$ deve valere $a\kappa - (L_C + \gamma) > 0$, cioè $L_C < a\kappa - \gamma \in \kappa > \frac{\gamma}{a}$.

Per questo sistema la matrice jacobiana è data da

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu - 2\mu \frac{N}{\kappa} - aC & -aN \\ aC & -\gamma + aN - L_C \end{pmatrix};$$

andiamo a calcolarla nelle varie configurazioni d'equilibrio per ottenere le relative matrici di stabilità.

Per l'equilibrio banale $\vec{u}_c^{(0)}$ troviamo una matrice di stabilità diversa rispetto ai due modelli precedenti:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\gamma - L_c \end{pmatrix},$$

di autovalori $\lambda_1 = \mu \in \lambda_2 = -\gamma - L_c$. Come visto in (1.6), in un suo intorno, $\vec{u}_c^{(0)}$ è una configurazione d'equilibrio instabile, del tipo sella. Notiamo come il coefficiente L_C abbia un ruolo nella stabilità dell'equilibrio banale, senza però riuscire a variare la natura di quest'ultimo.

Per la configurazione d'equilibrio $\vec{u}_c^{(1)} = (\kappa, 0)$, la matrice di stabilità è

$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\mu & -a\kappa \\ 0 & -\gamma + a\kappa - L_c \end{pmatrix},$$

di autovalori $\lambda_1 = -\mu \ e \ \lambda_2 = a\kappa - (\gamma + L_C)$. La stabilità o meno di questo punto d'equilibrio dipende quindi dal segno di λ_2 , dato che sappiamo già essere $\lambda_1 < 0$. Abbiamo che:

- se $\kappa < \frac{\gamma}{a}$, allora $\lambda_2 < 0 \ \forall L_C > 0$ e da (1.6) sappiamo che $\vec{u}_c^{(1)}$ è asintoticamente stabile, del tipo nodo di prima specie;
- se $\kappa > \frac{\gamma}{a}$ e $a\kappa (\gamma + L_C) < 0$, cioè $L_C > a\kappa \gamma$, allora $\lambda_2 < 0$, per cui da (1.6) abbiamo che $\vec{u}_c^{(1)}$ è asintoticamente stabile, del tipo nodo di prima specie. In questo caso è però violata la condizione di esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$;
- se $\kappa > \frac{\gamma}{a}$ e $a\kappa (\gamma + L_C) > 0$, cioè $L_C < a\kappa \gamma$, allora $\lambda_2 > 0$, il che ci dice che $\vec{u}_c^{(1)}$ è instabile, del tipo sella.

Confrontando quanto appena visto con l'analisi del medesimo punto d'equilibrio per il modello logistico (2.2) possiamo vedere come la presenza dell'effetto delle forze dell'ordine benefici la stabilità della configurazione. Per valori di κ al di sotto della soglia critica della carrying capacity dei cittadini vista per il sistema dinamico (2.2), la presenza dell'effetto delle forze dell'ordine non è rilevante alla stabilità, mentre per $\kappa > \frac{\gamma}{a}$ il coefficiente L_C permette di recuperarla in un determinato intervallo di valori dei parametri. In altre parole, il parametro L_C apporta un effetto positivo verso l'estinzione della popolazione criminale e l'esistenza dei cittadini ordinari.

Analizziamo l'ultima configurazione d'equilibrio $\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{\gamma}{a}, \frac{\mu}{a}(1-\frac{\gamma}{\kappa a})\right)$, ricordando di trovarci sotto l'ipotesi $L_C < a\kappa - \gamma$. La matrice di stabilità del modello è la seguente:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{a\kappa}(L_C + \gamma) & -(L_C + \gamma) \\ \frac{\mu}{a\kappa}(a\kappa - (L_C + \gamma)) & 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo a studiarne il polinomio caratteristico, le cui radici rappresentano gli autovalori della matrice:

$$p_{\mathcal{L}^{(2)}}(\lambda) = \lambda^2 - tr(\mathcal{L}^{(2)})\lambda + det(\mathcal{L}^{(2)}) = 0.$$

Se verifico che $tr\left(\mathcal{L}^{(2)}\right) < 0$ e $det\left(\mathcal{L}^{(2)}\right) > 0$, allora (1.13) mi dice che non ci sono radici di $p_{\mathcal{L}^{(2)}}(\lambda)$ con parte reale positiva. Il polinomio caratteristico potrà quindi avere radici reali negative o complesse coniugate con parte reale negativa, andando a variare la tipologia di configurazione d'equilibrio per il modello.

Osservando la matrice $\mathcal{L}^{(2)}$ vediamo subito che $tr\left(\mathcal{L}^{(2)}\right) = -\frac{\mu}{a\kappa}\left(L_C + \gamma\right) < 0$, mentre $det(\mathcal{L}^{(2)}) = \mu(L_C + \gamma)\left(1 - \frac{(L_C + \gamma)}{a\kappa}\right) > 0$ se $L_C < a\kappa - \gamma$, come da ipotesi. Di conseguenza la configurazione d'equilibrio $\vec{u}_c^{(2)}$ è asintoticamente stabile, per (1.6); la classificazione topologica varierà in relazione al discriminante di $p_{\mathcal{L}^{(2)}}$.

Per il modello delle forze dell'ordine, osserviamo meglio il comportamento delle sue soluzioni d'equilibrio al variare del parametro L_C .

Sia $\kappa > \frac{\gamma}{a}$, allora abbiamo visto che quando $L_C < a\kappa - \gamma$ il sistema (2.3) ha tre configurazioni d'equilibrio: $\vec{u}_c^{(0)}$, $\vec{u}_c^{(1)} \in \vec{u}_c^{(2)}$. D'altra parte, per $L_C > a\kappa - \gamma$ lo stesso sistema presenta soltanto due configurazioni d'equilibrio, nello specifico le stesse $\vec{u}_c^{(0)} \in \vec{u}_c^{(1)}$ sopra citate. Per $L_C = a\kappa - \gamma$ invece, i due punti d'equilibrio $\vec{u}_c^{(1)} \in \vec{u}_c^{(2)}$ collassano in un'unica configurazione, facendo si che il modello (2.3) abbia due equilibri endemici coicidenti $\vec{u}_c^{(1)} = \left(\frac{L_C + \gamma}{a}, 0\right)$.

In questo caso, la matrice jacobiana \mathcal{M} valutata in $\vec{u}_c^{(1)}$ avrà autovalori $\lambda_1 = \mu - 2\mu \frac{L_C + \gamma}{a\kappa}$ e $\lambda_2 = 0$, quindi il criterio (1.6) non è applicabile, ovvero la stabilità della soluzione non può essere discussa tramite tecniche di linearizzazione.

Mantenendo quindi tutti i parametri fissati e facendo variare solo l'effetto delle forze dell'ordine L_C , possiamo vedere che le soluzioni $\vec{u}_c^{(1)}$ e $\vec{u}_c^{(2)}$ collidono, in quella che è chiamata una *biforcazione nodo-sella*, quando il parametro attraversa il valore critico $L_C = a\kappa - \gamma$. Il coefficiente di azione delle forze dell'ordine agisce come parametro di biforcazione.

Capitolo 3

Modello crimo-tattico a tre specie

Come anticipato nel capitolo precedente, il modello crimo-tattico a tre specie interagenti deve la sua paternità al biofisico Vladimir K. Vanag e al chimico-matematico Irving R. Epstein, che lo esposero per la prima volta nell'articolo *Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems* ([4]). Il loro elaborato verteva principalmente sullo studio degli effetti di diffusione incrociata in ambito chimico e biofisico, offrendo però anche una proposta di modello per i sistemi sociali e mostrando come gli effetti di cross-diffusion in determinati ambiti delle scienze sociali agiscano nello stesso modo che nei sistemi chimici e biologici. La scelta della denominazione del modello come *crimo-taxis model* (che in italiano è stato tradotto con *modello crimo-tattico*) vuole richiamare la *chemotaxis* (in italiano *chemiotassi* o *chemotassi*), ovvero il movimento di cellule od organismi in risposta a un gradiente chimico, tanto studiato in letteratura scientifica già a partire dallo storico modello pionieristico di Keller e Segel ([9]).

3.1 Modello crimo-tattico originario

Il modello presentato in [6] descrive una situazione di spaccio illegale di droga in uno spazio unidimensionale, che possiamo assumere come una strada; vengono introdotti specifici termini di diffusione incrociata ad un modello epidemiologico a tre specie di tipo diffusione-reazione. Questo stesso modello è poi ripreso anche in [10], dove viene generalizzato ad alcune varianti che vedremo in seguito.

Poniamoci quindi in un intervallo $(0, M) \subset \mathbb{R}$ e presentiamo le tre specie interagenti, unificando le notazioni con quanto usato in precedenza in questa tesi:

- i *cittadini ordinari/non-criminali* N = N(x, t), definibili anche come "suscettibili";
- i criminali C = C(x, t), che in questo caso rappresentano spacciatori/tossicodipendenti e possono essere visti come popolazione "infestante/infetta";
- le forze dell'ordine L = L(x, t), ovvero la polizia.

Il modello crimo-tattico originale descrive l'evoluzione delle tre specie attraverso le seguenti PDEs:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}N = \mu N - aNC + D_{NN}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial t}C = aNC - \gamma CL + D_{CC}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_{CN}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + D_{CL}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} &, \qquad (3.1) \\ \frac{\partial}{\partial t}L = \xi NCL - bL + D_{LL}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - D_{LC}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \end{cases}$$

dove $\mu, a, b, \gamma, \xi, D_{NN}, D_{CC}, D_{LL}, D_{CN}, D_{CL}, D_{LC} > 0$ e costanti. In particolare, i coefficienti sopra citati rappresentano:

- μ il tasso di riproduzione dei cittadini;
- a il tasso di incontri, ovvero di "contagio", in termini epidemiologici;

- γ il tasso di arresti da parte della polizia;
- *b* il tasso di decadimento naturale delle forze dell'ordine;
- ξ il tasso di crescita della polizia, relazionato alla quantità di cittadini e criminali presente;
- D_{ij} i coefficienti di auto-diffusione se i = j e di diffusione incrociata se $i \neq j$.

Per i termini di diffusione incrociata abbiamo che:

- $-D_{CN}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ e $D_{CL}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$ rappresentano rispettivamente lo spostamento dei criminali verso i cittadini ordinari e lontano dalle aree con alta densità di polizia, mostrando quindi l'effetto "attrattivo" dei cittadini e "repellente" della polizia nei confronti di C;
- $-D_{LC}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ indica come la polizia si muova in direzione delle zone più densamente popolate dai criminali.

Anche in questo modello vengono fatte alcune supposizioni iniziali, come ad esempio il fatto che non si nasca direttamente dentro le specie dei criminali e delle forze dell'ordine, ma solo all'interno dei cittadini ordinari, mostrando l'influenza che hanno poi gli incontri sullo sviluppo temporale delle tre specie. Un'altra semplificazione effettuata è quella di tralasciare le morti, ovvero il decadimento naturale, delle specie $N \in C$. Inoltre è ragionevole considerare $D_{CL} > D_{CN}$, supponendo che i criminali diano maggior importanza al non essere arrestati, piuttosto che al poter vendere droga e "convertire" cittadini ordinari.

Riscriviamo ora il modello (3.1) come sistema di sei equazioni alle derivate parziali del 1° ordine evolutive, utilizzando per ciascuna specie interagente in questione la relativa equazione costitutiva di Fick per il flusso:

$$\begin{cases} N_{t} = -(J_{N})_{x} + r_{N} \\ J_{N} = -D_{NN}N_{x} \\ C_{t} = -(J_{C})_{x} + r_{C} \\ J_{C} = -D_{CC}C_{x} + D_{CN}N_{x} - D_{CL}L_{x} \\ J_{L} = -(J_{L})_{x} + r_{L} \\ J_{L} = -D_{LL}L_{x} + D_{LC}C_{x} \end{cases}$$
(3.2)

dove $r_N = \mu N - aNC$, $r_C = aNC - \gamma CL$ e $r_L = \xi NCL - bL$ sono i rispettivi termini di reazione.

Essendo un modello a più specie interagenti, le leggi costitutive di diffusione di Fick sono state generalizzate per tenere conto della presenza delle altre specie.

Nel modello che stiamo studiando, i cittadini ordinari N non risentono di effetti di diffusione incrociata, quindi l'equazione costitutiva di Fick riferita alla loro specie è di tipo classico, come visto nella sezione (1.2.2).

Per i criminali invece, per arrivare alla scrittura come nel sistema (3.2), partiamo con lo scrivere il flusso associato a C come

$$J_C = -\hat{D}_C \big(\mathbb{F}(N, L)C \big)_x, \tag{3.3}$$

con $\hat{D}_C > 0$ e $\mathbb{F}(N, L)$ funzione regolare a valori positivi $\forall N, L > 0$. Svolgendo poi la derivata, otteniamo

$$J_C = -\hat{D}_C \mathbb{F}(N,L)C_x - \hat{D}_C C \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial N} N_x - \hat{D}_C C \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial L} L_x \quad \forall (x,t).$$

Avendo definito

- $D_{CC} := \hat{D}_C \mathbb{F}(N, L);$
- $\chi_0 := -\hat{D}_C \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial N}, \ \chi_0 > 0$ che descrive l'effetto attraente di N su C;
- $\chi_1 := \hat{D}_C \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial L}, \, \chi_1 > 0$ che descrive l'effetto repellente di L su C;

riscriviamo il flusso di C come

$$J_C = -D_{CC}C_x + \chi_0 CN_x - \chi_1 CL_x.$$

In maniera più compatta, possiamo scrivere $J_C = J_C^{(s.d)} + J_C^{(c.d.)}$, dove:

- $J_C^{(s.d)} = -D_{CC}C_x$ è il flusso dato dalla "self-diffusion", ovvero dagli spostamenti della specie stessa;
- $J_C^{(c.d.)} = \chi_0 C N_x \chi_1 C L_x$ è il flusso dato dalla "cross-diffusion", ovvero gli spostamenti delle altre specie interagenti dovuti alla presenza o meno di C.

Infine, ponendo come mobilità diffusive $D_{CN} = \chi_0 C$ e $D_{CL} = \chi_1 C$, si arriva ad ottenere la scrittura presente nel modello (3.2):

$$J_C = -D_{CC}C_x + D_{CN}N_x - D_{CL}L_x.$$

Per quanto riguarda la legge di Fick relativa a L, il procedimento è del tutto analogo a quanto appena visto, con la sola differenza che la mobilità diffusiva incrociata sarà solo una, per l'effetto attrattivo di C su L.

Anche in questa circostanza, come lo era stato nel caso a una specie, è possibile introdurre dei tempi di rilassamento, per una sola specie o per tutte e tre, diversi tra loro o uguali. Si tratta sempre di generalizzazioni e accortezze per provare a descrivere al meglio la situazione reale.

Ad esempio, l'aggiunta di un tempo di ritardo per le forze dell'ordine può modellizzare l'esperienza reale che si verifica nella maggior parte delle situazioni di vita quotidiana: nel momento in cui si assiste ad un crimine e lo si segnala, la polizia necessiterà di un certo intervallo di tempo per raggiungere il luogo d'interesse.

Inoltre, sia la parte di reazione che la parte di diffusione del modello possono poi essere modificate in vario modo, con l'aggiunta o la modifica di alcuni termini, come vedremo in seguito attraverso lo studio di alcune varianti.

3.2 Sistema dinamico: configurazioni d'equilibrio e stabilità

Il modello crimo-tattico, privato della diffusione spaziale, ci restituisce il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N = \mu N - aNC\\ \frac{d}{dt}C = aNC - \gamma CL \\ \frac{d}{dt}L = \xi NCL - bL \end{cases}$$
(3.4)

Dai termini di reazione delle ODEs sopra citate, vediamo che le interazioni tra spacciatori/tossicodipendenti e cittadini ordinari sono del tipo predapredatore, come già era successo nel modello a due specie interagenti (2.1). L'interazione tra spacciatori/tossicodipendenti e polizia segue invece due meccanismi distinti: nell'equazione che descrive l'evoluzione di C è presente un termine di rimozione standard $-\gamma CL$, mentre nell'equazione di L il termine ξNCL descrive la crescita del numero di forze dell'ordine tenendo conto sia dei cittadini ordinari che dei criminali presenti.

In generale, il sistema dinamico in questione richiama anche i modelli epidemiologici per la diffusione delle malattie infettive. Possiamo infatti considerare i criminali come gli infetti e i cittadini come i suscettibili.

Vedremo in seguito come molti dei modelli matematici che descrivono questioni sociali siano stati sviluppati a partire dai modelli dell'epidemiologia.

Per poter studiare il sistema dinamico (3.7) è necessario trovare ed analizzare le sue configurazioni d'equilibrio, che sappiamo saranno poi le stesse per il modello di diffusione e reazione (3.1). Cerchiamo quindi le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} N(\mu - aC) = 0\\ C(aN - \gamma L) = 0\\ L(\xi NC - b) = 0 \end{cases}$$

Da qui otteniamo le seguenti soluzioni d'equilibrio, scritte in forma compatta:

- $\vec{u}_c^{(0)} = (0, 0, 0)$, solutione banale;
- $\vec{u}_c^{(1)} = (0, C^*, 0)$, con $C^* > 0$ non determinabile dalle sole equazioni d'equilibrio;

•
$$\vec{u}_c^{(2)} = \left(\frac{ab}{\xi\mu}, \frac{\mu}{a}, \frac{a^2b}{\xi\mu\gamma}\right)$$
, soluzione di coesistenza.

Per andare a studiare la stabilità di queste soluzioni è necessario prima determinare la matrice jacobiana del sistema:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu - aC & -aN & 0\\ aC & aN - \gamma L & -\gamma C\\ \xi CL & \xi NL & \xi NC - b \end{pmatrix}$$

Andando ora a valutare \mathcal{M} nelle varie configurazioni d'equilibrio, troviamo le rispettive matrici di stabilità, da cui analizziamo l'eventuale stabilità della soluzione.

Per la configurazione $\vec{u}_c^{(0)}$ la matrice di stabilità è data da

$$\mathcal{L}^{(0)} = egin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

di autovalori $\lambda_1 = \mu, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -b$. Per il criterio (1.6), avendo un autovalore reale positivo, $\vec{u}_c^{(0)}$ è una soluzione instabile.

Per $\vec{u}_c^{(1)}$, la matrice di stabilità è data da

$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mu - aC^* & 0 & 0\\ aC^* & 0 & -\gamma C^*\\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

di autovalori $\lambda_1 = \mu - aC^*, \lambda_2 = 0 \in \lambda_3 = -b$. Osserviamo cosa dice il criterio (1.6) al variare del segno di λ_1 :

• se $\mu - aC^* > 0$, allora la soluzione sarà instabile perché vi è un autovalore positivo;

• se $\mu - aC^* < 0$, allora il criterio di Lyapunov non è applicabile, data la presenza di un autovalore reale nullo.

Infine, per $\vec{u}_c^{(2)}$ la matrice di stabilità è data da

$$\mathcal{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a^2b}{\xi\mu} & 0\\ \mu & 0 & -\frac{\mu\gamma}{a}\\ \frac{ab}{\gamma} & \frac{a^3b^2}{\xi\mu^2\gamma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolandone il polinomio caratteristico associato, otteniamo un'equazione cubica del tipo

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \tag{3.5}$$

di coefficienti reali $p=\frac{a^2b}{\xi\mu}\left(b+\mu\right)$ e $q=-\frac{a^2b^2}{\xi}$.

Per trovare le soluzioni di (3.5) ci rifacciamo al procedimento di Cardano per la risoluzione delle equazioni cubiche, cercando soluzioni λ nella forma $\lambda = u + v$. Sostituendo soluzioni così fatte in (3.5), otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Risolvendolo per $u \in v$, si ottiene la celebre formula risolutiva delle equazioni di terzo grado:

$$\lambda = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

dove le due radici cubiche rappresentano gli addendi $u \in v$ sopra citati.

In particolare, se l'equazione di partenza è a coefficienti reali come nel nostro caso, allora è cruciale analizzare il segno del discriminante $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Per (3.5) il discriminante sarà

$$\Delta = \frac{a^4 b^4}{4\xi^2} + \frac{a^6 b^3}{27\xi^3 \mu^3} (b+\mu)^3 > 0,$$

trattandosi di tutti coefficienti strettamente positivi.

Allora il radicando delle radici cubiche è reale e, fra i possibili radicali cubici,

vado a scegliere l'unico reale per u. Così facendo, dalla relazione $uv = -\frac{p}{3}$ avrò che anche a v va assegnato un valore reale, ovvero il suo unico radicale cubico reale.

Nel caso $\Delta \ge 0$, la formula risolutiva fornisce una soluzione reale dell'equazione qualora tutti i radicali siano interpretati nel senso reale stretto. Per ottenere le radici rimanenti, dobbiamo moltiplicare il radicale reale per le due radici cubiche non reali dell'unità: $\cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per la cubica in questione avremo come radicali reali

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{2\xi} + \sqrt{\Delta}}$$
 e $v_1 = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{2\xi} - \sqrt{\Delta}}$

da cui le soluzioni di (3.5) saranno:

- $\lambda_1 = u_1 + v_1$, reale positiva;
- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 v_1) \in \lambda_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(v_1 u_1),$ complete conjugate.

Data la radice reale positiva λ_1 , per il 1° criterio di Lyapunov (1.6) la configurazione endemica $\vec{u}_c^{(2)}$ risulterà instabile.

Dall'analisi appena svolta delle configurazioni d'equilibrio, possiamo osservare che il modello omogeneo proposto da Vanag ed Epstein non presenta soluzioni asintoticamente stabili. Proprio per questo motivo, nella letteratura scientifica di riferimento sono state esplorate varianti in grado di avere soluzioni d'equilibrio stabili, le quali possono poi perdere questa loro proprietà come conseguenza della presenza di termini di diffusione spaziale. Ciò è esattamente quello che andremo a vedere nella sezione successiva.

3.3 Variante del modello crimo-tattico

Come nelle sezioni precedenti, continuiamo a studiare il modello crimotattico in un dominio spaziale unidimensionale $(0, M) \subset \mathbb{R}$, posta M come lunghezza della strada fittizia in cui immaginiamo si evolvano le nostre specie.

La prima variante presentata in [10], con l'intenzione di avvicinarsi a un modello più rappresentativo della realtà, è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}N = \mu N \left(1 - \frac{N}{\kappa}\right) - aNC + D_{NN} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial t}C = aNC - \gamma CL - D_{CN} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + D_{CC} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{CL} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial t}L = \xi NCL - bL - D_{LN} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - D_{LC} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{LL} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \end{cases}$$
(3.6)

con i coefficienti tutti costanti e positivi.

Le modifiche fatte al modello originario sono:

- l'inserimento di una carrying capacity κ per la popolazione dei cittadini ordinari, così da avere una crescita logistica più attinente alla realtà;
- un ulteriore termine di diffusione incrociata nell'equazione di L, $-D_{LN} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$, per descrivere lo spostamento delle forze dell'ordine verso aree con un'alta concentrazione di cittadini, come può succedere in situazioni quali concerti, cortei, eventi sportivi, etc...

Riscriviamo il problema in forma compatta come

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t) = \vec{r}(\vec{u}(x,t)) + \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u}(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,M) \times \{t > 0\},$$

avendo posto:

/ \

•
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} N \\ C \\ L \end{pmatrix}$$
 funzione incognita;
• $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{NN} & 0 & 0 \\ -D_{CN} & D_{CC} & D_{CL} \\ -D_{LN} & -D_{LC} & D_{LL} \end{pmatrix}$ matrice di diffusione;

•
$$\vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \mu N \left(1 - \frac{N}{\kappa}\right) - aNC \\ aNC - \gamma CL \\ \xi NCL - bL \end{pmatrix}$$
 vettore di reazione.

Ricordiamo che è possibile generalizzare ancora il modello (3.6), inserendo ad esempio ulteriori carrying capacity sulle altre specie in gioco, oppure tenendo conto di eventuali altri termini di diffusione incrociata. L'obiettivo di queste generalizzazioni successive è sempre quello di creare dei modelli che possano rispecchiare al meglio le situazioni di vita reale che ci si trova a dover studiare, con le loro eventuali peculiarità.

Inoltre, trattandosi di un sistema di diffusione e reazione, si può formulare un problema ai valori iniziali, assegnando il campo per t = 0 e per ogni $x \in (0, M)$, oltre che condizioni di contorno di tipo Dirichlet omogeneo, supponendo nullo il campo in x = 0 e x = M per ogni t > 0. Vedremo questa situazione in seguito, nell'analisi della variante del modello crimo-tattico.

3.3.1 Sistema dinamico, configurazioni d'equilibrio e stabilità

Focalizziamoci ora sul modello (3.6). Tralasciando gli effetti di diffusione spaziale, studiamo il sistema dinamico associato al modello (3.6) nella notazione appena presentata, per poter osservare gli effetti che l'introduzione della carrying capacity κ ha sulle configurazioni d'equilibrio.

Cerchiamo quindi le soluzioni del seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N = \mu N \left(1 - \frac{N}{\kappa}\right) - aNC \\ \frac{d}{dt}C = aNC - \gamma CL \\ \frac{d}{dt}L = \xi NCL - bL \end{cases}$$
(3.7)

Andando ad annullare i termini di reazione, si possono riconoscere con semplicità tre soluzioni d'equilibrio:

• $\vec{u}_c^{(0)} = (0, 0, 0)$, solutione banale;

- $\vec{u}_c^{(1)} = (\kappa, 0, 0)$, con la presenza dei soli cittadini ordinari, al raggiungimento della soglia critica della carrying capacity;
- $\vec{u}_c^{(2)} = (0, C^*, 0)$, dove il valore di $C^* > 0$ non può essere determinato dalle sole condizioni d'equilibrio.

Cerchiamo poi ulteriori soluzioni del sistema a partire da quanto segue:

$$\begin{cases} N(\mu - \frac{\mu N}{\kappa} - aC) = 0\\ C(aN - \gamma L) = 0\\ L(\xi NC - b) = 0 \end{cases}$$

Tralasciando la soluzione banale, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} C = \frac{\mu}{a} \left(1 - \frac{N}{\kappa} \right) \\ L = \frac{aN}{\gamma} \\ \frac{\xi\mu}{a\kappa} N^2 - \frac{\xi\mu}{a} N + b = 0 \end{cases}$$

da cui si avrà

$$\begin{cases} N = \frac{\kappa}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{ab}{\xi\mu\kappa}} \right) \\ C = \frac{\mu}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{ab}{\xi\mu\kappa}} \right) \right) \\ L = \frac{a\kappa}{2\gamma} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{ab}{\xi\mu\kappa}} \right) \end{cases}$$

Posto dunque $N_{\pm} = \frac{\kappa}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{ab}{\xi\mu\kappa}} \right)$, il sistema dinamico (3.7) avrà due ulteriori configurazioni d'equilibrio:

$$\vec{u}_c^{\pm} = \left(N_{\pm}, \frac{\mu}{a}\left(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa}\right), \frac{a}{\gamma}N_{\pm}\right).$$

Per assicurare l'esistenza di tali configurazioni, ci poniamo sotto l'ipotesi di esistenza reale della radice

$$\kappa > \frac{4ab}{\mu\xi}.\tag{3.8}$$

Posto $\kappa_c = \frac{4ab}{\mu\xi}$, esso rappresenterà il valore di soglia critica per la carrying capacity κ .

Per poter valutare l'eventuale stabilità di queste soluzioni, calcoliamo prima la relativa matrice jacobiana:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu \left(1 - 2\frac{N}{\kappa} \right) - aC & -aN & 0 \\ aC & aN - \gamma L & -\gamma C \\ \xi CL & \xi NL & \xi NC - b \end{pmatrix}.$$

A questo punto andiamo a valutare \mathcal{M} nelle varie soluzioni d'equilibrio, per ottenere le rispettive matrici di stabilità:

•
$$\mathcal{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$
 ha autovalori $\lambda_1 = \mu, \ \lambda_2 = 0 \ e \ \lambda_3 = -b$, quindi

avendo l'autovalore λ_1 reale positivo, per (1.6) si ha che $\vec{u}_c^{(0)}$ è instabile;

•
$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\mu & -a\kappa & 0\\ 0 & a\kappa & 0\\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$
 ha autovalori $\lambda_1 = -\mu, \ \lambda_2 = a\kappa \in \lambda_3 =$

-b, quindi anche $\vec{u}_c^{(1)}$ è instabile per la presenza dell'autovalore reale positivo λ_2 ;

•
$$\mathcal{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mu - aC^* & 0 & 0 \\ aC^* & 0 & -\gamma C^* \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$
 ha autovalori $\lambda_1 = \mu - aC^*, \ \lambda_2 = 0$ e

 $\lambda_3 = -b$, quindi la sua stabilità dipenderà dal segno di λ_1 .

Se $\mu - aC^* > 0$ allora $\vec{u}_c^{(2)}$ è instabile, mentre se $\mu - aC^* < 0$, data la presenza di un autovalore nullo, il criterio (1.6) è inefficace. In questo caso potremmo avere una neutra stabilità, ma non asintotica stabilità.

Valutiamo ora cosa succede per \vec{u}_c^{\pm} : le matrici di stabilità per le due configurazioni d'equilibrio che stiamo considerando sono date da

$$\mathcal{L}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} -\mu \frac{N_{\pm}}{\kappa} & -aN_{\pm} & 0\\ \mu(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa}) & 0 & -\frac{\mu\gamma}{a}(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa})\\ \frac{\xi\mu}{\gamma}N_{\pm}(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa}) & \frac{\xi a}{\gamma}N_{\pm}^2 & \frac{\xi\mu}{a}N_{\pm}(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa}) - b \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, andando a sostituire i valori espliciti di N_+ ed N_- , in entrambi i casi otteniamo che

$$N_{\pm}\left(1-\frac{N_{\pm}}{\kappa}\right) = \frac{ab}{\xi\mu}.\tag{3.9}$$

Sostituendo la relazione (3.9) nelle matrici $\mathcal{L}^{(\pm)}$, una volta svolti i conti queste si riscrivono come

$$\mathcal{L}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} -\mu \frac{N_{\pm}}{\kappa} & -aN_{\pm} & 0\\ \mu(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa}) & 0 & -\frac{\mu\gamma}{a}(1 - \frac{N_{\pm}}{\kappa})\\ \frac{ab}{\gamma} & \frac{\xi a}{\gamma}N_{\pm}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo per entrambi i casi (\pm) il polinomio caratteristico e utilizziamo in seguito il criterio di Routh-Hurwitz per valutare la stabilità delle due configurazioni d'equilibrio.

Avremo quindi

$$p_{\mathcal{L}^{(\pm)}} = -\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3,$$

con i coefficienti definiti come:

• $a_1 = \mu \frac{N_{\pm}}{\kappa};$

•
$$a_2 = abN_{\pm} + \frac{a^2b}{\xi};$$

•
$$a_3 = ab\mu \frac{N_{\pm}^2}{\kappa} - \frac{a^2b^2\gamma}{\xi^2}$$

Per andare ad applicare il criterio sopra citato, pongo $p_{\mathcal{L}^{(\pm)}} = 0$ e cambio i segni. A questo punto, il criterio di Routh-Hurwitz applicato all'equazione di terzo grado

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

per i coefficienti a_1, a_2, a_3 sopra citati, mi dice che le condizioni necessarie e sufficienti affinché la configurazione d'equilibrio in esame sia asintoticamente stabile sono:

- $a_i > 0 \ \forall i = 1, 2, 3;$
- $a_1a_2 a_3 > 0.$

Con conti algebrici un po' elaborati che non riportiamo per brevità, si riesce a dimostrare, come affermato dagli autori dell'articolo [10], che:

- \vec{u}_c^+ è una configurazione as
intoticamente stabile;
- \vec{u}_c^- è una configurazione instabile, perché almeno una delle condizioni sopra citate viene violata.

Così facendo abbiamo raggiunto l'obiettivo di generalizzare il modello originale (3.1) in modo tale da ottenere uno stato d'equilibrio asintoticamente stabile, sotto l'ipotesi di esistenza (3.8) dipendente da κ .

Andremo a studiare in seguito cosa succederà a tale configurazione in presenza di diffusione spaziale, self e cross.

3.3.2 Analisi degli effetti diffusivi e instabilità di Turing

Torniamo a studiare il modello di diffusione e reazione (3.6), riportandolo in forma compatta e con le rispettive condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t) = \vec{r}(\vec{u}(x,t)) + \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u}(x,t) & \forall (x,t) \in (0,M) \times \{t > 0\} \\ \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x) & \forall x \in (0,M) \end{cases}$$
(3.10)

con $\vec{u}(x,t)$, $\vec{r}(\vec{u}(x,t)) \in \mathcal{D}$ definiti come in precedenza, posto $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ C_0 \\ L_0 \end{pmatrix}$.

Dato che stiamo lavorando su un dominio spaziale limitato $(0, M) \subset \mathbb{R}$, aggiungiamo delle condizioni al bordo. Nel nostro caso consideriamo le seguenti condizioni al bordo di Dirichlet omogenee:

$$\begin{cases} N(0,t) = N(M,t) = 0\\ C(0,t) = C(M,t) = 0 \quad \forall t > 0. \\ L(0,t) = L(M,t) = 0 \end{cases}$$
(3.11)

Procediamo ora come nella sezione 1.2.3: affinché le condizioni (3.11) vengano rispettate, ricerchiamo soluzioni-perturbazioni in una sottoclasse delle perturbazioni del tipo modi normali di Fourier, ovvero della forma

$$\vec{0} \neq \delta \vec{u}(x,t) = \vec{u}_1 e^{\sigma t} \sin(kx), \qquad (3.12)$$

 $\cos \sigma = -i\omega$, come già definito in precedenza.

In particolare, ricerchiamo i valori di k affinché valgano le condizioni al contorno omogenee:

$$\begin{cases} \delta \vec{u}(0,t) = 0\\ \delta \vec{u}(M,t) = 0 \end{cases} \quad \forall t > 0. \tag{3.13}$$

Per x = 0 la condizione è banalmente verificata, mentre per x = M avremo:

$$\sin(kM) = 0 \iff kM = n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \iff k = \frac{n\pi}{M}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Posto $k_n^2 = k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{M^2}$ osserviamo che, al variare di $n \in \mathbb{Z}, k_n^2$ ha un minimo:

$$\min(k_n^2) = \frac{\pi^2}{M^2}, \quad n^2 = 1.$$

Chiamo quindi $k_c^2 = \frac{\pi^2}{M^2} > 0$ la soglia critica di k^2 , cioè $k^2 \ge k_c^2$, e notiamo che dipende dalla lunghezza M del nostro intervallo.

La sottoclasse delle onde dispersive che rispetta (3.13) è quindi del tipo:

$$\vec{0} \neq \delta \vec{u}(x,t) = \vec{u}_1 e^{\sigma t} \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right).$$
(3.14)

Sempre seguendo quanto fatto alla sezione 1.2.3, arriviamo ad avere il seguente sistema di Cramer omogeneo in \mathbb{R}^3 :

$$\left(\sigma\mathbb{I}_3 + \mathcal{D}\frac{n^2\pi^2}{M^2} - \mathcal{L}\right)\vec{u}_1 = \vec{0}.$$

Abbiamo potuto semplificare il fattore $e^{\sigma t} \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right)$ poiché diverso da 0, per ogni t > 0 e $x \in (0, M)$.

Per il Teorema di Cramer, la condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ ci restituisce l'equazione di dispersione del modello come segue:

$$det\left(\sigma\mathbb{I}_3 + \mathcal{D}\frac{n^2\pi^2}{M^2} - \mathcal{L}\right) = 0, \qquad (3.15)$$

con \mathcal{L} matrice di stabilità riferita alla soluzione d'equilibrio che andremo a studiare.

Tra le configurazioni d'equilibrio trovate nella sezione precedente, focalizziamoci ora sull'unica soluzione asintoticamente stabile trovata:

$$\vec{u}_c^+ = \left(N_+, \frac{\mu}{a}\left(1 - \frac{N_+}{\kappa}\right), \frac{a}{\gamma}N_+\right),\,$$

con $N_{+} = \frac{\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{ab}{\xi\mu\kappa}} \right)$ e la relativa matrice di stabilità $\mathcal{L}^{(+)}$. In questo caso, l'equazione di dispersione del modello è data dal seguente calcolo:

$$det \begin{pmatrix} \sigma + k^2 D_{NN} + \mu \frac{N_+}{\kappa} & aN_+ & 0\\ -k^2 D_{CN} - \mu \left(1 - \frac{N_+}{\kappa}\right) & \sigma + k^2 D_{CC} & k^2 D_{CL} + \frac{\mu\gamma}{a} \left(1 - \frac{N_+}{\kappa}\right) \\ -k^2 D_{LN} - \frac{ab}{\gamma} & -k^2 D_{LC} - \frac{\xi a}{\gamma} N_+^2 & \sigma + k^2 D_{LL} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\cos k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\gamma}$$

 $\operatorname{con} \, k^2 = \frac{n \, \pi}{M^2}.$

Da qui ottengo un'equazione della forma

$$\sigma^3 + a_2(k)\sigma^2 + a_1(k)\sigma + a_0(k) = 0.$$
(3.16)

Sempre andando a sostituire il risultato dell'uguaglianza (3.9), abbiamo che i coefficienti in gioco nell'equazione (3.16) sono:

•
$$a_2(k) = k^2 (D_{NN} + D_{CC} + D_{LL}) + \mu \frac{N_+}{\kappa};$$

• $a_1(k) = \left(D_{NN} (D_{LL} + D_{CC}) + D_{CC} D_{LL} + D_{CL} D_{LC} \right) k^4 + \left(D_{CL} \frac{\xi a}{\gamma} N_+^2 + D_{LC} \frac{\mu \gamma}{a} \left(1 - \frac{N_+}{\kappa} \right) + (D_{CC} + D_{LL}) \mu \frac{N_+}{\kappa} + D_{CN} a N_+ \right) k^2 + a b N_+ + \frac{a^2 b}{\xi};$

• $a_0(k) = a_{01}k^6 + a_{02}k^4 + a_{03}k^2 + a_{04}$.

A loro volta, i coefficienti del polinomio che determina $a_0(k)$ sono:

• $a_{01} = D_{NN} (D_{CC} D_{LL} + D_{CL} D_{LC});$

•
$$a_{02} = D_{NN} \left(D_{CL} \frac{\xi a}{\gamma} N_{+}^{2} + D_{LC} \frac{\mu \gamma}{a} (1 - \frac{N_{+}}{\kappa}) \right) + \left(D_{CC} D_{LL} + D_{CL} D_{LC} \right) \mu \frac{N_{+}}{\kappa} + \left(D_{CN} D_{LL} - D_{CL} D_{LN} \right) a N_{+};$$

•
$$a_{03} = D_{NN}abN_{+} + D_{LL}\frac{a^{2}b}{\xi} + D_{CL}\frac{a}{\gamma}N_{+}\left(\mu\xi\frac{N_{+}^{2}}{\kappa} - ab\right) + D_{LC}\frac{\mu\gamma b}{\xi\kappa} - D_{LN}\frac{ab\gamma}{\xi};$$

• $a_{04} = ab\left(\mu \frac{N_+^2}{\kappa} - \frac{ab}{\xi}\right).$

Anche in questo caso applichiamo il criterio di Routh-Hurwitz nel caso specifico delle equazioni cubiche, per determinare l'asintotica stabilità della soluzione \vec{u}_c^+ .

In primo luogo si osserva che i coefficienti $a_2(k)$ e $a_1(k)$ sono sempre positivi, per cui l'instabilità della soluzione potrebbe dipendere dall'eventuale negatività di $a_0(k)$ per determinati valori di k.

Questo fenomeno è noto come l'*instabilità di Turing*: una configurazione d'equilibrio \vec{u}_c si dice *instabile secondo Turing* se risulta asintoticamente stabile per il sistema dinamico in assenza di diffusione spaziale, ma diventa instabile per la presenza dei termini diffusivi del tipo incrociato.

Cerchiamo ora un intervallo di k in cui $a_0(k)$ risulti negativo; tenendo conto anche della soglia critica delle k data da $k^2 \ge k_c^2 = \frac{\pi^2}{M^2}$, si definirà l'intervallo per cui si ha l'instabilità.

Per studiare il segno di $a_0(k) = a_{01}k^6 + a_{02}k^4 + a_{03}k^2 + a_{04}$ attuiamo prima di tutto un cambio di variabile, sostituendo $t = k^2$, così da riscrivere a_0 come un polinomio di grado 3:

$$a_0(t) = a_{01}t^3 + a_{02}t^2 + a_{03}t + a_{04}.$$

Nonostante ci si trovi sotto l'ipotesi $t \geq \frac{\pi^2}{M^2}$, osserviamo in generale che, essendo $a_{01} > 0$, per $t \to -\infty$ si ha $\lim_{t\to -\infty} a_0(t) = -\infty$. Essendo poi anche $a_{04} > 0$, si ha che $a_0(0) > 0$, per cui vediamo che il polinomio $a_0(t)$ ha sicuramente una radice negativa.

affinché si abbia instabilità, dobbiamo verificare che $a_0(t)$ abbia due radici positive distinte, così da ottenere un intervallo in cui $a_0(t) < 0$ per t > 0. Le radici del polinomio $a_0(t)$ sono reali e distinte se è soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{27} \left(\frac{a_{03}}{a_{01}} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_{02}}{a_{01}} \right)^2 \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_{04}}{a_{01}} + \frac{2}{27} \left(\frac{a_{02}}{a_{01}} \right)^3 - \frac{1}{3} \frac{a_{02} a_{03}}{a_{01}^2} \right)^2 < 0.$$
(3.17)

A questo punto, per la Regola di Cartesio (1.13) ci sono due possibilità:

- 1. $a_{02}a_{03} < 0;$
- 2. $a_{02} < 0 e a_{03} < 0$.

Vale la pena osservare che, se fosse $D_{LN} = 0$, allora entrambi i coefficienti a_{02} e a_{03} sarebbero positivi; in questo caso non esisterebbe instabilità di Turing. Prendiamo quindi D_{LN} come parametro di controllo: dobbiamo assicurarci che tale coefficiente rispetti le condizioni necessarie affinché si verifichi l'instabilità di Turing.

Posti $D_{LN}^*, D_{LN}^{**} > 0$ i valori di D_{LN} che annullano rispettivamente a_{02} e a_{03} , i quali sono lineari rispetto a D_{LN} , poniamo poi

$$\delta_1 = \min\{D_{LN}^*, D_{LN}^{**}\}, \quad \delta_2 = \max\{D_{LN}^*, D_{LN}^{**}\},$$

Allora le due possibilità identificate grazie al criterio (1.13) si traducono come:

- 1. $D_{LN} \in [\delta_1, \delta_2[;$
- 2. $D_{LN} > \delta_2$.

Per ottenere l'intervallo di valori di D_{LN} per cui si può verificare l'instabilità di Turing, intersechiamo quanto appena visto con le restrizioni che seguono da (3.17) e scegliamo per il nostro modello un valore di D_{LN} all'interno di questo intervallo. Le radici reali e positive di $a_0(t) = a_0(k^2)$ determineranno l'intervallo di valori di k^2 per cui si verifica l'instabilità, una volta intersecato con la condizione di soglia critica $k^2 \ge k_c^2 = \frac{\pi^2}{M^2}$.

L'attendibilità di questo nuovo modellamento matematico viene poi discussa anche numericamente, per valori realistici dei parametri in gioco. Con simulazioni numeriche, in [10] gli autori commentano la formazione dei cosiddetti "patterns" di Turing indotti dall'instabilità che abbiamo analizzato analiticamente, verso un maggior controllo sociale per la sicurezza dei cittadini ordinari.

Capitolo 4

Confronto dei modelli sociali per l'alcol, il fumo e la droga

Prendendo spunto dai modelli epidemiologici per la diffusione di malattie infettive, del tipo SIR, SIRI o anche solo del tipo SI, riconducibili al lavoro pionieristico di Kermack e McKendrick ([11]), recentemente molti autori hanno proposto nuovi modelli matematici compartimentali per fenomeni di diversa e varia natura, nell'ambito della vita reale e delle scienze sociali. Il modello visto fin'ora per descrivere le situazioni critiche di criminalità/spaccio, ne è un esempio significativo, ma in letteratura se ne possono trovare numerosi altri.

I due modelli proponiamo e studiamo dal punto di vista qualitativo in questo ultimo capitolo, riguardano due ambiti apparentemente diversi della nostra vita quotidiana come il consumo nocivo e pericoloso di alcol e del fumo, con conseguenze molto dannose per il benessere e la salute.

Si tratta di due problemi molto gravi che negli ultimi dieci anni hanno coinvolto purtroppo anche molti giovani in età scolastica. I modelli proposti devono essere non solo predittivi, ma anche abili al controllo sociale per cercare di mettere in atto delle "strategie matematiche" per prevenire o arginare le situazioni critiche indotte dall'assuefazione/dipendenza a lungo termine di alcol, tabacco o sigarette elettroniche.

64

La riduzione del consumo di alcol e di fumo, tabacco o sigarette elettroniche, rappresenta a tutt'oggi una questione prioritaria, nell'attuazione delle strategie globali messe in atto dal direttore generale dell'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS) per assicurare il benessere e la salute, anche psicologica della comunità internazionale di cittadini, giovanissimi o meno giovani.

Dal punto di vista matematico, ci limiteremo alla presentazione di modelli governati da Sistemi Dinamici, in assenza quindi degli aspetti di diffusione spaziale. Bisogna anche evidenziare che questi modellamenti sono ambiti di ricerca molto attiva e attualmente non ci sono articoli di riferimento basati su modelli parabolici, semilineari o quasilineari, del tipo diffusione e reazione. In base a quanto però fatto nella sezione 3.3.2, possiamo osservare che implementando la discussione alla presenza della diffusione spaziale, magari solo 1D, saranno gli effetti della diffusione di tipo incrociata a "guidare" l'instabilità di Turing verso la formazione dei "patterns" di Turing, usando un approccio numerico del modello in studio.

4.1 Modello per la diffusione dell'alcol

Nel 2008, il governo scozzese avviò una serie di consultazioni su proposte volte a ridurre i problemi legati all'abuso di alcol, nella comunità di giovani e meno giovani. Contemporaneamente, l'Università di Sheffield stava conducendo uno studio sulla politica dei prezzi degli alcolici e sulle politiche di promozione per stili di vita più sani, finanziato dal Ministero della Salute britannico (*UK Department of Health (DH) Policy Research Programme*). Questo studio, affidato al Sheffield Alcohol Research Group (SARG), un gruppo di matematici e ricercatori dell'università, fu pubblicato nel 2009 [12]. Il suo obiettivo principale era valutare l'efficacia di diverse politiche per ridurre il consumo di alcol e le relative conseguenze dannose, come i problemi di salute, la violenza e gli incidenti stradali. Negli anni successivi, numerosi altri studi hanno voluto approfondire questi temi per via dell'importanza pratica e del crescente interesse per la questione all'interno della società britannica.

Recentemente, sono stati sviluppati vari modelli matematici basati sulle equazioni alle derivate parziali (PDE), utilizzati per descrivere come i comportamenti legati al consumo di alcol si diffondano all'interno delle reti sociali, tenendo conto di fattori come la pressione sociale e la suscettibilità individuale a comportamenti a rischio.

Per la nostra analisi, prendiamo come riferimento il modello proposto da Caroline Walters, Brian Straughan e Jeremy Kendal in [13]. Consideriamo la popolazione totale N, che si mantiene costante nel tempo, divisa in tre sottoclassi:

- i cittadini suscettibili C = C(t), ovvero coloro che non consumano alcol, o lo consumano in maniera "non problematica", ma che possono sviluppare il problema interagendo con gli alcolisti;
- gli individui con un problema di alcolismo A = A(t);
- gli individui che si stanno curando R = R(t), i quali possono avere una ricaduta e ritornare in A, oppure possono guarire completamente e tornare in S.

Sono poi numerose le varianti che si possono assumere per questo modello:

- dividere A(t) in due sottoclassi, ovvero chi ammette di avere un problema e chi no [14];
- non considerare la possibilità di un recupero completo [14, 15];
- non considerare una classe di individui in fase di recupero, ma solo tre classi di popolazione differenziate dalla quantità di alcol assunto [16].

Le diverse accezioni che si possono dare al modello dipendono anche dallo studio che si vuole effettuare all'interno della società: l'obiettivo degli autori dell'articolo [13] è quello di scoprire il metodo più efficace per ridurre la fascia di popolazione con forti problemi legati all'alcol.

Le specie interagenti sono sempre funzioni del tempo, di classe almeno C^1 e a valori positivi e supponiamo di assegnare i loro valori iniziali.

Il nostro modello si presenta dunque come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C = \mu N - \beta \frac{AC}{N} + \gamma R - \mu C\\ \frac{d}{dt}A = \beta \frac{AC}{N} + \rho R - (\varphi + \mu)A \\ \frac{d}{dt}R = \varphi A - (\rho + \mu + \gamma)R \end{cases}$$
(4.1)

con N(t) = C(t) + A(t) + R(t) = N(0) > 0 per ogni $t \ge 0$, i parametri $\mu, \beta, \rho, \varphi, \gamma > 0$ e costanti che rappresentano rispettivamente:

- μ il tasso di entrata e uscita dalla popolazione in studio, preso uguale per le varie specie;
- β il tasso di "contagio"/trasmissione di A su C;
- ρ il tasso di ricaduta, da R ad A;
- φ il tasso di ingresso nel percorso di recupero, ovvero il passaggio da A ad R;
- γ il tasso di recupero totale, cioè il rientro degli individui di R tra i cittadini suscettibili C.

Mantenendosi costante la popolazione totale N, possiamo andare a effettuare il seguente cambio di variabili:

$$c(t) = \frac{C(t)}{N}, \ a(t) = \frac{A(t)}{N}, \ r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Il sistema (4.1) si riscriverà quindi come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}c = \mu - \beta ac + \gamma r - \mu c\\ \frac{d}{dt}a = \beta ac + \rho r - (\varphi + \mu)a & ;\\ \frac{d}{dt}r = \varphi a - (\rho + \mu + \gamma)r \end{cases}$$
(4.2)

dove c(t) + a(t) + r(t) = 1. Posto c(t) = 1 - a(t) - r(t), possiamo limitarci a considerare le ultime due equazioni del sistema (4.2)con la sostituzione per c(t). Andiamo quindi a cercare le configurazioni d'equilibrio del seguente nuovo sistema dinamico in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a = -\beta a^2 - \beta ar + (\beta - \varphi - \mu)a + \rho r\\ \frac{d}{dt}r = \varphi a - (\rho + \mu + \gamma)r \end{cases}$$
(4.3)

Risolvendo il sistema algebrico, ottenuto annullando i due membri di (4.3), con semplici passaggi si ottengono due configurazioni d'equilibrio che sono (a, r) = (0, 0) e $(a, r) = (\bar{a}, \bar{r})$, con:

$$\begin{cases} \bar{a} = \frac{\beta(\rho+\mu+\gamma)-\mu(\rho+\mu+\gamma+\varphi)-\gamma\varphi}{\beta(\rho+\mu+\gamma+\varphi)} \\ \bar{r} = \frac{\varphi}{(\rho+\mu+\gamma)} \cdot \bar{a} \end{cases}$$
(4.4)

Osserviamo che la configurazione endemica (\bar{a}, \bar{r}) esiste soltanto sotto l'ipotesi $\bar{a} > 0$, cioè $\frac{\beta(\rho+\mu+\gamma)}{\mu(\rho+\mu+\gamma+\varphi)+\gamma\varphi} > 1$, e quindi anche in questo modello si presenta un problema di soglia critica.

In termini del problema a 3 specie (4.2), le configurazioni si riscrivono come:

- (c, a, r) = (1, 0, 0), soluzione "alcol-free" o "alcohol-free";
- $(c, a, r) = (1 \bar{a} \bar{r}, \bar{a}, \bar{r})$, soluzione detta endemica, in cui sopravvivono tutte e tre le specie interagenti.

Per studiare la stabilità delle configurazioni d'equilibrio riferite a (4.3), calcoliamo la matrice jacobiana relativa a tale modello:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -2\beta a - \beta r + (\beta - \varphi - \mu) & -\beta a + \rho \\ \varphi & -(\rho + \mu + \gamma) \end{pmatrix}$$

Valutando \mathcal{M} nella soluzione banale (a, r) = (0, 0), la matrice di stabilità che otteniamo ha la seguente forma

$$\mathcal{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} (\beta - \varphi - \mu) & \rho \\ \varphi & -(\rho + \mu + \gamma) \end{pmatrix},$$

da cui il polinomio caratteristico risulterà essere il seguente:

$$p_{\mathcal{L}^{(0)}}(\lambda) = \lambda^2 + (\varphi + \rho + \gamma + 2\mu - \beta)\lambda - \rho\varphi + (\rho + \mu + \gamma)(\varphi + \mu - \beta)$$

Gli autovalori di $\mathcal{L}^{(0)}$ saranno $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4y_1} \right)$ con:

- $x_1 = \varphi + \rho + \gamma + 2\mu \beta;$
- $y_1 = -\rho\varphi + (\rho + \mu + \gamma)(\varphi + \mu \beta).$

Si può osservare che per la validità sperimentale del modello in studio, il coefficiente x_1 di λ risulta sempre positivo, così la configurazione d'equilibrio (a, r) = (0, 0) risulta asintoticamente stabile se e solo se il termine noto y_1 risulta positivo, così da avere le parti reali degli autovalori negative, come visto in (1.6).

Seguendo i calcoli svolti in [13], la positività di y_1 si traduce nella validità della seguente uguaglianza:

$$\frac{\beta(\rho+\mu+\gamma)}{\mu(\rho+\varphi+\mu+\gamma)+\gamma\varphi} < 1.$$
(4.5)

Posto $R_0 := \frac{\beta(\rho+\mu+\gamma)}{\mu(\rho+\varphi+\mu+\gamma)+\gamma\varphi}$, questo rappresenta il *tasso di riproduzione basico* (BRN del modello).

Per la soluzione banale del modello (4.3), si avrà quindi che:

- se $R_0 < 1$ si ha asintotica stabilità;
- se $R_0 > 1$ si ha instabilità.

In conclusione, la soluzione "alcohol-free" risulta asintoticamente stabile quando non esiste la soluzione "endemica" e risulta instabile quando invece esiste, con conseguente cambio di classificazione topologica.

Ripetiamo quanto appena fatto anche per la soluzione di coesistenza, data da $(a, r) = (\bar{a}, \bar{r})$ definiti in precedenza. Grazie alla definizione di R_0 , l'ipotesi

di esistenza di questa soluzione può essere riscritta come $R_0 > 1$. Data ora la matrice di stabilità

$$\mathcal{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2\beta\bar{a} - \beta\bar{r} + (\beta - \varphi - \mu) & \rho - \beta\bar{a} \\ \varphi & -(\rho + \mu + \gamma) \end{pmatrix},$$

con un procedimento del tutto analogo a quanto fatto in precedenza, otteniamo gli autovalori valori $\bar{\lambda}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4y_2} \right)$ con:

• $x_2 = 2\beta \bar{a} + \beta \bar{r} + \varphi + 2\mu + \rho + \gamma - \beta;$

•
$$y_2 = \varphi(\beta \bar{a} - \rho) + (\rho + \mu + \gamma)(2\beta \bar{a} + \beta \bar{r} + \varphi + \mu - \beta).$$

Di nuovo, a seguito di calcoli per i quali rimandiamo a [13], la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità dello stato d'equilibrio endemico risulta data da $y_2 > 0$. Andando a sostituire i valori di $\bar{a} \in \bar{r}$, possiamo riscrivere tale disuguaglianza come

$$\frac{\beta(\rho+\mu+\gamma)}{\mu(\rho+\varphi+\mu+\gamma)+\gamma\varphi} > 1,$$

ovvero $R_0 > 1$. Allora abbiamo che, quando esiste, la soluzione (\bar{a}, \bar{r}) è asintoticamente stabile.

Osservando questi risultati in termini del modello a tre specie interagenti (4.2),concludiamo che:

- la soluzione "alcol-free" (c, a, r) = (1, 0, 0) è asintoticamente stabile per $R_0 < 1$, quindi il problema causato dall'alcol va estinguendosi;
- la soluzione endemica $(c, a, r) = (1 \bar{a} \bar{r}, \bar{a}, \bar{r})$ è asintoticamante stabile per $R_0 > 1$, cioè il problema dell'alcol diventa endemico all'interno della popolazione.

Vediamo quindi come il valore di R_0 determina se il problema dell'alcolismo si spegnerà nel tempo o diventerà un problema endemico della popolazione, proprio come può succedere in presenza di malattie da virus, per esempio. Il caso $R_0 = 1$ si considera il valore "soglia di invasione".

4.2 Modello per la diffusione del fumo: tabacco e sigarette elettroniche

Un altro fenomeno sociale che negli ultimi anni è stato oggetto di vari studi e modellizzazioni matematiche è la diffusione del fumo, nello specifico delle sigarette elettroniche (*e-cigarettes*).

L'articolo [17], a cui faremo riferimento, analizza l'evoluzione temporale dei fumatori di e-cigarettes, di tabacco tradizionale e dei non-fumatori, considerando varie aspetti delle relazioni tra le tre specie. Particolare attenzione viene posta nei confronti della moda delle sigarette elettroniche, mettendo in risalto il passaggio delle persone dallo status di "fumatori di tabacco" a quello di "fumatori di e-cigarettes".

Ci si vuole concentrare sull'effetto della *"peer pressure"*, che in italiano può essere tradotto come *pressione dei pari* o *pressione sociale dei coetanei*. Si riferisce all'influenza che i membri di un gruppo, in particolare amici, compagni o persone della stessa fascia di età o status sociale, esercitano su un individuo, spingendolo ad adottare comportamenti, atteggiamenti o decisioni per conformarsi alle aspettative del gruppo.

Come per (4.1), ci riferiamo a un modello in cui la popolazione totale N si mantiene costante nel tempo e la suddividiamo in tre sottoclassi:

- i non-fumatori C = C(t), che nella terminologia dei modelli epidemiologici rappresenterebbero i soggetti suscettibili;
- i fumatori di tabacco tradizionale S = S(t);
- i fumatori di sigarette elettroniche E = E(t).

Anche in questo caso, le specie interagenti sono funzioni del tempo, di classe almeno C^1 e a valori positivi per ogni t > 0, a cui supponiamo di assegnare i rispettivi valori iniziali.

4.2 Modello per la diffusione del fumo: tabacco e sigarette elettroniche

Date le tre specie interagenti, il modello proposto in [17] si presenta come il seguente modello del tipo SI, con due specie di soggetti infettivi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C = \mu N - \beta \frac{CS}{N} - \mu C\\ \frac{d}{dt}S = \beta \frac{CS}{N} + \alpha E - \gamma \frac{SE}{N} - \mu S\\ \frac{d}{dt}E = -\alpha E + \gamma \frac{SE}{N} - \mu E \end{cases}$$
(4.6)

con N(t) = C(t) + S(t) + E(t) = N(0) > 0; i paramentri $\mu, \beta, \alpha, \gamma > 0$ e costanti rappresentano rispettivamente:

- μ il tasso di entrata e uscita dalla popolazione in studio, preso uguale per le varie specie;
- β il tasso di "contagio" di *S* su *C*, ovvero il tasso con cui un nonfumatore diventa fumatore di tabacco, interagendo con questi;
- α il tasso con cui un fumatore di e-cigarettes ritorna a fumare tabacco tradizionale;
- γ il tasso di passaggio dalle sigarette tradizionali a quelle elettroniche, perché sono alla moda.

Viene preso come assunto di questo modello il fatto che non sia possibile il passaggio diretto da non-fumatore a fumatore di e-cigarettes, ma una variante potrebbe prevedere anche un fattore per descrivere questo passaggio.

Anche in questo caso, dato che la popolazione totale è costantemente uguale a N(0) per ogni $t \ge 0$, possiamo effettuare un cambio di variabile come segue:

$$c(t) = \frac{C(t)}{N}$$
 $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ $e(t) = \frac{E(t)}{N}$

Da qui è possibile riscrivere il sistema (4.6) come segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}c = \mu - \beta cs - \mu c\\ \frac{d}{dt}s = \beta cs + \alpha e - \gamma se - \mu s\\ \frac{d}{dt}e = -\alpha e + \gamma se - \mu e \end{cases}$$
(4.7)
Andando ad eguagliare a zero i termini di reazione di (4.7), otteniamo le seguenti tre configurazioni d'equilibrio $\vec{u}_c = (\bar{c}, \bar{s}, \bar{c})$:

- $\vec{u}_c^{(0)} = (\bar{c}_0, \bar{s}_0, \bar{e}_0) = (1, 0, 0)$, solutione "smoke-free";
- $\vec{u}_c^{(1)} = (\bar{c}_1, \bar{s}_1, \bar{e}_1) = (\frac{\mu}{\beta}, 1 \frac{\mu}{\beta}, 0)$, soluzione in assenza di e-cigarettes;
- $\vec{u}_c^{(2)} = (\bar{c}_2, \bar{s}_2, \bar{e}_2) = \left(\frac{\gamma\mu}{\gamma\mu + \beta(\alpha + \mu)}, \frac{\alpha + \mu}{\gamma}, \frac{(\alpha + \mu)[\gamma(\beta \mu) \beta(\alpha + \mu)]}{\gamma[\gamma\mu + \beta(\alpha + \mu)]}\right)$, solutione endemica.

L'esistenza di $\vec{u}_c^{(1)}$ e $\vec{u}_c^{(2)}$ risulta sottoposta alle seguenti condizioni:

- $1 \frac{\mu}{\beta} > 0$, cioè $\frac{\beta}{\mu} > 1$ che possiamo scrivere anche $\beta > \mu$;
- $\frac{(\alpha+\mu)[\gamma(\beta-\mu)-\beta(\alpha+\mu)]}{\gamma[\gamma\mu+\beta(\alpha+\mu)]} > 0$, che sotto la condizione $\frac{\beta}{\mu} > 1$ si traduce in $\gamma > \frac{\beta(\alpha+\mu)}{(\beta-\mu)}$, o meglio $\frac{\gamma(\beta-\mu)}{\beta(\alpha+\mu)} > 1$, che suggerisce la definizione di un altro R_0 per questo modello.

Osserviamo comunque che, se non è soddisfatta la prima richiesta, cioè $\frac{\beta}{\mu} < 1$, esiste solo la soluzione d'equilibrio "smoke-free".

Per studiare ora la stabilità di tali soluzioni, calcoliamo la matrice jacobiana del modello:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\mu - \beta s & -\beta c & 0\\ \beta s & \beta c - \gamma e - \mu & \alpha - \gamma s\\ 0 & \gamma e & -\alpha + \gamma s - \mu \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i valori delle nostre soluzioni d'equilibrio, ottengo le rispettive matrici di stabilità, da cui calcolo il polinomio caratteristico in λ . Uguagliando quest'ultimo a zero, ottengo infine i relativi autovalori.

Per $\vec{u}_c^{(0)}$, il polinomio caratteristico è dato da

$$p_0(\lambda) = (\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \mu)(\lambda + \alpha + \mu) = 0,$$

cioè $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = \beta - \mu$, $\lambda_3 = -(\alpha + \mu)$. Risulta stabile asintoticamente quando anche l'autovalore λ_2 risulta negativo, cioè per $\beta < \mu$. Sotto tale richiesta risulta però l'unica soluzione d'equilibrio del modello; se invece $\beta > \mu$ la soluzione "smoke-free" risulta instabile e il modello ammette almeno un'altra soluzione, $\vec{u}_c^{(1)}$.

Procedendo analogamente, per $\vec{u}_c^{(1)}$ avrò

$$p_1(\lambda) = \left(\lambda + \alpha + \mu - \gamma \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\right) \left(\lambda^2 + \beta \lambda + \mu \left(\beta - \mu\right)\right) = 0,$$

cioè

$$\lambda_{1} = \gamma \left(1 - \frac{\mu}{\beta} \right) - \alpha - \mu, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-\beta \pm \beta \left| 1 - 2\frac{\mu}{\beta} \right| \right).$$

Osserviamo che $\lambda_2 = -\mu < 0$ e $\lambda_3 = -\beta + \mu < 0$, essendo sotto l'ipotesi di esistenza di $\vec{u}_c^{(1)}$, ovvero $\beta > \mu$.

Per avere quindi la stabilità di $\vec{u}_c^{(1)}$ è necessario richiedere $\lambda_1 < 0$, che si traduce in $\gamma < \frac{\beta(\alpha+\mu)}{\beta-\mu}$, precludendo così l'esistenza di $\vec{u}_c^{(2)}$.

Di nuovo, la soluzione senza i consumatori di sigarette elettroniche, risulta instabile se esiste anche la terza soluzione d'equilibrio.

Verifichiamo infine la stabilità di $\vec{u}_c^{(2)} = (\bar{c}_2, \bar{s}_2, \bar{e}_2)$, a partire dalla sua matrice di stabilità:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} A & -\beta \bar{c}_2 & 0\\ \beta \bar{s}_2 & B & \mu\\ 0 & \gamma \bar{e}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $A = -\mu - \beta \frac{(\alpha + \mu)}{\gamma}, B = -\frac{\alpha [\gamma(\beta - \mu) - \beta(\alpha + \mu)]}{\gamma \mu + \beta(\alpha + \mu)}.$

Da qui otteniamo il relativo polinomio caratteristico, della forma generale

$$p_2(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

di coefficienti:

- $a_1 = A + B;$
- $a_2 = AB + \beta^2 \bar{s}_2 \bar{c}_2 + \mu \gamma \bar{e}_2;$

•
$$a_3 = A\mu\gamma\bar{e}_2.$$

Si osserva immediatamente che vale $a_1, a_2, a_3 > 0$, quindi rimane da verificare che $a_1a_2 - a_3 > 0$, affinché siano verificate le condizioni necessarie e sufficienti (3.3.1) per l'asintotica stabilità della soluzione, secondo il criterio di Routh-Hurwitz.

Esplicitando i valori dei coefficienti si ottiene la disuguaglianza

$$(A+B)(AB+\beta^2\bar{s}_2\bar{c}_2+\mu\gamma\bar{e}_2) > A\mu\gamma\bar{e}_2,$$

che è banalmente vera. La condizione $\gamma > \frac{\beta(\alpha+\mu)}{\beta-\mu}$ è quindi sufficiente per la stabilità della configurazione $\vec{u}_c^{(2)}$ dove questa esiste.

Abbiamo così mostrato l'esistenza di una configurazione endemica asintoticamente stabile, che ammette quindi la coesistenza di non-fumatori, fumatori di tabacco e fumatori di sigarette elettroniche.

Sono quindi i valori dei due possibili BRNs $R_0 := \frac{\beta}{\mu} \in R_1 := \frac{\beta(\alpha+\mu)}{\gamma(\beta-\mu)}$ a determinare se il problema del fumo, all'interno della società in analisi, andrà ad estinguersi, escluderà la presenza delle sigarette elettroniche o si stabilizzerà in una situazione di coesistenza delle tre specie.

Abbiamo infatti che:

- la soluzione "smoke-free", $\vec{u}_c^{(0)}$, è asintoticamente stabile se $R_0 < 1$, quindi la presenza di fumatori va estinguendosi;
- la soluzione in assenza di e-cigarettes, $\vec{u}_c^{(1)}$, è asintoticamente stabile per $R_0 > 1$ e $R_1 < 1$, nel qual caso si interrompe la diffusione di sigarette elettroniche;
- la soluzione endemica, $\vec{u}_c^{(2)}$, è asintoticamente stabile per $R_1 > 1$, cioè il problema del fumo, tradizionale e non, diventa endemico all'interno della popolazione.

4.3 Confronto dei modelli sociali

Nei capitoli e nelle sezioni precedenti, sono stati analizzati tre diversi problemi relativi alle scienze sociali, descritti come modelli matematici a tre specie interagenti:

- il problema dello spaccio e diffusione di droghe;
- il problema dell'alcolismo;
- il problema del fumo di tabacco e sigarette elettroniche.

Si tratta in tutti e tre i casi di problematiche legate a dipendenze, i cui modelli presentano sia analogie che sostanziali differenze tra di loro.

Il nostro obiettivo primario era proprio quello di riuscire a evidenziare la versatilità di un modellamento matematico a più specie interagenti, descritto da un SD o da PDEs del tipo diffusione-reazione, le cui proprietà locali di stabilità lineare permettono non solo la descrizione di fenomeni molto diversi della vita reale e delle scienze sociali, ma suggeriscono anche quali nuove strategie matematiche si possono introdurre per averne un controllo sempre maggiore.

Data la grande importanza che ciascuno di questi temi sociali ha nella comunità internazionale, la ricerca matematica in questi campi è molto attiva. Riportiamo qui di seguito i sistemi dinamici relativi ai tre problemi in studio, modificando in parte la notazione delle specie in gioco per poter facilitare poi il confronto:

1. Per il problema della droga consideriamo il modello originario di Vanag e Epstein presentato in [4]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C = \mu C - aCS\\ \frac{d}{dt}S = aCS - \gamma SL \\ \frac{d}{dt}L = \xi CSL - bL \end{cases}, \tag{4.8}$$

 $\operatorname{con} C = \operatorname{cittadini} \operatorname{ordinari}, S = \operatorname{spacciatori} e L = \operatorname{polizia}.$

2. Per il problema dell'alcol prendiamo come riferimento il modello proposto in [13]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C = \mu - \beta AC + \gamma R - \mu C\\ \frac{d}{dt}A = \beta AC + \rho R - \varphi A - \mu A\\ \frac{d}{dt}R = \varphi A - (\rho + \gamma)R - \mu R \end{cases}$$
(4.9)

con C = cittadini ordinari, A = alcolisti e R = cittadini in fase di recupero.

3. Per il problema del fumo, focalizzandoci sulla moda delle sigarette elettroniche, consideriamo il modello proposto in [17]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C = \mu - \beta CT - \mu C\\ \frac{d}{dt}T = \beta CT + \alpha E - \gamma TE - \mu T\\ \frac{d}{dt}E = -\alpha E + \gamma TE - \mu E \end{cases}$$
(4.10)

con C = non-fumatori, T = fumatori di tabacco e E = fumatori di sigarette elettroniche.

Seguendo il linguaggio dell'epidemiologia, a cui questi modelli fanno riferimento, in tutti e tre i casi la specie C può essere indicata con il termine più generico *cittadini suscettibili*. Si tratta infatti di individui non affetti da dipendenze, siano esse droga, alcol o fumo, ma che sono vulnerabili a un possibile "contagio" da parte di soggetti già dipendenti.

Proseguendo il parallelismo epidemiologico, ciascuno dei modelli presenta almeno una specie che possiamo interpretare come *cittadini infetti*: si tratta di S per (4.8), di A per (4.9) e di T per (4.10).

Il ruolo della terza specie in gioco cambia invece da modello a modello:

1. per (4.8), la specie L agisce in parte come un "vaccino", in termini di epidemiologici, compiendo un'azione di rimozione definitiva nei confronti degli infetti. La sua crescita temporale dipende però da tutte le specie in gioco e dalla loro interazione globale, come illustrato dal termine ξNCL ;

- per (4.9), la specie R vuole richiamare la specie dei rimossi presente nel modello epidemiologico SIR classico di [11]. Non si viene però rimossi in maniera definitiva, perché è possibile tornare a far parte delle altre due specie, avendo imposto per questo modello l'ipotesi di recupero totale;
- 3. per (4.10), la specie E può essere interpretata come una seconda specie infettiva, il cui effetto di contagio agisce su T.

Una differenza sostanziale tra i modelli sopra citati sta nella popolazione in studio: per i modelli di alcol e fumo ((4.9), (4.10)) la popolazione totale si mantiene costante nel tempo, mentre nel modello della droga (4.8) l'effetto di rimozione definitiva degli infetti fa si che il numero totale di cittadini cambi. La popolazione costante dei modelli (4.9) e (4.10) permette anche di effettuare un cambio di variabile che adimensionalizza tale problemi, così da riscriverli come sopra.

Osserviamo poi come nel modello (4.8) venga tralasciato il decadimento naturale di $C \in S$ e messo in risalto solo quello relativo a L, di tasso b. Si tratta di una scelta specifica degli autori, fatta per accentuare un determinato aspetto del problema. Infatti, l'obiettivo di questo modello, così come delle sue varianti successive, era studiare strategie efficaci, da implementare a cura delle forze dell'ordine, per prevenire la diffusione del crimine. Per questo motivo quindi viene data maggior visibilità al decadimento delle forze dell'ordine.

Nei modelli (4.9) e (4.10) era stato invece considerato il tasso di entrata e uscita dalla popolazione sempre uguale μ come semplificazione del problema, non trattandosi dell'interesse principale dello studio.

Guardando ora le configurazioni d'equilibrio, come già analizzato nella sezione 3.2 il problema (4.8) non presenta soluzioni stabili, quindi è poco utile nel confronto con gli altri due modelli delle scienze sociali. Per quanto riguarda invece i modelli (4.9) e (4.10), essi presentano alcune analogie per quanto riguarda le soluzioni d'equilibrio e la loro stabilità.

Data l'ipotesi della popolazione totale costante, non è possibile avere la soluzione banale $\vec{u}_c = (0, 0, 0)$, ma è invece presente per entrambi i sistemi la soluzione $\vec{u}_c^{(0)} = (1, 0, 0)$. Riprendendo la terminologia epidemiologia, questo tipo di soluzione è chiamato generalmente "disease-free"; il nome è stato poi declinato nelle varianti di "alcol-free" e "smoke-free", specifiche dei due modelli in studio. Abbiamo verificato che queste soluzioni sono asintoticamente stabili, sotto determinate ipotesi riferite ai parametri in gioco, le quali però precludono l'esistenza delle altre soluzioni d'equilibrio del modello, del tipo endemico.

Entrambi i modelli presentano poi una soluzione di coesistenza delle tre specie, che risulta sempre asintoticamente stabile sotto le rispettive ipotesi d'esistenza.

Nel caso di (4.10), la presenza di due specie di carattere "infettivo" fa si che questo modello abbia anche una terza configurazione d'equilibrio, che prevede l'assenza della seconda specie infettiva, E.

Un aspetto molto interessante del confronto appena svolto tra sistemi dinamici, sta nella loro modellizzazione matematica in sé.

Abbiamo studiato tre problemi sociali ben diversi gli uni dagli altri, ma che sono stati tutti e tre modellizzati a partire dai principi del modello epidemiologico standard. È infatti sempre presente un termine che descrive l'effetto di "contagio" che avviene tra la popolazione suscettibile e quella infetta; tale termine si presenta uguale con segno opposto nelle equazioni che descrivono le due specie. Nello specifico, il parametro adibito a descrivere il tasso di "contagio" è a per il modello (4.8) e β per entrambi i modelli (4.9) e (4.10). Nel modello del fumo (4.10) è poi presente un secondo tasso di "contagio" γ , che fa riferimento al rapporto tra le due specie di fumatori T ed E; anche in questo caso la dinamica presentata è analoga alle interazioni tra suscettibili e infetti. Per ciascuno dei problemi studiati, per poter descrivere le varie dinamiche di interazione tra le specie, sono stati poi aggiunti parametri e relativi termini specifici, a seconda di ciò su cui ci si voleva focalizzare.

È proprio la flessibilità che offrono i modelli di reazione (ODEs) e poi, inserendo la diffusione spaziale, di diffusione-reazione (PDEs), per lo studio dell'evoluzione temporale e spaziale delle popolazioni, ciò che li ha resi oggi degli strumenti molto utilizzati in numerosi ambiti: ecologia, biologia, medicina e, più di recente appunto, nelle scienze sociali.

A partire quindi dai modelli classici della letteratura matematica, come quelli dell'epidemiologia di Kermack e McKendrick ([11]) o il modello predapredatore di Lotka-Volterra ([1]), gli studi degli ultimi anni stanno lavorando a favore delle scienze sociali, per permettere di modellizzare e affrontare alcune delle problematiche presenti nelle società moderne.

In particolare, i problemi sociali su cui ci siamo concentrati in questa tesi, nel contesto dei modellamenti matematici della realtà attuale, riguardano anche la fascia d'età dei giovani studenti delle scuole secondarie, di primo e soprattuto secondo grado. Situazioni come la diffusione di droghe, alcol e fumo tra i ragazzi rappresentano a tutti gli effetti dei seri problemi "sociali", ed è quindi necessario studiarli approfonditamente per poterli controllare efficacemente.

Conclusioni

In questa tesi si è voluto esaltare l'importanza dei modelli matematici applicati ai problemi sociali, con un focus specifico sui modelli di crimo-tassi, alcolismo e dipendenza dal fumo. Abbiamo osservato come problematiche apparentemente diverse possano essere modellizzate seguendo approcci simili, derivati in parte dai modelli epidemiologici, che storicamente rappresentano la base di numerosi modellamenti della realtà. Ogni problema analizzato ha mostrato delle peculiarità, ma anche alcune analogie significative, generalmente legate alla trasmissione dei comportamenti "negativi" all'interno della popolazione.

In particolare, il modello crimo-tattico ha messo in luce la complessità dell'interazione tra forze dell'ordine, criminali e cittadini. A differenza degli altri modelli, in cui la popolazione rimane costante, nel caso della criminalità l'azione delle forze dell'ordine constituisce un elemento di rimozione definitiva dalla popolazione. È però importante notare che la mancanza di stabilità nelle configurazioni d'equilibrio nel modello originario di Vanag ed Epstein rende il fenomeno molto complesso da controllare, soprattuto nel momento in cui si vanno ad aggiungere termini per modellizzare al meglio la realtà e ricercare appunto soluzioni d'equilibrio stabili.

I modelli di diffusione dell'alcol e del fumo, invece, hanno offerto spunti per comprendere come il comportamento delle persone influenzi la diffusione di dipendenze, sia tradizionali che moderne, come le sigarette elettroniche. L'aspetto della "peer pressure" su cui abbiamo deciso di focalizzarci per il modello del fumo, è da sempre un tema centrale nelle dinamiche giovanili. Potendo descrivere e studiare il fenomeno matematicamente, è possibile attuare migliori politiche di prevenzione e contenimento, volte a salvaguardare le classi dei più giovani.

Anche in questi casi poi, le interazioni tra le diverse "specie" hanno mostrato come sia possibile ottenere configurazioni d'equilibrio che descrivono scenari stabili o endemici.

Inoltre, per i modelli di fumo e alcol ci siamo limitati ad osservarne l'evoluzione temporale, tralasciando quindi gli aspetti di diffusione spaziale. È però possibile effettuare anche per essi uno studio analogo a quanto fatto per il modello crimo-tattico, anche solo nella versione 1D: con l'aggiunta di termini diffusivi adeguati si può incorrere nell'insorgenza di instabilità di Turing che porta alla formazione di interessanti "patterns" di instabilità, evidenziati solo numericamente. Oltre allo studio attraverso metodi analitici che è stato intrapreso in questa tesi, è quindi possibile ampliare ulterioremente l'analisi di tali modelli attraverso simulazioni e metodologie numeriche.

In definitiva, il potenziale dei modelli matematici nel campo delle scienze sociali è vasto e in continua espansione. La capacità di adattare e generalizzare i modelli a seconda delle situazioni consente di ottenere strumenti predittivi utili non solo per comprendere meglio le dinamiche dei problemi sociali, ma anche per sviluppare strategie mirate di intervento.

Bibliografia

- Hirsch M. W., Smale S.; Differential equations, dynamical systems, and linear algebra; Academic Press (1974).
- [2] Renardy M., Rogers R. C.; An Introduction to Partial Differential Equations; Springer, New York (2004).
- [3] Abbas S., Tripathi J., Anam, N.; Dynamical analysis of a model of social behaviour: Criminal versus non-criminal population; Chaos Solitons Fractals (2017), 15, 121–129.
- [4] Vanag V. K., Epstein I. R.; Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems; Physical Chemistry Chemical Physics (2009), 11, 897-912.
- [5] Torcicollo I., Vitiello M.; *Turing Instability and Spatial Pattern* Formation in a Model of Urban Crime; Mathematics (2024), 12, 1097.
- [6] Tripathi J., Bugalia S., Burdak K., Abbas S.; Dynamical analysis and effects of law enforcement in a social interaction model; Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (2021), 567, 125725.
- [7] Anisiu M.-C.; Lotka, Volterra and their model; Didactica Mathematica (2014), 32, 9-17.
- [8] Murray J. D.; *Mathematical Biology I: An Introduction*; Springer, New York (2003).

- [9] Keller E. F., Segel, L. A.; Initiation of Slime Mold Aggregation viewed as an Instability; Journal of Theoretical Biology (1970), 26, 399-415.
- [10] Inferrera G., Munafò C. F., Olivieri F., Rogolino P.; Reactiondiffusion models of crimo-taxis in a street; Applied Mathematics and Computation (2024), 467, 128504.
- [11] Kermack W. O., McKendrick A. G.; A contribution to the mathematical theory of epidemics; Proceedings of the Royal Society A (1927), 115, 700–721.
- [12] University of Sheffield; Appraisal of alcohol minimum pricing and offtrade discount bans in Scotland, (2009).
- [13] Walters C. E., Straughan B., Kendal J.; Modelling alcohol problems: Total recovery; Ricerche di Matematica (2013), 62, 33-53.
- [14] Mulone G. and Straughan B.; Modelling binge drinking; International Journal of Biomathematics (2011).
- [15] Sanchez F., Wang X., Castillo-Chavez C., Gorman D. M., Gruenewald P. J.; Drinking as an epidemic - A simple mathemathical model with recovery and relapse, in K. Witkiewitz and G. A. Marlatt, editors, Therapist's guide to evidence-based relapse prevention, Academic Press, New York (2007).
- [16] Gutiérrez R., Cuesta-Herrera L., Torres-Mantilla H., Martínez-Jeraldo N.; Mathematical modelling of binge drinking from social interactions; Journal of Difference Equations and Applications (2022), 28:8, 1103-1134.
- [17] Straughan B.; E-cigarette smoking with peer pressure; Mathematical Methods in the Applied Sciences (2019), 42.

Ringraziamenti

Mi è sempre sembrata un'idea un po' sciocca quella di mettere per iscritto i miei ringraziamenti. Se sei qui a leggerli, allora vuol dire che mi conosci, forse mi vuoi anche un pochino di bene e, in un modo o nell'altro, fai parte della mia vita. Credo quindi che tu meriti un ringraziamento di persona, faccia a faccia. Vieni pure a importunarmi, avrò sicuramente una parolina buona per te!

Tuttavia, mi rendo conto che ci sono alcune entità che devo necessariamente ringraziare per iscritto, perché non potrebbero mai chiedermelo di persona: i luoghi.

Grazie Dipartimento, cuore pulsante di questi cinque anni. Sei un luogo magico, pieno di scale senza senso, in cui tutti ci siamo persi almeno una volta nella vita. Ma, quando però uno impara a conoscerti, impara anche a volerti bene e a sfruttare a pieno il tuo potenziale. Ogni tavolone, aula o lavagna che sembra libera, in realtà è lì che aspetta solo di essere riempita. Per molti sei casa e, anche se con calma, lo sei diventato anche per me. Mi mancherà da morire poter chiedere "domani ci sei in dip?".

Una menzione d'onore la merita l'Ufficio: hai svoltato al meglio questo mio ultimo anno da studentessa, grazie mille.

Grazie appartamento in Via Irnerio 39, tu sì che sei stato casa, a tutti gli effetti. Sei piovuto dal cielo, in modo inaspettato, e mi hai stregata. Semplice, ma con carattere. Piccolo, ma con un mondo da offrire. Mi hai insegnato l'indipendenza e la condivisione in un colpo solo, come se ci fosse l'offerta 2x1. Insomma, sei stato teatro di moltissimi momenti che custodirò stretti, e spero lo sarai ancora per chi ti vivrà dopo di me.

Grazie a tutti i campi da basket, di Bologna e non solo. Vi ho calcati in così tante vesti diverse che immagino non sappiate più chi sono. In ogni caso, che sia con una palla in mano, un fischietto in bocca o una paletta alzata, siete sempre il posto in cui mi sento più me stessa. Mi avete cresciuta e mi avete donato alcune delle cose più belle della mia vita. Vi porto tutti nel cuore, uno ad uno.

Grazie Santarcangelo e, ancora di più, San Vito: siete la casa alla quale vorrò sempre tornare. Siete pace, bellezza, divertimento e bontà, tutto insieme. Siete Romagna, e questo è il più grande complimento che vi si possa fare.

Grazie Bologna, in tutto e per tutto. Odio l'idea di doverti lasciare, ma per fortuna è solo un arrivederci e non sarà mai un addio.

Mentre stavo scrivendo questi ringraziamenti, mi sono resa conto che per quanto mi piacciano i Pinguini Tattici Nucleari non potrò mai essere d'accordo con Riccardo quando canta: "perché le case in fondo sono solo scatole, dove la gente si rifugia quando fuori piove" (*Scatole*).

Le case, le aule, le palestre, tutti i luoghi in cui uno vive, contribuiscono a plasmare la propria essenza.

E forse, in fin dei conti, ringraziando i luoghi che mi hanno accolta, ho ringraziato anche tutte le persone che li hanno popolati.