

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Materia Degenerare: Fisica ed Applicazioni Astrofisiche

Tesi di Laurea

Presentata da:
Mele Angelo

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2023-2024
Appello II

Indice

1	Introduzione	2
2	Materia Degenera	3
2.1	Materia non Degenera	3
2.1.1	Considerazioni di Meccanica Statistica Classica	3
2.1.2	Condizione di non degenerazione	3
2.1.3	Gas perfetti	4
2.2	Gas degeneri	5
2.2.1	Particelle fermioniche e bosoniche	5
2.2.2	Gas di Fermioni degeneri	6
2.2.3	Gas di elettroni completamente Degenera	7
3	Applicazioni Astrofisiche	9
3.1	Evoluzione Stellare	9
3.1.1	Modello di stella	9
3.1.2	Equazione di stato della materia stellare	10
3.1.3	Degenerazione negli stadi finali dell'Evoluzione Stellare	11
3.2	Nane Bianche	12
3.2.1	Proprietà fisiche	13
3.2.2	Proprietà termiche	14
3.2.3	Supernove Ia	16

Capitolo 1

Introduzione

Nell'elaborato vengono affrontati argomenti che riguardano insiemi di particelle in numero finito ed arbitrariamente grande, caratterizzate ognuna da uno stato fisico costituito da un'energia, un'impulso e una posizione. Generalmente, questi sistemi sono considerati in fase aeriforme affinché si trascurino le interazioni tra le loro componenti. Date queste premesse e soddisfatte alcune condizioni fisiche (densità, temperatura e popolazione dei livelli energetici) allora un gas può essere trattato nell'ambito della Meccanica Classica in quanto non degenerare. Sarà in particolare discusso il gas perfetto, descrivendone l'Equazione di Stato e la distribuzione delle velocità delle particelle. In seguito, sono presentati gli effetti quanto-meccanici dati da proprietà delle particelle dei gas degeneri, come lo spin. Viene esposto come cambiano la pressione, le distribuzioni di energia e quantità di moto in caso di gas degeneri formati da elettroni.

In seguito, viene dato spazio all'importanza della degenerazione nell'evoluzione di un semplice modello di stella. Più precisamente, viene spiegato come il gas di elettroni negli interni passa da perfetto a degenerare e cosa questo implica nello sviluppo della struttura stellare. Viene poi costruito un diagramma per riconoscere lo stadio evolutivo di una stella e la presenza o meno di degenerazione nel suo nucleo. Segue poi una rassegna degli scenari che portano alla formazione di strutture sorrette dalla pressione di un gas degenerare: le stelle di neutroni, le nane brune e bianche. Queste ultime saranno descritte iniziando dalla loro composizione chimica. Verrà evidenziato il ruolo del gas degenerare per stabilire le masse possibili per una nana bianca, oltre che le modalità di trasporto interno di energia e il raffreddamento. Il destino finale delle nane bianche viene esposto mediante una descrizione delle Supernove Ia che tiene conto degli scenari di accrescimento della massa stellare.

Capitolo 2

Materia Degenera

2.1 Materia non Degenera

2.1.1 Considerazioni di Meccanica Statistica Classica

Un sistema non degenera qualsiasi viene considerato come un insieme di N sotto-sistemi, ciascuno avente un proprio Spazio delle Fasi (SdF) costituito dai vettori $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, dove la posizione \mathbf{x} e l'impulso \mathbf{p} sono vettori \mathcal{N} -dimensionali¹. Se il sistema è un gas, i sotto-sistemi saranno particelle (atomi o molecole). Nell'ambito della Meccanica Statistica Classica, le N sotto-parti sono considerate *distinguibili*: ciascuna di esse è caratterizzata da una posizione ed impulso iniziali. Quindi il moto di un sotto-sistema è sempre distinto rispetto agli altri. Data la distinguibilità, lo stato fisico del gas varia dopo che due sotto-sistemi \mathbf{i} e \mathbf{j} si scambiano \mathbf{z}_i e \mathbf{z}_j . Di conseguenza, lo SdF dell'intero sistema sarà dato dalle N -ple $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$.

Inoltre, gas non degeneri sono studiati nella condizione del **Limite nel Continuo**, per il quale il volume V ² da loro occupato è arbitrariamente grande. In tale condizione, i sotto-sistemi assumono valori di energia ϵ reali e continui. Tuttavia, come fece Boltzmann per il calcolo di alcune quantità dinamiche [1], l'energia può essere discretizzata in livelli $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\alpha, \dots\}$ ognuno avente una popolazione di n_α particelle e corrispondente ad una molteplicità g_α di stati diversi.

Per di più, gli scambi di energia tra particelle di un gas non degenera possono avvenire in un tempo τ_{int} molto più piccolo del tempo libero medio τ_{lib} tra due urti successivi³.

2.1.2 Condizione di non degenerazione

Tramite un calcolo probabilistico[1], un gas rimane non degenera se è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad \forall \alpha. \quad (2.1)$$

Dunque, si avrà un numero di particelle aventi un fissato valore di energia ϵ_α che non occuperanno mai tutti gli stati disponibili per quel livello, qualunque esso sia. Come vedremo nella Sezione (2.2), questa condizione fisica finisce di valere per insiemi di particelle che vengono descritti nell'ambito della Meccanica Quantistica, dove valgono il

¹ \mathcal{N} è il numero di gradi di libertà.

²Il volume V sarà sempre considerato in cm^3

³Se vale questa condizione, ogni particella costituisce un sistema Canonico. Un urto tra sistemi Canonici è uno scambio finito di energia, sotto forma di calore, in un tempo infinitesimo. [1]

Principio di Esclusione e quello d'Indeterminazione. Inoltre, gli effetti quantistici possono essere trascurati quando la lunghezza d'onda termica λ delle particelle ⁴ è minore della loro distanza media d [2], ovvero se vale

$$\lambda < d \iff \frac{h_p}{\sqrt{2m\kappa T}} < \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi N}} \iff \frac{T}{\rho^{2/3}} m > 2.4 \cdot 10^{-22} K \cdot cm^2 \cdot g. \quad (2.2)$$

Dalla condizione appena trovata notiamo che, fissata T , più è piccola la massa m delle particelle minore sarà la densità ρ che il gas necessita per raggiungere la degenerazione. In particolare, la relazione (2.2) risulterà importante per stabilire quale componente del plasma negli interni stellari smette per prima di comportarsi come una specifica tipologia di gas non degeneri: il gas perfetto.

2.1.3 Gas perfetti

Nel Limite del Continuo, si può definire per ogni sotto-sistema di un gas non degeneri una funzione di distribuzione canonica [1]

$$\rho_c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{e^{-\beta h(\mathbf{x}, \mathbf{p})}}{\int d\mathbf{x}' d\mathbf{p}' e^{-\beta h(\mathbf{x}', d\mathbf{p}')}}, \quad (2.3)$$

dove $\beta = 1/\kappa T$. L'Hamiltoniana $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ fornisce l'energia conservata della n -sima particella avente SdF $\{\mathbf{z}_n\}$. Il prodotto $\rho_c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p}$ rappresenta la probabilità che la particella si trovi nel volume infinitesimo $d\mathbf{x} d\mathbf{p}$ centrato nel punto (\mathbf{x}, \mathbf{p}) dello SdF.

Il modello del gas perfetto risulta costituito da un insieme di N corpi distinguibili, puntiformi, aventi ciascuno massa m e non soggetti a forze. Dunque, l'Hamiltoniana di ogni particella sarà data da $h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$. La distribuzione canonica di una singola particella potrà essere calcolata tramite la (2.3) e risulta avere la seguente forma:

$$\rho_c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{e^{-\beta \mathbf{p}^2/(2m)}}{V(2\pi m\kappa T)^{3/2}}. \quad (2.4)$$

Facendo l'integrale della (2.4) sul volume occupato dal gas, si ottiene la distribuzione $\rho_p(\mathbf{p})$ dell'impulso della particella. In seguito ad un cambio di variabile [1], dalla $\rho_p(\mathbf{p})$ si ricava la distribuzione di probabilità del modulo v della velocità di una particella:

$$\rho_v(v) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\beta m v^2/2}. \quad (2.5)$$

Se la Distribuzione di Maxwell-Boltzmann (2.5) viene moltiplicata per N/V , essa darà il numero $N(v)$ di particelle del gas (su unità di volume) ad una data velocità v e il massimo sarà in corrispondenza di $v_{max} = \sqrt{2\kappa T/m}$. In figura (2.1) si nota che se la T aumenta, cresce il numero di particelle con v vicino al picco v_{max} , che si abbassa, mentre la distribuzione si allarga. Dunque, la temperatura determina la disposizione delle velocità delle particelle e viceversa. Volendo poi trovare una formula per la pressione P esercitata dal gas, se si svolge il seguente integrale [2]

$$P = \frac{m}{3} \int_0^\infty (N/V) \rho_v(v) v^2 dv, \quad (2.6)$$

⁴Nella formula di λ compaiono la costante di Boltzmann $\kappa = 1.383 \cdot 10^{-16}$ erg/K e quella di Planck $h_p = 6.626 \cdot 10^{-27}$ erg · s

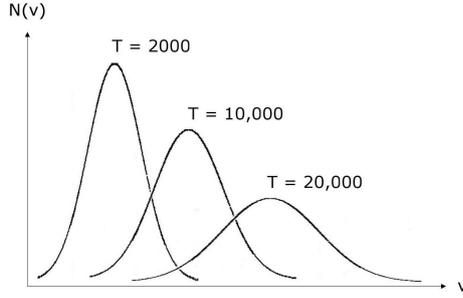


Figura 2.1. Distribuzione di Maxwell-Boltzmann $N(v) = (N/V)\rho_v(v)$ a diverse temperature [2].

troviamo l'Equazione di Stato dei gas perfetti:

$$P_{gas\ perf} = (N\kappa T)/V = \frac{\rho\kappa T}{\mu_p m_H}, \quad (2.7)$$

dove ρ è la densità del gas, μ_p il peso molecolare medio⁵ e m_H la massa del protone.

2.2 Gas degeneri

2.2.1 Particelle fermioniche e bosoniche

I componenti di un gas degenerare sono particelle dotate di un numero quantico s chiamato *spin*. Nel caso in cui le particelle seguano la statistica di Fermi-Dirac esse sono chiamate Fermioni e possiedono valori semi-interi dello spin ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$). Se la statistica è invece di Bose-Einstein, esse sono Bosoni e hanno spin intero ($s = 0, 1, 2, \dots$). Allo spin è anche associato il numero quantico m_s , della terza componente lungo l'asse z , con $2s + 1$ possibili valori ($m_s = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$). I sistemi degeneri che verranno considerati saranno formati da N particelle *identiche*, ovvero aventi stesse proprietà (massa, carica, spin ecc.). In meccanica classica, l'identità tra i sotto-sistemi non esclude la loro distinguibilità, ovvero il poter ricostruire il loro moto da condizioni iniziali. Tuttavia, nel contesto della Meccanica Quantistica, il Principio d'Indeterminazione implica l'*indistinguibilità* di particelle identiche: la posizione \mathbf{x} e l'impulso \mathbf{p} avranno rispettivamente un'incertezza $\Delta\mathbf{x}$ e $\Delta\mathbf{p}$ ad ogni istante di tempo; quindi, ciascuna particella non avrà una traiettoria definita da poter essere identificata precisamente. Del resto, se venissero localizzate tutte le N particelle con una incertezza nulla su \mathbf{x} , in un istante successivo non sarebbero identificabili e non si saprebbe quale tra di esse è andata ad occupare una delle posizioni finali [3]. Dal Principio d'Indeterminazione segue, inoltre, che l'incertezza della posizione e dell'impulso lungo la stessa direzione sono legate nel seguente modo: $\Delta x_n \Delta p_n \geq h_p \forall n = 1, \dots, \mathcal{N}$. Di conseguenza, il continuo di punti dello SdF sarà sostituito da un insieme di volumi, ciascuno centrato in un punto \mathbf{z} e avente un valore minimo pari a $h_p^{\mathcal{N}}$.

Sempre in Meccanica Quantistica, le informazioni sullo stato fisico di una particella saranno deducibili dalla sua funzione d'onda ψ che dipende non solo dallo spin, ma anche dai vettori posizione \mathbf{x} e quantità di moto \mathbf{p} , quindi $\psi = \psi(\xi) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, s)$. Considerando di nuovo il sistema di N particelle identiche, lo scambio dell' i -esima particella con la j -esima corrisponde ad applicare l'operatore \mathbf{P}_{ij} alla funzione d'onda del sistema $\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$. Poichè $\mathbf{P}_{ij}^2 = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} operatore identità), allora gli autovalori possibili sono

⁵Per distinguerlo dal potenziale chimico μ (Sotto-Sezione 2.2.2), il peso molecolare medio è indicato con μ_p . Il pedice p viene usato quando non è specificata nel testo la tipologia di particelle del gas; altrimenti, si usa una lettera diversa.

± 1 . Un'autofunzione con autovalore $+1$ rimane invariata per scambio di particelle risultando simmetrica e descrive un sistema formato da bosoni. Invece, se le N particelle fossero fermioni, allora l'autofunzione complessiva sarebbe antisimmetrica (autovalore -1). Inoltre, si osserva che se due tra gli N fermioni sono nello stesso stato (cioè aventi stessi numeri quantici) un loro scambio comporterebbe che l'autofunzione del sistema è uguale a meno se stessa, quindi nulla [4]. Di conseguenza, vale il *Principio di Esclusione* di Pauli, per il quale in un sistema di fermioni identici non più di due particelle possono occupare lo stesso stato. Dato un fermione con una proiezione m_s e una certa energia, esso occuperà un volume minimo dello Spazio delle Fasi pari a $h^N/(2s+1)$. Riguardo ai bosoni, questi possono occupare stati di stessi numeri quantici, disponendosi nello stesso volume. Nel seguito della trattazione considereremo solo i gas degeneri composti da fermioni, in particolare da elettroni, in quanto hanno un ruolo principale negli interni stellari (Sotto-Sezione 3.1.3).

2.2.2 Gas di Fermioni degeneri

Stando alla Meccanica Statistica, a partire da una Funzione di Partizione Canonica Z_c , si può definire una Funzione di Stato chiamata Energia Libera di Helmholtz Φ :

$$\Phi = \Phi(T, V) = -\kappa T \ln Z_c = E - TS, \quad (2.8)$$

con E energia media e S entropia del sistema [1]. Tramite la funzione Φ , introduciamo il potenziale chimico μ ⁶, dato dalla seguente derivata:

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T, V}. \quad (2.9)$$

Dall'ultima espressione notiamo che μ ha il ruolo di energia libera da fornire (o sottrarre) al gas per inserire un altro sotto-sistema, mentre la temperatura e il volume rimangono costanti. Per un gas degenere di fermioni il potenziale risulta essere [1]

$$\mu = \epsilon_\alpha - \kappa T \ln \left[\frac{g_\alpha}{n_\alpha} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

Dalla formula appena trovata, abbiamo il numero di particelle dell' α -esimo livello ϵ_α di degenerazione g_α :

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} + 1}. \quad (2.11)$$

La formula appena ricavata consente di considerare l'espressione $\exp(-\beta\mu) \gg 1$ come una riscrittura della (2.1) per la non degenerazione. Dividendo la (2.11) per g_α , si definisce una Funzione di Occupazione (FdO) che fornisce la percentuale di stati occupati per una certa energia. La formula della FdO (nel Limite del Continuo) risulta essere

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (2.12)$$

e viene definito Livello energetico di Fermi ϵ_F come

$$\epsilon_F \equiv \lim_{T \rightarrow 0K} \mu(T). \quad (2.13)$$

⁶Il potenziale Chimico caratterizza sistemi Gran-Canonici, i quali possono scambiare con l'ambiente esterno sia calore che particelle. N risulterà quindi una variabile come lo sono P , T e V . Un sistema canonico è anche suddivisibile in N sistemi canonici [1].

La FdO tende ad essere la funzione gradino in figura (2.2), dove $F(\epsilon_F, 0) = 1/2$. In presenza di una qualsiasi temperatura non nulla i fermioni di un gas degenere riempiono maggiormente i livelli energetici più bassi, partendo da $\epsilon = 0$ e seguendo il Principio di Esclusione (Curva C). Se T diminuisce, il gas si dovrà portare in una condizione di energia ancora più bassa e le particelle dovranno occupare livelli energetici minori. Allo stesso tempo, aumenterà il valore di ϵ che rende $F(\epsilon, T) = 1/2$ e diminuiranno i fermioni ad energie superiori (Curva B). Inoltre, μ sarà sempre più positivo. A $T = 0$, il gas è in una condizione di energia minima possibile e si definisce come *completamente* degenere, essendo occupati tutti i livelli inferiori a ϵ_F (Curva A). Per la (2.10) il potenziale chimico sarà pari a ϵ_F . Si può notare che, se la temperatura aumenta, allora $\mu \rightarrow 0$ o $\mu < 0$, ovvero inizierà a valere la Condizione di Non Degenerazione $\exp(-\beta\mu) \gg 1$. La FdO avrà un andamento esponenziale e descriverà un gas non degenere di fermioni (Curva D).

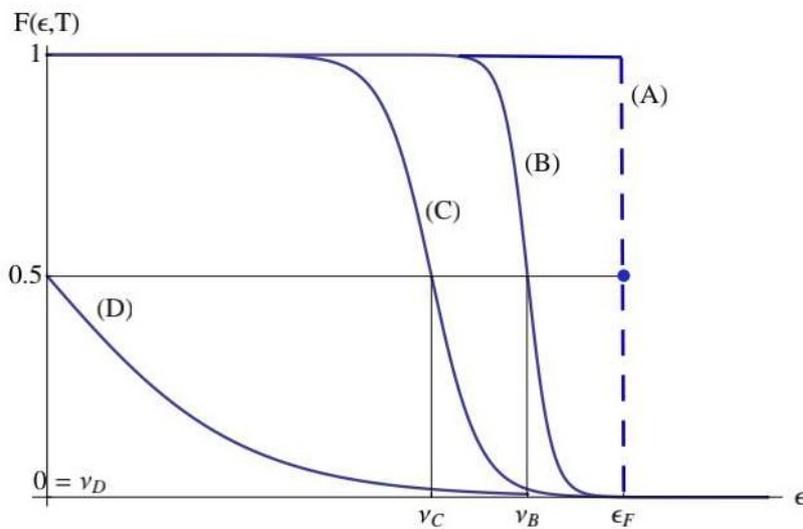


Figura 2.2. Funzione di Occupazione (2.12) per una gas:

- totalmente degenerate $T = 0$ (curva A);
- parzialmente degenerate (curve B e C) dove $T_B < T_C$;
- non degenerate (curva D).[1]

2.2.3 Gas di elettroni completamente Degenerere

Preso in considerazione un gas di N_e elettroni, moltiplichiamo la FdO [5] per

$$n(p)dp = \frac{2}{h_p^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{8\pi}{h_p^3} p^2 dp, \quad (2.14)$$

che è il numero di particelle (su unità di volume) che occupano la calotta sferica $4\pi p^2 dp$ nello Spazio degli Impulsi (p_x, p_y, p_z) ⁷. Notiamo che in questo spazio lo stato di un elettrone con impulso \mathbf{p} e $m_s = \pm(1/2)$ può occupare un volume minimo pari a $h_p^3/2$.

Si ottiene la distribuzione di Fermi-Dirac

$$N_p dp = \frac{8\pi p^2 dp}{h_p^3 [e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1]}, \quad (2.15)$$

che fornisce il numero di elettroni (su volume V) aventi modulo dell'impulso \mathbf{p} tra p e $p + dp$. Per tenere conto degli effetti della densità, la distribuzione di Fermi-Dirac è anche

⁷Lo Spazio degli Impulsi è un sotto-spazio di quello delle Fasi e, in questo caso, $\mathcal{N} = 3$. Nella (2.14) siamo passati dalle coordinate cartesiane a quelle sferiche, tenendo anche in conto che $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

espressa nella seguente forma

$$N_p dp = \frac{8\pi p^2 dp}{h_p^3 [e^{\beta(\epsilon - \kappa T \Psi)} + 1]}, \quad (2.16)$$

dove Ψ è il parametro di degenerazione⁸ tale che $\Psi \propto \beta(N_e/V)^{(2/3)}$ [2]. Il ruolo di Ψ è quello di dare informazioni su quanto è degenere il gas, infatti:

- Se a temperatura fissa N_e assume valori arbitrariamente grandi, allora $\Psi \rightarrow \infty$. Gli elettroni raggiungeranno una completa degenerazione e la loro distribuzione $N_p dp$ è uguale al secondo (o al terzo) membro della (2.14). Questa condizione è anche raggiungibile per basse temperature (precisamente per $T = 0$); tuttavia, quest'ultima situazione non si presenta in un contesto astrofisico (Sezione 3.1);
- Quando $-4 < \Psi < \infty$ e T sempre fissa il gas sarà parzialmente degenere. Così come per la degenerazione totale, l'occupazione dei livelli energetici non sarà dettata dalla temperatura, ma partirà da quelli vuoti e più bassi, seguendo il principio di Esclusione.
- In condizioni di bassa densità elettronica, il parametro Ψ tenderà ad essere negativo e il gas non sarà degenere. Per $\Psi \approx -4$ la distribuzione (2.16) diventa quella di Maxwell-Boltzmann (Figura 2.1) in funzione del modulo dell'impulso $p = m_e v$.

Per trovare l'impulso massimo (di Fermi) p_F , va considerata la densità numerica n_e del gas completamente degenere la quale avrà come formule

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h_p^3} p^2 dp = \frac{8\pi p_F^3}{3h_p^3}, \quad n_e = N_e/V = \frac{\rho}{\mu_e m_H} \quad (2.17)$$

dalle quali segue che

$$p_F = \sqrt[3]{\frac{3h_p^3 n_e}{8\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3h_p^3 n_e \rho}{8\pi \mu_e m_H}}. \quad (2.18)$$

Mettendo nella (2.6), dove $p = mv$, la distribuzione data da (2.14), otteniamo la pressione esercitata dal gas completamente degenere

$$P_{Deg} = 10^{13} (\rho/\mu_e)^{5/3} = k_1 \rho^{5/3}. \quad (2.19)$$

L'espressione appena ottenuta è valida solo nel caso in cui gli elettroni si muovono a velocità non relativistiche ($p_F \ll m_e c$). In caso contrario, ovvero se $p_F \sim m_e c$ ⁹, allora l'integrale da svolgere [2] darà il seguente risultato

$$P_{Deg,Rel} = \frac{8\pi}{3mh_p^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 dp}{\sqrt{1 + (p/(m_e c))^2}} = \dots = 1.2 \cdot 10^{15} (\rho/\mu_e)^{4/3} = k_2 \rho^{4/3}. \quad (2.20)$$

⁸Confrontando la (2.16) con la (2.15), Ψ risulta essere uguale a $\beta\mu$ [6].

⁹ $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s è la velocità della luce nel vuoto.

Capitolo 3

Applicazioni Astrofisiche

3.1 Evoluzione Stellare

3.1.1 Modello di stella

Una stella si origina a partire dal collasso di una nube di gas che raggiunge una massa paragonabile a quella di Jeans. Poiché la nube si comprime, la sua densità aumenta assieme al moto termico delle particelle e, quindi, alla temperatura. La forza di pressione del gas F_{press} compenserà sempre di più quella di gravità F_{grav} , rallentando il collasso. Quando le due forze si bilanciano ($|F_{grav}| = |F_{press}|$), in ogni punto a distanza r dal centro della stella vale l'Equazione dell'Equilibrio Idrostatico [2]

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho, \quad (3.1)$$

dove G è la costante di Gravitazione universale e $M(r)$ è la massa contenuta in una sfera di raggio r . Siccome la struttura stellare è in equilibrio, allora l'energia termica T del gas sarà legata a quella potenziale gravitazionale U tramite il Teorema del Viriale:

$$2T = -U. \quad (3.2)$$

Il gas caldo della stella irraggerà parte della sua energia totale $E = T + U$ supportando la luminosità superficiale L in tempi-scala definiti termo-dinamici. Utilizzando la (3.2), una variazione $\Delta E < 0$ risulta essere

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = -\Delta T = (\Delta U)/2. \quad (3.3)$$

Di conseguenza, il gas si contrae ($\Delta U = 2\Delta E < 0$) e si scalda ($\Delta T = \Delta E > 0$). Il continuo irraggiamento fa aumentare la densità ρ_c e la temperatura T_c del nucleo fino ad innescare a $10^7 K$ le reazioni termo-nucleari di combustione dell'idrogeno. Da questo momento la stella viene detta di *sequenza principale* (MS). In tempi scala termo-nucleari, l'energia prodotta dalle reazioni sosterrà L e compenserà l'irraggiamento. La contrazione viene perciò rallentata e la temperatura degli interni rimane costante. Quando l'idrogeno viene esaurito, inizia un'altro tempo termo-dinamico durante il quale l'aumento di T_c scalda i gusci ("shell") adiacenti al nucleo, facendo partire in essi le reazioni di fusione di H. Per mantenere l'equilibrio idrostatico la struttura smaltisce l'energia dell'irraggiamento e delle reazioni ed espande l'involuppo esterno. La stella diventa una *gigante rossa*. Raggiunta la temperatura $T_c \approx 10^8 K$ iniziano le reazioni 3α per la combustione dell'elio.

La successione tra i tempi-scala termo-dinamico e termo-nucleare può essere interrotta quando la stella non possiede una massa sufficiente per iniziare le reazioni di fusione. In tal caso, il nucleo raggiunge prima una condizione di completa degenerazione. La pressione (2.19) o (2.20) del gas sostiene il nucleo, impedendone la contrazione. La crescita della T_c sarà quindi fermata e le successive reazioni di fusione non saranno raggiunte. Più la massa della stella è piccola, più grande sarà la densità del nucleo [7] e, di conseguenza, la degenerazione sarà raggiunta molto prima.

3.1.2 Equazione di stato della materia stellare

Data l'elevata temperatura, gli interni stellari sono composti principalmente da ioni, elettroni e radiazione composta da fotoni e diretta verso l'esterno. Ciascuna di queste componenti eserciterà una pressione opposta alla forza di gravità, in particolare la pressione totale P è data da:

$$P = P_{rad} + P_{ion} + P_e, \quad (3.4)$$

dove P_{rad} è la pressione dei fotoni uscenti dalla stella

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3}, \quad (3.5)$$

con $a = 7.56 \cdot 10^{-15} \text{ erg}/(\text{cm}^3 \text{K}^4)$. Le due componenti del plasma (ioni ed elettroni) generalmente si comportano come gas perfetti (2.7), ma esse potrebbero diventare completamente degeneri. Fissata T e dato che $m_e < m_{ioni}$, dalla (2.2) si deduce che il gas di elettroni necessita di densità molto più piccole, rispetto a quello di ioni, per raggiungere la condizione di degenerazione totale. Perciò, quando il gas di elettroni diventa completamente degeneri la P_{ioni} sarà trascurabile rispetto a P_e e quest'ultima sorreggerà la struttura degli interni.

Data la densità del nucleo e la sua temperatura, possiamo identificare la fase evolutiva di una stella tramite un diagramma $\log \rho_c - \log T_c$ (Figura 3.1), che si presenta diviso nelle seguenti quattro aree:

- la regione al di sopra della retta

$$P_{gas\ perf,e} = P_{rad} \iff \log T = (\log \rho)/3 + 7.57 \quad (3.6)$$

che indica una pressione di radiazione maggiore rispetto a quella del gas perfetto di elettroni. P_{rad} può essere trascurata negli interni stellari per via delle alte densità e quindi la traccia evolutiva di una stella nel diagramma non finirà generalmente in questo regime;

- il luogo dei punti (ρ_c, T_c) che soddisfano l'equazione $P_{gas\ perf,e} > P_{rad}$. La pressione negli interni qui è dovuta soprattutto ad un gas perfetto di elettroni. Inoltre, (ρ_c, T_c) corrisponderà ad un punto sopra le seguenti relazioni

$$P_{gas\ perf,e} = P_{Deg,e} \iff \log T = (2 \log \rho)/3 + 4.88, \quad (3.7)$$

$$P_{gas\ perf,e} = P_{Deg,Rel,e} \iff \log T = (\log \rho)/3 + 7.07; \quad (3.8)$$

- l'insieme dei punti tali che $P_{gas\ perf,e} < P_{Deg,e}$ e $\log \rho < 6.6$. Il gas sarà degeneri non relativistico. Il punto (ρ_c, T_c) appartiene alla regione a sinistra della seguente retta

$$P_{Deg,e} = P_{Deg,Rel,e} \iff \log \rho = 6.6; \quad (3.9)$$

- la parte del diagramma che segue le relazioni $P_{gas\ per\ f,e} < P_{Deg,Rel,e}$ e $\log \rho > 6.6$. Nel nucleo sarà presente un gas di elettroni degenerare relativistico.

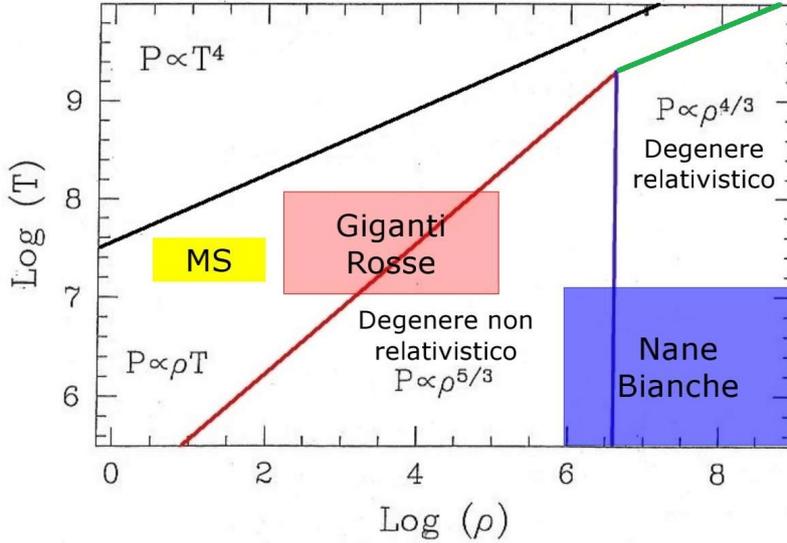


Figura 3.1. Diagramma $\log \rho - \log T$.

Alcune aree del grafico mostrano le coppie di punti (ρ_c, T_c) per 3 fasi evolutive (stella di MS, gigante rossa, nana bianca). Inoltre, vengono mostrate quattro relazioni con colori diversi: **nero** - (3.6), **rosso** - (3.7), **verde** - (3.8), **blu** - (3.9).

[2]

3.1.3 Degenerazione negli stadi finali dell'Evoluzione Stellare

Come già espresso all'inizio della Sezione 3.1, la massa M della stella ricopre un ruolo fondamentale nella sua storia evolutiva, determinando il momento in cui il nucleo diventa degenerare. Inoltre, in base ad M le stelle andranno incontro a determinati processi ed eventi astrofisici, che daranno luogo ad un particolare residuo ("remnant") finale. Gli scenari evolutivi che portano a strutture finali degeneri sono i seguenti:

1. Stelle aventi massa $< 0.08M_{\odot}$ ¹ non avranno abbastanza gravità e non raggiungeranno la temperatura d'innesco dell'idrogeno. La struttura diventerà parzialmente degenerare [6] e si raffredderà. L'oggetto finale viene definito *nana bruna*;
2. Dopo l'esaurimento dell'H, il nucleo raggiunge la degenerazione elettronica se $M < 0.5M_{\odot}$. Gli interni si raffredderanno diventando una *nana bianca* di He;
3. Se $0.5 < M/M_{\odot} < 2.2$, allora l'elio si accende in un ambiente degenerare. In un evento breve, chiamato *Flash di elio* [8], il nucleo si espande e diminuisce la sua densità fino a rimuovere la degenerazione elettronica. In seguito, la contrazione del nucleo potrà ripartire e porterà alla combustione dell'He. Il nucleo di carbonio che si forma andrà incontro a degenerazione. A causa dell'energia rilasciata dall'irraggiamento e dalla combustione dell'H in shell, l'involuppo esterno si espande per poi essere espulso. Si forma quindi una *Nebulosa Planetaria*, al centro della quale è presente una nana bianca di carbonio ed ossigeno. Questo stadio finale caratterizza anche le stelle aventi massa tale da sviluppare un nucleo non degenerare di He ($2.2 < M/M_{\odot} < 8$);
4. Nel caso in cui M ricada nel piccolo intervallo $9 < M/M_{\odot} < 11$, la stella svilupperà un nucleo parzialmente degenerare che permette solo l'accensione del carbonio, non dell'ossigeno. Il residuo finale sarà una nana bianca di Ossigeno e Neon.

¹La massa del Sole è $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33}g$

5. Stelle di massa $> 11M_{\odot}$ riusciranno a raggiungere le fasi di bruciamento di O, Ne e silicio, andando infine a costituire un nucleo di Fe^{56} . La temperatura del nucleo arriva ad un valore tale ($T_c \approx 5 - 10 \cdot 10^9 K$) che inizia la fotodisintegrazione dei nuclei di Ferro e di He [2]. I protoni prodotti reagiscono con gli elettroni e vengono originati neutroni tramite il processo URCA ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$). La perdita di elettroni genera quindi un collasso della struttura stellare (nucleo ed atmosfera). Negli interni, quando i nucleoni si avvicinano, la forza forte li respinge. In seguito, il nucleo subirà un rimbalzo, incontrando quindi la materia sovrastante in caduta. Un'onda d'urto si propagherà verso l'esterno, spazzando via l'involuppo. Questo evento viene identificato come supernova *core-collapse* e può essere di tre tipologie (II, Ib o Ic) a seconda delle loro righe spettrali.

Nel caso in cui la stella abbia avuto una massa minore di $25M_{\odot}$ [8], il nucleo darà infine origine ad una *stella di neutroni*, sostenuta maggiormente dalla pressione di un gas degenere di neutroni. Se la massa della stella è più grande, il collasso continuerà portando alla formazione di un *buco nero*.

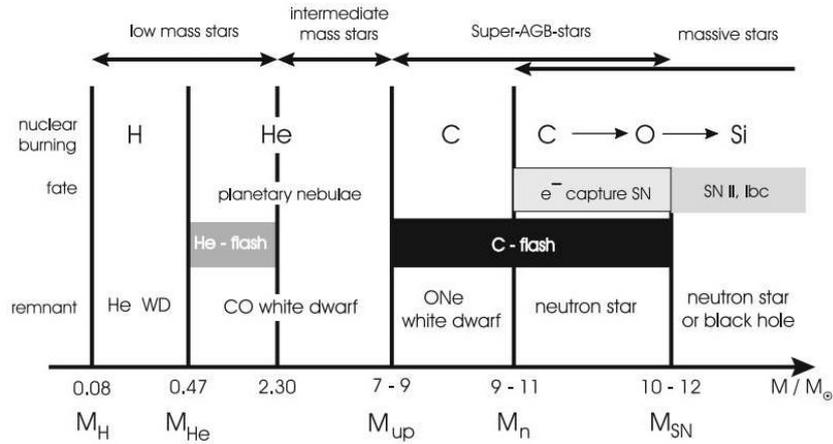


Figura 3.2. Schema riassuntivo degli intervalli di masse stellari. Partendo dall'alto sono indicati le tipologie di stelle, l'ultimo elemento innescato, il destino evolutivo e il residuo finale. M_H , M_{He} , M_{up} , M_n e M_{SN} sono rispettivamente le masse stellare minime per innesco di H, He e C, per la formazione di una stella di neutroni e per un'esplosione di supernova *core-collapse*. I limiti di massa dipendono dalla composizione iniziale e da calcoli dettagliati (si veda [9]).

3.2 Nane Bianche

Dopo che stelle aventi massa tra 0.08 e $11M_{\odot}$ hanno sviluppato un nucleo elettronicamente degenere e perso gli strati più esterni, il residuo finale viene identificato con il nome di *nana bianca*. Gran parte delle masse di nane bianche osservate appartengono ad uno stretto intervallo attorno a $0.6M_{\odot}$ [10]. Dato che la massa stellare M minima per innescare l'elio è $0.45M_{\odot}$, la maggior parte di questi oggetti presenteranno una composizione di ioni di carbonio e ossigeno. Facendo riferimento agli scenari descritti nella Sotto-Sezione (3.1.3), la restante parte delle nane bianche possono essere composte da He (con masse $M_{WD} < 0.45M_{\odot}$) o da O-Ne, aventi $M_{WD} > 1.2M_{\odot}$.

Gran parte della massa della nana bianca sarà costituita dal gas degenere di elettroni e da quello perfetto di ioni (generalmente di C ed O). Invece, i sottili strati superficiali

presentano una separazione di elementi dovuta alla forte gravità. Per nane bianche di C-O [8] vengono previsti uno strato più esterno, composto da idrogeno e avente massa $\approx 10^{-4}M_{WD}$, oltre ad uno sottostante di He, con $M_{He} \approx 10^{-2}M_{WD}$. Inoltre, una nana bianca presenta un raggio R_{WD} simile a quello del Sole $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$ cm.

3.2.1 Proprietà fisiche

La struttura interna di una nana bianca è mantenuta in equilibrio idrostatico dalla pressione di un gas degenere di elettroni, i quali compensano la forza di gravità. I livelli energetici disponibili saranno occupati dagli elettroni secondo la Funzione di Occupazione (2.12) con $T \neq 0$. Anche se la temperatura degli interni non è nulla, si assume una completa degenerazione elettronica a causa delle alte densità interne della nana bianca (Figura 3.1). A partire da queste considerazioni, la pressione P_c al centro della stella [11] può essere trovata integrando la (3.1):

$$P_c = (2/3)\pi G \rho^2 R_{WD}^2. \quad (3.10)$$

Eguagliando l'ultima espressione a (2.19), troviamo quindi la relazione che collega la massa della nana bianca con il suo raggio R_{WD} (o con il volume V_{WD})

$$M_{WD}R_{WD}^3 = cost \iff M_{WD}V_{WD} = cost. \quad (3.11)$$

Dalla formula appena ricavata si deduce che nane bianche più massive richiedono una maggiore densità di elettroni ($\rho \propto M_{WD}^2$), i quali vengono confinati in un volume sempre più piccolo. Se $\log \rho > 6.6$, il gas degenere di elettroni sarà relativistico e la sua pressione sarà $\propto \rho^{4/3}$. Di conseguenza, la relazione massa-volume (3.11) dovrà essere riscritta ponendo la (2.20) uguale alla (3.10). Considerando la densità $\rho = M_{WD}/\frac{4}{3}\pi R_{WD}^3$, avremo che

$$P_{Deg,Rel} = P_c \iff k_2 \left(\frac{M_{WD}}{\frac{4}{3}\pi R_{WD}^3} \right)^{\frac{4}{3}} = (2/3)\pi G \left(\frac{M_{WD}}{\frac{4}{3}\pi R_{WD}^3} \right)^2 R_{WD}^2. \quad (3.12)$$

Il raggio si cancella dall'equazione precedente e si ottiene un valore specifico $\approx 0.44M_{\odot}$ per la massa della nana bianca [11]. Usando una trattazione che segue la teoria di Chandrasekhar [7], troveremo una massa avente la seguente formula

$$M_{Ch} = (2/\mu_e)^2 \cdot 1.46M_{\odot}. \quad (3.13)$$

Per una nana bianca, $\mu_e \approx 2$, quindi $M_{Ch} \approx 1.46M_{\odot}$. Volendo graficare R_{WD} in funzione di M_{WD} , si nota che, per volumi decrescenti, la M_{WD} non tenderà dunque ad infinito, come suggerirebbe la (3.11), ma al valore $1.46M_{\odot}$ imposto dal regime relativistico.

Se viene superata la "Massa di Chandrasekhar" M_{Ch} , la pressione del gas degenere (relativistico) di elettroni non compensa più la forza gravitazionale e la nana bianca collassa. Perciò M_{Ch} svolge il ruolo di massa-limite come è stato finora confermato da osservazioni di nane bianche [10].

Oltre che da M_{Ch} , una nana bianca è anche caratterizzata da un trasporto di energia dalle zone più interne a quelle più esterne che viene portato avanti principalmente dalla conduzione elettronica. In una stella qualsiasi, un elettrone perde energia tra due urti successivi con gli ioni, consentendo un libero cammino medio molto più piccolo del raggio stellare. In una nana bianca, il gas degenere consente ad un elettrone di rimanere nel suo stato energetico dopo molte collisioni, siccome la maggior parte dei livelli inferiori è

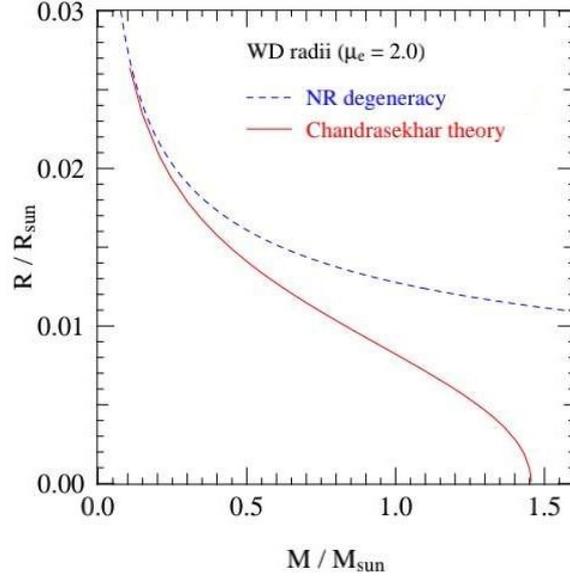


Figura 3.3. Relazione tra la M_{WD} e R_{WD} : la linea blu è stata ricavata tramite la (3.11), mentre quella rossa proviene dalla teoria di Chandrasekhar[6].

già occupata (si veda la distribuzione di Fermi-Dirac). Dunque, la conduzione elettronica risulta molto efficiente e permette una temperatura T_c degli interni quasi costante. Negli strati superficiali la densità diminuisce verso l'esterno e, di conseguenza, il trasporto d'energia viene condotto dalla radiazione, sebbene in modo meno efficiente rispetto agli elettroni. Nelle regioni esterne della nana la temperatura diminuisce grazie ad un gradiente significativamente grande.

3.2.2 Proprietà termiche

Impedendo il collasso della nana bianca, la pressione del gas degenero non consente al nucleo di raggiungere la temperatura per l'inizio delle reazioni di fusione. Non essendoci una fonte d'energia termonucleare che sostiene la luminosità L_{WD} superficiale, quest'ultima sarà destinata a decrescere con il passare del tempo e la nana bianca si raffredderà. Per vedere come cambia la luminosità in funzione della temperatura T_c , consideriamo la relazione di proporzionalità tra la pressione P del gas dell'involuppo, la sua temperatura T e il suo peso molecolare medio μ_p [11]:

$$P \propto \left(\frac{M_{WD}}{L_{WD}\mu_p} \right)^{1/2} T^{17/4}. \quad (3.14)$$

Uguagliando la pressione di un gas ideale (2.7) alla (3.14) troviamo che la densità ρ del gas esterno è legata alla sua temperatura in questo modo:

$$\rho \propto \left(\frac{M_{WD}\mu_p}{L_{WD}} \right)^{1/2} T^{13/4}. \quad (3.15)$$

Si assume, adesso, l'esistenza di uno strato, con densità data dalla (3.15) e temperatura T_c , il quale stabilisce il passaggio dagli strati esterni non degeneri al nucleo completamente degenero. In corrispondenza di questo punto della struttura vale la prima equazione

della (3.7), dove $P_{gas\ perf,e}$ riguarda il gas perfetto di elettroni dell'involuppo e $P_{Deg,e}$ quello degenerare degli interni. Mettendo la densità (3.15) nella (3.7) si ottiene la formula per la luminosità superficiale

$$L_{WD} = CT_c^{7/2}, \quad C \propto \left(\frac{M_{WD}}{M_\odot} \right) \mu_e. \quad (3.16)$$

Nonostante il riempimento di tutti i livelli energetici elettronici e la mancanza di reazioni termo-nucleari, la luminosità L_{WD} viene comunque sostenuta dall'energia termica U del gas degli ioni non degeneri, quindi

$$-\frac{dU}{dt} = L_{WD}. \quad (3.17)$$

Approssimando la massa del gas perfetto di ioni con M_{WD} e la massa di uno ione con Am_H , con A numero di massa, l'energia termica totale è data da

$$U = \frac{M_{WD}}{Am_H} \frac{3}{2} \kappa T_c. \quad (3.18)$$

Sostituendo l'espressione appena trovata nella (3.17) e integrando l'equazione risultante, si trova un'espressione della temperatura T_c in funzione del tempo

$$T_c(t) = T_0 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{t}{\tau_0} \right)^{-2/5}, \quad (3.19)$$

con T_0 temperatura all'istante $t = 0s$ e τ_0 tempo caratteristico del raffreddamento. Dalla (3.19) segue che la luminosità diminuirà nel tempo secondo questa formula:

$$L_{WD}(t) = L_0 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{t}{\tau_0} \right)^{-7/5}. \quad (3.20)$$

Se il modello di nana bianca tenesse conto degli strati più esterni di H ed He, che

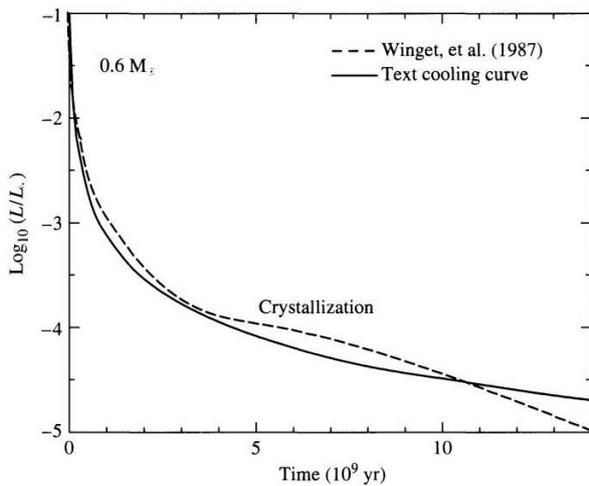


Figura 3.4. Luminosità L_{WD} di una nana bianca di $0.6M_\odot$ in funzione del tempo: la linea *continua* rappresenta l'equazione (3.20), mentre quella *tratteggiata* proviene da modelli che tengono conto della cristallizzazione e del contributo degli strati più esterni[11].

trattengono l'energia emessa, si otterrebbe un raffreddamento iniziale meno ripido di quello dato dalla (3.20), come si vede in Figura (3.4). Intorno a $10^{-4}L_\odot$ ², gli interni

²La luminosità del Sole è $L_\odot \approx 4 \cdot 10^{33}$ erg/s

di una nana bianca (di $0.6M_{\odot}$) iniziano, inoltre, uno stadio di *cristallizzazione*. I nuclei si dispongono in un reticolo cristallino, minimizzando la repulsione elettrostatica tra di essi. Il cambio di fase causa un rilascio del calore latente κT da parte di ogni nucleo. Il raffreddamento viene quindi rallentato e ciò si rispecchia nella "gobba" in Figura (3.4). In seguito, poichè i nuclei vibrano coerentemente attorno alla loro posizione d'equilibrio, viene indotta un'altra perdita di energia che fa scendere la luminosità, accelerando il raffreddamento.

3.2.3 Supernove Ia

Le nane bianche non solo possono terminare la loro evoluzione raffreddandosi e cristallizzandosi, ma possono dar luogo anche ad eventi esplosivi chiamati *Supernove* di tipo *Ia*. Per far partire il processo che genererà l'esplosione la stella deve raggiungere la massa di Chandrasekhar $M_{Ch} \approx 1.46M_{\odot}$. Poichè nessuna massa M_{WD} osservata risulta maggiore di M_{Ch} , esistono modelli che cercano di spiegare l'accrescimento della nana bianca, tenendo in conto la mancanza di righe di idrogeno nello spettro delle Supernove Ia. I due scenari più discussi sono:

1. **Scenario doppio degenere.** Una volta che si è formato un sistema binario di due nane bianche di C-O, esse iniziano ad avvicinarsi man mano che viene perso momento angolare sottoforma di onde gravitazionali. Se la fusione ("*merging*") delle due stelle dà luogo ad una nana bianca che supera M_{Ch} , vengono fatte partire le reazioni di combustione del carbonio in un ambiente degenere, le quali porteranno all'esplosione.
2. **Scenario singolo degenere.** Una nana bianca accresce la sua massa tramite una compagna non degenere che può essere una stella di sequenza principale o una gigante rossa. Se il materiale (H ed He) viene trasferito ad una velocità che ne favorisce la combustione, allora l'interno della nana bianca raggiunge M_{Ch} . Inoltre, se l'accrescimento non è troppo veloce, l'involuppo esterno viene ripulito dall'idrogeno e la supernova classificata come Ia. Dunque, rispetto allo scenario doppio degenere, quello singolo presenta inizialmente una componente di H che deve essere eliminata.

Quando la massa della nana bianca si avvicina a quella di Chandrasekhar, la stella inizierà a collassare, aumentando la densità. Per la composizione di C-O, se le densità centrali superano un valore $\approx 10^9$ g/cm³ allora inizieranno le reazioni di combustione del carbonio. Poichè l'innesco parte in un ambiente degenere, viene a formarsi un'esplosione che si propaga verso l'esterno. Il materiale attraversato andrà incontro ad una combustione esplosiva e sarà incenerito in elementi del picco del ferro (soprattutto nichel Ni⁵⁶)[8]. Alla fine dell'evento, tutta la struttura sarà spazzata via senza lasciare alcun *remnant*. Il materiale rilasciato sarà principalmente composto dal Fe⁵⁶ (derivante dal decadimento del nichel) e da carbonio ed ossigeno[2], i quali sono stati processati dall'innesco dell'elio.

Bibliografia

- [1] L. Ferrari. *Elementi di Termodinamica Statistica*. Università di Bologna, Corso di Laurea in Astronomia, 2019.
- [2] F.R. Ferraro. *Astrofisica Stellare - Dispense*. Università di Bologna, Corso di Laurea in Astronomia, 2023.
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics - Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1965.
- [4] F. Ravanini. *Meccanica Quantistica per il corso di Istituzioni di Fisica Teorica*. Università di Bologna, Corso di Laurea in Astronomia, 2023.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Pergamon Press, 1969.
- [6] O.R. Pols. *Stellar Structure And Evolution*. Astronomical Institute Utrecht, 2011.
- [7] R. Kippenhan, A. Weigert, and A. Weiss. *Stellar Structure And Evolution - Second Edition*. Springer, 2012.
- [8] F.R. Ferraro. *Evoluzione Stellare - Dispense*. Università di Bologna, Corso di Laurea in Astrophysics and Cosmology, 2023.
- [9] L. Siess. *Evolution of massive AGB stars*. EAS Publications Series, 2006.
- [10] P. Bergeron, A. Gianninas, and S. Boudreault. The Mass Distribution of White Dwarfs: An Unwavering Obsession. September 2007.
- [11] B. W. Carrol and D. A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics - Second Edition*. Cambridge University Press, 2017.