ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

RISOLUZIONE PER SERIE
DI SISTEMI LINEARI
DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Simonetta Abenda

Presentata da:
Matteo Scrocca

Anno Accademico 2023/2024

Introduzione

Le equazioni differenziali rivestono un ruolo centrale non solo in matematica, ma anche in quasi tutti i settori della scienza, dell'ingegneria e dell'economia: sono ad esempio in grado di descrivere il flusso di corrente in un conduttore, il moto di un missile, la diffusione di malattie o il tasso di crescita della popolazione di alcune specie.

Esse nascono nel XVII secolo con Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), il quale, in particolare, scopre il metodo di separazione delle variabili ed elabora la procedura di risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine. Nel secolo successivo, Leonhard Euler (1707–1783) fornisce la soluzione generale delle equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti nel 1743, estendendo, qualche anno dopo, i risultati ottenuti alle equazioni non omogenee.

Euler è il primo matematico a far uso delle serie di potenze nella risoluzione di equazioni differenziali: tale metodo, in seguito, diventa vero e proprio oggetto di studio e interesse da parte della comunità di matematici. In particolare, vengono esaminate alcune importanti equazioni differenziali ordinarie e poi studiate le loro soluzioni, spesso associate a nomi di grandi matematici, tra i quali Legendre e Bessel.

Come sarà illustrato nell'elaborato, per l'equazione di Legendre sarà possibile ottenere soluzioni in serie di potenze (capitolo 2), mentre per l'equazione di Bessel (capitolo 3) si renderà necessario affiancare ulteriori specifiche funzioni alle serie di potenze.

Nel primo capitolo sono principalmente riportate definizioni e teoremi preliminari legati ai sistemi lineari di equazioni differenziali ordinarie, poi utilizzati nei capitoli successivi. Inoltre vengono introdotte le funzioni esponenziali di matrici, presenti in diversi esempi analizzati, e la funzione Gamma di Eulero, che invece compare nella funzione di Bessel del primo tipo di ordine α .

Il secondo capitolo tratta inizialmente i sistemi lineari del primo ordine di equazioni differenziali ordinarie: la matrice dei coefficienti e il termine noto sono in questo caso funzioni analitiche in un certo $\tau \in \mathbb{R}$, detto punto ordinario, cioè funzioni sviluppabili

in serie di potenze in un intorno di quel punto (dove c'è convergenza della serie). Dopo aver dimostrato l'esistenza di una soluzione sviluppabile in serie di potenze in un intorno del punto ordinario, i risultati ottenuti vengono estesi a generiche equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti analitici. L'equazione di Legendre, del secondo ordine e legata a un parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, viene così risolta con l'utilizzo delle serie di potenze al variare di α : ciò che si ottiene sono le funzioni di Legendre del primo tipo (meglio note come polinomi di Legendre) e le funzioni di Legendre del secondo tipo.

Infine, l'ultimo capitolo si focalizza sui sistemi lineari omogenei del primo ordine di equazioni differenziali ordinarie in cui il coefficiente del termine di ordine uno si annulla in un certo $\tau \in \mathbb{R}$: se la matrice dei coefficienti è analitica e non nulla in τ , questo viene chiamato punto singolare del primo tipo. I risultati del capitolo precedente non sono più adatti a risolvere sistemi simili: viene così enunciato e poi dimostrato il teorema principale dell'intero elaborato, il quale mostra l'esistenza di soluzioni per serie per questa tipologia di sistemi. Dopo aver mostrato la connessione tra punti singolari del primo tipo per sistemi lineari omogenei e punti singolari regolari per equazioni lineari omogenee a coefficienti analitici di ordine n , il nuovo metodo di risoluzione, anche detto metodo di Frobenius, viene esteso a queste ultime per poi essere applicato all'equazione di Bessel. Essa, del secondo ordine e dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, viene in seguito risolta al variare di α : si determinano così le funzioni di Bessel del primo tipo e del secondo tipo.

Indice

Introduzione	i
1 Preliminari	1
1.1 Funzioni analitiche a coefficienti matriciali	1
1.2 Sistemi lineari di equazioni differenziali	1
1.3 Funzione esponenziale di una matrice	3
1.4 Gamma di Eulero	4
2 Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario	5
2.1 Sistemi lineari con punti ordinari	5
2.2 Equazioni di ordine n con punti ordinari	8
2.3 L'equazione di Legendre e le sue soluzioni	10
2.3.1 L'equazione di Legendre	10
2.3.2 I polinomi di Legendre	13
2.3.3 Le funzioni di Legendre del secondo tipo	15
3 Soluzioni per serie di sistemi lineari omogenei nell'intorno di un punto singolare del I tipo	19
3.1 Sistemi di equazioni con punti singolari del primo tipo	21
3.2 Equazioni con punti singolari del primo tipo	25
3.2.1 Equazioni di ordine n	25
3.2.2 Le equazioni del secondo ordine	27
3.3 L'equazione di Bessel	29
3.3.1 Le funzioni di Bessel di ordine zero	30
3.3.2 Le funzioni di Bessel di ordine n	32
Bibliografia	35

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo vengono introdotte alcune notazioni e riuniti una serie di risultati preliminari che saranno utilizzati nei capitoli successivi. D'ora in avanti:

- I indica un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;
- $\mathbb{F}$ rappresenta un generico campo.

1.1 Funzioni analitiche a coefficienti matriciali

Prima di tutto è opportuno estendere la definizione di funzione analitica a valori reali a funzioni a valori in $M_n(\mathbb{F})$; in questo caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $\tau \in J$. $F : J \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ si dice analitica in τ se, per qualche $\rho > 0$,

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t - \tau)^k, \quad |t - \tau| < \rho, \quad A_k \in M_n(\mathbb{C}),$$

dove $|t - \tau| < \rho$ è il disco di convergenza della serie.

Teorema 1.2. Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $F : J \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ analitica in $\tau \in J$. Allora F è di classe C^∞ nel disco di convergenza $|t - \tau| < \rho$, in cui vale

$$F^j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+j)(k+j-1)\cdots(k+1)A_{k+j}(t-\tau)^k, \quad j \in \mathbb{Z}, j > 0, \quad A_k \in M_n(\mathbb{C}).$$

1.2 Sistemi lineari di equazioni differenziali

Definizione 1.3. Siano $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$, $B \in C(I, \mathbb{F}^n)$. Un sistema lineare del primo ordine di equazioni differenziali è un sistema di equazioni differenziali lineari del primo

ordine che si può scrivere nella forma

$$X' = A(t)X + B(t),$$

dove A è chiamata matrice dei coefficienti mentre B è detto termine noto.

D'ora in poi, un "sistema lineare del primo ordine di equazioni differenziali" viene abbreviato con "sistema lineare", con lo scopo di semplificare la notazione.

Definizione 1.4. Siano $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$, $B \in C(I, \mathbb{F}^n)$, $V : I \rightarrow \mathbb{F}^n$.

Se $V \in C^1(I, \mathbb{F}^n)$ e $V'(t) = A(t)V(t) + B(t)$ per ogni $t \in I$, V viene chiamata soluzione del sistema lineare. L'insieme di tali soluzioni è detto integrale generale del sistema.

Teorema 1.5 (Esistenza ed unicità per sistemi lineari). Siano $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$, $B \in C(I, \mathbb{F}^n)$. Fissati $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{F}^n$, esiste un'unica soluzione X su I del sistema lineare di equazioni differenziali $X' = A(t)X + B(t)$, $t \in I$, tale che $X(\tau) = \xi$.

Nei capitoli successivi, in particolare, sono presi in considerazione sistemi lineari omogenei, quindi del tipo

$$X' = A(t)X, \quad A \in C(I, M_n(\mathbb{F})). \quad (1.1)$$

Teorema 1.6. Sia $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$. L'integrale generale di (1.1) è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{F}^n)$ di dimensione n .

Definizione 1.7. Sia $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$. $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq C^1(I, \mathbb{F}^n)$ si chiama sistema fondamentale di soluzioni per il sistema (1.1) quando $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base per lo spazio delle soluzioni del sistema.

Definizione 1.8. $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ è una matrice fondamentale per (1.1) quando le colonne di Φ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni per (1.1).

Teorema 1.9. Siano $A \in C(I, M_n(\mathbb{F}))$, $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbb{F})$. Supponiamo che le colonne di Φ siano soluzioni del sistema lineare omogeneo. Sono equivalenti:

- (i) Φ è una matrice fondamentale per il sistema lineare omogeneo.
- (ii) $\Phi(s)$ è invertibile per ogni $s \in I$.
- (iii) Esiste $s \in I$ tale che $\Phi(s)$ è invertibile.

Lemma 1.10. X, Y sono due matrici fondamentali per il sistema lineare omogeneo se e solo se X è una matrice fondamentale ed esiste $C \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che $Y = XC$.

1.3 Funzione esponenziale di una matrice

Teorema 1.11. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Si può definire su $M_{m,n}(\mathbb{F})$ la norma seguente:*

$$|A| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F}).$$

$M_{m,n}(\mathbb{F})$ dotato di tale norma è uno spazio di Banach.

Sia adesso $A(t) \in C(I, M_{m,n}(\mathbb{F}))$. Essendo ogni a_{ij} limitato su I , esiste $M > 0$ tale che, per ogni $t \in I$,

$$|A(t)| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}(t)| \leq M$$

e conseguentemente può essere definita su $C(I, M_{m,n}(\mathbb{F}))$ la seguente norma:

$$\|A\|_{\infty} = \sup \left\{ |A(t)| \mid t \in I \right\}, \quad A \in C(I, M_{m,n}(\mathbb{F})).$$

Teorema 1.12. *$C(I, M_{m,n}(\mathbb{F}))$ dotato di tale norma è uno spazio di Banach.*

Teorema 1.13. *Sia $\{X_k\}$ una successione in uno spazio di Banach. Se la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

converge assolutamente, allora converge.

Definizione 1.14. *La funzione*

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A \in M_n(\mathbb{C}) \quad (1.2)$$

è chiamata funzione esponenziale di una matrice quadrata.

Osservazione 1.15. La definizione appena data è ben posta. Infatti, se $A \in M_n(\mathbb{C})$, per le proprietà della norma vale

$$|A^k| \leq |A|^k,$$

da cui

$$\left| \frac{A^k t^k}{k!} \right| \leq \frac{|A|^k |t|^k}{k!}.$$

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k |t|^k}{k!}$$

converge per ogni valore di $|A|$ e $|t|$, utilizzando il criterio del confronto e successivamente il Teorema 1.13, si conclude la prova.

Lemma 1.16. *Sono equivalenti:*

$$(i) \quad XY = YX, \quad X, Y \in M_n(\mathbb{F}),$$

$$(ii) \quad e^{Xt}Y = Ye^{Xt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad e^{Xt}e^{Yt} = e^{Yt}e^{Xt} = e^{(X+Y)t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.17. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $A = QJQ^{-1}$, J forma canonica di Jordan per A , $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Allora vale*

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}.$$

Definizione 1.18. *Per ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$, $t > 0$, si definisce*

$$t^A := e^{A \log(t)}.$$

1.4 Gamma di Eulero

Definizione 1.19. *La funzione*

$$\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

è chiamata funzione Gamma di Eulero.

Proposizione 1.20. *Vale:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Con una semplice integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-t}t^z dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[[e^{-t}t^z]_0^T + z \int_0^T e^{-t}t^{z-1} dt \right] \\ &= z \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-t}t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.21. La relazione (1.3) è estremamente utile in quanto consente di estendere a tutti i numeri complessi, ad eccezione dei $k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$, la definizione della funzione Gamma. Infatti, se n è l'intero positivo per cui $-n < \operatorname{Re}(z) \leq -n+1$, allora $\operatorname{Re}(z+n) > 0$ e si può quindi scrivere $\Gamma(z)$ come

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad \operatorname{Re}(z) < 0, \quad z \neq -n+1.$$

Pur non essendo definita in $k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$, è possibile definire

$$\frac{1}{\Gamma(k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, k \leq 0,$$

essendo 0 il valore del limite di $\frac{1}{\Gamma(z)}$ calcolato in questi punti.

Capitolo 2

Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

L'obiettivo principale di questo capitolo consiste nel caratterizzare il metodo classico di risoluzione di sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti analitici, legato all'utilizzo delle serie di potenze. Dopo aver esteso tale metodo alle equazioni differenziali lineari di ordine n , si risolverà l'equazione di Legendre e successivamente verranno analizzate le sue soluzioni.

2.1 Sistemi lineari con punti ordinari

In questo paragrafo viene enunciato e in seguito dimostrato il risultato principale dell'intero capitolo, di notevole rilevanza per la ricerca di soluzioni analitiche.

Definizione 2.1. *Si consideri il sistema lineare*

$$X' = A(t)X + B(t), \quad (2.1)$$

con $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ e $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ funzioni analitiche in $\tau \in \mathbb{R}$, cioè, per qualche $\rho > 0$,

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t - \tau)^k, \quad |t - \tau| < \rho, \quad A_k \in M_n(\mathbb{C}), \quad (2.2)$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t - \tau)^k, \quad |t - \tau| < \rho, \quad B_k \in \mathbb{C}^n, \quad (2.3)$$

dove $|t - \tau| < \rho$ è il disco di convergenza delle due serie. In tal caso τ è chiamato punto ordinario per (2.1).

6 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

Teorema 2.2. *Siano $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ e $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ funzioni analitiche in $\tau \in \mathbb{R}$, con sviluppi in serie di potenze convergenti nel disco $|t - \tau| < \rho$, $\rho > 0$, dati da (2.2), (2.3). Per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n$, esiste una soluzione X di (2.1) tale che $X(\tau) = \xi$, con sviluppo in serie di potenze nel disco $|t - \tau| < \rho$*

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (t - \tau)^k, \quad C_k \in \mathbb{C}^n. \quad (2.4)$$

Inoltre $C_0 = \xi$ e i C_k , per $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, si ottengono (in dipendenza da C_0) sostituendo la serie (2.4) in (2.1).

Dimostrazione. Supponendo senza perdita di generalità che $\tau = 0$ (con un cambio di variabile $s = t - \tau$ è sempre possibile centrare in 0 una serie di potenze), si consideri quindi

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k, \quad |t| < \rho, \quad (2.5)$$

dove ρ è il raggio di convergenza delle serie. Sia

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k, \quad |t| < \rho, \quad C_k \in \mathbb{C}^n, \quad (2.6)$$

soluzione di (2.1). Allora $X(0) = C_0 = \xi$ e, per il Teorema 1.2, si ottiene

$$X'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1}t^k, \quad |t| < \rho.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} A(t)X(t) + B(t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (A_{k-j} C_j) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k (A_{k-j} C_j) + B_k \right] t^k \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad |t| < \rho,$$

è valida se e solo se

$$(k+1)C_{k+1} = \sum_{j=0}^k (A_{k-j} C_j) + B_k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (2.7)$$

Ciò evidenzia che, fissato $C_0 = \xi$, tutti gli altri C_k sono univocamente determinati dalla relazione ricorsiva (2.7). Per concludere la dimostrazione, occorre soltanto verificare la convergenza nel disco $|t| < \rho$ della serie (2.6) con i coefficienti determinati da (2.7). Sia $r \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r < \rho$; poiché le serie in (2.5) convergono nel disco di raggio ρ , allora esiste $M > 0$ tale che

$$|A_j|r^j \leq M, \quad |B_j|r^j \leq M, \quad j \in \mathbb{Z}, j \geq 0.$$

Premesso ciò, si ha

$$(k+1)|C_{k+1}| \leq \sum_{j=0}^k (Mr^{j-k}|C_j|) + Mr^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0,$$

ossia

$$(k+1)|C_{k+1}| \leq Mr^{-k} \left[\sum_{j=0}^k (|C_j|r^j) + 1 \right], \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Sia ora $d_k \geq 0$ definito nel modo seguente:

$$d_0 = |C_0| = |\xi|,$$

$$(k+1)d_{k+1} = Mr^{-k} \left[\sum_{j=0}^k d_j r^j + 1 \right], \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Ne consegue immediatamente che

$$d_1 = M(d_0 + 1)$$

$$(k+1)d_{k+1} = Md_k + r^{-1}kd_k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0,$$

e, per come sono definiti i d_k ,

$$|C_k| \leq d_k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (2.8)$$

Ora si procede a cercare i valori di t per i quali la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k \quad (2.9)$$

converga. Poiché

$$\left| \frac{d_{k+1}}{d_k} \right| = \left[\frac{M}{k+1} + \frac{k}{k+1} \frac{1}{r} \right] \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \text{per } k \rightarrow \infty,$$

allora la serie (2.9) converge assolutamente per $|t| < r$. Da (2.8) segue che la serie (2.6) converge per $|t| < r$ e, poiché r è un qualsiasi numero compreso tra 0 e ρ , si è provata la convergenza di (2.6) per $|t| < \rho$ e completata la dimostrazione del teorema. $\square$

8 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

Il Teorema 1.5 permette di concludere che una X come in (2.1), tale per cui $X(\tau) = \xi \in \mathbb{C}^n$, è unica nel disco $|t - \tau| < \rho$. Per questo motivo, si ottiene il seguente corollario.

Corollario 2.3. *Ogni soluzione X di (2.1) nel disco di convergenza $|t - \tau| < \rho$ ha uno sviluppo in serie della forma*

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (t - \tau)^k, \quad C_k \in \mathbb{C}^n.$$

Esempio 2.4. Si esamini il caso particolare in cui $A(t) = A$ e $B = 0$. Qui (2.1) diventa $X' = AX$ e, poiché $A(t) = A$ è una serie che converge banalmente per ogni $t \in \mathbb{R}$, ogni soluzione X di $X' = AX$ ha uno sviluppo in serie di potenze convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da (2.7) segue che

$$(k+1)C_{k+1} = AC_k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0,$$

e, se $C_0 = \xi$, si ottiene

$$C_k = \frac{A^k}{k!} \xi, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Dal momento che la soluzione X soddisfa $X(0) = \xi$, essa ha la ben nota rappresentazione in serie di potenze

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) \xi = e^{At} \xi,$$

convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2.2 Equazioni di ordine n con punti ordinari

Definizione 2.5. *Si consideri l'equazione differenziale lineare di ordine n*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t), \quad (2.10)$$

con $a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni analitiche in $\tau \in \mathbb{R}$, cioè, per qualche $\rho > 0$,

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(t - \tau)^k, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad a_{jk} \in \mathbb{C}, \quad (2.11)$$

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t - \tau)^k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (2.12)$$

dove $|t - \tau| < \rho$ è il disco di convergenza delle due serie. In tal caso τ è chiamato punto ordinario per (2.10).

Teorema 2.6. *Siano $a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni analitiche in $\tau \in \mathbb{R}$, con sviluppi in serie di potenze convergenti nel disco $|t - \tau| < \rho$, $\rho > 0$, dati da (2.11), (2.12). Per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n$, esiste una soluzione x di (2.10) tale che $x(\tau) = \xi$, con sviluppo in serie di potenze nel disco $|t - \tau| < \rho$*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - \tau)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

Vale inoltre

$$k!c_k = \xi_{k+1}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

e i c_k , per $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq n$, sono univocamente determinati in dipendenza da $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sostituendo (2.13) in (2.10).

Dimostrazione. All'equazione (2.10), ponendo

$$y_1 = x, \dots, y_n = x^{(n-1)},$$

in modo che

$$y'_1 = y_2, \dots, y'_{n-1} = y_n, y'_n = -a_0(t)y_1 - \dots - a_{n-1}(t)y_n + b(t),$$

è possibile associare il sistema

$$Y' = A(t)Y + B(t), \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

$A(t)$ e $B(t)$ possiedono sviluppi in serie di potenze convergenti in $|t - \tau| < \rho$ (poiché a_j, b sono funzioni analitiche in τ) e il Teorema 2.2 garantisce l'esistenza di una soluzione Y di (2.14) con sviluppo in serie di potenze in $|t - \tau| < \rho$ tale che $Y(\tau) = \xi$. La prima componente di Y , y_1 , soddisfa (2.10). $\square$

Osservazione 2.7. Dalla dimostrazione precedente, segue che $x(t)$ è soluzione di (2.10) se e solo se

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

10 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

è soluzione di (2.14). Inoltre, un insieme di soluzioni di (2.10), $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, definite su I , forma una base per le soluzioni dell'equazione se e solo se, utilizzando il Teorema 1.9, per qualche $s \in I$, $(\tilde{x}_1(s), \dots, \tilde{x}_n(s))$ è invertibile.

Inoltre, per il teorema di unicità, è immediato il seguente corollario.

Corollario 2.8. *Ogni soluzione x di (2.10) nel disco di convergenza $|t - \tau| < \rho$ ha uno sviluppo in serie di potenze*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - \tau)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

2.3 L'equazione di Legendre e le sue soluzioni

In questo paragrafo viene introdotta una delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti analitici di maggiore importanza, l'equazione di Legendre, la quale riveste una notevole rilevanza tanto per la descrizione dei fenomeni ondulatori quanto per lo studio della conduzione del calore in relazione a corpi sferici. Dopo averla risolta con il metodo appena illustrato, saranno analizzate le proprietà delle sue soluzioni, meglio note come funzioni di Legendre.

2.3.1 L'equazione di Legendre

Definizione 2.9. *Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. L'equazione lineare omogenea del secondo ordine*

$$(L_\alpha x)(t) := (1 - t^2)x'' - 2tx' + \alpha(\alpha + 1)x = 0 \quad (2.15)$$

è chiamata equazione di Legendre.

Si procede ora al calcolo delle soluzioni di tale equazione. Scrivendo (2.15) come

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}x = 0,$$

e definendo

$$a_1(t) := \frac{-2t}{1-t^2}, \quad a_0(t) := \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2},$$

si può osservare che a_1, a_0 sono analitiche in $t = 0$. Infatti, la serie

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}$$

converge per $|t| < \rho = 1$ e di conseguenza a_1, a_0 , per $|t| < 1$, sono della forma

$$a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)t^{2k+1}, \quad a_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)t^{2k}.$$

Per il Teorema 2.6, la soluzione di (2.15) ha uno sviluppo in serie di potenze convergente in $|t| < 1$, dove, esplicitamente, se

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

allora

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1},$$

da cui

$$-2tx'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-2k)c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-2k)c_k t^k.$$

Derivando ulteriormente $x(t)$, si ottiene

$$x''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} t^k,$$

da cui segue

$$-t^2 x''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} -k(k-1)c_k t^k.$$

Sostituendo ora in (2.15) le serie di potenze appena calcolate, risulta

$$\begin{aligned} (L_\alpha x)(t) &= (1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \alpha(\alpha+1)x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + \alpha(\alpha+1)c_k] t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + (-k^2 - k + \alpha^2 + \alpha)c_k] t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\alpha+k+1)(\alpha-k)c_k] t^k. \end{aligned}$$

Dai calcoli appena svolti si evince che x è soluzione dell'equazione di Legendre se e solo se

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\alpha+k+1)(\alpha-k)c_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Scrivendo esplicitamente i coefficienti iniziali c_k , si riscontra che

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}c_0, & c_3 &= -\frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{(3)(2)}c_1, \\ c_4 &= -\frac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{(4)(3)}c_2 = \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)(\alpha)(\alpha-2)}{4!}c_0, \\ c_5 &= -\frac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{(5)(4)}c_3 = \frac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!}c_1. \end{aligned}$$

12 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

Più in generale, è possibile verificare per induzione che, per $m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$,

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{(\alpha + 2m - 1) \cdots (\alpha + 1)(\alpha)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2m + 2)}{(2m)!} c_0,$$

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha + 2m) \cdots (\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2m + 1)}{(2m + 1)!} c_1.$$

Constatando che tutti i c_k siano univocamente determinati conoscendo c_0 e c_1 , si può scrivere $x(t) = c_0 u(t) + c_1 v(t)$, dove

$$u(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} t^{2m}, \quad (2.16)$$

$$d_{2m} = (-1)^m \frac{(\alpha + 2m - 1) \cdots (\alpha + 1)(\alpha)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2m + 2)}{(2m)!},$$

$$v(t) = t + \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m+1} t^{2m+1}, \quad (2.17)$$

$$d_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha + 2m) \cdots (\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2m + 1)}{(2m + 1)!}.$$

Dal momento che $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ è invertibile per $t = 0$ (coincide con I_2), allora, per il Teorema 1.9, $\{\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)\}$ rappresenta una base per lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato, da cui segue che $\{u, v\}$ è effettivamente una base per le soluzioni di $Lx = 0$ per $|t| < 1$.

Si analizza ora l'influenza del valore di α sulle soluzioni. Se $\alpha = 2m$, con $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, allora $u(t)$ ha solo un numero finito di termini non nulli: non è altro che un polinomio di grado $2m$ che contiene solo potenze pari di t :

$$u(t) = 1, \quad \alpha = 0,$$

$$u(t) = 1 - 3t^2, \quad \alpha = 2,$$

$$u(t) = 1 - 10t^2 + \frac{35}{3}t^4, \quad \alpha = 4.$$

La soluzione $v(t)$ invece in questo caso non è un polinomio.

Analogamente, se $\alpha = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, allora $v(t)$ si riduce ad un polinomio di grado $2m + 1$ che contiene solo potenze dispari di t :

$$v(t) = t, \quad \alpha = 1,$$

$$v(t) = t - \frac{5}{3}t^3, \quad \alpha = 3,$$

$$v(t) = t - \frac{14}{3}t^3 + \frac{21}{5}t^5, \quad \alpha = 5.$$

Per tali valori di α , la soluzione $u(t)$ invece non è un polinomio.

Dal Teorema 2.6 ne consegue che le due serie (2.16),(2.17) convergono per $|t| < 1$. In particolare, se $\alpha = 2m$, la serie di u si riduce a un polinomio che ovviamente converge per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi tale u fornisce una soluzione dell'equazione di Legendre per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda v , invece, il criterio del rapporto mostra che la sua serie di diverge per $|t| > 1$: pertanto v è una soluzione di $Lx = 0$ solo per $|t| < 1$. Similmente accade per $\alpha = 2m + 1$, con u, v scambiati.

Nel prossimo sottoparagrafo, vista la loro importanza significativa, si focalizzerà principalmente l'attenzione sulle soluzioni polinomiali dell'equazione di Legendre quando α è un intero non negativo, anche conosciute come polinomi di Legendre (o funzioni di Legendre del primo tipo).

2.3.2 I polinomi di Legendre

Sia $\alpha = n$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, e si consideri l'equazione di Legendre

$$(L_n x)(t) = (1 - t^2)x'' - 2tx' + n(n + 1)x = 0. \quad (2.18)$$

La proposizioni seguenti consentono di dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione P_n polinomiale di grado n , tale che $P_n(1) = 1$.

Proposizione 2.10 (Formula di Rodrigues). *Il polinomio di grado n*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} D^n (t^2 - 1)^n, \quad D = \frac{d}{dt}, \quad (2.19)$$

è soluzione di (2.18).

Dimostrazione. Considerando

$$v(t) = (t^2 - 1)^n,$$

si dimostra senza difficoltà che

$$(t^2 - 1)v'(t) - 2ntv(t) = 0,$$

e, per induzione, che

$$(t^2 - 1)v^{n+2} + 2tv^{(n+1)} - (n^2 + n)v^{(n)} = 0.$$

Se $p := v^{(n)}$, vale

$$(1 - t^2)p'' - 2tp' + n(n + 1)p = 0,$$

14 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

quindi p soddisfa (2.18). Inoltre

$$\begin{aligned} p(t) &= D^n(t^2 - 1)^n = D^n[(t+1)^n(t-1)^n] \\ &= (t+1)^n D^n(t-1)^n + (t-1)^n D^n(t+1)^n \\ &= n!(t+1)^n + n!(t-1)^n \end{aligned}$$

implica che $p(1) = 2^n n!$. Poiché $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} p(t)$, la dimostrazione è completata. $\square$

Proposizione 2.11. *Per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, P_n è unico.*

Dimostrazione. Siano n un intero positivo pari e $q(t)$ una soluzione polinomiale di (2.18). Per $|t| < 1$, $q = c_0 u + c_1 v$ per qualche $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, con $\{u, v\}$ base per (2.18) data da (2.16), (2.17) dove $\alpha = n$. Inoltre, per quanto visto in precedenza, u è un polinomio di grado n e quindi $q - c_0 u$ è ancora un polinomio mentre invece $c_1 v$ non è un polinomio se $c_1 \neq 0$. Allora necessariamente $c_1 = 0$ e di conseguenza $q = c_0 u$. Imponendo la condizione $c_0 u(1) = 1$, evidentemente risulta che $u(1) \neq 0$, per cui non può esistere una soluzione non banale di (2.18) che si annulli in 1. Per n intero positivo dispari, si ragiona analogamente scambiando u e v .

Di conseguenza, considerando due soluzioni polinomiali p_n e P_n di (2.18) tali che $p_n(1) = 1 = P_n(1)$, allora $q_n = p_n - P_n$ è ancora una soluzione polinomiale di (2.18) con $q_n(1) = 0$. Alla luce di quanto appena mostrato, $q_n \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè $p_n = P_n$. $\square$

Definizione 2.12. *Per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, P_n è chiamato n -esimo polinomio di Legendre.*

Sulla base dei risultati ottenuti, è possibile enunciare e dimostrare senza difficoltà una formula ricorsiva interessante per i polinomi di Legendre.

Proposizione 2.13. *Sia P_n l' n -esimo polinomio di Legendre. Vale la seguente relazione:*

$$P'_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2n - 4k - 1) P_{n-2k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 1, \quad (2.20)$$

dove $[(n-1)/2]$ è il più grande intero minore o uguale di $(n-1)/2$, cioè

$$[(n-1)/2] = \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & n = 2m, \\ \frac{n-1}{2}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Anzitutto è opportuno mostrare la validità della seguente uguaglianza:

$$P'_n - P'_{n-2} = (2n-1)P_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2. \quad (2.21)$$

Infatti, poiché vale

$$\begin{aligned}
 D^2(t^2 - 1)^n &= D[n(t^2 - 1)^{n-1}(2t)] \\
 &= 2n[(t^2 - 1)^{n-1} + 2(n-1)t^2(t^2 - 1)^{n-2}] \\
 &= 2n(t^2 - 1)^{n-2}[(t^2 - 1) + 2t^2(n-1)], \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

emerge che

$$\begin{aligned}
 P'_n - P'_{n-2} &\stackrel{(2.19)}{=} \frac{1}{2^n n!} D^{n+1}(t^2 - 1)^n - \frac{1}{2^{n-2}(n-2)!} D^{n-1}(t^2 - 1)^{n-2} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} D^{n-1}[D^2(t^2 - 1)^n - 4n(n-1)(t^2 - 1)^{n-2}] \\
 &\stackrel{(2.22)}{=} \frac{1}{2^n n!} D^{n-1}[2n(2n-1)(t^2 - 1)^{n-1}] \\
 &= \frac{2n-1}{2^{n-1}(n-1)!} D^{n-1}(t^2 - 1)^{n-1} \\
 &\stackrel{(2.19)}{=} (2n-1)P'_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

In particolare, se $n = 2m$, dalla (2.21) segue

$$\begin{aligned}
 P'_{2m} - P'_{2m-2} &= (4m-1)P'_{2m-1}, \\
 P'_{2m-2} - P'_{2m-4} &= (4m-5)P'_{2m-3}, \\
 &\vdots \\
 P'_4 - P'_2 &= 7P'_3, \\
 P'_2 - P'_0 &= 3P'_1.
 \end{aligned}$$

Ponendo $P'_0 = 0$, dalle uguaglianze precedenti si ottiene

$$P'_{2m} = (4m-1)P'_{2m-1} + (4m-5)P'_{2m-3} + \dots + 7P'_3 + 3P'_1.$$

Similmente, nel caso in cui $n = 2m+1$, vale

$$P'_{2m+1} = (4m+1)P'_{2m} + (4m-3)P'_{2m-2} + \dots + 5P'_2 + P'_0.$$

Mettendo insieme entrambi i casi (n pari e n dispari), si giunge alla tesi. $\square$

2.3.3 Le funzioni di Legendre del secondo tipo

Si prosegue ora con l'analisi approfondita dell'equazione di Legendre (2.18). Se $\alpha = 0$, la serie (2.16) si riduce al polinomio $u = P_0$, mentre la (2.17) diventa

$$v(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{2m+1}, \quad |t| < 1.$$

16 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

Tale serie rappresenta lo sviluppo di una ben nota funzione. Ricordando che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots, \quad |t| < 1,$$

e

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots, \quad |t| < 1,$$

si verifica facilmente che

$$v(t) = \frac{1}{2}[\log(1+t) - \log(1-t)] = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \quad |t| < 1.$$

Pertanto si definisce

$$Q_0(t) := \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \quad |t| < 1.$$

Quando $\alpha = 1$, la serie (2.17) si riduce al polinomio $v = P_1$, mentre la soluzione u diventa

$$u(t) = 1 - t^2 - \frac{t^4}{3} - \frac{t^6}{5} - \dots = 1 - t\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots\right) = 1 - tQ_0(t).$$

Di conseguenza, ponendo

$$Q_1(t) := tQ_0(t) - 1, \quad |t| < 1,$$

e partendo da

$$Q_0 = P_0Q_0, \quad Q_1 = P_1Q_0 - 1,$$

è possibile dimostrare, per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$, l'esistenza di una soluzione Q_n di (2.18) della forma

$$Q_n = P_nQ_0 - p, \quad |t| < 1,$$

dove p è un polinomio di grado $n - 1$.

I risultati successivi mostrano proprio l'esistenza e l'unicità di Q_n , chiarendo anche la forma del polinomio p di grado $n - 1$.

Proposizione 2.14. *La funzione*

$$Q_n := P_nQ_0 - \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(2n-4k-1)}{(2k+1)(n-k)} P_{n-2k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 1,$$

è soluzione di (2.18).

Dimostrazione. Osservando che, posto

$$x = P_nQ_0 - p,$$

allora

$$\begin{aligned}x' &= P'_n Q_0 + P_n Q'_0 - p', \\x'' &= P''_n Q_0 + 2P'_n Q'_0 + P_n Q''_0 - p'',\end{aligned}$$

ne consegue immediatamente che

$$\begin{aligned}(L_n x)(t) &= (1-t^2)(2P'_n Q'_0 + P''_n Q_0 + P_n Q''_0 - p'') - 2t(P'_n Q_0 + P_n Q'_0 - p') + n(n+1)(P_n Q_n - p) \\&= (1-t^2)P''_n Q_0 - 2tP'_n Q_0 + n(n+1)P_n Q_0 + P_n[(1-t^2)Q''_0 - 2tQ'_0] + 2(1-t^2)P'_n Q'_n - \\&\quad + [(1-t^2)p'' - 2tp' + n(n+1)p] \\&= Q_0(t)L_n P_n(t) + P_n(t)L_0 Q_0(t) + 2(1-t^2)Q'_0(t)P'_n(t) - L_n p(t).\end{aligned}$$

Tenendo presente che, in quanto soluzioni dell'equazione di Legendre,

$$L_n P_n(t) = 0, \quad L_0 Q_0(t) = 0,$$

e che

$$Q'_0(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-t}{1+t} \right) \frac{2}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t^2}$$

implica che

$$(1-t^2)Q'_0(t) = 1,$$

allora x è soluzione dell'equazione di Legendre (2.18) se e solo se $L_n p = 2P'_n$.

Poiché

$$\begin{aligned}L_n P_j &= L_n P_j - L_j P_j \\&= [n(n+1) - j(j+1)]P_j \\&= (n-j)(n+j+1)P_j, \quad j \in \mathbb{Z}, j \geq 0,\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$L_n P_{n-2k-1} = 2(2k+1)(n-k)P_{n-2k-1},$$

si definisce Q_n come

$$Q_n := P_n Q_0 - \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(2n-4k-1)}{(2k+1)(n-k)} P_{n-2k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 1,$$

cioè della forma $Q_n = P_n Q_0 - p$, con p polinomio di grado $n-1$. Pertanto si ottiene

$$L_n p = 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2n-4k-1)P_{n-2k-1} \stackrel{(2.20)}{=} 2P'_n.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

18 2. Soluzioni per serie di sistemi lineari nell'intorno di un punto ordinario

Proposizione 2.15. *Per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, Q_n è unica.*

Dimostrazione. Si supponga che $P_n Q_0 - q$ sia un'altra soluzione di (2.18), con q polinomio di grado $n - 1$. Allora $w = q - p$ è un polinomio di grado $\leq n - 1$ che soddisfa

$$L_n w = L_n q - L_n p = 2P'_n - 2P'_n = 0.$$

Allora $w = c_0 u + c_1 v$, con $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ e u, v dati da (2.16), (2.17) con $\alpha = n$. Se n è pari, u e w sono polinomi mentre v non lo è, quindi $c_1 = 0$ e di conseguenza $w = c_0 u$. Ma $\deg(w) \leq n - 1$ e $\deg(u) = n$ implica che $c_0 = 0$. Pertanto $w = 0$, cioè $q = p$. Se n è dispari, si ragiona analogamente con u, v scambiati.

Dunque per ogni $n \geq 0$ esiste un'unica soluzione di (2.18) della forma $P_n Q_0 - p$, dove p è un polinomio di grado $n - 1$. □

Definizione 2.16. *Per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, Q_n è chiamata n -esima funzione di Legendre del secondo tipo.*

Capitolo 3

Soluzioni per serie di sistemi lineari omogenei nell'intorno di un punto singolare del I tipo

All'interno di questo capitolo viene introdotto e successivamente caratterizzato il metodo di risoluzione di sistemi come (3.1) vicino ai cosiddetti punti singolari del primo tipo, tramite l'utilizzo delle serie di potenze. Analogamente al capitolo precedente, sarà poi mostrata la sua estensione alle singole equazioni lineari di ordine n e successivamente analizzata l'equazione di Bessel, con il calcolo esplicito delle sue soluzioni.

Definizione 3.1. *Si consideri il sistema lineare omogeneo*

$$A_1(t)X' + A_0(t)X = 0. \quad (3.1)$$

Supponiamo sia possibile scrivere (3.1), in un intervallo aperto contenente $\tau \in \mathbb{R}$, nella forma

$$(t - \tau)X' = A(t)X, \quad (3.2)$$

dove $A(t)$ è una funzione analitica in $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $A(\tau) \neq 0$. In tal caso τ è chiamato punto singolare del primo tipo per (3.1).

Osservazione 3.2. Dalla definizione precedente segue che $A(t)$ ha uno sviluppo in serie di potenze

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t - \tau)^k, \quad A_k \in M_n(\mathbb{C}),$$

nel disco di convergenza $|t - \tau| < \rho$, per qualche $\rho > 0$ e $A_0 \neq 0$. Infatti, se $A_0 = 0$, dividendo (3.2) per $t - \tau$ si ottiene un'equazione a coefficienti analitici, caso già ampiamente trattato nel capitolo precedente.

Esempio 3.3. Il caso più semplice si presenta quando $A(t) = A$ e $\tau = 0$, cioè

$$tX' = AX, \quad A \in M_n(\mathbb{C}). \quad (3.3)$$

In tal caso, una soluzione di (3.3) è data da

$$X(t) = e^{A \log(t)} =: t^A, \quad t > 0.$$

Per $t < 0$,

$$X(t) = |t|^A = e^{A \log(|t|)} \quad (3.4)$$

è una base per (3.3), poiché $|t| = -t$ per $t < 0$ e

$$\frac{d}{dt} \log(|t|) = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0.$$

Pertanto è stata trovata una base per (3.3) su ogni intervallo aperto non contenente il punto singolare $\tau = 0$.

Osservazione 3.4. Sia J la forma canonica di Jordan per A , con $A = QJQ^{-1}$. Allora, per il Lemma 1.17, vale

$$X(t) = Qe^{J \log(t)}Q^{-1} = Qt^JQ^{-1}$$

e

$$Y = Qt^J$$

rappresenta un'altra base per (3.3) per $t > 0$, utilizzando il Lemma 1.10.

Per come è costruita $t^J = e^{J \log(t)}$, si può notare¹ come le colonne $Y_1, \dots, Y_n$ di Y abbiano la forma

$$Y_j(t) = e^{\lambda \log(t)} P(\log(t)) = t^\lambda P(\log(t)), \quad (3.5)$$

dove $\lambda \in \text{Spec}(A)$ di molteplicità m e P è un vettore polinomiale di grado $\leq m - 1$. In particolare, nel caso di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti con molteplicità rispettivamente $m_1, \dots, m_n$, la situazione sarà in parte semplificata in quanto è possibile scrivere ogni soluzione di (3.3) come

$$X(t) = t^{\lambda_1} P_1(\log(t)) + \dots + t^{\lambda_k} P_k(\log(t)), \quad t > 0,$$

dove P_j è un vettore polinomiale di grado $\leq m_j - 1$, con $j \in \mathbb{Z}, j \geq 1$.

Quanto appena mostrato permetterà in seguito di comprendere la forma assunta dalle soluzioni di determinate equazioni.

¹Un esempio è esplicitato in [4], p.167.

3.1 Sistemi di equazioni con punti singolari del primo tipo

Si consideri un sistema lineare del primo ordine con un punto singolare del primo tipo in τ

$$X' = \left[\frac{R}{t - \tau} + A(t) \right] X, \quad t \neq \tau, \quad (3.6)$$

dove $R \in M_n(\mathbb{C})$ e A è analitica in τ , cioè

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t - \tau)^k, \quad A_k \in M_n(\mathbb{C}),$$

convergente nel disco $|t - \tau| < \rho$, $\rho > 0$.

Il fondamentale teorema che segue evidenzia, sotto condizioni prestabilite, la possibilità di trovare soluzioni X di (3.6) della forma $X(t) = |t - \tau|^\lambda P(t)$, dove λ è un autovalore di R e P ha uno sviluppo in serie di potenze di $t - \tau$ convergente in $|t - \tau| < \rho$.

Teorema 3.5. *Sia λ un autovalore di R con la proprietà che $\lambda + k$ non sia un autovalore di R per ogni $k \in \mathbb{Z}, k > 0$. Allora (3.6) ha una soluzione X della forma*

$$X(t) = |t - \tau|^\lambda P(t), \quad 0 < |t - \tau| < \rho, \quad (3.7)$$

con

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k (t - \tau)^k, \quad P_0 \neq 0, \quad P_k \in \mathbb{C}^n, \quad |t - \tau| < \rho. \quad (3.8)$$

Inoltre, i coefficienti P_k sono univocamente determinati in dipendenza da P_0 sostituendo (3.7) e (3.8) in (3.6).

Dimostrazione. Supponendo senza perdita di generalità che $\tau = 0$, l'equazione diventa

$$X' = \left[\frac{R}{t} + A(t) \right] X, \quad (3.9)$$

con

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad |t| < \rho. \quad (3.10)$$

Sia X soluzione di (3.9) della forma

$$X(t) = |t|^\lambda P(t), \quad 0 < |t| < \rho,$$

dove

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k t^k, \quad P_0 \neq 0, \quad P_k \in \mathbb{C}^n, \quad |t| < \rho. \quad (3.11)$$

Dal momento che

$$tX'(t) = \lambda|t|^\lambda P(t) + t|t|^\lambda P'(t),$$

deve quindi valere

$$\lambda P(t) + tP'(t) - RP(t) = tA(t)P(t), \quad |t| < \rho. \quad (3.12)$$

In particolare, considerando gli sviluppi in serie di potenze nel disco di convergenza, si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda P(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda P_k t^k = \lambda P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda P_k t^k, \\ tP'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_k t^k, \quad RP(t) = RP_0 + \sum_{k=1}^{\infty} RP_k t^k, \\ tA(t)P(t) &= t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (A_{k-j} P_j) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (A_{k-1-j} P_j) t^k \end{aligned}$$

e, sostituendo in (3.12), necessariamente

$$(\lambda I_n - R)P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(\lambda + k)I_n - R]P_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j t^k.$$

Alla luce di ciò, è evidente che

$$(\lambda I_n - R)P_0 = 0 \quad (3.13)$$

$$[(\lambda + k)I_n - R]P_k = \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 1. \quad (3.14)$$

Per ipotesi, $\lambda + k$ non è un autovalore di R per nessun $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, quindi la matrice $(\lambda + k)I_n - R$ è invertibile per ogni $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Allora (3.14) diventa

$$P_k = [(\lambda + k)I_n - R]^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 1.$$

Si osserva che, una volta fissato P_0 , tutti gli altri P_k sono unicamente determinati da (3.14). Dimostrato che X è una soluzione in quanto soddisfa (3.9) per $0 < |t| < \rho$, ora occorre far vedere che la serie (3.11), con i coefficienti di P_k appena determinati, converga per $|t| < \rho$.

Dalla (3.14) segue che

$$kP_k = (R - \lambda I_n)P_k + \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 1,$$

e, conseguentemente,

$$|kP_k| \leq |R - \lambda I_n| |P_k| + \left| \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j \right|, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 1. \quad (3.15)$$

Sia $l \in \mathbb{Z}, l > 0$ tale che $|R - \lambda I_n| \leq \frac{l}{2}$; allora

$$k|P_k| \leq 2 \left| \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} P_j \right|, \quad k \geq l.$$

Poiché (3.10) converge per $|t| < \rho$, scelto r in modo che $0 < r < \rho$, esiste $M > 0$ tale che

$$|A_j| r^j \leq M, \quad j \in \mathbb{Z}, j \geq 0,$$

e

$$k|P_k| \leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} |A_{k-1-j}| |P_j| \leq 2Mr^{1-k} \sum_{j=0}^{k-1} |P_j| r^j, \quad k \geq l.$$

Sia ora $d_k \geq 0$ definito ricorsivamente come

$$\begin{aligned} d_k &= |P_k|, \quad k \in \{0, 1, \dots, l-1\} \\ kd_k &= 2Mr^{1-k} \sum_{j=0}^{k-1} d_j r^j, \quad k \geq l, \end{aligned} \quad (3.16)$$

in modo tale che

$$|P_k| \leq d_k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (3.17)$$

Alla base di ciò, per concludere la prova, occorre quindi dimostrare la convergenza assoluta per $|t| < r$ di

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$$

e successivamente utilizzare l'arbitrarietà di r in $(0, \rho)$. A partire dall'equazione (3.16), si può verificare facilmente che

$$(k+1)d_{k+1} = (2M + r^{-1}k)d_k, \quad k \geq l$$

e, inoltre, per $k \geq l$ si ottiene

$$\left| \frac{d_{k+1}}{d_k} \right| = \frac{2M}{k+1} + \frac{k}{k+1} \frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Banale conseguenza del teorema appena dimostrato è il seguente corollario.

Corollario 3.6. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di R e λ autovalore tale che*

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \max[\operatorname{Re}(\lambda_j)], \quad j \in \{1, \dots, k\}.$$

Allora esiste una soluzione X di (3.17) della forma

$$X(t) = |t - \tau|^\lambda P(t), \quad 0 < |t - \tau| < \rho,$$

dove P ha uno sviluppo in serie di potenze (3.8) convergente nel disco $|t - \tau| < \rho$ con $P(\tau) \neq 0$

Corollario 3.7. *Se R ha n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che non differiscono a due a due per un intero positivo, allora (3.17) ha una base di soluzioni $X = (X_1, \dots, X_n)$, dove gli X_j hanno la forma*

$$X_j(t) = |t - \tau|^{\lambda_j} P_j(t), \quad 0 < |t - \tau| < \rho.$$

I P_j hanno uno sviluppo in serie di potenze di $t - \tau$ convergente per $|t - \tau| < \rho$ e sono tali per cui $P_j(\tau) \neq 0$.

Dimostrazione. Poiché nella dimostrazione del Teorema 3.5, in particolare in (3.13), P_0 non rappresentava altro che l'autovettore relativo all'autovalore λ , ora i $P_j(\tau)$ sono scelti in modo tale da essere rispettivamente autovettori relativi agli autovalori λ_j ed in questo modo sono ottenute soluzioni dell'equazione (3.6). Sia X la matrice della forma

$$X(t) = P(t)|t - \tau|^S,$$

dove

$$P = (P_1, \dots, P_n), \quad S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Dal momento che gli autovettori $P_1(\tau), \dots, P_n(\tau)$ sono relativi ad autovalori distinti, essi sono linearmente indipendenti e di conseguenza formano una base di $\mathbb{C}^n$, per cui $\det(P(\tau)) \neq 0$. Per la continuità di P , $\det(P(t)) \neq 0$ per t vicino a τ , ragion per cui $X(t)$ è invertibile per t vicino a τ . Per il Teorema 1.9, X è una base di soluzioni per (3.17) per $0 < |t - \tau| < \rho$. □

Osservazione 3.8. Le equazioni (3.13),(3.14) viste nella dimostrazione del Teorema 3.5 possono fornire una soluzione non banale anche se $\lambda + m$ sono autovalori di R per certi interi positivi m . Infatti l'equazione

$$[(\lambda + m)I_n - R]P_m = \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-1-j}P_j$$

può avere soluzioni per P_m anche se $\det([(\lambda + m)I_n - R]) \neq 0$. Ciò è evidente nell'esempio seguente.

Esempio 3.9. Si prenda in considerazione il sistema

$$tX' = RX, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Immediatamente si osserva che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, che differiscono chiaramente per un intero positivo. In tal caso $P_0 = e_2$ mentre (3.14) diventa

$$[I_2 - R]P_1 = 0,$$

cioè P_1 è l'autovettore relativo a λ_1 , ossia $P_1 = e_1$. Per cui si ottiene la base

$$X = (U, V), \quad U(t) = e_1 t, \quad V(t) = e_2.$$

Il teorema successivo, limitato al solo enunciato², prende in considerazione anche il caso in cui gli autovalori non siano distinti, purché non differiscano per un intero positivo.

Teorema 3.10. *Si supponga che gli autovalori di R non differiscano a due a due per un intero positivo. Allora (3.17) ha una base X della forma*

$$X(t) = P(t)|t - \tau|^R, \quad 0 < |t - \tau| < \rho, \quad (3.18)$$

dove P ha uno sviluppo in serie di potenze, convergente nel disco $|t - \tau| < \rho$, della forma

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t - \tau)^k, \quad |t - \tau| < \rho, \quad P_0 = I_n, \quad P_k \in M_n(\mathbb{C}). \quad (3.19)$$

I coefficienti P_k possono essere calcolati in modo unico sostituendo (3.18) e (3.19) in (3.6).

3.2 Equazioni con punti singolari del primo tipo

Analogamente al capitolo precedente, i risultati visti per i sistemi lineari omogenei con punti singolari del primo tipo vengono estesi alle equazioni di ordine n .

3.2.1 Equazioni di ordine n

Definizione 3.11. *Si consideri l'equazione lineare omogenea di ordine n*

$$c_n(t)x^{(n)} + c_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + c_0(t)x = 0, \quad (3.20)$$

dove $c_j \in C(I, \mathbb{C})$ per qualche intervallo I . Sia $\tau \in I$. Se $c_n(\tau) \neq 0$, τ viene chiamato punto regolare per (3.20); in caso contrario, τ si dice punto singolare per (3.20).

²Una dimostrazione si può trovare in [4], Teorema 6.5, p.176.

Definizione 3.12. *Si consideri una equazione che può essere scritta nella forma*

$$(t - \tau)^n x^{(n)} + a_{n-1}(t)(t - \tau)^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)(t - \tau)x' + a_0(t)x = 0, \quad (3.21)$$

dove a_i sono funzioni analitiche in τ e almeno una tra $a_0(\tau), \dots, a_{n-1}(\tau)$ è non nulla. In tal caso, τ è chiamato punto singolare regolare.

Osservazione 3.13. A (3.21) è possibile associare il sistema del primo ordine

$$(t - \tau)^n Y' = A(t)Y,$$

dove x è la prima componente di Y e

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t)(t - \tau) & -a_2(t)(t - \tau)^2 & \dots & -a_{n-1}(t)(t - \tau)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se ogni a_j può essere scritto come

$$a_j(t) = (t - \tau)^{n-j-1} b_j(t), \quad j \in \{0, \dots, n-1\},$$

dove i b_j sono analitici in τ , allora τ è un punto singolare del primo tipo per tale sistema.

La rilevanza dei punti singolari regolari è evidenziata dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.14. *Esiste un sistema del primo ordine generato da (3.21) con la proprietà che τ è un punto singolare regolare per (3.21) se e solo se τ è un punto singolare del primo tipo per tale sistema.*

Dimostrazione. Sia x soluzione di (3.21). Definendo $Z = (z_1, \dots, z_n)$, le cui componenti sono date da

$$z_j(t) = (t - \tau)^{j-1} x^{(j-1)}(t), \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

allora si ottiene

$$(t - \tau)z_j' = (j - 1)z_j(t) + z_{j+1}(t), \quad j \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(t - \tau)z_n' = -a_0(t)z_1(t) - a_1(t)z_2(t) - \dots + [(n-1) - a_{n-1}(t)]z_n(t),$$

per cui Z è una soluzione del sistema

$$(t - \tau)Z' = B(t)Z, \quad (3.22)$$

dove

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & (n-1) - a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Al contrario, se Z è una soluzione di (3.22) e $x = z_1$, allora è di immediata verifica che x soddisfi (3.21). $\square$

Scrivendo (3.22) come

$$Z' = \left[\frac{R}{t-\tau} + A(t) \right] Z, \quad t \neq \tau,$$

è evidente che la matrice R abbia la seguente forma:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ -a_0(\tau) & -a_1(\tau) & -a_2(\tau) & \dots & -a_{n-2}(\tau) & (n-1) - a_{n-1}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Alla luce di quanto visto in precedenza con i sistemi lineari, è lecito aspettarsi che saranno gli autovalori di R a svolgere un ruolo cruciale circa la ricerca di soluzioni vicino a τ .

3.2.2 Le equazioni del secondo ordine

Poiché nelle applicazioni numerose equazioni rilevanti risultano essere del secondo ordine e con punti singolari regolari, si procederà ora a un'analisi dettagliata di tali equazioni. Si consideri una equazione del secondo ordine con un punto singolare regolare in $\tau = 0$,

$$t^2 x'' + a(t)tx' + b(t)x = 0, \quad (3.23)$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ hanno sviluppi in serie di potenze convergenti,

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad |t| < \rho.$$

Teorema 3.15. *Il polinomio caratteristico di (3.23) relativo a $\tau = 0$ è*

$$q(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + a_0\lambda + b_0.$$

Inoltre, se λ è un autovalore di R , allora

$$\dim(\mathcal{E}(R, \lambda)) = 1,$$

dove $\mathcal{E}(R, \lambda)$ rappresenta l'autospazio di R relativo a λ .

Dimostrazione. Poiché $n = 2$ e $a(0) = a_0$ e $b(0) = b_0$, allora

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_0 & 1 - a_0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di R è

$$p_R(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b_0 & 1 - a_0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + a_0\lambda + b_0.$$

Per quanto concerne la seconda parte dell'enunciato, sia $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ l'autovettore di R relativo all'autovalore λ con $m_a(\lambda) = 2$ (altrimenti la tesi è banalmente verificata). Dai calcoli si evince che $Rv = \lambda v$ se e solo se $v_2 = \lambda v_1$ e $p_R(\lambda)v_1 = 0$. Pertanto, poiché il vettore $v = (1, \lambda)$ costituisce una base di $\mathcal{E}(R, \lambda)$, otteniamo la tesi. $\square$

Grazie al Corollario 3.7 e al Teorema 3.10 è possibile enunciare il seguente risultato.

Teorema 3.16. *(i) Se $\lambda_1 - \lambda_2$ è diverso da zero o da un intero positivo, esiste una base $X = (x_1, x_2)$ per (3.23) con*

$$x_1(t) = |t|^{\lambda_1} p_1(t), \quad x_2(t) = |t|^{\lambda_2} p_2(t), \quad 0 < |t| < \rho,$$

dove

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{j,k} t^k, \quad j \in \{1, 2\}, \quad p_{j,k} \in \mathbb{C},$$

e tali serie convergono per $|t| < \rho$.

(ii) Se $\lambda_1 = \lambda_2$, esiste una base $X = (x_1, x_2)$ per (3.23) con

$$x_1(t) = |t|^{\lambda_1} p_1(t), \quad x_2(t) = x_1(t) \log(|t|) + |t|^{\lambda_1} p_2(t), \quad 0 < |t| < \rho,$$

dove p_1 è definito come in precedenza e

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2,k} t^k, \quad p_{j,k} \in \mathbb{C},$$

e tali serie convergono per $|t| < \rho$.

Il caso in cui $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, deriva da una variazione del Teorema 3.10; per questo motivo, viene enunciato senza dimostrazione³.

Teorema 3.17. *Se $\lambda_1 - \lambda_2$ è un intero positivo, allora esiste una base $X = (x_1, x_2)$ per (3.23) della forma*

$$x_1(t) = |t|^{\lambda_1} p_1(t), \quad x_2(t) = c x_1(t) \log(|t|) + |t|^{\lambda_2} p_2(t), \quad 0 < |t| < \rho,$$

dove

$$p_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{1,k} t^k, \quad p_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2,k} t^k, \quad p_{1,k}, p_{2,k} \in \mathbb{C},$$

con serie convergenti per $|t| < \rho$. La costante c può essere zero.

Osservazione 3.18. L'Osservazione 3.4, in cui si tiene conto dei blocchi di Jordan relativi agli autovalori non semplici, giustifica la presenza del termine logaritmico nella soluzione x_2 .

I teoremi precedenti rivestono un'importanza notevole in quanto forniscono informazioni precise riguardo alla forma che una base $X = (x_1, x_2)$ per (3.23) deve assumere. Data una specifica equazione del secondo ordine, la sostituzione di x_1 in (3.23) consente di calcolare la serie per p_1 .

Nella prossima sezione, si applicheranno le considerazioni precedenti con lo scopo di risolvere l'equazione di Bessel di ordine α , rilevante per quanto concerne i problemi riguardanti il flusso di calore e il movimento delle onde con simmetria sferica.

3.3 L'equazione di Bessel

Definizione 3.19. *L'equazione differenziale lineare del secondo ordine*

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \alpha^2) x = 0 \tag{3.24}$$

è chiamata equazione di Bessel di ordine α , dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

In questo caso $a(t) = 1$ (quindi $a(0) \neq 0$), $b(t) = t^2 - \alpha^2$, ed entrambe sono funzioni analitiche in 0: $\tau = 0$ è un punto singolare regolare per (3.24). Il polinomio caratteristico q dell'equazione in questione è

$$q(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - \alpha^2,$$

con $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$ come radici.

³Si rimanda a [1], 6.3.3, Teorema 6.10.

3.3.1 Le funzioni di Bessel di ordine zero

Si consideri il caso $\alpha = 0$ con $t > 0$; dividendo per t , si ottiene

$$(L_0x)(t) = tx'' + x' + tx = 0.$$

Si procede ora al calcolo di p_1, p_2 . Se

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

allora

$$x_1'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k,$$

$$x_1''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2},$$

e di conseguenza

$$tx_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} t^k,$$

$$tx_1''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_{k+1} t^k.$$

Dunque

$$(L_0x_1)(t) = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} ([k(k+1) + (k+1)] c_{k+1} + c_{k-1}) t^k = 0$$

è verificata, per $t > 0$, se e solo se

$$c_1 = 0, \quad (k+1)^2 c_{k+1} + c_{k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 1. \quad (3.25)$$

Scegliendo $c_0 = 1$, otteniamo

$$c_2 = -\frac{1}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{1}{2^2 4^2},$$

e più in generale

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^2 4^2 \dots (2m)^2} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 1.$$

Per (3.25), x_1 contiene solo potenze pari di t : tale funzione, denotata con J_0 , è chiamata funzione di Bessel del primo tipo di ordine zero:

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}.$$

Per $t > 0$, applicando la seconda parte del Teorema 3.16, l'altra soluzione è della forma

$$x_2(t) = J_0(t)\log(t) + p_2(t),$$

dove

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k.$$

Si effettua ora il calcolo di p_2 :

$$x_2'(t) = \frac{J_0(t)}{t} + J_0'(t)\log(t) + d_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)d_{k+1}t^k,$$

$$x_2''(t) = \frac{-J_0(t)}{t^2} + \frac{2J_0'(t)}{t} + J_0''(t)\log(t) + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)d_{k+1}t^{k-1},$$

quindi

$$(L_0 x_2)(t) = t x_2''(t) + x_2'(t) + t x_2(t) = 2J_0'(t) + d_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)^2 d_{k+1} + d_{k-1}] t^k + \log(t) L_0 J_0(t).$$

Poiché $(L_0 J_0)(t) = 0$, allora $(L_0 x_2)(t) = 0$ per $t > 0$ se e solo se è verificata

$$d_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)^2 d_{k+1} + d_{k-1}] t^k = -2J_0'(t) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m}{2^{2m} (m!)^2} t^{2m-1}.$$

Di conseguenza

$$d_1 = 0, \quad 2^2 d_2 + d_0 = 1, \quad 3^2 d_3 + d_1 = 0, \dots,$$

e, poiché la serie di $-2J_0'(t)$ contiene solo potenze pari di t ,

$$d_1 = d_3 = \dots = 0.$$

La relazione ricorsiva per gli altri coefficienti è

$$(2m)^2 d_{2m} + d_{2m-2} = \frac{(-1)^{m+1} m}{2^{2m-2} (m!)^2}, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 1.$$

Scegliendo $d_0 = 0$, otteniamo

$$d_2 = \frac{1}{2^2}, \quad d_4 = \frac{1}{4^2} \left(-\frac{1}{(2)(2^2)} - \frac{1}{2^2} \right) = -\frac{1}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right),$$

e più in generale

$$d_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m} (m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right), \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 1.$$

La soluzione ottenuta viene denotata con K_0 ed è chiamata funzione di Bessel del secondo tipo di ordine zero:

$$K_0(t) = J_0(t)\log(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}.$$

Se si fosse scelto $d_0 \neq 0$ si sarebbe trovata la soluzione $x_2 = K_0 + d_0 J_0$.

Proposizione 3.20. *Siano $\alpha = 0$ e $t > 0$. $X = \{J_0, K_0\}$ è una base per l'equazione di Bessel (3.24).*

Dimostrazione. Occorre mostrare la lineare indipendenza di J_0, K_0 . Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_2 \neq 0$, tali che

$$c_1 J_0(t) + c_2 K_0(t) = c_1 J_0(t) + c_2 J_0(t)\log(t) + c_2 p_2(t) = 0, \quad t > 0.$$

Osservando che,

$$J_0(t) \rightarrow J_0(0) = 1, \quad p_2(t) \rightarrow p_2(0) = 0, \quad \text{per } t \rightarrow 0^+,$$

si ottiene

$$|c_2 J_0(t)\log(t)| \rightarrow +\infty, \quad \text{per } t \rightarrow 0^+,$$

che è assurdo. Quindi $c_2 = 0$ e da $c_1 J_0(t) = 0$ ne consegue che $c_1 J_0(0) = c_1 = 0$, da cui la tesi. $\square$

3.3.2 Le funzioni di Bessel di ordine n

Si supponga che $\alpha \neq 0$ e $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ (in questo modo $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$ sono radici distinte e $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2)$). Per il Teorema 3.16 (i), esiste una soluzione x_1 della forma

$$x_1(t) = |t|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad c_0 \neq 0,$$

convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $t > 0$. Con calcoli analoghi al caso precedente, si ottiene che

$$(L_\alpha x_1)(t) = 0 \cdot c_0 t^\alpha + [(\alpha + 1)^2 - \alpha^2] c_1 t^{\alpha+1} + t^\alpha \sum_{k=2}^{\infty} ([\alpha + k]^2 - \alpha^2) c_k + c_{k-2} t^k = 0,$$

di conseguenza $c_1 = 0$ e

$$[(\alpha + k)^2 - \alpha^2] c_k + c_{k-2} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 2,$$

cioè

$$k(2\alpha + k) c_k + c_{k-2} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 2.$$

Considerando quanto sopra, è evidente che

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0,$$

e inoltre

$$c_2 = \frac{-c_0}{2(2\alpha + 2)} = \frac{-c_0}{2^2(\alpha + 1)},$$

$$c_4 = \frac{-c_2}{4(2\alpha + 4)} = \frac{c_0}{2^4 2!(\alpha + 1)(\alpha + 2)},$$

cioè, più in generale,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + m)}, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 1.$$

In questo modo, la soluzione x_1 è della forma

$$x_1(t) = c_0 t^\alpha + c_0 t^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}.$$

Osservando che per $\alpha = 0$ e $c_0 = 1$ essa si riduce a $J_0(t)$, abitualmente si sceglie come costante iniziale

$$c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)},$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero. La soluzione ottenuta, denotata con J_α , viene chiamata funzione di Bessel del primo tipo di ordine α . Poiché

$$\Gamma(m + \alpha + 1) = (m + \alpha)\Gamma(m + \alpha) = (m + \alpha) \cdots (1 + \alpha)\Gamma(\alpha + 1),$$

J_α può essere anche espressa come

$$J_\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0.$$

La determinazione della seconda soluzione indipendente di (3.24) è strettamente correlata al valore di $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\alpha$: se 2α non è un intero positivo, applicando il Teorema 3.16 (i), cerchiamo una soluzione della forma

$$x_2(t) = t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k,$$

che, in relazione ai calcoli precedentemente effettuati, conduce a

$$J_{-\alpha}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - \alpha + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \quad (3.26)$$

Quindi in questo caso $X = (J_\alpha, J_{-\alpha})$ è una base per l'equazione di Bessel di ordine α . Si può inoltre osservare che $\Gamma(m - \alpha + 1)$ esiste per $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, anche nel caso in cui

$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\alpha$ è un intero positivo: ciò corrisponde alla situazione particolare del Teorema 3.17 con $c = 0$.

Si procede ora all'analisi dell'ultimo caso rimanente, ossia quello in cui $\alpha = n$, con $n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Per quanto visto nel capitolo iniziale, la funzione Gamma è tale per cui

$$\frac{1}{\Gamma(m - n + 1)} = 0, \quad m \in \{0, \dots, n - 1\},$$

e, di conseguenza, da (3.26) con $\alpha = n$, si ottiene

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t), \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 1.$$

Per il Teorema 3.17, esiste una seconda soluzione x_2 della forma

$$x_2(t) = cJ_n(t)\log(t) + t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k, \quad t > 0,$$

quindi, sostituendo $x_2(t)$ nell'equazione di Bessel, è possibile ricavare i valori di c e d_k che mostreranno la seguente relazione tra c e d_0 :

$$c = \frac{d_0}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

Ponendo $c = 1$, si determina la soluzione

$$K_n(t) = J_n(t)\log(t) - r_n(t) - s_n(t),$$

dove

$$r_n(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k},$$

$$s_n(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} (h_m + h_{m+n}) \left(\frac{t}{2}\right)^{2m},$$

e

$$h_0 = 0, \quad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 1.$$

Essa è chiamata funzione di Bessel del secondo tipo di ordine n . Infine, si può osservare non solo che, per $n = 0$, $K_n(t)$ si riduce a $K_0(t)$ precedentemente determinato, ma anche che, con calcoli analoghi al caso precedente, una base per l'equazione di Bessel di ordine n è data da $X = \{J_n, K_n\}$.

Bibliografia

- [1] S. Ahmad, A. Ambrosetti: *A Textbook an Ordinary Differential Equations*, Springer, 2015.
- [2] V. Arnold: *Ordinary Differential Equations*, Springer, 2006.
- [3] W. E. Boyce: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons Inc, 2008.
- [4] E. A. Coddington, R. Carlson: *Linear Ordinary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [5] G. Teschl: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2012.

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro, vorrei ringraziare tutte le persone che mi hanno sostenuto e che hanno creduto in me durante questo percorso di crescita personale e professionale, in particolare i miei genitori, mia sorella, la mia ragazza e i miei amici. Infine desidero ringraziare profondamente la mia relatrice, Simonetta Abenda, per avermi seguito durante questi mesi, supportandomi ed incoraggiandomi sempre.