Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione e applicazioni alla teoria delle classi di Chern

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Dott. Fatighenti Enrico

Presentata da:
Fraboni Caterina

Anno Accademico 2023-2024
Terza sessione di Laurea

Alla mia famiglia

Introduzione

Fibrati vettoriali e classi caratteristiche fanno la loro comparsa nella prima metà del novecento, in parallelo alla volontà di sviluppare una teoria "duale" all'omologia e all'omotopia, ponendo quindi le basi per la definizione di strumenti oggi ampiamente usati nello studio delle varietà complesse, quali fasci e coomologia.

Introdotte nel 1935 dal matematico statunitense Hassler Whitney per lo studio di fibrati reali su varietà differenziabili, le classi caratteristiche fanno il loro ingresso nella geometria complessa con Shiing-Shen Chern, il quale estende al caso complesso l'idea di associare ad un fibrato vettoriale una classe in coomologia sulla varietà in questione, ora a coefficienti interi. In particolare, nel 1946 Chern ne dà una definizione intrinseca, che si basa sulla teoria delle connessioni e delle forme di curvatura sul fibrato complesso, mostrando come questi oggetti permettono di decodificare importanti invarianti topologici. Come esempio chiave e motivante possiamo portare la famosa caratteristica di Eulero-Poincaré della varietà - nel caso in cui il fibrato in questione è il tangente, come si evince dalla generalizzazione dovuta a Chern del Teorema di Gauss-Bonnet, che riporta quindi anche il suo nome.

In questa tesi le classi di Chern vengono introdotte in un contesto algebro-geometrico, seguendo l'approccio assiomatico proposto da Alexander Grothendieck, che nel 1958 pubblica *La théorie des classes de Chern*, in cui mostra come la teoria sviluppata precedentemente da Chern si può costruire partendo da 4 assiomi, estendendola così in contesti più generali. Uno strumento chiave nel trattato di Grothendieck è il principio di spezzamento, in virtù del quale il calcolo delle classi di Chern di un qualsiasi fibrato olomorfo si riduce al caso lineare.

Queste classi caratteristiche ricoprono quindi un ruolo centrale nella geometria complessa e algebrica, che si esprime in modo particolare nella generalizzazione dovuta a Friedrich Hirzebruch del Teorema di Riemann-Roch. Nata nel 1857 dal lavoro di Bernhard Riemann sulle curve complesse, la formula di Riemann-Roch raggiunge la sua forma definitiva per le curve nel 1865, grazie al lavoro dello studente Gustav Roch, diventando poi un notevole strumento per lo studio dello spazio delle sezioni di un fibrato in rette. La formula di Riemann-Roch viene successivamente estesa al caso delle superfici algebriche, diventando uno strumento potentissimo nelle mani della *scuola italiana di geometria algebrica*, capitanata da Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, Francesco Severi e molti altri. Nel 1954 Hirzebruch estende la formula a varietà complesse compatte di qualsiasi dimensione e fibrati di qualsiasi rango, riscrivendola nei termini delle classi di Chern di quest'ultimi. La potenza di questa versione del teorema risiede, tra le altre cose, nella possibilità di ricavare in maniera semplice e diretta le versioni precedenti con semplici manipolazioni algebriche.

Il primo capitolo della tesi è incentrato sullo studio di fibrati vettoriali olomorfi e divisori su una varietà complessa, due strumenti base necessari all'introduzione del linguaggio che useremo successivamente. Dopo aver dato le definizioni chiave, presenteremo le principali costruzioni che si possono effettuare tra fibrati, soffermandoci poi sugli esempi più rilevanti, come il tangente e il canonico. Ci focalizzeremo poi sul caso lineare, studiando i legami che intercorrono tra fibrati in rette e divisori, che nel corso della tesi verranno trattati nel linguaggio di Cartier. In particolare, definiremo il gruppo di Picard di una varietà complessa, mostrando come questo sia isomorfo al gruppo dei divisori nel caso in cui la varietà presa in esame sia liscia e proiettiva. Il capitolo si conclude con la celebre formula di aggiunzione, che ci permetterà di studiare il canonico di un'ipersuperficie liscia proiettiva e di ricavare, nel caso in cui questa è una curva, il genere geometrico, sfruttando la formula genere-grado che ne è una diretta conseguenza.

Nel secondo capitolo, ci concentreremo invece sulla definizione vera e propria delle classi di Chern, mostrando come queste soddisfino proprietà particolarmente utili per il calcolo. Questo sarà possibile non solo in virtù dei 4 assiomi, ma anche grazie al principio di spezzamento, secondo cui ogni identità tra le classi di Chern di un fibrato si può provare assumendo che questo si scomponga in somma diretta di fibrati in rette. Mostreremo poi il ruolo di questi strumenti nella generalizzazione di due importanti teoremi: il primo è il teorema di Gauss-Bonnet-Chern, riscritto nei termini dell'ultima classe di Chern del tangente alla varietà, mentre il secondo è il teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch, in cui sono centrali le nozioni di carattere di Chern e di classe di Todd. Vedremo quindi alcuni esempi significativi, tra cui come applicare la formula di Gauss-Bonnet-Chern per calcolare la caratteristica di Eulero di una quintica liscia in $\mathbb{P}^4$, o come ricavare dalla formula di Hirzebruch-Riemann-Roch le versioni classiche per curve e superfici.

Nel terzo e ultimo capitolo andremo ad affrontare alcune applicazioni della teoria sviluppata nel resto della tesi. In particolare vedremo come un semplice conto di classi di Chern porti a ricavare quasi immediatamente un classico risultato della geometria algebrica: determinare il numero di rette contenute in una superficie cubica liscia e proiettiva. La risposta nasce dal lavoro di Cayley e Salmon, che nel 1849 fissano a 27 il numero di rette proiettive che soddisfano questa proprietà. La dimostrazione originale, e le numerose iterazioni successive, hanno spesso come strategia una raffinata analisi della geometria delle superfici in questione. La teoria delle classi di Chern ha il merito di rendere il conto limpido ed efficiente, mostrando tutta la potenza di tali strumenti.

In conclusione, questa tesi si propone di introdurre la teoria delle classi di Chern, evidenziando la potenza di questi strumenti nel mondo della geometria algebrica, in modo particolare nei calcoli e nelle applicazioni.

Indice

Capitolo 1

Fibrati vettoriali e Divisori

In questo primo capitolo presentiamo due nozioni centrali nel campo della geometria complessa, quali fibrati vettoriali olomorfi e divisori su una varietà X. In queste prime pagine adottiamo un linguaggio puramente complesso, lavorando, quindi, in categoria analitica. Tuttavia, nel caso proiettivo useremo tutti gli strumenti propri del mondo algebrico, appellandoci alla corrispondenza GAGA - *Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique*, di Serre (vedi [Per09], Sezione 1.3.4), secondo cui ogni varietà analitica proiettiva è algebrica. Questo risultato ci permette quindi di parlare di fibrati algebrici, e di rimpiazzare i termini *olomorfo* e *meromorfo* rispettivamente con *regolare* e *razionale*.

Prima di addentrarci nel vivo della questione, ricordiamo che se X è una varietà complessa, denotiamo con $\mathcal{O}_X$ il *fascio delle funzioni olomorfe* su X, spesso chiamato *fascio di struttura*. In particolare, questo è un fascio di anelli su X, dal momento che per ogni aperto $U \subset X$ si ha che

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ è olomorfa}\},$$

è un anello. Inoltre, denotiamo con $\mathcal{M}_X$ il *fascio delle funzioni meromorfe* su X, osservando che se X è connessa, su ogni aperto $U \subset X$ si ha che $\mathcal{M}_X(U)$ è il campo delle frazioni di $\mathcal{O}_X(U)$. Ovviamente vale $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{M}_X$.

1.1 Fibrati vettoriali olomorfi

L'obiettivo di questa sezione è quello di presentare la nozione di fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa, che nel corso della trattazione verrà considerata sempre compatta. Dopo aver dato le principali definizioni, presentiamo gli esempi più rilevanti e studiamo le più importanti costruzioni che si possono effettuare tra fibrati.

Definizione 1.1.1. Sia X una varietà complessa. Un *fibrato vettoriale olomorfo di rango* k su X è il dato di una varietà complessa $\mathcal{E}$ e di una mappa olomorfa $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$, detta *proiezione*, tale per cui:

1. per ogni $x \in X$, la fibra $\mathcal{E}_x := \pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione k;

2. esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X e una famiglia di biolomorfismi $\{\psi_i\}_{i\in I}$, ove $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^k$ è detta *trivializzazione*, tale che per ogni $x \in U_i$ si abbia $\psi_{i|\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \cong \mathbb{C}^k$ isomorfismo di $\mathbb{C}-$spazi vettoriali. Questo è equivalente a dire che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "p"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

è commutativo, ove p indica la proiezione canonica.

Un fibrato vettoriale olomorfo di rango 1 su X si dice *fibrato in rette.*

Osservazione 1.1.2. Sia $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango k su una varietà complessa X e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Osserviamo che, nei termini della precedente definizione, per ogni $i, j \in I$ tali che $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \varnothing$ la mappa olomorfa

$$\psi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL_k(\mathbb{C}),$$

detta *funzione di transizione*, è tale per cui

$$\psi_{ij}(x) := (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(x, -) : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$$

è $\mathbb{C}-$lineare per ogni $x \in U_{ij}$, e per ogni $i, j, k \in I$ tali che $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$ si ha

$$\psi_{ij} \circ \psi_{jk} \circ \psi_{ki} = id_{U_{ijk}}.$$

In particolare, la famiglia $\{(U_i, \psi_{ij})\}$ è detta *cociclo* e determina univocamente un fibrato vettoriale olomorfo su X.

Definizione 1.1.3. Siano $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow X$ e $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow X$ fibrati vettoriali olomorfi su X. Un *morfismo di fibrati vettoriali* è una mappa olomorfa $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ tale che:

1. $\pi_{\mathcal{F}} \circ \varphi = \pi_{\mathcal{E}}$;

2. $\varphi_{|\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ è lineare per ogni $x \in X$.

In particolare, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ si dicono *isomorfi* se esiste $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ morfismo di fibrati vettoriali invertibile (per cui si ha un isomorfismo di spazi vettoriali $\varphi_{|\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \cong \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in X$).

Definizione 1.1.4. Sia $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibrato vettoriale su una varietà complessa X. Una *sezione olomorfa* di $\mathcal{E}$ è una mappa olomorfa $s : X \longrightarrow \mathcal{E}$ tale che $\pi \circ s = id_X$. L'insieme delle sezioni olomorfe di $\mathcal{E}$ si denota con $H^0(X, \mathcal{E})$, gruppo di coomologia del fibrato $\mathcal{E}$ che, in particolare, ha una struttura di $\mathbb{C}-$spazio vettoriale.

Definizione 1.1.5. Sia $f : Y \longrightarrow X$ una mappa olomorfa tra varietà complesse e sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo su X definito dal cociclo $\{(U_i, \psi_{ij})\}$. Il *pull-back* $f^*\mathcal{E}$ di $\mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale olomorfo su Y dato dal cociclo $\{(f^{-1}(U_i), \psi_{ij} \circ f)\}$. In particolare, se Y è una sottovarietà complessa di X e $i : Y \longrightarrow X$ è l'inclusione, allora $\mathcal{E}_{|Y} := i^*\mathcal{E}$ è la *restrizione* di $\mathcal{E}$ ad Y.

Osservazione 1.1.6. Osserviamo che il pull-back $f^*\mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale su Y dato da

$$f^*\mathcal{E} = \{(y, e) \in Y \times \mathcal{E} \mid \pi(e) = f(y)\}$$

e dall'ovvia proiezione sulla prima componente $f^*\pi(y, e) = y$.

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{E} \arrow[d, "f^*\pi"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

In questi termini, sopra ogni punto $y \in Y$ si ha $f^*\mathcal{E}_y \cong \mathcal{E}_{f(y)}$.

Osservazione 1.1.7. Presentiamo le principali costruzioni che si possono realizzare tra fibrati. Siano quindi $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow X$ e $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow X$ fibrati vettoriali olomorfi di rango rispettivamente k e r su una varietà complessa X, determinati rispettivamente dai cocicli $\{(U_i, \psi_{ij})\}$ e $\{(U_i, \psi'_{ij})\}$.

1. La *somma diretta* $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango $k + r$ la cui fibra $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})_x$ è isomorfa a $\mathcal{E}_x \oplus \mathcal{F}_x$ ed è determinato dal cociclo $\{(U_i, \psi_{ij} \oplus \psi'_{ij})\}$, ove per ogni $x \in U_{ij}$ si intende
$$(\psi_{ij} \oplus \psi'_{ij})(x) = \begin{pmatrix} \psi_{ij}(x) & 0 \\ 0 & \psi'_{ij}(x) \end{pmatrix}.$$
2. Il *prodotto tensoriale* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango kr la cui fibra $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_x$ è isomorfa a $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{F}_x$ ed è determinato dal cociclo $\{(U_i, \psi_{ij} \otimes \psi'_{ij})\}$, ove per ogni $x \in U_{ij}$, $\psi_{ij}(x) \otimes \psi'_{ij}(x)$ indica il prodotto di Kronecker tra matrici.

3. La *i-esima potenza esterna* $\bigwedge^i \mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango $\binom{k}{i}$ la cui fibra è isomorfa a $\bigwedge^i \mathcal{E}_x$, che rappresenta lo spazio vettoriale complesso costituito dal prodotto esterno di i vettori in $\mathcal{E}_x$. In particolare si definisce il *fibrato in rette determinante* di $\mathcal{E}$ come $\det(\mathcal{E}) := \bigwedge^k(\mathcal{E})$, determinato dal cociclo $\{(U_i, \det(\psi_{ij}))\}$.

4. La *i-esima potenza simmetrica* $\mathrm{Sym}^i \mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango $\binom{k+i-1}{i}$ la cui fibra è isomorfa a $\mathrm{Sym}^i \mathcal{E}_x$, che rappresenta lo spazio vettoriale complesso costituito dal prodotto simmetrico di i vettori in $\mathcal{E}_x$.

5. Il *duale* $\mathcal{E}^\vee$ è il fibrato vettoriale olomorfo di rango k la cui fibra $(\mathcal{E}^\vee)_x$ è isomorfa a $\mathcal{E}_x^\vee$ ed è determinato dal cociclo $\{(U_i, (\psi_{ij}^{-1})^\top)\}$.

6. Se per ogni $x \in U_{ij}$ si ha che la matrice $\psi'_{ij}(x)$ è della forma

$$\psi'_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{ij}(x) & * \\ 0 & \phi_{ij}(x) \end{pmatrix},$$

allora $\mathcal{E}$ è un *sottofibrato olomorfo* di $\mathcal{F}$, per cui si ha $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

7. Se

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta* di fibrati olomorfi su X, ossia se $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ si ha $Ker(f) = 0$, $Coker(f) = \mathcal{G}$, allora

$$\det(\mathcal{F}) \cong \det(\mathcal{E}) \det(\mathcal{G}).$$

Studiamo ora il caso proiettivo. Nel seguito, identifichiamo $\mathbb{P}^n$ con il *proiettificato* di uno spazio vettoriale complesso V di dimensione $n+1$, nello specifico

$$\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V) = \{\ell \subset V \mid \dim(\ell) = 1\}.$$

Su $\mathbb{P}^n$ si definisce in maniera naturale un sottofibrato di rango 1 del fibrato banale $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, come si evince nella seguente

Proposizione 1.1.8. *Sia $X = \mathbb{P}^n$. L'insieme*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) := \{(\ell, x) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid x \in \ell\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$$

è un fibrato in rette su $\mathbb{P}^n$, detto fibrato tautologico.

Dimostrazione. La proiezione $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ è data dalla banale proiezione sulla prima componente $(\ell, x) \mapsto \ell$: notiamo che la fibra $\pi^{-1}(\ell)$ è naturalmente isomorfa a ℓ, che parametrizza una retta in $\mathbb{C}^{n+1}$, per cui è isomorfa a $\mathbb{C}$. Consideriamo, ora, il ricoprimento standard $\{U_i\}_{i\in\{0,\dots,n\}}$ di $\mathbb{P}^n$ e studiamo la trivializzazione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ sopra ogni $U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. Questa è data da $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$, $(\ell, x) \mapsto (\ell, x_i)$, ove $\ell = [x_0 : \dots : x_n]$. Infine, le mappe di transizione $\psi_{ij}(\ell) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sono date da $w \mapsto \frac{x_i}{x_j} \cdot w$. Il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ è quindi definito dal cociclo $\{(U_i, \frac{x_i}{x_j})\}$.

□

Questo esempio è particolarmente importante, poiché ci permette di definire tutti i fibrati in rette su $\mathbb{P}^n$. Diamo quindi la seguente

Definizione 1.1.9. Sia $X = \mathbb{P}^n$. Si definisce il *fibrato in rette iperpiano* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ come il duale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. Inoltre definiamo:

1. per $k > 0$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ k volte;
2. per $k < 0$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)^\vee$;
3. per $k = 0$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ è il fibrato in rette banale $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$.

In particolare, se X è una varietà liscia proiettiva e $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ è l'inclusione, definiamo su X il fibrato in rette $\mathcal{O}_X(k) := i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Questo fibrato è quindi dato dalla restrizione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)_{|X}$.

Osservazione 1.1.10. Osserviamo che se $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ è un morfismo di fibrati su X, il nucleo $Ker(\varphi)$ non è necessariamente un fibrato su X. Vediamo un controesempio su $\mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]}$. Consideriamo il morfismo $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ dato da $\varphi = x_0$ e studiamo $\mathcal{K}_p := Ker\{\varphi(p) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid p = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1\}$. In particolare, se $x_0 \neq 0$, allora $\mathcal{K}_p$ è banale, mentre se $x_0 = 0$ si ha $\mathcal{K}_p = \mathbb{C}$, per cui $Ker(\varphi)$ non è un fibrato su $\mathbb{P}^1$, dal momento che la dimensione di $\mathcal{K}_p$ come $\mathbb{C}-$ spazio vettoriale non è costante al variare di p. Nello specifico, $Ker(\varphi)$ è un fascio *grattacielo* su X.

Osservazione 1.1.11. Dall'Osservazione 1.1.7 si ha che, per ogni $d \in \mathbb{Z}$, il fibrato in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ è rappresentato dal cociclo $\{(U_i, \frac{x_i^d}{x_j^d})\}_{i=0,\dots,n}$.

Osservazione 1.1.12. La fibra di $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ sopra $\ell \in \mathbb{P}^n$ è isomorfa a $\ell^\vee$, pertanto le coordinate lineari $x_0, \dots, x_n$ formano una base di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, che è quindi lo spazio vettoriale $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$ dei polinomi omogenei di grado 1. In generale si ha:

- se $k \geq 0$, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_k$;

- se $k < 0$, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$.

Osservazione 1.1.13. L'inclusione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, ci permette di definire il *fibrato quoziente* $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$ su $\mathbb{P}^n$, dato dall'esattezza della sequenza

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \cong \bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0,$$

detta *successione tautologica*. In particolare, tensorizzando la successione con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ si ottiene

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow 0,$$

detta *successione di Eulero*, che, come osserveremo, ci permette di studiare il fibrato tangente su $\mathbb{P}^n$.

La trattazione su $\mathbb{P}^n$ si può, in un certo senso, generalizzare al caso delle *Grassmanniane*

$$\mathrm{Gr}(k,n) = \{W \subset V \mid \dim(W) = k\},$$

ove V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n. Queste definiscono varietà proiettive di dimensione $k(n-k)$, e osserviamo che nel caso $k = 1$ si ha $\mathrm{Gr}(1,n) := \mathbb{P}^{n-1}$. In particolare, sulla Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k,n)$ si definisce in maniera naturale il fibrato di rango k

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Gr}(k,n)} := \{(W,x) \in \mathrm{Gr}(k,n) \times \mathbb{C}^n \mid x \in W\} \subset \mathrm{Gr}(k,n) \times \mathbb{C}^n,$$

il quale sopra ogni punto $[W] \in \mathrm{Gr}(k,n)$ presenta lo spazio vettoriale W stesso, estendendo, così, la nozione di tautologico studiato su $\mathbb{P}^n$. Allo stesso modo, si definisce il fibrato quoziente $\mathcal{Q}_{\mathrm{Gr}(k,n)}$ (per i dettagli, vedi [EH16], Sezione 3.2.3).

Procediamo con la definizione di due fibrati vettoriali particolarmente rilevanti nello studio delle varietà complesse. Nel seguito sia X una varietà liscia complessa di dimensione n e sia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ atlante olomorfo di X.

Definizione 1.1.14. Il *fibrato tangente* di X è il fibrato vettoriale olomorfo $\mathcal{T}_X$ di rango n descritto dal cociclo $\{(U_i, J(\varphi_{ij}) \circ \varphi_j)\}$.

Osservazione 1.1.15. Il fibrato tangente di X si può anche descrivere come

$$\mathcal{T}_X := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times T_xX,$$

ove T_xX è lo *spazio tangente* ad $x \in X$, dotato della naturale proiezione

$$\pi : \mathcal{T}_X \longrightarrow X,\ (x,v) \mapsto x.$$

Nel corso della tesi, vediamo come questo, in generale, non sia banale.

Osservazione 1.1.16. Riprendendo l'Osservazione 1.1.13, si dimostra che su $\mathbb{P}^n$ il fibrato tangente $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$ (per i dettagli, vedi [Huy05], Proposizione 2.2.4), per cui la successione di Eulero si scrive

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

Allo stesso modo, per la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k,n)$ si ha $\mathcal{T}_{\mathrm{Gr}(k,n)} \cong \mathcal{S}^{\vee}_{\mathrm{Gr}(k,n)} \otimes \mathcal{Q}_{\mathrm{Gr}(k,n)}$ (vedi [EH16], Sezione 3.2.4).

Definizione 1.1.17. Il *fibrato cotangente* Ω_X è il duale di $\mathcal{T}_X$. Il *fibrato delle* $k-$*forme olomorfe* su X è $\Omega^k_X := \bigwedge^k \Omega_X$. In particolare si chiama *fibrato canonico* il fibrato in rette $\mathcal{K}_X := det(\Omega_X) = \Omega^n_X$.

Osservazione 1.1.18. Se $Y \subset X$ è una sottovarietà complessa liscia, si ha $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_{X|Y}$: il *conucleo* di questa inclusione è un fibrato vettoriale olomorfo su Y, detto *fibrato normale* di Y in X e denotato con $\mathcal{N}_{Y/X}$. Pertanto si ha l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0,$$

detta *successione normale.*

1.2 Gruppo di Picard e Divisori

Questa sezione si propone di mostrare il legame che intercorre tra la nozione di fibrato in rette e quella di divisore su una varietà. In particolare, vediamo come i due concetti siano del tutto equivalenti nel caso proiettivo. Iniziamo, quindi, dando la seguente

Definizione 1.2.1. Sia X una varietà complessa. Definiamo con

$$\mathrm{Pic}(X) := \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ è un fibrato in rette su } X\}/ \simeq$$

l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati in rette su X.

Proposizione 1.2.2. *Per ogni varietà complessa X, $(\mathrm{Pic}(X), \otimes)$, con elemento neutro dato da $\mathcal{O}_X$, è un gruppo abeliano, detto gruppo di Picard di X.*

Dimostrazione. La chiusura rispetto al prodotto tensoriale è ovvia, essendo $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ fibrato in rette su X per ogni $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{Pic}(X)$. L'associatività deriva direttamente dalle proprietà del prodotto tensoriale tra moduli su un anello commutativo, essendo in particolare $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ un $\mathcal{O}_X-$modulo di rango 1. Infine, osserviamo che l'inverso è dato dal duale: si ha, infatti, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\vee} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X$.

□

Osservazione 1.2.3. La rappresentazione dei fibrati in rette in termini dei propri cocicli conferisce al gruppo di Picard $\mathrm{Pic}(X)$ una descrizione puramente coomologica, che si esprime al meglio attraverso la coomologia di Čech (vedi [Huy05], Appendice B). In particolare, si associa ad una trivializzazione del fibrato $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ un rappresentante di una classe in $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, il quale, almeno nel caso in cui X è una varietà complessa, coincide con il gruppo di coomologia $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$: si dimostra, così, che $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Osservazione 1.2.4. Un modo efficiente per studiare il gruppo di Picard nel caso di una varietà proiettiva è attraverso la *successione esponenziale* di fasci

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

dove la mappa $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ è l'inclusione, per cui è iniettiva, mentre $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$ è data dall'esponenziale $f \mapsto e^{2\pi i f}$ ed è suriettiva. La successione è, quindi, esatta e passa alla successione esatta lunga in coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots,$$

che ci permette di calcolare $\mathrm{Pic}(X)$ studiando $H^i(X, \mathbb{Z})$ e $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ per $i = 1, 2$.

Nello studio dei fibrati in rette su una varietà liscia proiettiva X, in particolare della loro coomologia, ricopre un importante ruolo la nozione di ampiezza.

Definizione 1.2.5. Un fibrato in rette $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ si dice *molto ampio* se, presa una base $\{s_0, \ldots, s_m\}$ di $H^0(X, \mathcal{L})$, per un certo $m \in \mathbb{N}$, esiste un'immersione chiusa

$$\varphi_{\mathcal{L}} : X \longrightarrow \mathbb{P}^m, \ x \longmapsto [s_0(x) : \ldots : s_m(x)]$$

tale che $\varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \cong \mathcal{L}$, e si dice *ampio* se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $\mathcal{L}^{\otimes k}$ sia molto ampio.

In particolare, su $\mathbb{P}^n$ queste immersioni sono tutte *mappe di Veronese*, e si dimostra, quindi, che i fibrati in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d > 0$ sono molto ampi.

Esempio 1.2.6. Consideriamo su $\mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]}$ il fibrato in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, e vediamo come questo sia molto ampio. Una base di $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ è data da $\{x_0^2, x_0x_1, x_1^2\}$ e l'immersione indotta dal fibrato in questione è quindi la Veronese

$$\nu_{1,2} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2, \ [x_0 : x_1] \longmapsto \left[x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2\right].$$

Enunciamo, quindi, un risultato centrale nel calcolo dei gruppi di coomologia dei fibrati in rette nel caso proiettivo, di cui vediamo, poi, un'applicazione.

Teorema 1.2.7 (Annullamento di Kodaira)**.** *Sia X una varietà liscia proiettiva di dimensione n e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrato in rette ampio. Allora $H^i(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X) = 0$ per ogni $i > 0$.*

Esempio 1.2.8. Consideriamo $\mathbb{P}^n$. Per il Teorema 1.2.7 si ha $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$: infatti, essendo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ un fibrato in rette ampio, si ha $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1) \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{P}^n}) = H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ per $i = 1, 2$, dove usiamo il fatto che $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$, che dimostreremo in 1.2.20. Inoltre $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Per cui si ha un isomorfismo $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ e, quindi, ogni fibrato in rette su $\mathbb{P}^n$ è della forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \in \mathbb{Z}$.

Riportiamo nel seguito un altro importante strumento nello studio dei fibrati vettoriali algebrici, ossia la *Dualità di Serre*.

Teorema 1.2.9 (Dualità di Serre)**.** *Sia X una varietà liscia proiettiva di dimensione n e sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo su X. Allora $H^i(X, \mathcal{E}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{E}^\vee)^\vee$.*

Procediamo introducendo la nozione di divisore su una varietà complessa, seguendo l'approccio di Cartier.

Definizione 1.2.10. Un *divisore di Cartier D* su X è una sezione globale del fascio $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$, per cui $D \in H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

Osservazione 1.2.11. Preso un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X, un divisore di Cartier D si rappresenta localmente su ogni aperto U_i come luogo degli zeri e dei poli di una funzione meromorfa non nulla $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{M}_X^*)$. Per definire globalmente il divisore D sulla varietà X, le funzioni f_i e f_j devono essere compatibili sulle intersezioni U_{ij}, nel senso che si deve avere $\frac{f_i}{f_j} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*)$ In questi termini, nel seguito denoteremo un divisore di Cartier come $D = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$.

Consideriamo ora la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

che induce la successione esatta in coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \ldots,$$

da cui subito emerge un legame con il gruppo di Picard della varietà X.

Proposizione 1.2.12. *Esiste un omomorfismo di gruppi*

$$H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X),\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D).$$

Dimostrazione. Sia $D = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ divisore di Cartier su X e sia $\psi_{ij} := \frac{f_i}{f_j} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*)$. Osserviamo che $\psi_{ii} = id_{U_i}$, $\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}$ e $\psi_{ij} \circ \psi_{jk} \circ \psi_{ki} = id_{U_{ijk}}$, cioè $\{\psi_{ij}\}_{i,j\in I}$ rappresenta un $1-$cociclo, ossia un rappresentante di una classe di $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ che definisce un fibrato in rette su X, che denotiamo con $\mathcal{O}_X(D)$. □

Osservazione 1.2.13. Se D_1, D_2 sono due divisori di Cartier dati rispettivamente da $\{(U_i, f_i)\}$ e $\{(U_i, g_i)\}$, il divisore $D_1 + D_2$ corrisponde a $\{f_i \cdot g_i\}$, ossia $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) = \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$. Ovviamente $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ è il fibrato in rette triviale, per cui $\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_X(D)^\vee$.

Definizione 1.2.14. Un divisore di Cartier D si dice *principale* se $D \in Im(H^0(X, \mathcal{M}_X^*))$.

Osservazione 1.2.15. Un divisore di Cartier principale D è *globalmente* il luogo degli zeri e dei poli di una funzione meromorfa non nulla $f \in \mathcal{M}_X^*$: nella notazione di cui sopra si ha, pertanto, $D := div(f) = \{(U_i, f)\}_{i \in I}$.

Definizione 1.2.16. Due divisori di Cartier D_1, D_2 si dicono *linearmente equivalenti*, e si scrive $D_1 \sim D_2$, se $D_1 - D_2$ è principale. Poniamo con

$$\mathrm{Car}(X) := \frac{H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)}{Im(H^0(X, \mathcal{M}_X^*))}$$

l'insieme delle classi di lineare equivalenza dei divisori su X, che ha una struttura di gruppo abeliano.

Proposizione 1.2.17. *Due divisori di Cartier su X sono linearmente equivalenti se e solo se i fibrati in rette su X ad essi associati sono isomorfi.*

Dimostrazione. Siano $D_1 = \{(U_i, f_i)\}$ e $D_2 = \{(U_i, g_i)\}$ due divisori di Cartier su X, i quali, a meno di raffinare gli aperti, li possiamo definire sullo stesso ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X. Essendo D_1 e D_2 linearmente equivalenti per ipotesi, per ogni $i \in I$ si ha $f_i = f \cdot g_i$, con f meromorfa su X. Ma allora i corrispondenti fibrati, determinati rispettivamente dai cocicli $\{(U_i, \frac{f_i}{f_j})\}$ e $\{(U_i, \frac{g_i}{g_j})\}$, sono in realtà lo stesso, dal momento che $\frac{f_i}{f_j} = \frac{f \cdot g_i}{f \cdot g_j} = \frac{g_i}{g_j}$. D'altra parte, preso $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ e considerate per ogni $i \in I$ due sezioni $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{L})$ e $g_i \in H^0(U_i, \mathcal{L})$, su ogni aperto U_i si ha che $\frac{f_i}{g_i}$ è una funzione meromorfa. Queste funzioni, in particolare, coincidono su ogni intersezione U_{ij}, per cui definiscono globalmente una funzione meromorfa su X, da cui la tesi ponendo con $D_1 = \{(U_i, f_i)\}$ e $D_2 = \{(U_i, g_i)\}$ i divisori in questione.

□

La proposizione 1.2.17 mostra che il morfismo di gruppi $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ è ben definito sulle classi di lineare equivalenza, per cui questo passa al quoziente, dando origine ad un morfismo tra $\mathrm{Car}(X)$ e $\mathrm{Pic}(X)$.

$$\begin{tikzcd}
H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X) \\
\mathrm{Car}(X) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

In particolare, osserviamo che $D \in \mathrm{Car}(X)$ è principale se e solo se $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$, da cui si evince che il morfismo tra $\mathrm{Car}(X)$ e $\mathrm{Pic}(X)$ è iniettivo. In particolare, nel caso in cui X è proiettiva il morfismo è anche suriettivo, per cui si ha $\mathrm{Car}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$ (vedi [Huy05], Corollario 5.3.7). In questi termini, nel caso proiettivo le nozioni di fibrato in rette e divisore sono interscambiabili.

Osservazione 1.2.18. $\mathrm{Car}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$. In particolare, al fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, definito dal cociclo $\{(U_i, \frac{x_i}{x_j})\}$, si associa il divisore descritto da un elemento di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$, che corrisponde, quindi, ad un iperpiano H in $\mathbb{P}^n$. Allo stesso modo, al fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ si associa l'ipersuperficie liscia in $\mathbb{P}^n$ tagliata da una sezione di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$: in particolare, questa rappresenta un divisore su $\mathbb{P}^n$ che è linearmente equivalente a dH. Infatti, poniamo con $D = V(f_d)$ l'ipersuperficie in questione, ove f_d polinomio omogeneo di grado d. Considerando $H = V(x_0)$ si ha $D - dH = div(f)$, con $f = \frac{f_d}{x_0^d}$ razionale su tutto $\mathbb{P}^n$, per cui $D \sim dH$. A questo punto, si definisce la mappa

$$\deg : \mathrm{Car}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

che associa ad ogni divisore D su $\mathbb{P}^n$ l'intero d nel senso di cui sopra. In particolare, il grado d si può pensare come il numero dei punti, contati con molteplicità, in cui l'ipersuperficie interseca $n-1$ iperpiani in $\mathbb{P}^n$. A questo punto, essendo $\deg(H) = 1$, si ha $\mathrm{Car}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, per cui è un gruppo ciclico generato da H, detta *classe iperpiana* di $\mathbb{P}^n$.

Esempio 1.2.19. Sia $X = \mathbb{P}^n$. Consideriamo il divisore $D = \{(U_i, f_i)\}_{i=0,\dots,n}$, con $f_i = \frac{1}{(x_0 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n)^d}$. Le funzioni $\psi_{ij} = \frac{x_i^d}{x_j^d}$ regolari su U_{ij} rappresentano il fibrato in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Ragionando a meno di lineare equivalenza, su $\mathbb{P}^n$ possiamo sempre considerare il divisore iperpiano dH, associato quindi al fibrato in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Vediamo ora com'è fatto il divisore associato al fibrato in rette canonico $\mathcal{K}_X$. Consideriamo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di X tale che su ogni aperto U_i ci sia una base di coordinate locali $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n = \dim(X)$. Sappiamo che una $n-$forma meromorfa ω si definisce globalmente su X tramite incollamenti di $n-$forme che localmente, su ogni U_i, si scrive $\omega_i = f_i \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, con $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{M}_X)$. Il divisore associato a ω è, nel linguaggio di Cartier, $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$.

Esempio 1.2.20. Sia $X = \mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]}$, e sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ ricoprimento standard di $\mathbb{P}^1$. Considero la $1-$forma $\omega = dx$ su $U_0 \cong \mathbb{C}_x$, nella coordinata locale $x = \frac{x_1}{x_0}$. La mappa di transizione è data da $x \mapsto \frac{1}{x} =: y$: nella carta $U_1 \cong \mathbb{C}_y$, ω si scrive $\omega = -\frac{1}{y^2} dy$, avente un polo di ordine 2 in 0. Il divisore associato a ω è, quindi, linearmente equivalente a $-2H$, il quale è associato al fibrato in rette $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. In particolare, l'esempio evidenzia che il tangente $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ su $\mathbb{P}^1$ non è banale. In generale, ragionando allo stesso modo, su

$\mathbb{P}^n$ si ha $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ e si ha $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}_{\mathbb{P}^n}) = 0$, risultato che suggerisce che non esistono forme di volume regolari su $\mathbb{P}^n$: come nel caso $n = 1$, attraverso il cambio di carta la forma diventa razionale, presentando un polo di ordine $n + 1$.

Enunciamo quindi la formula d'aggiunzione, che ci permette di calcolare il canonico di una sottovarietà.

Proposizione 1.2.21. *Sia $Y \subset X$ una sottovarietà complessa liscia. Si ha*

$$\mathcal{K}_Y \cong \mathcal{K}_{X|Y} \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X}),$$

detta formula d'aggiunzione.

Dimostrazione. Dualizzando la successione normale

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0,$$

si ottiene

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X}^\vee \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0,$$

da cui, passando ai determinanti come nell'Osservazione 1.1.7, si ha

$$\mathcal{K}_{X|Y} \cong \mathcal{K}_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X}^\vee),$$

da cui la tesi. □

Esempio 1.2.22. Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ ipersuperficie irriducibile di grado d. Essendo X tagliata da un elemento di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, si ha $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_X(d)$. Considerando la successione normale

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|X} \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0$$

e il procedimento nella dimostrazione della formula di aggiunzione, si ha

$$\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n|X} \cong \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_X(-d).$$

Tensorizzando ambo i membri con $\mathcal{O}_X(d)$ si ottiene

$$\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n|X} \otimes \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{K}_X,$$

o meglio, se $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ è l'inclusione,

$$\mathcal{K}_X \cong i^*(\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1+d)) = \mathcal{O}_X(d-n-1).$$

Questo risultato evidenzia, in particolare, che su X esistono forme di volume regolari se e solo se $d - n - 1 \geq 0$.

Esempio 1.2.23. Calcoliamo il genere g di una quartica liscia X in $\mathbb{P}^2$. Dalla formula di aggiunzione, si ha $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(4-2-1) = \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)_{|X}$. In particolare, essendo la quartica liscia, nessuna sezione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ si annulla su X, per cui per calcolare il genere g basta studiare $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$, da cui $g = 3$.

Esempio 1.2.24. Se X è una cubica liscia in $\mathbb{P}^2$, allora il genere di X è $g = 1$: infatti, per la formula di aggiunzione, si ha $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(3-2-1) = \mathcal{O}_X$, da cui $g = dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$, ossia X è un toro.

Esempio 1.2.25. Anche una quartica liscia X in $\mathbb{P}^3$ ha il canonico banale, essendo $4-3-1=0$. In particolare, superifici lisce proiettive che soddisfano questa proprietà si chiamano superfici *K3*.

Osservazione 1.2.26. Nel caso di curve lisce $X \subset \mathbb{P}^2$, dalla formula di aggiunzione si ricava la celebre formula *genere-grado*, secondo cui se d è il grado della curva, allora il genere è

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Infatti, in questi termini, per aggiunzione il canonico di X è $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(d-3)$, da cui

$$g = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(d-3)) = \dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-3} = \binom{d-3+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Capitolo 2

Classi caratteristiche di Chern

Questo capitolo è incentrato sullo studio delle classi di Chern, un particolare tipo di classi coomologiche centrali nella geometria algebrica, che permettono di codificare importanti invarianti geometrici, come la caratteristica topologica di Eulero di una varietà e di un fibrato su di essa. Enunceremo il teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch, una generalizzazione del teorema di Riemann-Roch proposta da Friedrich Hirzebruch nel 1954, e vedremo come ricavare da questo le versioni classiche per curve e superfici.

2.1 Le classi di Chern e il principio di spezzamento

Nel primo capitolo abbiamo presentato la successione esponenziale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

come un notevole strumento per il calcolo del gruppo di Picard di una varietà X. Passando alla successione lunga in coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots,$$

possiamo dare la seguente

Definizione 2.1.1. L'immagine $c_1(\mathcal{L})$ tramite il morfismo di connessione

$$c_1 : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$$

si chiama *prima classe di Chern* di $\mathcal{L}$.

Osservazione 2.1.2. Nel primo capitolo, in particolare nell'Esempio 1.2.18, abbiamo visto $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Car}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, per cui, preso un divisore D su $\mathbb{P}^n$ di grado d, possiamo pensare $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D))$ come dH e in particolare la classe iperpiana $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ come generatore di $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. In questi termini, è chiaro che $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$, essendo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$, $d \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 2.1.3. Se X è una curva liscia proiettiva, allora $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ e $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: la mappa $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ associa, così, ad un divisore D sulla curva il suo grado.

La nozione di classe di Chern si estende a fibrati vettoriali di qualsiasi rango su una varietà X. Nel seguito ne diamo una definizione assiomatica - sicuramente vantaggiosa per il calcolo, enunciandone le 4 proprietà fondamentali.

Definizione 2.1.4. Sia X una varietà liscia proiettiva di dimensione n e sia $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibrato vettoriale di rango k. Si definiscono le *classi di Chern* $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ e la *classe totale di Chern* $c(\mathcal{E}) = \sum_i c_i(\mathcal{E})$ come classi in coomologia che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $c_0(\mathcal{E}) = 1$;

2. (naturalità) se $f : Y \longrightarrow X$ è continua, allora $c_r(f^*\mathcal{E}) = f^*c_r(\mathcal{E})$ per ogni r;

3. (formula di Whitney) se $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to 0$ è una successione esatta di fibrati su X, allora $c(\mathcal{E}) = c(\mathcal{F})c(\mathcal{G})$;

4. $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = 1 + H$, ove H è la classe iperpiana di $\mathbb{P}^n$.

Osservazione 2.1.5. In particolare, la formula di Whitney afferma che se un fibrato $\mathcal{E}$ si scrive come somma diretta di 2 fibrati $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, allora $c(\mathcal{E}) = c(\mathcal{F})c(\mathcal{G})$. Iterando la formula, se $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_n$, con $\mathcal{E}_i$ fibrato su X per ogni i, si ha $c(\mathcal{E}) = c(\mathcal{E}_1) \ldots c(\mathcal{E}_n)$.

Osservazione 2.1.6. Osserviamo che se $\mathcal{E}$ è un fibrato su X varietà liscia proiettiva di dimensione n, allora $c_i(\mathcal{E}) = 0$ per ogni $i > n$, essendo in questo caso $H^{2i}(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Uno strumento fondamentale per il calcolo delle classi di Chern di un qualsiasi fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ su una varietà X è il *principio di spezzamento*, grazie al quale è possibile ridurre la teoria al caso di fibrati in rette, esplicando la classe totale di Chern $c(\mathcal{E})$ nei termini delle *radici di Chern*, che andiamo, quindi, a definire. A tal fine, introduciamo la tecnica di proiettivizzazione di un fibrato vettoriale.

Definizione 2.1.7. Sia $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibrato vettoriale di rango k definito dalle mappe di transizione $\psi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL_k(\mathbb{C})$. La *proiettivizzazione* di $\mathcal{E}$ è il fibrato vettoriale $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ tale che:

1. per ogni $x \in X$ si ha $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$;

2. le funzioni di transizione
$$\bar{\psi}_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathbb{P}GL_k(\mathbb{C}),$$
ove $\mathbb{P}GL_k(\mathbb{C}) := GL_k(\mathbb{C})/\{\text{matrici scalari}\}$, sono indotte da ψ_{ij}.

In questi termini, un punto di $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ è una coppia (x, ℓ_x) - che nel seguito denotiamo semplicemente con ℓ_x, con ℓ_x retta in $\mathcal{E}_x$,

Come nel caso di $\mathbb{P}^n$, su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ si può definire il fibrato in rette tautologico

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1) = \{(\ell_x, v) \in \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \mid v \in l_x\},$$

in cui la fibra sopra ogni punto è $\ell_x \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$ e consiste di tutti i punti della retta ℓ_x. Osserviamo che se $v \in \ell_x$, allora $\pi(\ell_x) = \rho(v)$, cioè $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ è un sottofibrato del pull-back $\pi^*\mathcal{E}$. Infine, definiamo il fibrato quoziente $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}$ attraverso l'esattezza della successione tautologica
$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0.$$

Consideriamo ora un fibrato vettoriale $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow X$ di rango k. Il nostro obiettivo è quello di costruire una varietà $\mathrm{Fl}(\mathcal{E})$, che chiameremo *varietà di spezzamento*, e una mappa $\sigma : \mathrm{Fl}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ tale che il pull-back di $\mathcal{E}$ a $\mathrm{Fl}(\mathcal{E})$ ammette una filtrazione di sottofibrati vettoriali di $\sigma^*\mathcal{E}$

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_k = \sigma^*\mathcal{E},$$

con $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ fibrato in rette di rango 1 su $\mathrm{Fl}(\mathcal{E})$.

Procediamo per gradi:

- Se $\mathcal{E}$ ha rango 1, non c'è nulla da dimostrare, essendo $\sigma^*\mathcal{E}$ fibrato di rango 1.

- Se $\mathcal{E}$ ha rango 2, possiamo considerare come varietà di spezzamento $\mathrm{Fl}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Infatti, come già osservato, si ha $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}_{\mathcal{E}} \subset \pi_1^*\mathcal{E}$, con $\pi_1 : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$, e il quoziente è proprio $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} = \pi_1^*\mathcal{E}/\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, fibrato di rango 1 su $\mathrm{Fl}(\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_1 \arrow[r, hook] & \pi_1^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, "\rho"] \\ & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\pi_1"] & X \end{tikzcd}$$

- Se $\mathcal{E}$ ha rango 3, sopra $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ abbiamo, come nel caso precedente, $\mathcal{Q}_1 = \pi_1^*\mathcal{E}/\mathcal{S}_1$, ove ora si ha che $\mathcal{Q}_1$ ha rango 2: si tratta, quindi, di reiterare la precedente costruzione con $\mathcal{Q}_1$. A tal fine, consideriamo il proiettificato $\mathbb{P}(\mathcal{Q}_1)$ - ove poniamo con π_2 la mappa $\pi_2 : \mathbb{P}(\mathcal{Q}_1) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$, su cui non solo si possono tirare indietro i fibrati prima definiti su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, ottendendo quindi $\pi_2^*\mathcal{Q}_1 = \pi_2^*\pi_1^*\mathcal{E}/\pi_2^*\mathcal{S}_1$, ma si ha anche la successione tautologica

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_2 \longrightarrow \pi_2^*\mathcal{Q}_1 \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \longrightarrow 0.$$

Da cui la filtrazione cercata, essendo $\mathcal{Q}_2 = \pi_2^*\mathcal{Q}_1/\mathcal{S}_2$ fibrato in rette su $\mathrm{Fl}(\mathcal{E}) := \mathbb{P}(\mathcal{Q}_1)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_2 \arrow[r, hook] & \pi_2^*\mathcal{Q}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Q}_1 \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, "\rho"] \\
& \mathbb{P}(\mathcal{Q}_1) \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\pi_1"] & X
\end{tikzcd}$$

L'algoritmo è quindi chiaro: si procede passo dopo passo scomponendo il fibrato quoziente, tirandolo indietro sulla sua proiettivizzazione. In particolare, se k è il rango del fibrato $\mathcal{E}$, dopo $k-1$ iterazioni il pull-back tramite $\pi_{k-1} \circ \ldots \circ \pi_1$ di $\mathcal{E}$ sulla varietà di spezzamento $\mathrm{Fl}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{Q}_{k-2})$ ammette la filtrazione cercata, in cui i successivi quozienti sono fibrati in rette su $\mathrm{Fl}(\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{k-1} \arrow[r, hook] & (\pi_{k-1} \circ \ldots \circ \pi_1)^*\mathcal{Q}_1 \arrow[d] & & \mathcal{Q}_1 \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, "\rho"] \\
& \mathbb{P}(\mathcal{Q}_{k-2}) \arrow[r, "\pi_{k-1}"] & \ldots \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\pi_1"] & X
\end{tikzcd}$$

Come vediamo nel seguito, questa costruzione, insieme con gli assiomi presentati nella Definizione 2.1.4, ci permette di calcolare le classi di Chern di ogni fibrato. Enunciamo quindi il seguente

Teorema 2.1.8 (Principio di spezzamento)**.** *Si può provare una qualsiasi identità tra le classi di Chern di un fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ assumendo che questo si scomponga nella somma diretta di fibrati in rette.*

Dimostrazione. Nelle notazioni di cui sopra, supponiamo di aver effettuato la costruzione appena descritta con $\mathcal{E}$, ottenendo, quindi, la filtrazione

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_k = \sigma^*\mathcal{E},$$

dove k è il rango di $\mathcal{E}$. Iterando la formula di Whitney, otteniamo

$$c(\sigma^*\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{k} c(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}).$$

Infine l'assioma di naturalità garantisce che la relazione continua a sussistere anche per il fibrato originario $\mathcal{E}$ sopra X. $\square$

Il Teorema 2.1.8 ci permette di definire le classi di Chern di un qualsiasi fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ su X, sfruttando la sola nozione di c_1 per un fibrato in rette: in virtù della formula di Whitney e del principio di spezzamento, possiamo infatti assumere, sebbene ciò non sia vero, che ogni fibrato ammetta uno spezzamento in somma diretta di fibrati in rette. Supponendo quindi $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$, ove k è il rango di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{L}_i$ è un fibrato in rette su X per ogni i, possiamo definire le *radici di Chern*

$$\alpha_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(X, \mathbb{Z}),$$

e scrivere

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{k} c(\mathcal{L}_i) = \prod_{i=1}^{k} (1 + \alpha_i).$$

I polinomi simmetrici elementari nelle radici α_i definiscono le classi di Chern di $\mathcal{E}$. Più precisamente

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = c_1(\mathcal{E})$$

$$\sum_{1 \le i < j \le k} \alpha_i \alpha_j = c_2(\mathcal{E})$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k = c_k(\mathcal{E}).$$

Facciamo allora qualche esempio di calcolo. Nel seguito, sia $\mathcal{E}$ un fibrato algebrico di rango k su una varietà liscia proiettiva X e supponiamo che $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$, con $\mathcal{L}_i$ fibrato in rette su X per ogni i.

Esempio 2.1.9. Calcoliamo $c_1(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{E})$. Per il principio di spezzamento, si ha

$$\mathrm{Sym}^2 \mathcal{E} = \mathrm{Sym}^2 \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i \right) = \bigoplus_{i \le j} \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j.$$

Ponendo con $\alpha_i = c_1(\mathcal{L}_i)$ le radici di Chern, iterando la formula di Whitney otteniamo

$$c(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{E}) = \prod_{i \le j} (1 + \alpha_i + \alpha_j),$$

da cui, considerando i termini di grado 1,

$$c_1(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{E}) = 2 \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i<j} (\alpha_i + \alpha_j) = (2 + k - 1) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = (k+1) c_1(\mathcal{E}).$$

Esempio 2.1.10. Calcoliamo $c_1(\bigwedge^2 \mathcal{E})$. Per il principio di spezzamento, si ha

$$\bigwedge^2 \mathcal{E} = \bigwedge^2 \left(\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\right) = \bigoplus_{i<j} \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j.$$

La classe totale di Chern si ottiene, come nell'Esempio 2.1.9 sopra, sfruttando la formula di Whitney. In particolare si ha

$$c\left(\bigwedge^2 \mathcal{E}\right) = \prod_{i<j}(1 + \alpha_i + \alpha_j),$$

con α_i che denotano le radici di Chern. In conclusione, la prima classe di Chern di $\bigwedge^2 \mathcal{E}$ è

$$c_1\left(\bigwedge^2 \mathcal{E}\right) = \sum_{i<j}(\alpha_i + \alpha_j) = (k-1)\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = (k-1)c_1(\mathcal{E}).$$

Forti dei 4 assiomi e del principio di spezzamento, dimostriamo alcune notevoli proprietà delle classi di Chern, particolarmente utili nella pratica. Nel seguito sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà liscia proiettiva e $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$ è un fibrato vettoriale algebrico di rango k.

Proposizione 2.1.11. *Per ogni $j > k$ si ha $c_j(\mathcal{E}) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza diretta della costruzione delle classi di Chern per $\mathcal{E}$. Assumiamo che $\mathcal{E}$ spezzi in somma diretta di fibrati in rette, per cui $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$. Allora si ha

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{k} c(\mathcal{L}_i) = \prod_{i=1}^{k}(1 + c_1(\mathcal{L}_i)),$$

che non ha termini di grado $> k$. Per cui si ha la tesi. □

Proposizione 2.1.12. $c(\mathcal{O}_X) = 1$.

Dimostrazione. Sia $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ l'inclusione. Usando l'assioma di naturalità si ha

$$c(\mathcal{O}_X) = 1 + c_1(\mathcal{O}_X) = 1 + c_1(i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1 + i^*c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1,$$

essendo $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$. □

Proposizione 2.1.13. *Se $\mathcal{E}'$ è un altro fibrato su X di rango k', allora si ha*

$$c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') = kc_1(\mathcal{E}') + k'c_1(\mathcal{E}).$$

Dimostrazione. Supponiamo $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$ e $\mathcal{E}' = \bigoplus_{i=1}^{k'} \mathcal{L}'_i$ siano somma diretta di fibrati in rette. Si ha quindi

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' = \bigoplus_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k'}} \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}'_j.$$

Ponendo con $\alpha_i = c_1(\mathcal{L}_i)$ e $\beta_j = c_1(\mathcal{L}'_j)$, otteniamo

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') = \prod_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k'}} (1 + \alpha_i + \beta_j),$$

da cui in particolare

$$c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') = \sum_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k'}} (\alpha_i + \beta_j) = k' \sum_{i=1,\dots,k} \alpha_i + k \sum_{j=1,\dots,k'} \beta_j = k' c_1(\mathcal{E}) + k c_1(\mathcal{E}').$$

□

Il calcolo delle restanti classi di Chern $c_i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$ non è immediato come nel caso $i = 1$ appena dimostrato. Tuttavia, se uno dei due fibrati ha rango 1 la formula ricorsiva è più semplice da ricavare: supponendo che $\mathcal{E}$ sia un fibrato di rango k e $\mathcal{L}$ un fibrato in rette, si dimostra (per i dettagli, consultare [EH16], Sezione 5.5.2) che

$$c_i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k-i+j}{j} c_1(\mathcal{L})^i c_{k-i}(\mathcal{E}).$$

Proposizione 2.1.14. *Per ogni j vale $c_j(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^j c_j(\mathcal{E})$.*

Dimostrazione. Assumiamo $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$. Sfruttando l'assioma di naturalità, per ogni i si ha $c_1(\mathcal{L}_i^\vee) = -c_1(\mathcal{L}_i)$, e pertanto

$$c(\mathcal{E}^\vee) = \prod_{i=1}^{k} (1 + c_1(\mathcal{L}_i^\vee)) = \prod_{i=1}^{k} (1 - c_1(\mathcal{L}_i)),$$

da cui $c_j(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^j c_j(\mathcal{E})$. □

Proposizione 2.1.15. *Vale $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\det(\mathcal{E}))$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$, allora

$$\det(\mathcal{E}) = \bigwedge^{k} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i,$$

da cui

$$c_1(\det(\mathcal{E})) = \sum_{i=1}^{k} c_1(\mathcal{L}_i) = c_1(\mathcal{E}).$$

□

2.2 Verso la caratteristica di Eulero

In questa sezione ci focalizziamo su quello che è il più importante fibrato sopra ad una varietà liscia X, vale a dire il fibrato tangente $\mathcal{T}_X$. Le sue classi di Chern sono talmente importanti in geometria che ci si riferisce a queste denotandole semplicemente classi di Chern di X: nel seguito, infatti, scriviamo $c_i(X) = c_i(\mathcal{T}_X)$.

Esempio 2.2.1. Calcoliamo $c(\mathbb{P}^n)$. Consideriamo la successione di Eulero (Osservazione 1.1.16)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0,$$

da cui, per la formula di Whitney, si ha

$$c\left(\bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})c(\mathbb{P}^n).$$

Osserviamo che $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1$. Inoltre

$$c\left(\bigoplus^{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) = \prod^{n+1} c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = (1 + H)^{n+1},$$

essendo $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = 1 + c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = 1 + H$. Per cui

$$c(\mathbb{P}^n) = (1 + H)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} H^k,$$

essendo $c_{n+1}(\mathbb{P}^n) = 0$.

Esempio 2.2.2. Sia ora $X \subset \mathbb{P}^n$ ipersuperficie liscia di grado d. Per calcolare $c(X)$, usiamo la successione esatta normale

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|X} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{P}^n/X} \cong \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0,$$

da cui otteniamo

$$c(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|X}) = c(X)c(\mathcal{O}_X(d)).$$

Iterando la formula della Proposizione 2.1.13, si ha

$$c(\mathcal{O}_X(d)) = c\left(\bigotimes^{d} \mathcal{O}_X(1)\right) = 1 + c_1\left(\bigotimes^{d} \mathcal{O}_X(1)\right) = 1 + dH_X,$$

ove con H_X si intende la classe iperpiana H di $\mathbb{P}^n$ ristretta all'ipersuperficie X. Allo stesso modo, recuperando l'esempio precedente, si ha

$$c(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|X}) = (1 + H_X)^{n+1}.$$

Più precisamente, nei precedenti calcoli abbiamo usato l'assioma di naturalità con l'inclusione $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$. In conclusione la classe totale di Chern di X è

$$c(X) = \frac{(1 + H_X)^{n+1}}{1 + dH_X}.$$

Se vogliamo esplicitare le classi di Chern di X, ci basta imporre in sistema le $n - 1$ relazioni ottenute eguagliando i termini dello stesso grado:

$$(1 + c_1(X) + c_2(X) + \ldots + c_{n-1}(X))(1 + dH_X) = 1 + (n + 1)H_X + \binom{n+1}{2} H_X^2 + \ldots$$

da cui

$$c_1(X) = (n + 1)H_X - dH_X = (n + 1 - d)H_X,$$

$$c_2(X) = \binom{n+1}{2} H_X^2 - dH_X c_1(X) = \binom{n+1}{2} H_X^2 - d(n + 1 - d)H_X^2,$$

$$\vdots$$

e così via fino all'ultima classe di Chern.

Osservazione 2.2.3. Osserviamo che se il grado dell'ipersuperficie X è $d = n + 1$, allora $c_1(X) = 0$: questo non ci sorprende, dal momento che, sotto questa ipotesi, per la formula di aggiunzione si ha che il canonico $\mathcal{K}_X$ è banale e quindi, per la Proposizione 2.1.15

$$c_1(X) = -c_1(\Omega_X) = -c_1(\mathcal{K}_X) = 0.$$

Ovviamente, per la Proposizione 2.1.14, è vero anche il viceversa.

Vediamo ora come il calcolo delle classi di Chern di una varietà liscia proiettiva X ci permette di ricavare un importante invariante geometrico, ossia la *caratteristica topologica di Eulero-Poincaré* della varietà, che per definizione è

$$e(X) := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i rk(H^i(X, \mathbb{Z})),$$

ove $n = \dim(X)$. A tal fine, definiamo il *grado* della massima classe di Chern di X $\deg(c_n(X))$ come il numero di intersezioni di una sezione del tangente $\mathcal{T}_X$ (che, in virtù della successione di Eulero (1.1.16), si può interpretare come intersezione lineare), intero che, algebricamente, corrisponde al coefficiente relativo a $c_n(X)$ nello sviluppo della classe totale di Chern $c(X)$.

Teorema 2.2.4 (Gauss-Bonnet-Chern). *Se X è una varietà proiettiva liscia di dimensione n, allora*

$$e(X) = \int_X c_n(X),$$

ove il simbolo di integrale indica valutare il grado $\deg(c_n(X))$.

Esempio 2.2.5. Dal momento che $c(\mathbb{P}^n) = 1 + (n+1)H + \binom{n+1}{2}H^2 + \ldots + (n+1)H^n$, si ha

$$e(\mathbb{P}^n) = \int_{\mathbb{P}^n} c_n(\mathbb{P}^n) = \int_{\mathbb{P}^n} (n+1)H^n = n+1.$$

Esempio 2.2.6. Sia $X \subset \mathbb{P}^4$ ipersuperficie di grado 5. Calcoliamo $e(X) = \deg(c_3(X))$, replicando il procedimento dell'Esempio 2.2.2. In questo caso, eliminando i termini di grado > 3, abbiamo

$$(1 + 5H_X)(1 + c_1(X) + c_2(X) + c_3(X)) = 1 + 5H_X + 10H_X^2 + 10H_X^3.$$

Osserviamo che $\mathcal{K}_X$ è banale ($5 - 4 - 1 = 0$), per cui $c_1(X) = 0$. Otteniamo quindi

$$c_1(X) = 0,$$
$$c_2(X) = 10H_X^2,$$
$$c_3(X) = 10H_X^3 - 5H_X c_2(X) = 10H_X^3 - 50H_X^3 = -40H_X^3$$

da cui

$$e(X) = \int_X c_3(X) = -40 \cdot \int_X H_X^3.$$

Dal momento che $\int_X H_X^3$ corrisponde al numero di punti, contati con molteplicità, di intersezione di 3 iperpiani in $\mathbb{P}^4$ con la quintica X, si ha in conclusione

$$e(X) = -40 \int_{\mathbb{P}^4} H^3 \cdot 5H = -200 \int_{\mathbb{P}^4} H^4 = -200.$$

Quello appena presentato è un esempio di varietà di *Calabi-Yau* di dimensione 3.

2.3 Il Teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch

In questa sezione, ci proponiamo di enunciare il Teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch, una delle formule più importanti nel campo della geometria complessa e della geometria algebrica: si tratta di una generalizzazione del classico teorema di Riemann-Roch - nato per lo studio delle superfici di Riemann, a varietà algebriche lisce di qualsiasi dimensione. Ricordiamo, quindi, la formula di Riemann-Roch per curve e superfici. Nel seguito, preso $\mathcal{E}$ fibrato algebrico su X proiettiva di dimensione n, indichiamo con $\chi(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(\mathcal{E})$, ove $h^i(\mathcal{E}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{E})$ la caratteristica di Eulero di $\mathcal{E}$.

Teorema 2.3.1 (Riemann-Roch per curve)**.** *Sia X una curva liscia proiettiva di genere g e sia D un divisore su X. Allora*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg(D) - g + 1.$$

Esempio 2.3.2. Applicando la formula di Riemann-Roch per curve al fibrato banale $\mathcal{O}_X$, otteniamo la dimensione dello spazio delle forme regolari sulla curva X: infatti, dal momento che $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$ e, per dualità di Serre, $h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{K}_X)$, si ha

$$1 - h^0(\mathcal{K}_X) = 0 - g + 1,$$

da cui

$$h^0(\mathcal{K}_X) = \dim H^0(X, \mathcal{K}_X) = g,$$

in linea con la definizione di genere geometrico.

Esempio 2.3.3. Usiamo la formula di Riemann-Roch per calcolare il grado del divisore canonico su una curva proiettiva X. Presa ω una 1-forma regolare su X, si ha

$$\chi(\mathcal{K}_X) = \deg(div(\omega)) - g + 1,$$

ove la dimensione dello spazio delle 1-forme regolari su X è proprio il genere g di X e $h^1(\mathcal{K}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$ per dualità di Serre (Teorema 1.2.9). Pertanto

$$g - 1 = \deg(div(\omega)) - g + 1,$$

da cui

$$\deg(div(\omega)) = 2g - 2.$$

Applicando la formula genere-grado vista in 1.2.26, possiamo esprimere il grado del canonico nei termini del grado d della curva, ottenendo

$$\deg(div(\omega)) = 2\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 2 = d(d-3).$$

In particolare, il calcolo evidenzia che, con un abuso di notazione,

$$\deg(\mathcal{T}_X) = -\deg(\mathcal{K}_X) = 2 - 2g = e(X),$$

del tutto in linea con il teorema di Gauss-Bonnet-Chern. Osserviamo, inoltre, la non trivialità del tangente $\mathcal{T}_X = \mathcal{O}_X(2-2g)$ nel caso $g \neq 1$.

Teorema 2.3.4 (Riemann-Roch per superfici)**.** *Sia X una superficie liscia proiettiva e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Allora*

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \cdot \mathcal{K}_X).$$

Osservazione 2.3.5 (Formula del genere). Sia C una curva liscia su una superficie proiettiva liscia X. Vediamo che il genere di C è

$$g = 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{O}_X(C)^2 + \mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{K}_X\right).$$

Considerando, infatti, la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

si ha (per i dettagli, vedi [Huy05], Appendice B)

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X(-C)) + \chi(\mathcal{O}_C).$$

Applicando ora la formula di Riemann-Roch per superfici al fibrato in rette associato al divisore $-C$ su X, si ha

$$\chi(\mathcal{O}_X(-C)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(\mathcal{O}_X(-C)^2 + \mathcal{O}_X(-C) \cdot \mathcal{K}_X).$$

Per concludere, basta osservare che, per dualità di Serre,

$$\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - h^1(\mathcal{O}_C) = 1 - h^0(\mathcal{K}_C) = 1 - g,$$

da cui la tesi mettendo insieme le tre relazioni.

Osserviamo che nel caso in cui X è proprio $\mathbb{P}^2$, per cui C è una curva liscia proiettiva piana di grado d, otteniamo la formula genere-grado già vista nel capitolo precedente (Osservazione 1.2.26), dal momento che

$$g = 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)^2 + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)\right) = 1 + \frac{d^2 - 3d}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Procediamo introducendo due nozioni centrali nell'enunciato del Teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch: il *carattere di Chern* e la *classe di Todd*, entrambi definiti in termini di classi di Chern di un certo fibrato $\mathcal{E}$ sulla varietà. Partiamo con il carattere di Chern nel caso dei fibrati in rette, estendendo poi la definizione attraverso il principio di spezzamento.

Definizione 2.3.6. Sia X una varietà liscia proiettiva di dimensione n e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Definiamo il *carattere di Chern* di $\mathcal{L}$ come

$$\mathrm{ch}(\mathcal{L}) := \exp(c_1(\mathcal{L})) = 1 + c_1(\mathcal{L}) + \frac{c_1(\mathcal{L})^2}{2} + \ldots + \frac{c_1(\mathcal{L})^n}{n!} + \ldots.$$

Osservazione 2.3.7. Osserviamo che, per la Proposizione 2.1.12, si ha $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) = 1$.

Sia ora $\mathcal{E}$ un fibrato di rango k su X. Assumiamo che $\mathcal{E}$ si decomponga nella somma di k fibrati in rette, per cui poniamo $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{L}_i$. A questo punto, definiamo il carattere di Chern di $\mathcal{E}$ come

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = \exp\left(\sum_i \alpha_i\right) = k + \sum_i \alpha_i + \frac{1}{2}\left(\sum_i \alpha_i^2\right) + \dots$$

ove $\alpha_i = c_1(\mathcal{L}_i)$. Questo si può riscrivere nei termini delle classi di Chern di $\mathcal{E}$: dal principio di spezzamento, accompagnato da qualche calcolo, abbiamo

$$\sum_i \alpha_i = c_1(\mathcal{E}),$$

$$\sum_i \alpha_i^2 = \left(\sum_i \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j = c_1(\mathcal{E})^2 - 2c_2(\mathcal{E}),$$

$$\sum_i \alpha_i^3 = \left(\sum_i \alpha_i\right)^3 - 3\sum_{i\neq j} \alpha_i^2\alpha_j - 6\sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k = c_1(\mathcal{E})^3 - 3c_1(\mathcal{E})c_2(\mathcal{E}) + 3c_3(\mathcal{E})$$

e così via, fino ad ottenere la scrittura

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = k + c_1(\mathcal{E}) + \frac{c_1(\mathcal{E})^2 - 2c_2(\mathcal{E})}{2} + \frac{c_1(\mathcal{E})^3 - 3c_1(\mathcal{E})c_2(\mathcal{E}) + 3c_3(\mathcal{E})}{6} + \dots$$

Allo stesso modo, definiamo la classe di Todd di un fibrato partendo dal caso di rango 1 e vediamo come anche questo si presenti come polinomio nelle sue classi di Chern.

Definizione 2.3.8. Sia X una varietà liscia proiettiva di dimensione n e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Definiamo la *classe di Todd* di $\mathcal{L}$ come

$$\mathrm{Td}(\mathcal{L}) = \frac{c_1(\mathcal{L})}{1 - \exp(-c_1(\mathcal{L}))} = 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L}) + \frac{1}{12}c_1(\mathcal{L})^2 + \dots.$$

Riprendendo le notazioni del caso del carattere di Chern, se $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{L}_i$, allora

$$\mathrm{Td}(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \exp(-\alpha_i)},$$

il quale anch'esso si può riscrivere nei termini delle stesse classi di Chern di $\mathcal{E}$, ottenendo

$$\mathrm{Td}(\mathcal{E}) = 1 + \frac{c_1(\mathcal{E})}{2} + \frac{c_1(\mathcal{E})^2 + c_2(\mathcal{E})}{12} + \frac{c_1(\mathcal{E})c_2(\mathcal{E})}{24} + \dots$$

Siamo quindi pronti per dare l'enunciato del teorema.

Teorema 2.3.9 (Hirzebruch-Riemann-Roch)**.** *Sia X una varietà proiettiva e $\mathcal{E}$ un fibrato di rango k su X. Allora*

$$\chi(\mathcal{E}) = \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{E})\,\mathrm{Td}(X).$$

Una conseguenza diretta del Teorema 2.3.9 è la formula di Noether per superfici.

Corollario 2.3.10 (Formula di Noether per superfici)**.** *Sia X una superficie liscia proiettiva. Allora*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(\mathcal{K}_X^2 + e(X)).$$

Dimostrazione. Applicando la formula di Hirzebruch-Riemann-Roch al fibrato $\mathcal{O}_X$, si ha

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \int_X \mathrm{Td}(X) = \int_X \left(1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X))\right),$$

dal momento che $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) = 1$ e $\mathrm{Td}(X) = 1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X))$, essendo $\dim(X) = 2$. In particolare, $\int_X \left(1 + \frac{1}{2}c_1(X)\right) = 0$, per cui rimane

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\int_X (c_1(X)^2 + c_2(X)).$$

A questo punto, essendo $c_1(X)^2 = \mathcal{K}_X^2$, applicando il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern si ha la tesi.

□

Vediamone subito un'applicazione.

Esempio 2.3.11. Calcoliamo la caratteristica di Eulero di una superficie K3 X. Per definizione, si ha che $\mathcal{K}_X$ è banale, per cui applicando la formula di Noether, si ha

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}e(X),$$

da cui

$$e(X) = 12(h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X)).$$

In conclusione

$$e(X) = 24$$

essendo $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ per definizione di K3 e $h^0(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 1$ per dualità di Serre (1.2.9), quindi $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$. In particolare, osserviamo che la formula di Riemann-Roch nel caso in cui X sia una superficie K3 si presenta nella forma

$$\chi(\mathcal{L}) = 2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2,$$

con $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$.

Concludiamo il capitolo mostrando come si ricavano le versioni classiche del Teorema di Riemann-Roch per curve e superfici dalla generalizzazione dovuta ad Hirzebruch. Partiamo dal caso delle curve.

Dimostrazione del Teorema 2.3.1. Sia quindi X una curva liscia di genere g in $\mathbb{P}^2$ e sia D un divisore su X. Dalla formula di Hirzebruch-Riemann-Roch (2.3.9) si ha

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{O}_X)\,\mathrm{Td}(X),$$

dove per definizione $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + c_1(\mathcal{O}_X(D))$ e $\mathrm{Td}(X) = 1 + \frac{1}{2}c_1(X)$. Ma allora, eliminando i termini di grado > 1, si ha

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \int_X (1 + c_1(\mathcal{O}_X(D))\left(1 + \frac{1}{2}c_1(X)\right) = \int_X \left(1 + c_1(\mathcal{O}_X(D)) + \frac{1}{2}c_1(X)\right).$$

In particolare, essendo $\int_X 1 = 0$, otteniamo

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \int_X c_1(\mathcal{O}_X(D)) + \frac{1}{2}\int_X c_1(X),$$

da cui, applicando l'Osservazione in 2.1.3 e il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern in 2.2.4 rispettivamente al primo e al secondo integrale, ricaviamo la formula nella versione classica:

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg(D) - g + 1,$$

dove abbiamo usato che $e(X) = 2 - 2g$. □

Procediamo con la formula di Riemann-Roch per le superfici.

Dimostrazioni del Teorema 2.3.4. Sia X una superficie liscia proiettiva e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. La classe di Todd del fibrato tangente su X è

$$\mathrm{Td}(X) = 1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X)),$$

per cui applicando la formula di Hirzebruch-Riemann-Roch al fibrato $\mathcal{L}$ otteniamo

$$\chi(\mathcal{L}) = \int_X \left(1 + c_1(\mathcal{L}) + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L})^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}\left(c_1(X)^2 + c_2(X)\right)\right).$$

Lasciando sotto segno di integrale solo i termini di grado 2, si ha

$$\chi(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\int_X \left(c_1(\mathcal{L})c_1(X) + c_1(\mathcal{L})^2\right) + \frac{1}{12}\int_X \left(c_1(X)^2 + c_2(X)\right),$$

da cui, essendo $c_1(X) = -c_1(\mathcal{K}_X)$ (Proposizione 2.1.15) e applicando il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern (2.2.4),

$$\chi(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}\cdot\mathcal{K}_X\right) + \frac{1}{12}\left(\mathcal{K}_X^2 + e(X)\right).$$

A questo punto, possiamo applicare la formula di Noether e scrivere

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \cdot \mathcal{K}_X\right).$$

□

Capitolo 3

Rette in una superficie cubica

In quest'ultimo capitolo ci dedichiamo ad un classico risultato sullo studio delle superfici proiettive spaziali, presentandolo come applicazione della teoria delle classi di Chern precedentemente studiata. Si tratta di calcolare il numero di rette contenute in una superficie cubica liscia in $\mathbb{P}^3$, numero che, come vedremo, si ottiene studiando le classi di Chern di un certo fibrato su $\mathrm{Gr}(2,4)$. A tal fine, diamo un'idea di come la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k,n)$ si realizzi come varietà algebrica proiettiva, studiando quindi come questa si immerga in $\mathbb{P}^N$, per un certo $N \in \mathbb{N}$, soffermandoci poi al caso $\mathrm{Gr}(2,4)$.

Definizione 3.0.1. Data la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k,n)$, la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Gr}(k,n) &\longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right) \\ \mathrm{Span}\{w_1 \dots, w_k\} &\longmapsto [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \end{aligned}$$

dove $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base per $W \subset V_n \cong \mathbb{C}^n$, è detta *mappa di Plücker*.

Osservazione 3.0.2. Osserviamo in primis che la mappa è ben posta: infatti se $\{w_1', \dots, w_k'\}$ è un'altra base per W e $G \in GL_k(\mathbb{C})$ è la matrice del cambio di base, ossia tale per cui $Gw_i = w_i'$ per ogni $i = 1, \dots, k$, allora si ha

$$w_1' \wedge \dots \wedge w_k' = \det(G)\,(w_1 \wedge \dots \wedge w_k)\,,$$

cioè rappresentano la stessa classe in $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right)$.

Osservazione 3.0.3. Si dimostra non solo che questa mappa è iniettiva, ma che l'immagine descrive una sottovarietà di $\mathbb{P}^N$, con $N = \dim\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right) - 1 = \binom{n}{k} - 1$, per cui φ è un'immersione chiusa di $\mathrm{Gr}(k,n)$ nel proiettivo (per i dettagli, vedi [Har92], Lecture 6). In particolare, le coordinate omogenee di $\mathrm{Gr}(k,n)$ su $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right)$ indotte dall'immersione sono dette *coordinate di Plücker*, e si ottengono prendendo tutti i minori $k \times k$ della matrice $k \times n$ che ha sulle righe una base per W.

In generale, ricavare le equazioni che definiscono $\mathrm{Gr}(k,n)$ non è immediato, ma vediamo come nel caso della Grassmanniana $\mathrm{Gr}(2,4)$ il problema si riduce al calcolo del determinante di una matrice.

Sia quindi W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 2, di cui consideriamo una base $\{u, v\}$. Presa la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix},$$

che ha sulle righe i vettori della base di W, le coordinate di Plücker su $\mathrm{Gr}(2,4)$ sono date da $x_{ij} := u_i v_j - u_j v_i$, con $1 \leq i < j \leq 4$. Consideriamo quindi la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è dato da

$$\det(M) = (x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23})^2.$$

In particolare, il polinomio $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$ nelle coordinate di Plücker è detto *pfaffiano* della matrice M, e i suoi zeri definiscono la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(2,4)$. In questi termini, si ha che $\mathrm{Gr}(2,4)$ rappresenta una quadrica liscia in $\mathbb{P}^5$, essendo definita da un polinomio in $\mathbb{C}[x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}]_2$.

Procediamo riportando il calcolo delle classi di Chern di $\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ fibrato di rango 2 su una varietà liscia proiettiva X. Come vedremo, questo calcolo sarà centrale nella dimostrazione delle 27 rette contenute sulla cubica liscia in $\mathbb{P}^3$.

Esempio 3.0.4. Calcoliamo quindi $c(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E})$. Con l'obiettivo di applicare il principio di spezzamento, supponiamo $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, con $\mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}(X)$ e poniamo $\alpha_i = c(\mathcal{L}_i)$, $i = 1, 2$. Ma allora

$$\mathrm{Sym}^3(\mathcal{E}) = \mathrm{Sym}^3(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_1^{\otimes 3} \oplus (\mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2) \oplus (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2}) \oplus \mathcal{L}_2^{\otimes 3},$$

da cui, per la formula di Whitney,

$$c(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}) = c(\mathcal{L}_1^{\otimes 3})c(\mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2)c(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2})c(\mathcal{L}_2^{\otimes 3}),$$

dove, in particolare (dopo aver scartato i termini di grado > 1)

$$\begin{aligned} c(\mathcal{L}_1^{\otimes 3}) &= (1+\alpha_1)^3 = 1 + 3\alpha_1, \\ c(\mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2) &= (1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2) = 1 + \alpha_2 + 2\alpha_1, \\ c(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2}) &= (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)^2 = 1 + \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ c(\mathcal{L}_2^{\otimes 3}) &= (1+\alpha_2)^3 = 1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Ora, essendo $\binom{2+3-1}{3} = 4$ il rango di $\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}$, per ottenere le classi di Chern di $\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}$ ci basta eguagliare i termini dello stesso grado. Scrivendo tutto in termini di $c_1(\mathcal{E}) = \alpha_1 + \alpha_2$ e $c_2(\mathcal{E}) = \alpha_1\alpha_2$, otteniamo

$$\begin{aligned}
c_1(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}) &= 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6c_1(\mathcal{E}),\\
c_2(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}) &= 11\alpha_1^2 + 32\alpha_1\alpha_2 + 11\alpha_2^2 = 11c_1(\mathcal{E})^2 + 10c_2(\mathcal{E}),\\
c_3(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}) &= 6\alpha_1^3 + 48\alpha_1^2\alpha_2 + 48\alpha_1\alpha_2^2 + 6\alpha_2^3 = 6c_1(\mathcal{E})^3 + 30c_2(\mathcal{E})c_1(\mathcal{E}),\\
c_4(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{E}) &= 18\alpha_1^3\alpha_2 + 45\alpha_1^2\alpha_2^2 + 18\alpha_1\alpha_2^3 = 9c_2(\mathcal{E})(2c_1(\mathcal{E})^2 + c_2(\mathcal{E})).
\end{aligned}$$

Siamo quindi pronti ad enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 3.0.5. *Una cubica liscia in* $\mathbb{P}^3$ *contiene* 27 *rette.*

Osservazione 3.0.6. Prima di passare alla dimostrazione, osserviamo che togliendo l'ipotesi di liscezza il numero di rette contenute in una cubica non è finito: basti pensare alla superficie in $\mathbb{P}^3$ definita dal polinomio $x_0(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, cubica che si presenta come l'unione di una quadrica e di un piano $\cong \mathbb{P}^2$, che, in particolare, contiene infinite rette.

Dimostrazione. Consideriamo una cubica liscia $X \subset \mathbb{P}^3_{[x_0:\ldots:x_3]}$, definita dal luogo degli zeri di un polinomio $f_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_3$. Il nostro scopo è studiare il luogo delle rette $\ell \cong \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ che si annullano identicamente su X, vale a dire $F_1(X) = \{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \subset X\}$. A tal fine, consideriamo la Grassmanniana $G = \mathrm{Gr}(2,4)$ che, parametrizzando i piani in uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4, descrive equivalentemente lo spazio delle rette proiettive $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$. In particolare, il vincolo che una retta $\ell \in G$ sia contenuta in X si esprime come 4 condizioni lineari nei coefficienti del polinomio f_3, ma vediamo meglio in che senso. Prendiamo la successione tautologica su G

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_G \longrightarrow \mathcal{O}_G^{\oplus 4} \longrightarrow \mathcal{Q}_G \longrightarrow 0,$$

da cui, dualizzando e considerando la terza potenza simmetrica, otteniamo una surriezione

$$\varphi : \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^4)^\vee \longrightarrow \mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee.$$

Osserviamo che, dal momento che le funzioni coordinate $x_0, \ldots, x_3 \in (\mathbb{C}^4)^\vee$ sono sezioni del fibrato $\mathcal{S}_G^\vee$, il polinomio omogeneo f_3 rappresenta una sezione di $\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee$. Componendo questa con φ, otteniamo la sezione

$$\tilde{f}_3 : G \longrightarrow \mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee,$$

la cui fibra sopra ogni $[W]$, che rappresenta il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 2, è la restrizione del polinomio f_3 a W. In particolare, le rette $\ell \subset X$

sono tutte e sole quelle che si ricavano imponendo l'annullarsi di f_3 nel piano W, vale a dire imponendo 4 condizioni lineari sui coefficienti. In questi termini, si ha $\tilde{f_3}^{-1}(0) = F_1(X)$, che - essendo $\tilde{f_3}$ regolare, è una sottovarietà di G di dimensione $\dim(G) - \mathrm{rk}(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee) = 2(4-2) - \binom{3+2-1}{3} = 4 - 4 = 0$, vale a dire un numero finito di punti di G, che ci proponiamo quindi di contare. Il problema si riduce, quindi, a calcolare $\deg(c_4(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee))$, che, per quanto fatto nell'Esempio 3.0.4, si presenta

$$c_4(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee) = 9c_2(\mathcal{S}_G^\vee)(2c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)).$$

Nello specifico, dobbiamo studiare le classi di Chern di $\mathcal{S}_G^\vee$. A tal fine, introduciamo due funzionali linearmente indipendenti $t_1, t_2 \in (\mathbb{C}^4)^\vee$ e consideriamo la mappa

$$t = t_1 \oplus t_2 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ x \longmapsto (t_1(x), t_2(x)).$$

Per ipotesi di indipendenza lineare, la mappa è suriettiva e il nucleo ha dimensione 2. Consideriamo ora il fibrato $\mathcal{S}_G^\vee \oplus \mathcal{S}_G^\vee$ di rango 4 su G, in particolare la sezione s indotta da t, ossia quella tale per cui $s([W]) = t_{1|W} \oplus t_{2|W} \in \mathcal{S}_G^\vee \oplus \mathcal{S}_G^\vee$. In questi termini, $s([W]) = 0$ se e solo $Ker(t) = W$, cioè $\left[s^{-1}(0)\right] = [Ker(t)] \in G$. A questo punto, poiché $s^{-1}(0)$ consiste in un solo punto di G, il grado della mappa s sopra a 0 è 1, da cui si ha

$$\deg(c_4(\mathcal{S}_G^\vee \oplus \mathcal{S}_G^\vee)) = \deg(c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2) = 1.$$

Procediamo quindi applicando la formula di Whitney al duale della successione tautologica, per cui otteniamo

$$c(\mathcal{S}_G^\vee)c(\mathcal{Q}_G^\vee) = c(\mathcal{O}_G^{\oplus 4}) = 1,$$

e in particolare,

$$\begin{aligned} c(\mathcal{Q}_G^\vee) &= \frac{1}{c(\mathcal{S}_G^\vee)} = \frac{1}{1 + c_1(\mathcal{S}_G^\vee) + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)} = \\ &= 1 - (c_1(\mathcal{S}_G^\vee) + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)) + (c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + 2c_1(\mathcal{S}_G^\vee)c_2(\mathcal{S}_G^\vee) + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)) - \\ &- (c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^3 + 3c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 c_2(\mathcal{S}_G^\vee) + 3c_1(\mathcal{S}_G^\vee)c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^3) + \\ &+ (c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^4 + 4c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^3 c_2(\mathcal{S}_G^\vee) + 6c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + 4c_1(\mathcal{S}_G^\vee)c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^3 + \\ &+ c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^4) \pm \dots . \end{aligned}$$

Eguagliando i termini dello stesso grado, risulta, essendo $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}_G) = 2$ e $c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 = 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= c_3(\mathcal{Q}_G^\vee) = 2c_1(\mathcal{S}_G^\vee)c_2(\mathcal{S}_G^\vee) - c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^3, \\ 0 &= c_4(\mathcal{Q}_G^\vee) = c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 - 3c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 c_2(\mathcal{S}_G^\vee) + c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^4. \end{aligned}$$

In particolare, si ha

$$0 = c_1(\mathcal{S}_G^\vee)c_3(\mathcal{Q}_G^\vee) + c_4(\mathcal{Q}_G^\vee) = c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 - c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 c_2(\mathcal{S}_G^\vee),$$

da cui otteniamo la tesi:

$$c_4(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee) = 9c_2(\mathcal{S}_G^\vee)(2c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + c_2(\mathcal{S}_G^\vee)) = 18c_2(\mathcal{S}_G^\vee)c_1(\mathcal{S}_G^\vee)^2 + 9c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2 = 27c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2,$$

in particolare

$$\deg(c_4(\mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}_G^\vee)) = 27 \deg(c_2(\mathcal{S}_G^\vee)^2) = 27.$$

□

Osservazione 3.0.7. É importante osservare che la dimostrazione appena presentata non fornisce informazioni sulla configurazione geometrica delle rette sulla cubica in questione: l'approccio proposto mette piuttosto in evidenza il fatto che queste siano finite e, in particolare, esattamente 27.

Concludiamo il capitolo vedendo da vicino un esempio esplicito di superficie cubica liscia, presentando le equazioni delle 27 rette.

Esempio 3.0.8. Sia $X = V(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3$, superficie detta *3-Fermat*. Osserviamo in primis che la superficie è liscia: mettendo a sistema le 4 derivate parziali, che sono della forma $\frac{\partial f_3}{\partial x_i} = 3x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_j^3$ per $i, j = 0, \ldots, 3$, si ha che queste si annullano contemporaneamente solo in $[0 : 0 : 0 : 0] \notin \mathbb{P}^3$.

Procediamo allora cercando le 27 rette. A tal fine, osserviamo che ogni punto di $\mathbb{P}^3$ della forma $x = [a : -a : b : -b]$, con $a, b \in \mathbb{C}$, è un punto della cubica, dal momento che $f_3(x) = a^3 - a^3 + b^3 - b^3 = 0$. In particolare, tutta la retta $\ell^1 = V(x_0 + x_1, x_2 + x_3) \in \mathbb{P}^3$ è contenuta in X. Allo stesso modo, si ha che $\ell^2 = V(x_0 + x_2, x_1 + x_3)$ e $\ell^3 = V(x_0 + x_3, x_1 + x_4)$ sono rette di $\mathbb{P}^3$ su cui si annulla identicamente il polinomio f_3, per cui stanno in X. A questo punto, facciamo vedere che, modificando un po' le equazioni di ℓ^i, $i = 1, 2, 3$, ricaviamo tutte e 27 le rette di $\mathbb{P}^3$ contenute in X. Osserviamo infatti che tutti i punti di $\mathbb{P}^3$ della forma $x = [a : \xi_i a : b : \xi_j b]$, con $a, b \in \mathbb{C}$ e ξ_i, ξ_j due tra le radici di $\xi^3 = -1$, sono tali per cui $f_3(x) = 0$, per cui le rette $\ell_{i,j}^1 = V(x_0 - \xi_i x_1, x_2 - \xi_j x_3)$ sono contenute in X. Allo stesso modo si procede con ℓ^2 e ℓ^3, ottenendo $\ell_{i,j}^2 = V(x_0 - \xi_i x_2, x_1 - \xi_j x_3)$, $\ell_{i,j}^3 = V(x_0 - \xi_i x_3, x_2 - \xi_j x_4)$. In conclusione, ciascuno dei tre casi conta di 9 rette, da cui 27.

Bibliografia

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*. 34. Cambridge University Press, 1996.

[BT+82] Raoul Bott, Loring W Tu et al. *Differential forms in algebraic topology*. Vol. 82. Springer, 1982.

[EH16] David Eisenbud e Joe Harris. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, 2016.

[Fat24] Enrico Fatighenti. *Topics on Fano varietis*. 2024.

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[Har92] Joe Harris. *Algebraic geometry: a first course*. Vol. 133. Springer Science & Business Media, 1992.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry: an introduction*. Vol. 78. Springer, 2005.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Vol. 5. American Mathematical Soc., 1995.

[Per09] Arvid Perego. «Introduction to algebraic surfaces». In: *2009p. http://www-math. sp2mi. univpoitiers. fr/˜ sarti/corso_ Perego. pdf* (2009).

[Smi+04] Karen Smith et al. *An invitation to algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 2004.

[Tei04] Zach Teitler. «An informal introduction to computing with Chern classes». In: *Available at works. bepress. com/zach teitler/2* (2004).