

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Righe spettrali: formazione, shift,
allargamento**

Tesi di laurea

Presentata da:
Enea Moretti

Relatore:
**Chiar.ma Prof.
Marcella Brusa**

Appello II
Anno Accademico 2023-2024

Indice

Introduzione	ii
1 Formazione delle righe spettrali	1
1.1 Modello atomico di Bohr	1
1.1.1 Atomo di Idrogeno	3
1.2 Coefficienti di Einstein	4
1.3 Approssimazione di dipolo elettrico	6
1.4 Regole di selezione	6
2 Shift delle righe spettrali	8
2.1 Effetto Doppler	8
2.1.1 Effetto Doppler relativistico	9
2.2 Redshift cosmologico	9
3 Allargamento delle righe spettrali	11
3.1 Allargamento naturale	11
3.2 Allargamento Doppler	13
3.3 Allargamento collisionale	14
3.4 Profilo di Voigt	14
4 Appendice 0 - Applicazioni astrofisiche	16
4.1 Quasar	16
4.2 Riga a 21 cm	16

Introduzione

Uno dei modi più efficaci per ottenere informazioni dall'osservazione di un oggetto astronomico è studiare il suo spettro di emissione o di assorbimento. Questo ci descrive l'andamento dell'intensità di radiazione emessa in funzione della lunghezza d'onda, della frequenza o dell'energia. Una delle caratteristiche più importanti dello spettro sono le righe spettrali, ovvero dei massimi, se in emissione, o dei minimi, se in assorbimento, dell'intensità di radiazione. Dallo studio di queste righe si possono infatti derivare alcune delle caratteristiche principali dell'oggetto osservato:

- composizione chimica e relative abbondanze, poichè ogni elemento chimico ha delle righe tipiche e la loro intensità ci descrive quanto quel dato elemento sia presente;
- temperatura, infatti questa influenza la larghezza della riga;
- pressione, anche un aumento di pressione provoca un allargamento;
- componente radiale del moto dell'oggetto rispetto all'osservatore, poichè questa provoca uno *shift* della riga;
- presenza ed intensità di campo magnetico, grazie all'effetto Zeemann che separa i livelli energetici andando a splittare le righe osservate.

In questo elaborato si andrà a discutere come si formano e come si possono ottenere informazioni dallo studio delle righe, trattandone i vari tipi di shift e di allargamento.

Capitolo 1

Formazione delle righe spettrali

1.1 Modello atomico di Bohr

Per comprendere a pieno l'origine delle righe spettrali è necessario costruire un modello atomico che riesca a spiegare questo fenomeno.

Grazie all'esperimento di Rutherford, dove si bombardava una sottilissima lamina d'oro con un fascio di particelle α , ci si accorse che in realtà l'atomo doveva essere per lo più vuoto. Tutta la carica positiva doveva essere concentrata al centro, in una regione piccolissima di spazio, con gli elettroni che ci orbitano intorno. Questo perchè, tramite un rivelatore, ci si accorse che gran parte delle particelle α passavano indisturbate attraverso la lamina, mentre una piccola percentuale veniva deviata anche ad angoli elevatissimi.

Da questo esperimento Bohr costruì un nuovo modello atomico a "planetario" che si basa sui seguenti postulati:

- un atomo ha un insieme discreto di stati stazionari con energia E_n ;
- l'emissione e l'assorbimento di radiazione per un atomo non avvengono in forma continua, secondo l'elettrodinamica classica, ma solo quando l'elettrone passa da un'orbita stazionaria ad un'altra;
- nel passaggio da un'orbita stazionaria E_m ad un'altra E_n si emette o assorbe un fotone di energia $h\nu = |E_m - E_n|$;
- un elettrone in uno stato stazionario descrive un'orbita circolare governata dalle leggi della meccanica classica, che però non sono valide nelle transizioni da uno stato stazionario ad un altro;
- le orbite stazionarie vengono determinate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale $L = \vec{r} \times \vec{p}$ dell'elettrone sia quantizzato, cioè sia un multiplo intero di n .

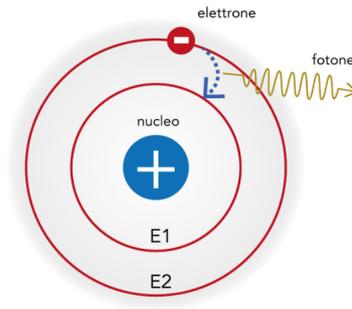


Figura 1.1: Modello atomico di Bohr. Fonte: <https://scienzapertutti.infn.it/7-1-atomo-di-niels-bohr>

Le orbite stazionarie, ovvero ad energia costante, sono determinate dalla condizione di quantizzazione del momento angolare L , introdotta dal secondo postulato.

Nell'ipotesi semplificativa di orbita circolare, quindi con eccentricità nulla, si può scrivere il momento angolare quantizzato come:

$$L_n = r_n m_e v_n = n \hbar \quad (1.1)$$

con L_n momento angolare orbitale, m_e massa dell'elettrone, r_n e v_n raggio e velocità orbitali, n numero quantico principale ($n = 1, 2, 3, \dots$) e \hbar costante di Planck ridotta.

Andando ora a risolvere l'hamiltoniana del sistema si ottengono le equazioni del moto e le energie E_n associate a ciascun orbita stazionaria.

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} \quad (1.2)$$

Andando a considerare orbite circolari si ottiene:

$$\frac{e^2}{r_n} = m_e v_n^2 \quad (1.3)$$

e sostituendo la (1.3) nella (1.2) si ha:

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e v_n^2 \quad (1.4)$$

Inoltre possiamo riscrivere la quantizzazione del momento angolare tramite la sua definizione, quindi:

$$v_n = \frac{n \hbar}{m_e r_n}$$

che inserita nella (1.3) restituisce:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2 \quad (1.5)$$

Si nota quindi che i raggi delle orbite sono quantizzati e proporzionali a n^2 .

La velocità invece si può riscrivere come:

$$v_n = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}$$

e sostituendo nella formula dell'energia orbitale:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar} \frac{1}{n^2} \quad (1.6)$$

Si ricavano così anche i livelli di energia quantizzati e, dal terzo postulato, si ottiene la frequenza del fotone emesso o assorbito per una precisa transizione atomica. Questo, di fatto, genera una riga di emissione, se si passa da uno stato a più alta energia ad uno ad energia più bassa, o, viceversa, in assorbimento.

$$\nu_{m,n} = \frac{|E_n - E_m|}{h} = \frac{\pi m_e e^4}{\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.7)$$

1.1.1 Atomo di Idrogeno

Si consideri ora l'atomo di Idrogeno, formato da un solo protone e un solo elettrone, che rappresenta il caso più semplice possibile.

Andando ad applicare le formule ottenute nella sezione precedente, si possono ricavare le frequenze associate a diversi tipi di transizioni atomiche. In particolare:

$$\nu_{m,n} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.8)$$

con $R_H = 1,097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ costante di Rydberg per l'idrogeno.

Le serie di transizioni si distinguono dal livello energetico n a cui fanno riferimento, per esempio:

- Serie di Lyman: transizione con $n = 1$;
- Serie di Balmer: transizione con $n = 2$;
- Serie di Paschen: transizione con $n = 3$;
- Serie di Brackett: transizione con $n = 4$;
- Serie di Pfund: transizione con $n = 5$;

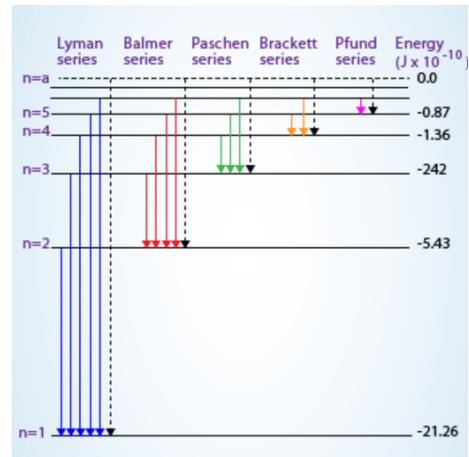


Figura 1.2: Serie dell'idrogeno. Fonte: <https://www.chimica-online.it/download/spettro-dell-idrogeno.htm>

Si noti come i livelli energetici siano via via più vicini all'aumentare di n , com'era prevedibile visto l'andamento di $E \propto n^{-2}$. Di conseguenza l'energia necessaria per far avvenire una certa transizione atomica sarà sempre minore.

Infatti la serie di Lyman si trova nella banda UV, quella di Balmer nel visibile e quella di Paschen nell'IR (l'energia cresce all'aumentare della frequenza).

Visto che le transizioni avvengono a frequenze ben precise, si osservano funzioni delta di Dirac in corrispondenza di tali valori. Nella realtà questo non si verifica

mai, poichè sono presenti fenomeni di allargamento di riga che verranno discussi nei capitoli successivi.

Quindi ciò che si osservano in laboratorio sono degli spettri continui con dei forti avvallamenti in corrispondenza delle frequenze di transizione (spettro in assorbimento) o, viceversa, un continuo "nero" con dei picchi (spettro in emissione).

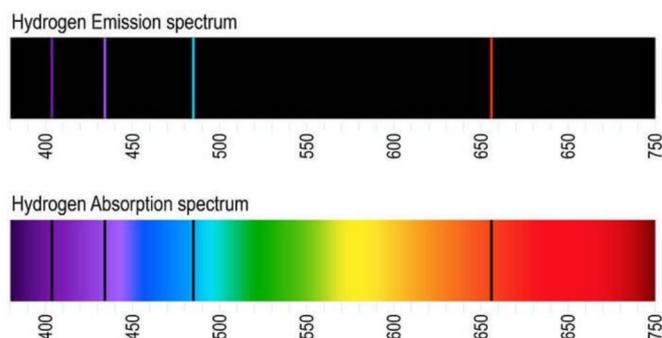


Figura 1.3: Spettro visibile dell'idrogeno (serie di Balmer). Fonte: <https://www.chimica-online.it/download/spettro-dell-idrogeno.htm>

1.2 Coefficienti di Einstein

I coefficienti di Einstein ci descrivono le probabilità associate ai diversi tipi di transizioni che possono avvenire tra due livelli atomici distinti. Infatti, si hanno tre possibili fenomeni quando si considera l'interazione tra radiazione e atomo:

- **Assorbimento:** un elettrone da uno stato inferiore, L (ad energia più bassa), assorbe un fotone di frequenza $\nu_{L,U}$ e passa ad uno stato superiore, U (di energia più alta). La probabilità di transizione per unità di tempo è data dal prodotto $B_{L,U}\vec{J}$ [s^{-1}], dove $B_{L,U}$ [$s^{-1}cm^3eV^{-1}$] è il coefficiente di Einstein per l'assorbimento e \vec{J} è la densità di fotoni a quella data frequenza;
- **Emissione spontanea:** un elettrone passa da uno stato U ad uno L emettendo un fotone di energia $\nu_{U,L}$. In questo caso il coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea $A_{U,L}$ [s^{-1}] ci descrive già la probabilità di transizione, poichè è un processo che avviene in maniera spontanea, senza interazione con altri fotoni. Inoltre ci fornisce il tempo di vita medio τ dell'elettrone nel livello U dell'atomo, infatti:

$$\tau = \frac{1}{A_{U,L}} \quad (1.9)$$

- **Emissione stimolata:** un fotone incidente di frequenza $\nu_{U,L}$ favorisce il decadimento dell'elettrone dallo stato U allo stato L con conseguente emissione di due fotoni entrambi di frequenza $\nu_{U,L}$. La probabilità di transizione per unità di tempo è $B_{U,L}\vec{J}$ [s^{-1}], con $B_{U,L}$ coefficiente di Einstein per l'emissione stimolata.

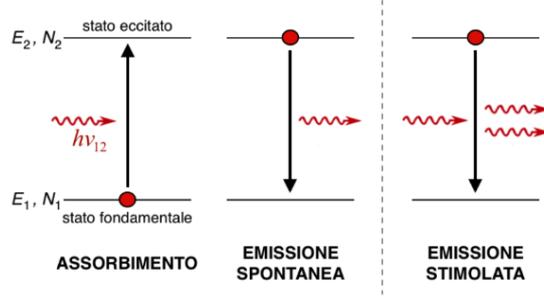


Figura 1.4: Transizioni elettroniche descritte dai coefficienti di Einstein. Fonte: *Dispense di Processi di radiazione e MHD*

Questi sono ricavati dalla meccanica quantistica, infatti si possono ottenere delle relazioni tra i vari coefficienti andando a considerare un certo atomo con della radiazione elettromagnetica all'equilibrio ad una certa temperatura T . Siano inoltre N_U e N_L il numero di elettroni nei due stati.

Il numero di transizioni per unità di tempo dallo stato L a quello U è dato da:

$$\frac{\partial N_{L,U}}{\partial t} = N_L B_{L,U} \vec{J} \quad (1.10)$$

mentre quello dallo stato U a quello L:

$$\frac{\partial N_{U,L}}{\partial t} = N_U B_{U,L} \vec{J} + N_U A_{U,L} \quad (1.11)$$

Visto che il nostro sistema è all'equilibrio, la (1.10) sarà uguale alla (1.11), di conseguenza:

$$\frac{N_L}{N_U} = \frac{A_{U,L} + B_{U,L} \vec{J}}{B_{L,U} \vec{J}} \quad (1.12)$$

D'altra parte, all'equilibrio termico, la popolazione degli stati segue la statistica di Maxwell-Boltzmann, quindi:

$$\frac{N_L}{N_U} = \frac{g_L}{g_U} \exp\left(\frac{\hbar\nu_{U,L}}{k_B T}\right) \quad (1.13)$$

Inserendo la (1.13) nella (1.12) possiamo ricavare l'espressione per \vec{J} :

$$\vec{J} = \frac{A_{U,L}}{\left(\frac{g_L}{g_U}\right) B_{L,U} \exp\left(\frac{\hbar\nu_{U,L}}{k_B T}\right) - B_{U,L}} \quad (1.14)$$

Questa densità dovrà seguire la distribuzione di corpo nero:

$$\vec{J} = \left(\frac{\hbar\nu_{U,L}^3}{\pi^2 c^3}\right) \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\nu_{U,L}}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.15)$$

Uguagliando le due espressioni per \vec{J} si possono ricavare due relazioni tra i coefficienti di Einstein, infatti:

$$B_{L,U} = \frac{g_U}{g_L} B_{U,L} \quad (1.16)$$

$$A_{U,L} = \left(\frac{\hbar \nu_{U,L}^3}{\pi^2 c^3} \right) B_{U,L} \quad (1.17)$$

Per poter sfruttare le formule appena trovate, si deve ricavare un'espressione che esprima il coefficiente per l'emissione spontanea che sia indipendente dagli altri coefficienti.

1.3 Approssimazione di dipolo elettrico

Per calcolare il coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea si può usare un approccio quantistico. Infatti, la densità di probabilità è data da:

$$\rho = \Psi \Psi^* \quad (1.18)$$

dove $\Psi = \psi(x, y, z) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} Et\right)$.

Si può assumere, inoltre, che la lunghezza d'onda della radiazione sia molto maggiore della dimensione atomica ($r_a = 10^{-10} m$). Di conseguenza, il sistema elettrone-nucleo è approssimabile ad un dipolo oscillante e il termine di dipolo può essere scritto, nel caso 1D, come segue:

$$d_{U,L} = \int ex \Psi \Psi^* d\tau \quad (1.19)$$

estendendolo quindi in 3D:

$$\vec{d}_{U,L} = e \vec{R}_{U,L}(t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Et} \quad (1.20)$$

con $\vec{R}_{U,L} = \int \psi_U \vec{r} \psi_L^* d\tau$ parte radiale dell'integrale.

Tramite la formula di Larmor per l'oscillatore armonico si può calcolare la potenza media emessa come:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{64\pi^4 \nu_{U,L}^4}{3c^3} |d_{U,L}|^2 \quad (1.21)$$

Inoltre, questa è proporzionale al numero di transizioni effettuate nell'unità di tempo:

$$\langle P(t) \rangle = h\nu_{U,L} A_{U,L} \quad (1.22)$$

Uguagliando quindi la (1.21) e la (1.22) si ottiene un'espressione per il coefficiente di emissione spontanea in approssimazione di dipolo:

$$A_{U,L} = \frac{64\pi^4 \nu_{U,L}^3}{3hc^3} |d_{U,L}|^2 \quad (1.23)$$

1.4 Regole di selezione

Il valore del coefficiente di emissione spontanea $A_{U,L}$ ci indica quanto una certa transizione sia favorita o meno. Infatti, per valori di $A_{U,L} \approx 10^9 s^{-1}$ si parla di transizioni permesse, ovvero transizioni che rispettano le regole di selezione introdotte dall'approssimazione di dipolo elettrico.

Le funzioni d'onda degli stati U e L sono scomponibili in una parte radiale, che dipende da n , e in una angolare. Quest'ultima è descritta tramite armoniche sferiche che dipendono dai numeri quantici l, m . Infatti, in realtà, lo stato che un elettrone occupa all'interno di un certo livello energetico è caratterizzato da quattro numeri quantici:

- $n = 1, 2, 3, \dots$, numero quantico principale che indica il livello energetico nel quale l'elettrone si trova;
- $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, numero quantico secondario che descrive il momento angolare orbitale e ne descrive la forma;
- $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$, numero quantico magnetico che descrive l'orientamento dell'orbitale;
- $s = \pm \frac{1}{2}$, numero quantico di spin che rappresenta il momento magnetico intrinseco dell'elettrone.

Inoltre, anche il vettore posizione \vec{r} può essere riscritto in coordinate polari tramite le armoniche sferiche.

Andando quindi a studiare il prodotto scalare $\psi_U \vec{r} \psi_L^*$, ovvero la parte radiale del momento di dipolo, si possono andare a descrivere le regole di selezione per questo tipo di transizioni:

- $\Delta n = \pm 1$, si deve quindi cambiare livello energetico;
- $\Delta l = \pm 1$, deriva dal fatto che le interazioni elettromagnetiche conservano la parità;
- $\Delta m = 0, \pm 1$, poichè il fotone che interagisce con l'elettrone è un bosone di momento angolare pari a 1 e il caso $\Delta m = 0$ è quello in cui il fotone è polarizzato linearmente rispetto al campo elettrico;
- $\Delta L = 0, \pm 1$ con L momento angolare totale;
- $\Delta S = 0$ con S spin totale, poichè le transizioni di dipolo non modificano lo spin.

Andando a considerare anche la struttura fine dell'atomo, si introduce il momento angolare totale $J = L + S$. Di conseguenza anche una ulteriore regola di selezione: $\Delta J = 0, \pm 1$, tranne per transizioni da $J = 0$ a $J = 0$.

Se viene violata una di queste regole, il termine di dipolo sarà nullo. Ciò non significa, però, che la transizione non possa avvenire. Si parla infatti di transizioni di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico, anche se sono meno probabili. Esistono perciò anche transizioni che si definiscono semi-proibite ($A_{U,L} \approx 10s^{-1}$) o proibite ($A_{U,L} \approx 10^{-3}s^{-1}$). Anche questi tipi di transizioni sono ugualmente interessanti, nonostante siano di minore intensità. Ad esempio la riga a 21 cm dell'idrogeno, che è proprio una transizione proibita, è di fondamentale importanza in astrofisica.

Capitolo 2

Shift delle righe spettrali

2.1 Effetto Doppler

L'effetto Doppler è un fenomeno per il quale la frequenza osservata caratteristica di una transizione atomica varia in base al moto radiale relativo del corpo osservato. Di conseguenza, ci sarà uno shift dello spettro osservato che ci permetterà di comprendere se la sorgente si sta allontanando o avvicinando a noi.

Per fare ciò, si vanno a studiare, in laboratorio, le transizioni atomiche tipiche degli elementi che compongono il nostro oggetto e si confrontano con quelle osservate. L'intensità di questo *shift* ci permetterà di calcolare con esattezza la velocità radiale dell'oggetto.

Nella trattazione classica, si hanno due sistemi di riferimento inerziali S (dell'osservatore) e S' (dell'oggetto osservato). S' si muove radialmente con velocità v rispetto ad S . In S' viene emessa radiazione ad una certa lunghezza d'onda $\lambda_{S'}$, l'osservatore vedrà quella radiazione emessa ma ad una lunghezza d'onda differente $\lambda_S \neq \lambda_{S'}$. La formula che descrive questa differenza è data da:

$$\frac{\lambda_S - \lambda_{S'}}{\lambda_{S'}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{S'}} = \frac{v}{c} \quad (2.1)$$

con $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ velocità della luce nel vuoto.

Si vanno a distinguere, quindi, due possibili casi:

- *redshift*, la sorgente S' si allontana e la lunghezza d'onda osservata aumenta;
- *blueshift*, la sorgente S' si avvicina e la lunghezza d'onda osservata diminuisce.



Figura 2.1: Esempio di shift delle righe di assorbimento. Fonte: <https://www.astronomia.com/2007/11/12/la-legge-di-hubble-e-lespansione-cosmica/>

Ovviamente, il fatto che non si osservi nessun tipo di *shift* non significa che l'oggetto non si stia muovendo, ma semplicemente che la sua velocità non ha componente radiale.

2.1.1 Effetto Doppler relativistico

In relatività ristretta, la trattazione classica per descrivere l'effetto Doppler non risulta corretta. Infatti, la formula che descrive questo fenomeno in condizioni relativistiche ci predice anche un effetto Doppler trasversale, cosa che non si verifica a velocità basse.

La propagazione di un'onda elettromagnetica (radiazione), uscente dal nostro oggetto, è descritta, in S' , dalla formula:

$$z' = \cos 2\pi \left[\frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{\lambda'} - \nu' t' \right] \quad (2.2)$$

Questa può essere espressa analogamente nel sistema di riferimento S dell'osservatore:

$$z = \cos 2\pi \left[\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\lambda} - \nu t \right] \quad (2.3)$$

Si applichino ora le trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Raccogliendo opportunamente i termini, si va ad uguagliare l'equazione d'onda, così trovata, alla (2.3). Si ricavano tre relazioni tra i coefficienti moltiplicativi di x, y e t . Solo un risultato è rilevante per questa trattazione, ovvero:

$$\nu_S = \frac{\nu_{S'}(1 + \beta \cos \theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4)$$

dove θ è l'angolo di inclinazione con cui l'osservatore vede la radiazione.

Ovviamente questa equazione si riconduce all'effetto Doppler classico se $v \ll c$. Inoltre, come precedentemente accennato, si introduce anche un effetto trasversale dovuto alla presenza dell'angolo θ .

Si vanno infatti a distinguere due espressioni: longitudinale con $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ (caso in cui l'oggetto si avvicina o si allontana); trasversale con $\theta = 90^\circ$, in questo caso dovremmo osservare uno *shift* a frequenze inferiori (*redshift*).

2.2 Redshift cosmologico

Per *redshift* cosmologico z si intende lo *shift* dello spettro verso il rosso a causa dell'espansione dell'universo. Questa legge è basata sul fattore di scala $a(t)$, ovvero

una funzione che descrive come si espande o contrae l'universo, che si lega alla lunghezza d'onda della radiazione emessa e osservata:

$$\lambda(t_0) = \lambda(t_e) \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.5)$$

dove t_0 è il tempo in cui viene ricevuta la radiazione mentre t_e quello al quale viene emessa.

Inoltre, visto che questo fenomeno si basa sull'effetto Doppler, si definisce il *redshift* z di una sorgente come:

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} \quad (2.6)$$

Combinando la (2.5) e la (2.6), si ottiene:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.7)$$

La quantità appena ricavata è fondamentale in cosmologia poichè ci permette di indicare quanto l'universo si sia espanso nell'intervallo di tempo $t_0 - t_e$. Inoltre, si può anche conoscere l'età di un oggetto e osservare fasi evolutive dell'universo ormai concluse.

Un'altra tra le scoperte più importanti legate al *redshift* cosmologico è la legge di Hubble. Questa mette in relazione la velocità radiale di recessione delle galassie con la loro distanza dalla terra. Matematicamente è espressa come:

$$v = H_0 d \quad (2.8)$$

con d distanza dalla terra e H_0 costante di Hubble. Si stima che $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc (dove 1 Mpc \approx 3.26 milioni di anni luce).

Questa velocità può essere misurata osservando il *redshift* della luce proveniente dall'oggetto osservato: maggiore è il *redshift*, maggiore è la velocità e quindi la distanza di quest'ultimo.

In conclusione, la legge di Hubble riesce a descrivere l'espansione dell'universo e il *redshift* cosmologico ne è una manifestazione.

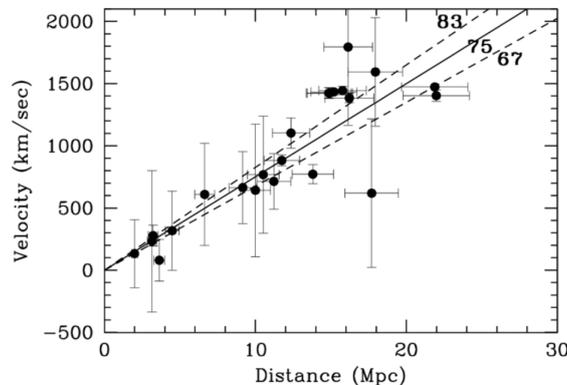


Figura 2.2: Velocità di recessione di alcune galassie in funzione della distanza. Fonte: <https://liceocuneo.it/oddenino/legge-di-hubble-per-la-1a/>

Capitolo 3

Allargamento delle righe spettrali

La funzione che descrive l'andamento della probabilità di transizione in funzione della frequenza è detta *line profile function*. Dalla trattazione matematica affrontata, ogni transizione atomica ha un'energia ben precisa e, di conseguenza, viene emesso o assorbito un fotone ad una certa frequenza. Quindi, la funzione che descrive questo fenomeno dovrebbe essere una δ di Dirac, ovvero una funzione che è nulla per tutti i valori a meno di uno, dove vale $+\infty$.

In realtà, questa δ di Dirac subisce degli allargamenti, assumendo quindi una forma diversa piccata sul valore ν_0 tipico della transizione e descritta dal profilo di Voigt.

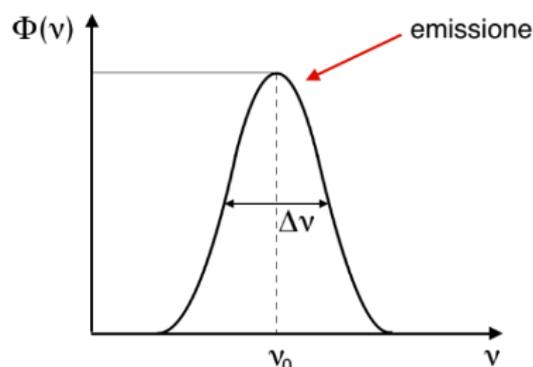


Figura 3.1: *Line profile function* in emissione. Fonte: *Dispense di Processi di radiazione e MHD*

3.1 Allargamento naturale

Il motivo principale per il quale la curva non può essere infinitamente sottile è il principio di indeterminazione di Heisenberg, nella formulazione energia-tempo.

Questo principio, che sta alla base della meccanica quantistica, ci stabilisce dei limiti nella precisione di misurazione di grandezze fisiche. Il principio di Heisenberg generalizzato prende in considerazione due generici operatori A e B , con i relativi

errori associati, ΔA e ΔB :

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2 \quad (3.1)$$

dove $[A, B] = AB - BA$, detto commutatore tra A e B , e $\langle \rangle$ rappresenta il valor medio della grandezza contenuta.

Di conseguenza, andando a calcolare il commutatore di due grandezze generiche si può ottenere la legge che descrive la loro indeterminazione. Si noti che due quantità che commutano, ovvero il cui commutatore è uguale a 0, possono essere misurate simultaneamente con precisione infinita.

Nel caso specifico della relazione energia-tempo, queste due quantità non commutano. Quindi, misurando con precisione infinita una delle due, si fa tendere a $+\infty$ l'errore dell'altra.

In particolare, il commutatore tra E e t è:

$$[E, t] = i\hbar$$

di conseguenza il principio di indeterminazione energia-tempo assume la forma:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.2)$$

Grazie ai coefficienti di Einstein si può stimare il valore di Δt , infatti il coefficiente di emissione spontanea $A_{U,L}$ è direttamente legato al tempo di vita medio di un certo stato energetico.

Quindi:

$$\Delta t = \frac{1}{A_{U,L}} \quad (3.3)$$

Inoltre, $E = h\nu$, perciò l'errore sull'energia si propaga in un errore sulla frequenza:

$$\Delta E = h\Delta\nu \quad (3.4)$$

Inserendo la (3.3) e la (3.4) nella (3.2) si ottiene:

$$\Delta E \Delta t = h\Delta\nu \frac{1}{A_{U,L}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta\nu \geq \frac{A_{U,L}}{4\pi} \quad (3.5)$$

Questa è la minima larghezza di riga permessa dalla fisica, per una certa transizione atomica. Inoltre,

- Δt piccolo $\implies \Delta A_{U,L}$ grande $\implies \Delta\nu$ grande;
- Δt grande $\implies \Delta A_{U,L}$ piccolo $\implies \Delta\nu$ piccolo.

Si deduce che più l'atomo è stabile in una certa configurazione, più sarà lungo il suo tempo di vita medio e minore sarà l'allargamento della riga che si formerà quando l'elettrone decadrà ad un livello inferiore.

La legge che descrive la *line profile function*, per questo allargamento, può essere ottenuta andando a considerare i decadimenti spontanei da uno stato U verso tutti gli stati L ad energia minore:

$$\Gamma = \sum_L A_{U,L} \quad (3.6)$$

dove Γ è la larghezza della riga.

L'energia decade proporzionalmente ad un fattore $e^{-\Gamma t}$ e la *line profile function* è data da:

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/4\pi}{(\nu_{oss} - \nu_{em})^2 + (\Gamma/4\pi)^2} \quad (3.7)$$

Quindi questo allargamento assume una forma Lorentziana.

3.2 Allargamento Doppler

Si consideri una nube di gas ferma rispetto all'osservatore. Ogni particella del gas ha un moto proprio, di conseguenza, alcune si avvicineranno mentre altre si allontaneranno. Perciò, la radiazione emessa sarà spostata verso il rosso o verso il blu, in base al moto della particella emettente.

Sia v_r la velocità radiale della particella, per effetto Doppler si ha:

$$\nu_{oss} = \nu_{em}(1 + \beta \cos\theta) = \nu_{em} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \quad (3.8)$$

con $\gamma \approx 1$.

Da cui:

$$\Delta\nu = \nu_{em} \frac{v_r}{c} \quad (3.9)$$

La forma dello spettro di riga viene quindi modificata, ma l'energia della nube di gas rimane invariata. All'equilibrio termico:

$$N(v_r)dv_r = N_0 v_r^2 \exp\left(\frac{-mv_r^2}{2kT}\right) dv_r \quad (3.10)$$

con m massa delle particelle del gas.

Inoltre, vale la relazione:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = kT \quad (3.11)$$

da cui, risolvendo per v_r :

$$v_r = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.12)$$

Sostituendo quindi nella (3.2), si ottiene:

$$\Delta\nu = \frac{\nu_{em}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.13)$$

Come si nota dall'equazione (3.13), la dispersione di frequenza è proporzionale alla \sqrt{T} e, com'è intuitivo pensare, una nube a temperatura maggiore genera un allargamento maggiore. Questo perchè le particelle contenute nel gas posseggono più energia.

La legge che descrive questo tipo di allargamento, ovvero la *line profile function*, è:

$$\Phi(\nu) = (\Delta\nu\sqrt{\pi})^{-1} \exp\left(\frac{-(\nu_{oss} - \nu_{em})^2}{(\Delta\nu)^2}\right) \quad (3.14)$$

Come si può notare, questo fenomeno provoca un allargamento di tipo gaussiano.

3.3 Allargamento collisionale

Rispetto agli altri tipi di allargamento, questo effetto è marginale ed è causato dall'urto delle particelle che compongono il gas. In particolare, è dovuto ad una variazione di fase della radiazione emessa quando l'atomo emettente subisce delle collisioni da parte degli altri.

Ovviamente, un gas le cui particelle si urtano di più eserciterà una pressione maggiore, di conseguenza, si può legare questo tipo di allargamento alla pressione del gas: pressione maggiore, *line profile function* più larga e viceversa.

Questo profilo è descrivibile con la stessa Lorentziana ottenuta per l'allargamento naturale, alla quale vanno applicate, però, delle correzioni. Infatti:

$$\Gamma' = \Gamma + 2\nu_{coll} \quad (3.15)$$

con ν_{coll} frequenza delle collisioni che l'atomo emettente subisce, nell'unità di tempo.

Da qui si nota come $\Gamma' \propto P$, con P pressione interna del gas.

La *line profile function* può essere quindi descritta come segue:

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma'/4\pi}{(\nu_{oss} - \nu_{em})^2 + (\Gamma'/4\pi)^2} \quad (3.16)$$

Questo effetto risulta essere molto meno incisivo degli altri tipi di allargamento, infatti è spesso trascurabile. Diventa importante lo studio dell'allargamento collisionale in ambienti molto densi, per esempio le atmosfere stellari con un'alta densità superficiale o le nane bianche.

3.4 Profilo di Voigt

Quello che si ottiene andando a considerare tutti i tipi di allargamento è detto profilo di Voigt, anche se non esiste un'espressione analitica semplice che lo descrive.

Infatti, prima si ricava il *damping profile* (somma dei contributi di allargamento naturale e collisionale) e poi si fa la convoluzione tra questo e il profilo Doppler gaussiano.

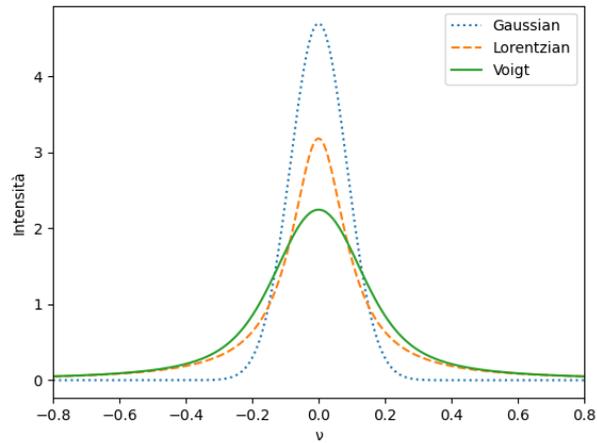


Figura 3.2: Profilo di Voigt. Fonte: *Creata dall'autore usando Python*

Il centro della riga (regione $|\nu| < 0.2$) è dominato dal profilo gaussiano, mentre le ali (regione $|\nu| > 0.2$) sono dominate dal profilo Lorentziano. Questo è dovuto alla rapida decrescita esponenziale della gaussiana che descrive l'allargamento Doppler.

L'area sottesa al profilo di riga è detta intensità di riga. Rappresenta, infatti, la quantità totale di radiazione assorbita o emessa per quella determinata transizione.

Capitolo 4

Appendice 0 - Applicazioni astrofisiche

4.1 Quasar

I quasar, *quasi-stellar radio objects*, furono scoperti alla fine degli anni '50 proprio grazie allo studio del loro redshift. Infatti, quando vennero osservati per la prima volta apparivano come degli oggetti di tipo stellare, piccoli, molto luminosi e con delle forti righe in emissione. Lo spettro che si osservava, però, non era affatto simile agli altri già conosciuti e non si riusciva a capire da cosa fossero generate queste righe così intense.

Negli anni successivi, si intuì che gli spettri dei quasar erano incomprensibili poichè ad alto *redshift*. Quindi, in realtà, questi erano gli oggetti più lontani e luminosi mai osservati.

Ad oggi sappiamo che questi sono dei buchi neri supermassicci, circondati da dischi di materia che cade al loro interno. Infatti, entro i tre raggi di Schwarzschild, la materia precipita fino a raggiungere velocità relativistiche e circa il 10/20% della propria massa si traduce in radiazione emessa.

Il meccanismo di emissione è la bremsstrahlung, infatti il gas caldo in caduta verso il buco nero emette principalmente a piccole lunghezze d'onda, con un cut-off esponenziale circa nella banda UV.

4.2 Riga a 21 cm

La riga a 21 cm dell'Idrogeno è una delle righe spettrali più importanti in astrofisica. Il livello fondamentale dell'atomo si splitta in due sottolivelli dove elettrone e protone hanno spin paralleli o anti-paralleli (struttura iperfine).

La differenza energetica tra questi due livelli è di $5,9 \cdot 10^{-6}$ eV, che corrisponde ad una frequenza $\nu = 1420$ MHz o ad una lunghezza d'onda $\lambda = 21$ cm, da qui il nome associato a questa riga.

Il coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea, associato a questa transizione, è $A_{2,1} = 2,9 \cdot 10^{-15} s^{-1}$ ed ha un tempo di vita medio di circa 10^7 anni. Infatti, questa è una transizione proibita in approssimazione di dipolo, ma, vista l'enorme

quantità di atomi di Idrogeno neutro nei dischi delle galassie a spirale, si osserva lo stesso.

Questa riga è fondamentale in astronomia, poichè la radiazione così emessa vede il mezzo interstellare come otticamente sottile. Di conseguenza, questa sarà shiftata in base alla velocità della regione osservata, consentendoci di studiare la dinamica delle galassie.

Si può quindi mappare la velocità di rotazione di una galassia a spirale in funzione della distanza dal centro galattico: questa è detta curva di rotazione. Si notò che la decrescita kepleriana attesa allontanandosi dal disco di stelle non si osservava, ma la curva rimaneva pressochè costante. Questa è una delle prove dell'esistenza della materia oscura, necessaria per spiegare questa differenza tra le osservazioni e la teoria.

Bibliografia

- [1] H. KARTTUNEN, P. KRÖGER, H. OJA, M. POUTANEN, and K. J. DONNER, *Fundamental astronomy*, Springer, 1987.
- [2] R. RESNICK, *Introduzione alla relatività ristretta*, Casa Editrice Ambrosiana, 2022.
- [3] D. J. GRIFFITHS and D. F. SCHROETER, *Introduction to quantum mechanics*, Cambridge University Press, 2018.
- [4] D. DALLACASA, *Appunti e dispense di Processi di radiazione e MHD*, A.A 2023/2024.
- [5] L. PASQUINI, *Appunti e dispense di Struttura della materia*, A.A 2023/2024.
- [6] F. RAVANINI, *Appunti e dispense di Istituzioni di fisica teorica*, A.A 2023/2024.